

Espais vectorials

Miquel Àngel Perelló

4 de juliol de 2026

Índex

Introducció	iv
1 Teoria	1
1.1 Cap al concepte de vector	1
1.2 Concepte d'espai vectorial	1
1.3 Propiedades elementals	5
1.4 Producte d'espais vectorials	6
1.5 Subespais vectorials	7
1.6 Intersecció de subespais vectorials	10
1.7 Subespai generat per un subconjunt	11
1.8 Suma de subespais vectorials	12
1.9 Combinacions lineals	17
1.10 Clausura lineal	19
1.11 Sistemes equivalents	22
1.12 Dependència i independència lineal	24
1.13 Bases d'un espai vectorial de dimensió finita	30
1.14 Dimensió d'un subespai vectorial	34
1.15 Espai vectorial quocient	37
1.16 Rang d'un sistema de vectors	40
1.17 Isomorfismes d'espais vectorials	43
1.18 Canvi de coordenades	48
2 Resum	53
2.1 Conceptes clau	53
2.2 Fórmules per recordar	53
2.3 Errors freqüents	54
3 Pràctica	55
3.1 Concepte d'espai vectorial	55
3.2 Subespais vectorials	61
3.3 Intersecció de subespais vectorials	64

3.4	Subespai generat per un conjunt	65
3.5	Suma de subespais vectorials	66
3.6	Combinacions lineals	67
3.7	Clausura lineal	68
3.8	Sistemes equivalents	72
3.9	Dependència i independència lineal	72
3.10	Bases d'un espai vectorial de dimensió finita	74
3.11	Dimensió d'un subespai vectorial	76
3.12	Espai vectorial quocient	78
3.13	Rang d'un sistema de vectors	79
3.14	Producte d'espais vectorials. Isomorfismes d'espais vectorials	81
3.15	Canvi de coordenades	82
4	Exercicis proposats	84
4.1	Pràctica amb ordinador	87
5	Tests interactius	89

Prefaci

Aquests apunts formen la primera unitat d'**Àlgebra Lineal** d'**aprendes** dedicada als **espais vectorials**. La unitat introdueix el concepte abstracte d'espai vectorial, els subespais, els sistemes generadors, la independència lineal, les bases, la dimensió i les operacions bàsiques amb subespais.

Introducció

Els espais vectorials permeten estudiar amb un mateix llenguatge objectes molt diversos: vectors geomètrics, matrius, polinomis, funcions o successions.

- identificar espais vectorials i subespais;
- treballar amb combinacions lineals i sistemes generadors;
- decidir la dependència o independència lineal d'una família de vectors;
- calcular bases i dimensions;
- estudiar la suma, la intersecció i la suma directa de subespais.

1 Teoria

1.1 Cap al concepte de vector

La paraula **vector** és coneguda per tothom en geometria. Al batxillerat s'estudien els vectors de la geometria plana i de l'espai. Tanmateix, en matemàtiques hi ha moltes altres classes d'objectes que es comporten de la mateixa manera; això vol dir que comparteixen unes mateixes propietats bàsiques. Descobrir aquestes propietats és el primer pas cap a la **generalització**.

El segon pas és la **axiomatització**: triar, entre totes les propietats observades, aquelles a partir de les quals es poden deduir totes les altres. Aquestes propietats fonamentals s'anomenen **axiomes**. Qualsevol classe d'objectes que satisfaci aquests axiomes es dirà que es comporta com els vectors.

El darrer pas és desenvolupar la **teoria matemàtica** a partir dels axiomes triats. Els resultats que s'obtenen d'aquesta teoria constitueixen les propietats generals dels vectors. Per tant, qualsevol classe d'objectes que es comporti com els vectors tindrà aquestes propietats.

Segons aquesta teoria, anomenarem **vector** qualsevol element d'un espai vectorial. Cal, doncs, definir el concepte d'espai vectorial.

1.2 Concepte d'espai vectorial

Per saber si un conjunt és un espai vectorial, cal comprovar que s'hi poden definir dues operacions. La primera és interna: la suma de dos elements del conjunt torna a ser un element del conjunt. La segona és externa: el producte d'un escalar d'un cos commutatiu per un element del conjunt torna a ser un element del conjunt. A més, aquestes dues operacions han de satisfer unes propietats determinades, anomenades axiomes.

Definició 1.1. Donat un cos commutatiu $\mathbb{K}$, sigui E un conjunt arbitrari d'objectes sobre els quals es defineixen dues operacions: l'addició i la multiplicació per escalars, és a dir, per elements de $\mathbb{K}$. Per **addició** entenem una regla que associa a cada parella d'objectes $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$ de E un element $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, anomenat **suma** de $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$. Per **multiplicació per escalars** entenem una regla que associa a cada escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ i a cada objecte $\mathbf{u}$ de E un element $\lambda\mathbf{u}$, anomenat **producte** de $\mathbf{u}$ per l'escalar λ . Si els axiomes següents són satisfets per tots els objectes $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in E$ i tots els escalars $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, aleshores E rep el nom d'**espai vectorial**.

sobre $\mathbb{K}$, i els objectes de E s'anomenen **vectors**.

1. Si $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$ són objectes de E , aleshores $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ és a E ; és a dir, l'addició és una operació interna.
2. $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$; l'addició és associativa.
3. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$; l'addició és commutativa.
4. Existeix un objecte $\mathbf{0}$ de E , anomenat **vector zero**, tal que $\mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$; l'addició té element neutre.
5. Per a cada $\mathbf{u}$ de E , existeix un objecte $-\mathbf{u}$ de E , anomenat **oposat** de $\mathbf{u}$, tal que $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = (-\mathbf{u}) + \mathbf{u} = \mathbf{0}$; l'addició té element simètric.
6. Si $\lambda \in \mathbb{K}$ i $\mathbf{u} \in E$, aleshores $\lambda\mathbf{u} \in E$; és a dir, la multiplicació per escalars és una operació externa i el conjunt d'operadors és $\mathbb{K}$.
7. $\lambda(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \lambda\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v}$.
8. $(\lambda + \mu)\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{u}$.
9. $\lambda(\mu\mathbf{u}) = (\lambda\mu)\mathbf{u}$.
10. $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$, on 1 és la unitat del cos $\mathbb{K}$.

Observació 1.1. Fem les observacions importants següents:

1. En la teoria d'espais vectorials, el cos $\mathbb{K}$ es fixa d'una vegada per sempre i s'anomena **cos base**. Els seus elements s'anomenen **escalars** i es designen habitualment amb lletres gregues.
2. Els elements dels espais vectorials s'anomenen **vectors** i es designen habitualment amb lletres minúscules en negreta. Per distingir el conjunt de la seva estructura d'espai vectorial, utilitzarem la notació que convingui en cada context.
3. En realitat, la distinció entre escalars i vectors no té cap sentit matemàtic absolut: com veurem més avall, els escalars també es poden comportar com a vectors.
4. S'ha utilitzat el mateix signe $+$ per denotar dues operacions diferents: l'addició en $\mathbb{K}$ i l'addició en l'espai vectorial. Això no dona lloc a confusió si ens fixem en els elements que uneix el signe $+$. El mateix es pot dir de la multiplicació en $\mathbb{K}$ i de la multiplicació per escalars.
5. El conjunt E , dotat de l'addició, té estructura de **grup commutatiu o abelià** quan satisfà els axiomes 1–5. En aquesta secció suposa que el lector coneix les propietats elementals de la teoria de grups.
6. En particular, un espai vectorial sobre el cos $\mathbb{R}$ dels nombres reals s'anomena **espai vectorial real**, i un espai vectorial sobre el cos $\mathbb{C}$ dels nombres complexos s'anomena **espai vectorial complex**.
7. Cal tenir present que, en la definició d'espai vectorial, no s'especifica la naturalesa dels objectes que anomenem vectors ni la de les operacions que anomenem

addició i multiplicació per escalars. Qualsevol classe d'objectes pot servir com a vectors, sempre que satisfaci els axiomes dels espais vectorials. Els exemples següents mostren una part de la diversitat d'espais vectorials possibles.

Exemple 1.1. Tot cos commutatiu és un espai vectorial sobre si mateix, el que mostra que els “escalars” són en aquest cas també “vectors”; $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$ són espais vectorials sobre si mateix.

Exemple 1.2. El cos dels nombres reals $\mathbb{R}$ és un espai vectorial sobre el cos $\mathbb{Q}$ dels nombres racionals; $\sqrt{2}$, π , $5\sqrt{2} + \pi/3$, etc., són vectors d'aquest espai.

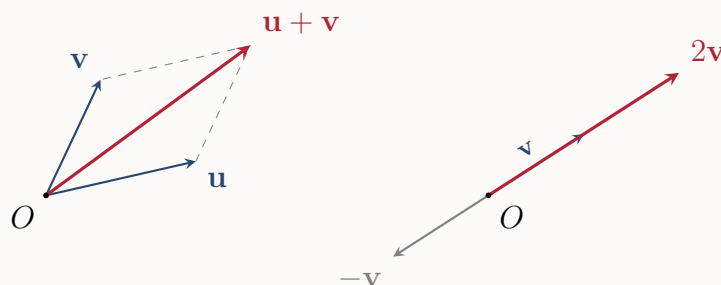
Exemple 1.3. Prenem $E = \mathbb{C}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ i les operacions

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$\lambda(a + bi) = \lambda a + \lambda bi$$

on $a, b, c, d, \lambda \in \mathbb{R}$, aleshores $\mathbb{C}$ és un espai vectorial real; és també un espai vectorial sobre si mateix. És important saber que aquestes dues estructures són diferents.

Exemple 1.4. Prenem $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ i com E el conjunt dels vectors de origen donat O de l'espai ordinari. Definim la suma de dos vectors per la regla del paral·lelogram i el producte d'un nombre real λ per un vector $\mathbf{v}$ com el vector obtingut aplicant a $\mathbf{v}$ la homotècia de centre O i raó λ . D'aquesta manera s'obté un espai vectorial real. En aquest exemple està l'origen de la noció general d'espai vectorial i explica a més l'ús de la paraula “vector” per designar els seus elements.



La suma per la regla del paral·lelogram i el producte per un escalar com a homotècia de centre O .

Abans de començar, val la pena preguntar-se on són els espais vectorials avui. La resposta és: pertot arreu on hi hagi informació que es pugui sumar i escalar. Una imatge digital en escala de grisos de 1000×1000 píxels és un vector de $\mathbb{R}^{1000000}$, i operacions tan quotidianes com apujar la brillantor o fondre dues imatges són, exactament, el producte per un escalar i la suma de vectors. Els missatges que viatgen per la xarxa es protegeixen amb codis correctors d'errors, que són subespais vectorials de $(\mathbb{Z}_2)^n$; per això en aquesta unitat treballarem també sobre cossos finits. Les solucions d'un sistema d'equacions lineals homogeni, o d'una equació diferencial lineal homogènia, formen un espai vectorial: trobar-ne una base és resoldre'ls tots de cop. I cada fotograma d'un videojoc en tres dimensions es calcula aplicant canvis de base com els que estudiarem al final del capítol. El llenguatge que introduïm a continuació és, doncs, el llenguatge comú de tots aquests problemes.

Exemple 1.5. S'anomena **vector d'ordre n sobre $\mathbb{K}$** a tota n -tupla ordenada $(x_1, \dots, x_n)$ d'elements del cos commutatiu $\mathbb{K}$. Els elements x_i s'anomenen **components** del vector. L'element x_i rep aleshores el nom de component i -èsima del vector. Dos vectors d'ordre n són iguals si i només si els seus components són iguals. Distingirem entre **vector fila**

$$(x_1 \quad \cdots \quad x_n)$$

i **vector columna**

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

És fàcil dotar el conjunt d'aquests vectors d'estructura d'espai vectorial sobre $\mathbb{K}$. L'addició es defineix per

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$$

L'element neutre és $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$ i l'oposat de $(x_1, \dots, x_n)$ és $(-x_1, \dots, -x_n)$. La multiplicació per un escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ es defineix per

$$\lambda(x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

És immediat comprovar que es compleixen tots els axiomes d'espai vectorial, ja que es redueixen a les propietats elementals entre elements del cos $\mathbb{K}$. Aquest espai vectorial es denota per $\mathbb{K}^n$. Aquest exemple té el seu origen en la geometria analítica, en representar un vector pels seus components en els eixos de coordenades.

Exemple 1.6. El conjunt

$$\mathbb{R}_n[x] = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n : a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}\}$$

dels polinomis de grau com a màxim n amb coeficients reals i les operacions

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n) + (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n) =$$

$$(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \dots + (a_n + b_n)x^n$$

$$\lambda(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n) = \lambda a_0 + \lambda a_1x + \lambda a_2x^2 + \dots + \lambda a_nx^n$$

formen un espai vectorial real.

Exemple 1.7. El conjunt $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$ de les funcions reals de variable real i les operacions $(f, g) \mapsto f + g$ i $(\lambda, f) \mapsto \lambda f$ definides com segueix

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

formen un espai vectorial real.

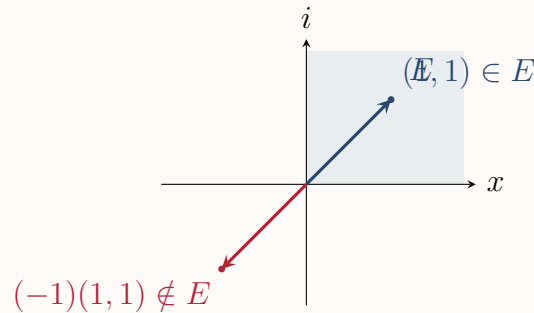
Exemple 1.8. El conjunt $\mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$ de les matrius d'ordre $n \times m$ amb coeficients reals juntament amb les operacions d'addició matricial i multiplicació escalar:

$$(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$$

$$\lambda(a_{ij}) = (\lambda a_{ij})$$

on $1 \leq i \leq n$ i $1 \leq j \leq m$, formen un espai vectorial real.

Exemple 1.9. El conjunt E de tots els punts del pla que es troben en el primer quadrant no és un espai vectorial real. Per veure-ho, observeu que el punt de coordenades $(1, 1)$ està en E , però $(-1)(1, 1) = (-1, -1)$ no hi és.



El primer quadrant no és tancat pel producte per escalars negatius.

Exemple 1.10. El conjunt dels polinomis de segon grau amb coeficients reals no és un espai vectorial real. Per veure-ho, considerem els següents polinomis de segon grau:

$$p(x) = x^2 \quad \text{i} \quad q(x) = -x^2 + x + 1$$

Aleshores, la seva suma no és un polinomi de segon grau, ja que

$$p(x) + q(x) = x + 1$$

Observació 1.2. Seria interessant que el lector provés tots els axiomes dels espais vectorials en els exemples anteriors; és fàcil, encara que una mica llarg.

1.3 Propiedades elementals

Com a conseqüència de la definició, s'obté els següents resultats.

Teorema 1.1. Per a qualsevol $\mathbf{u}$ de E i λ de $\mathbb{K}$, es compleix:

1. $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$
2. $\lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}$
3. $\lambda\mathbf{u} = \mathbf{0}$ implica $\lambda = 0$ o $\mathbf{u} = \mathbf{0}$
4. $(-1)\mathbf{u} = -\mathbf{u}$

Demostració. (1.) En efecte, aplicant el axioma 8, es té

$$0\mathbf{u} = (0 + 0)\mathbf{u} = 0\mathbf{u} + 0\mathbf{u}$$

i, d'aquí, sumant a ambdós membres l'oposat de $0\mathbf{u}$ (cancel·lació), es dedueix $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

(2.) En efecte, aplicant els axiomes 4 i 7, es té

$$\lambda \mathbf{0} = \lambda(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = \lambda \mathbf{0} + \lambda \mathbf{0}$$

i, d'aquí, per la mateixa raó de abans, es dedueix $\lambda \mathbf{0} = \mathbf{0}$.

(3.) En efecte, si $\lambda \neq 0$, λ és invertible en $\mathbb{K}$. Aleshores, aplicant el axioma 9 i l'apartat anterior, es té

$$\mathbf{u} = 1\mathbf{u} = (\lambda^{-1}\lambda)\mathbf{u} = \lambda^{-1}(\lambda\mathbf{u}) = \lambda^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

i d'aquí, es dedueix el que volíem demostrar.

(4.) En efecte, aplicant els axiomes 10 i 8, i l'apartat 1, es té

$$\mathbf{u} + (-1)\mathbf{u} = 1\mathbf{u} + (-1)\mathbf{u} = (1 + (-1))\mathbf{u} = 0\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

d'on, per la unicitat de l'oposat de $\mathbf{u}$, es té el que volíem provar. ■

1.4 Producte d'espais vectorials

El procediment que ens ha permès definir $\mathbb{K}^n$ a partir de $\mathbb{K}$ pot generalitzar-se per a construir nous espais a partir de espais coneguts.

Siguin E_1 i E_2 dos espais vectorials sobre el mateix cos commutatiu $\mathbb{K}$. Considerem el conjunt producte $E_1 \times E_2$ i les dues operacions següents:

$$\begin{aligned}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) + (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) &= (\mathbf{u}_1 + \mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2 + \mathbf{v}_2) \\ \lambda(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2) &= (\lambda\mathbf{u}_1, \lambda\mathbf{u}_2)\end{aligned}$$

Aleshores amb aquests dades tenim un espai vectorial sobre $\mathbb{K}$ que s'anomena **espai vectorial producte** $E_1 \times E_2$.

De la mateixa manera es defineix el producte de n espais vectorials $E_1, \dots, E_n$ sobre un mateix cos $\mathbb{K}$. Les operacions són en aquest cas

$$\begin{aligned}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n) + (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n) &= (\mathbf{u}_1 + \mathbf{v}_1, \mathbf{u}_2 + \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{u}_n + \mathbf{v}_n) \\ \lambda(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n) &= (\lambda\mathbf{u}_1, \lambda\mathbf{u}_2, \dots, \lambda\mathbf{u}_n)\end{aligned}$$

que defineixen l'espai vectorial producte $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$.

Observació 1.3. De nou suggerim que el lector faci la prova de les dos afirmacions anteriors.

Sabem que $\mathbb{K}$ és un espai vectorial sobre si mateix, aleshores, prenent $E_1 = E_2 = \dots = E_n = \mathbb{K}$, es té l'espai vectorial $\mathbb{K}^n$ sobre $\mathbb{K}$. Aquest espai vectorial és el mateix que el de l'exemple 5.

Exemple 1.11. $\mathbb{R}^n$ és un espai vectorial real.

Exemple 1.12. $\mathbb{C}^n$ és un espai vectorial tanto real com complex.

1.5 Subespais vectorials

Si E és un espai vectorial sobre $\mathbb{K}$, aleshores certs subconjunts de E formen per si mateixos espais vectorials sobre el mateix cos, juntament amb l'addició i multiplicació per escalars definides en E . En aquesta secció s'estudien amb detall aquests subconjunts.

Definició 1.2. Donat un espai vectorial E sobre $\mathbb{K}$, s'anomena **subespai** vectorial de E a tot subconjunt de E que és també un espai vectorial amb les mateixes operacions d'addició i multiplicació per escalars definides en E .

Teorema 1.2. *Perquè un subconjunt S no buit de E sigui un subespai vectorial de E és necessari i suficient que es compleixin les dues condicions següents:*

1. per a tot $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in S$, $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in S$
2. per a tot $\mathbf{u} \in S$ i $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \mathbf{u} \in S$

Demostració. Les dues condicions són suficients. En efecte, és clar que $+$ és associativa i commutativa en S pel fet de ser-ho en E . A més, si $\mathbf{u} \in S$ i $-1 \in \mathbb{K}$, aleshores $(-1)\mathbf{u} = -\mathbf{u} \in S$ i a més $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0} \in S$. D'aquesta manera S amb la suma és grup commutatiu. Es comprova en seguida que es compleixen els altres axiomes.

Les dues condicions són necessàries. En efecte, si S és un espai vectorial amb les mateixes operacions definides en E es compleixen trivialment les dues condicions (són els axiomes 1 i 6). ■

Teorema 1.3. *Un subconjunt S no buit de E és un subespai vectorial de E si i només si, per a tot $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in S$ i tot $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, es compleix que*

$$\lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{v} \in S$$

Demostració. La condició és suficient. En efecte, si $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in S$, com que $1, -1 \in \mathbb{K}$, aleshores

$$1\mathbf{u} + 1\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{v} \in S$$

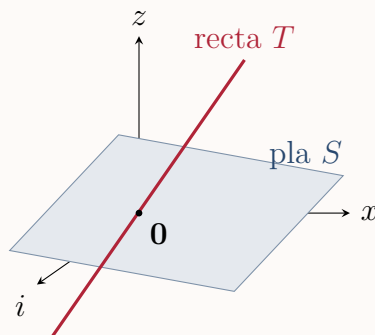
i

$$1\mathbf{u} + (-1)\mathbf{u} = \mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0} \in S$$

D'aquesta última relació es dedueix que si $\lambda \in \mathbb{K}$, aleshores

$$\lambda \mathbf{u} + 0 = \lambda \mathbf{u} \in S$$

Per tant, pel teorema anterior, es dedueix que S és un subespai vectorial de E . La condició és necessària. Si S és un subespai vectorial és evident que es satisfà la condició indicada. ■



A l'espai ordinari, els subespais propis no trivialssón les rectes i els plans que passen per l'origen.

Observació 1.4. Fem les observacions següents:

1. Tot espai vectorial E té almenys dos subespais. El propi E és un subespai i el conjunt $\{0\}$ és altre subespai anomenat subespai zero; respecte de la inclusió de conjunts, podem afirmar que el primer és el més gran de tots els subespais de E , i el més petit, és el segon. Tot subespai diferent d'aquests dos s'anomena subespai vectorial **propi** de E .
2. Distingirem la estructura d'espai vectorial d'un subconjunt S que és subespai vectorial de E per S .

Exemple 1.13. En l'espai vectorial real E dels vectors d'origen O de l'espai ordinari, es té dues classes de subespais vectorials (a banda de $\{0\}$ i del propi E): (a) el conjunt dels vectors d'origen O situats sobre una recta que passa per O , i (b) el conjunt dels vectors d'origen O situats sobre un pla que passa per O . Observeu que no hi ha cap altre subespai vectorial de E més que els que acabem de descriure.

Exemple 1.14. El conjunt dels nombres reals $\mathbb{R}$ és un subespai vectorial de $\mathbb{C}$ considerat com a espai vectorial real.

Exemple 1.15. Demostreu que el conjunt S de les matrius quadrades d'ordre 2 que tenen zeros en la diagonal principal és un subespai de l'espai vectorial real de totes les matrius quadrades d'ordre 2 amb coeficients reals.

Solució. És clar que $S \neq \emptyset$. Siguin

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} \\ b_{21} & 0 \end{pmatrix}$$

dues matrius qualssevol de S i λ un escalar qualsevol. Aleshores

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & 0 \end{pmatrix}$$

i

$$\lambda A = \begin{pmatrix} 0 & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & 0 \end{pmatrix}$$

Debido a que $A + B$ i λA tenen zeros en la diagonal principal, están en S . Per consegüent, S és un subespai vectorial.

□

Exemple 1.16. Sigui n un nombre natural i suposem que S consta de la funció constant igual 0 i de totes les funcions polinòmiques de grau com a sumo n ; és a dir, totes les funcions reals de variable real expressables en la forma

$$p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$$

on $a_0, a_1, \dots, a_n$ són nombres reals. Demostreu que S és un subespai de l'espai vectorial real de totes les funcions reals de variable real.

Solució. És clar que $S \neq \emptyset$. Siguin

$$p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$$

i

$$q(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n$$

Aleshores,

$$\begin{aligned}(p+q)(x) &= p(x) + q(x) = \\ &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}(\lambda p)(x) &= \lambda p(x) = \\ &= (\lambda a_0) + (\lambda a_1)x + \cdots + (\lambda a_n)x^n\end{aligned}$$

tenen la forma adequada per afirmar que $p+q$ i λp estan en S . Per consegüent, S és un subespai vectorial. □

Exemple 1.17. Recordeu que si f i g són funcions contínues i λ és una constant real, aleshores $f+g$ i λf són funcions contínues. Se concluye, doncs, que el conjunt de totes les funcions contínues és un subespai de l'espai vectorial real de totes les funcions reals de variable real.

Exemple 1.18. Considerem un sistema lineal de m equacions amb n incògnites:

$$\left. \begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right\}$$

o bé, en notació matricial, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, essent

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

i

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Es diu que un vector columna de $\mathbb{R}^n$

$$\mathbf{s} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}$$

és un vector solució del sistema si $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \dots, x_n = s_n$ és una solució de tal sistema. Demostreu que el conjunt de vectors solució d'un sistema homogeni és un subespai de $\mathbb{R}^n$. Un sistema lineal s'anomena homogeni si tots els seus termes independents són nuls, és a dir, $b_1 = \dots = b_m = 0$.

Solució. Sigui $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ un sistema lineal homogeni de m equacions amb n incògnites, S el conjunt de vectors solució, i $\mathbf{s}$ i $\mathbf{t}$ vectors de S . Com que $\mathbf{s}$ i $\mathbf{t}$ són vectors solució del sistema, es té

$$A\mathbf{s} = \mathbf{0} \quad \text{i} \quad A\mathbf{t} = \mathbf{0}$$

Per tant,

$$A(\mathbf{s} + \mathbf{t}) = A\mathbf{s} + A\mathbf{t} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

i

$$A(\lambda\mathbf{s}) = \lambda(A\mathbf{s}) = \lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

De on, $\mathbf{s} + \mathbf{t}$ i $\lambda\mathbf{s}$ satisfan l'equació $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Per tant, $\mathbf{s} + \mathbf{t}$ i $\lambda\mathbf{s}$ són vectors solució i, en conseqüència, S és un subespai vectorial que és habitual denominar-lo subespai solució del sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

□

1.6 Intersecció de subespais vectorials

Teorema 1.4. La intersecció $S \cap T$ de dos subespais qualssevol S i T d'un espai vectorial E és també un subespai de E .

Demostració. La intersecció $S \cap T$ es defineix com el conjunt de tots els elements que pertanyen simultàniament a S i T . Si $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in S \cap T$, aleshores $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in S$ i $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in T$. Com que tots dos són subespais, es té $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in S$ i $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in T$ i per tant $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in S \cap T$. Anàlogament, tot múltiple escalar $\lambda\mathbf{u}$ aplestarà en $S \cap T$ sempre que hi estigui $\mathbf{u}$.

■

Observació 1.5. Fem les observacions següents:

1. Donats dos subespais S i T de E , $S \cap T$ és el subespai més gran contingut en tots dos.
2. En general, si $\mathcal{F}$ és una família qualsevol de subespais vectorials de E , es demostra de la mateixa manera que

$$\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$$

és també un subespai vectorial de E .

Exemple 1.19. Determineu la intersecció dels subespais vectorials

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + z = 0\}$$

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\}$$

de $\mathbb{R}^3$.

Solució. Observeu que S i T són subespais vectorials de $\mathbb{R}^3$ perquè tots dos estan definits per equacions lineals homogènies. Qualsevol vector de S és solució de l'equació lineal

$$x - 2y + z = 0$$

De la mateixa manera, qualsevol vector de T és solució de l'equació lineal

$$x = 0$$

Aleshores, qualsevol vector $(x, y, z) \in S \cap T$ ha de ser solució del sistema

$$\left. \begin{array}{l} x - 2y + z = 0 \\ x = 0 \end{array} \right\}$$

és a dir,

$$S \cap T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -2y + z = 0 \text{ i } x = 0\}$$

□

1.7 Subespai generat per un subconjunt

Definició 1.3. Donat un subconjunt no buit A de E , s'anomena **subespai generat** per A al més petit dels subespais vectorials de E que contenen A . Denotem per $\langle A \rangle$ el subespai generat per A .

Observació 1.6. Fem les observacions següents:

1. Dit d'una altra manera, $\langle A \rangle$ és el subconjunt de E que compleix:
 - (a) $\langle A \rangle$ és un subespai vectorial de E
 - (b) $A \subset \langle A \rangle$

- (c) Si S és un subespai vectorial de E tal que $A \subset S$, aleshores ha de complir-se que $\langle A \rangle \subset S$.
2. És evident que si S és un subespai vectorial de E , aleshores el subespai generat per S és el mateix S .

Teorema 1.5. *Donat un subconjunt no buit A de E , es compleix*

$$\langle A \rangle = \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$$

on $\mathcal{F}$ és la família (no buida, ja que E pertany a la família) de tots els subespais vectorials de E contenen A .

Demostració. En efecte, si $\mathcal{F}$ és la família de tots els subespais de E que contenen A , aleshores és clar que

$$\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F$$

verifica les tres condicions indicades en la darrera observació. ■

Exemple 1.20. Demostreu que si $\mathbf{v}$ és un vector de E i $A = \{\mathbf{v}\}$, aleshores $\langle A \rangle = \{\lambda \mathbf{v} : \lambda \in \mathbb{K}\}$.

Solució. El conjunt $\{\lambda \mathbf{v} : \lambda \in \mathbb{K}\}$ és un subespai de E , ja que

$$(\lambda \mathbf{v}) + (\mu \mathbf{v}) = (\lambda + \mu) \mathbf{v}$$

i

$$\mu(\lambda \mathbf{v}) = (\mu\lambda) \mathbf{v}$$

A més, $\mathbf{v}$ és en aquest conjunt, ja que

$$\mathbf{v} = 1\mathbf{v}$$

Finalment, és el subespai més petit que conté A per construcció. □

1.8 Suma de subespais vectorials

Definició 1.4. Donats dos subespais vectorials S i T de E , s'anomena subespai **suma** de S i T denotat per $S + T$ el subespai vectorial generat pel conjunt $S \cup T$. En símbols

$$S + T = \langle S \cup T \rangle$$

Teorema 1.6. *Donats dos subespais vectorials S i T de E , aleshores el subespai suma compleix*

$$S + T = \{\mathbf{s} + \mathbf{t} : \mathbf{s} \in S, \mathbf{t} \in T\}$$

Demostració. En efecte, si prenem dos elements qualssevol d'aquesta forma $\mathbf{s}_1 + \mathbf{t}_1$ i $\mathbf{s}_2 + \mathbf{t}_2$, aleshores es té

$$(\mathbf{s}_1 + \mathbf{t}_1) + (\mathbf{s}_2 + \mathbf{t}_2) = \mathbf{s}_1 + (\mathbf{t}_1 + \mathbf{s}_2) + \mathbf{t}_2 = (\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2) + (\mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2)$$

que és un altre element de la mateixa forma. A més, també tenim

$$\lambda(\mathbf{s} + \mathbf{t}) = \lambda\mathbf{s} + \lambda\mathbf{t}$$

Per tant, el conjunt $\{\mathbf{s} + \mathbf{t} : \mathbf{s} \in S, \mathbf{t} \in T\}$ és un subespai de E . Per d'altra banda, de la manera com s'ha definit és clar que és el més petit subespai que conté S i T , i en conseqüència tenim el que volíem demostrar. ■

Observació 1.7. Fem les observacions importants següents:

1. En general, $S \cup T$ no és un subespai vectorial de E . Per provar-ho, considerem els subespais vectorials $S = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ i $T = \{(0, y) : y \in \mathbb{R}\}$ de $\mathbb{R}^2$. La suma $(1, 0) + (0, 1) = (1, 1)$ no pertany a S ni a T .
2. Donats dos subespais S i T de E , $S + T$ és el subespai més petit que conté tots dos.

Observació 1.8. Un vector $\mathbf{v}$ de $S + T$ pot, en general, descompondre's de diverses maneres en la forma $\mathbf{s} + \mathbf{t}$. Si

$$\mathbf{v} = \mathbf{s}_1 + \mathbf{t}_1 = \mathbf{s}_2 + \mathbf{t}_2$$

aleshores

$$\mathbf{w} = \mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2 = \mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_1$$

i el vector $\mathbf{w}$ obtingut d'aquesta forma, que pertany a S i T , també pertany a la seva intersecció. Recíprocament, qualsevol que sigui $\mathbf{w} \in S \cap T$, es té

$$\mathbf{v} = \mathbf{s} + \mathbf{t} = (\mathbf{s} + \mathbf{w}) + (\mathbf{t} - \mathbf{w})$$

Aquesta observació justifica la proposició i definició següents.

Teorema 1.7. *Donats dos subespais vectorials S i T d'un espai vectorial E , aleshores les tres condicions següents són equivalents:*

1. La descomposició de tot vector $\mathbf{v}$ de $S + T$ en suma d'un vector $\mathbf{s}$ de S i d'un vector $\mathbf{t}$ de T és única
2. Si $\mathbf{s} + \mathbf{t} = \mathbf{0}$, amb $\mathbf{s} \in S$ i $\mathbf{t} \in T$, es compleix que $\mathbf{s} = \mathbf{t} = \mathbf{0}$
3. $S \cap T = \{\mathbf{0}\}$

Demostració. (1) implica (2). Donat que podem escriure

$$\mathbf{s} + \mathbf{t} = \mathbf{0} + \mathbf{0}$$

es dedueix $\mathbf{s} = \mathbf{t} = \mathbf{0}$.

(2) implica (3). Suposem que $\mathbf{v} \in S \cap T$, podem escriure

$$\mathbf{0} = \mathbf{v} + (-\mathbf{v})$$

on $\mathbf{v} \in S$ i $-\mathbf{v} \in T$. De (2) es dedueix $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

(3) implica (1). Suposem que tenim un vector $\mathbf{v}$ de $S + T$ expressat de dues maneres

$$\mathbf{v} = \mathbf{s}_1 + \mathbf{t}_1 = \mathbf{s}_2 + \mathbf{t}_2$$

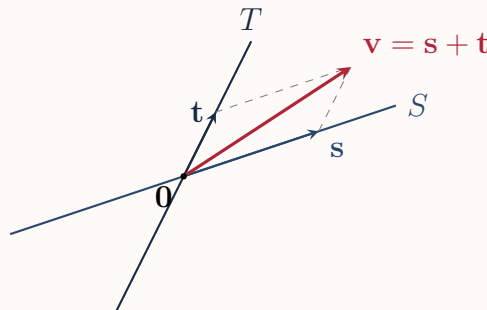
aleshores

$$\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2 = \mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_1 = \mathbf{0}$$

ja que $\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2 = \mathbf{t}_2 - \mathbf{t}_1$ és un vector de $S \cap T$ que per hipòtesi ha de ser $\mathbf{0}$. ■

Definició 1.5. Donats dos subespais vectorials S i T d'un espai vectorial E . Si $S \cap T = \{\mathbf{0}\}$, aleshores es diu que la suma de subespais $S + T$ és una **suma directa** i la designem amb la notació

$$S \oplus T$$



Si $S \cap T = \{\mathbf{0}\}$, cada vector de la suma és descompon de manera única: $\mathbf{v} = \mathbf{s} + \mathbf{t}$.

Observació 1.9. Fem les observacions següents:

1. De vegades es diu que dos subespais S i T d'un espai vectorial E són **independents** quan $S \cap T = \{\mathbf{0}\}$. En aquest cas, la seva suma és directa.
2. En general, si $S_1, \dots, S_m$ és una família finita de subespais de E , la seva suma es defineix com segueix

$$\sum_{i=1}^n S_i = S_1 + \dots + S_m = \left\{ \sum_{i=1}^m \mathbf{v}_i : \mathbf{v}_i \in S_i \right\}$$

que és un subespai de E . La suma és directa, i es denota per

$$\bigoplus_{i=1}^n S_i = S_1 \oplus \dots \oplus S_m$$

si la descomposició d'un vector d'aquest subespai només és possible d'una manera. Per fer-ho és necessari i suficient que la igualtat

$$\sum_{i=1}^m \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$$

es verifiqui únicament escollint tots els vectors $\mathbf{v}_i$ nuls.

Definició 1.6. Es diu que S_1 i S_2 són dos **subespais suplementaris** de E si tot vector $\mathbf{v}$ de E pot escriure's de manera única en la forma

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$$

on $\mathbf{v}_1 \in S_1$ i $\mathbf{v}_2 \in S_2$.

Corol·lari 1.8. Dos subespais vectorials S_1 i S_2 de E són suplementaris si i només si

$$E = S_1 \oplus S_2$$

Observació 1.10. Fem les observacions importants següents:

1. Quan es compleix

$$E = S_1 \oplus S_2$$

En tal cas es diu que S_1 (resp. S_2) és un suplementari de S_2 (resp. S_1) respecte de E . En tal cas, qualsevol vector $\mathbf{v}$ de E pot escriure's de manera única en la forma

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$$

on $\mathbf{v}_1 \in S_1$ i $\mathbf{v}_2 \in S_2$.

2. És natural plantejar-se dues preguntes: si S_1 és un subespai de E , existeix un suplementari S_2 de S_1 respecte de E , i, si existeix, és únic? La resposta a la segona pregunta és negativa, segons el **teorema 21**, però més endavant tenim el **corol·lari 9**. Respecte de la primera, la resposta és afirmativa segons el mateix teorema.
3. No s'ha de confondre un suplementari del subespai S respecte de E amb el complementari del conjunt S respecte de E . En aquest darrer cas, no és un subespai de E ja que no conté el $\mathbf{0}$.

Exemple 1.21. En $\mathbb{R}^3$ es consideren els subespais S i T generats pels conjunts $\{(2, 3, 0), (3, 1, 2)\}$ i $\{(1, -2, 2)\}$ respectivament. Determineu el subespai $S + T$ i averiguar si és suma directa.

Solució. Segons el teorema, un vector (x, y, z) de $S + T$ és de la forma

$$(x, y, z) = \lambda(2, 3, 0) + \mu(3, 1, 2) + \delta(1, -2, 2)$$

Efectuant operacions, s'obté

$$(x, y, z) = (2\lambda + 3\mu + \delta, 3\lambda + \mu - 2\delta, 2\mu + 2\delta)$$

Igualant components, es té

$$\left. \begin{array}{l} E_1 : x = 2\lambda + 3\mu + \delta \\ E_2 : i = 3\lambda + \mu - 2\delta \\ E_3 : z = 2\mu + 2\delta \end{array} \right\}$$

D'aquí s'obté

$$\left. \begin{array}{l} 3E_1 - 2E_2 : 3x - 2y = 7\mu + 7\delta \\ E_3 : z = 2\mu + 2\delta \end{array} \right\}$$

D'aquí s'obté

$$2(3E_1 - 2E_2) - 7E_3 : 6x - 4y - 7z = 0$$

Per consegüent

$$S + T = \{(x, y, z) \in R^3 : 6x - 4y - 7z = 0\}$$

Per saber si la suma és directa hem d'esbrinar si els subespais són o no independents. Per fer-ho, hem de calculeu $S \cap T$. Un vector (x, y, z) de $S \cap T$ ha de complir

$$(x, y, z) = \alpha(2, 3, 0) + \beta(3, 1, 2)$$

i

$$(x, y, z) = \gamma(1, -2, 2)$$

Per tant,

$$\alpha(2, 3, 0) + \beta(3, 1, 2) = \gamma(1, -2, 2)$$

és a dir

$$(2\alpha + 3\beta, 3\alpha + \beta, 2\beta) = (\gamma, -2\gamma, 2\gamma)$$

d'on s'obté

$$\left. \begin{array}{l} 2\alpha + 3\beta = \gamma \\ 3\alpha + \beta = -2\gamma \\ 2\beta = 2\gamma \end{array} \right\}$$

Tenim $\beta = \gamma$. Per tant, $\alpha = -\beta = -\gamma$. Prenent $\gamma = 1$, s'obté

$$(1, -2, 2) = -(2, 3, 0) + (3, 1, 2)$$

el que significa que

$$(1, -2, 2) \in S \cap T$$

Per consegüent,

$$S \cap T \neq \{0\}$$

i la suma no és directa.

□

1.9 Combinacions lineals

Definició 1.7. S'anomena **sistema** de vectors de E a qualsevol successió finita $\mathcal{S}$ de vectors de E . D'aquesta manera, $\mathcal{S} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m)$, amb $\mathbf{v}_i \in E$ ($i = 1, \dots, m$), és un sistema de vectors de E .

Observació 1.11. Cal anar amb compte de no confondre el sistema de vectors $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m)$ amb el conjunt $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m\}$ els elements del qual són els vectors del sistema. Per exemple, el sistema $(1, 1, 1)$ de vectors de $\mathbb{R}$ té com conjunt de vectors $\{1\}$; i els sistemes diferents $(1, 2, 3)$ i $(2, 1, 3)$ de $\mathbb{R}$ tenen el mateix conjunt de vectors $\{1, 2, 3\}$.

Quan escriguem “sistema de vectors” ens referirem a la successió finita de vectors. En canvi, quan escriguem “vectors del sistema” ens referirem al conjunt dels vectors de la successió.

Definició 1.8. Donat un sistema $\mathcal{S} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m)$ de vectors de E . Es diu que un vector $\mathbf{v}$ de E és **combinació lineal** dels vectors del sistema $\mathcal{S}$ si existeix una successió finita $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ d'elements de $\mathbb{K}$ tals que

$$\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_m \mathbf{v}_m$$

Els escalars λ_i ($i = 1, \dots, m$) s'anomenen **coeficients** de la combinació lineal. També es diu aleshores que el vector $\mathbf{v}$ **depèn linealment** dels vectors del sistema $\mathcal{S}$.

Observació 1.12. Més en general, si $\mathcal{S} = (\mathbf{v}_i)_{i \in I}$ és una família qualsevol (finita o no) de vectors de E , es diu que un vector $\mathbf{v}$ de E és combinació lineal dels vectors de la família $\mathcal{S}$ si existeix una família $(\lambda_i)_{i \in I}$ d'elements de $\mathbb{K}$ tals que només un nombre **finit** dels escalars λ_i són no nuls i

$$\mathbf{v} = \sum_{i \in I} \lambda_i \mathbf{v}_i$$

Observeu que si $J \subset I$, J és finit i tal que $\lambda_i = 0$ per a tot $i \in I - J$, aleshores

$$\sum_{i \in I} \lambda_i \mathbf{v}_i = \sum_{i \in J} \lambda_i \mathbf{v}_i$$

És evident que el valor del segon membre de la igualtat anterior no depèn de J (sempre que J satisfaci les condicions enunciades). Com a conseqüència, tenim que un vector $\mathbf{v}$ de E és combinació lineal dels vectors de la família $(\mathbf{v}_i)_{i \in I}$ si ho és d'una **subfamília finita** de $(\mathbf{v}_i)_{i \in I}$.

Teorema 1.9. Es dedueixen immediatament de la definició els següents resultats:

1. El vector $\mathbf{0}$ és combinació lineal dels vectors de qualsevol sistema.
2. Tot vector és combinació lineal dels vectors de qualsevol sistema que lo

conté.

3. Si $\mathbf{v}$ és combinació lineal dels vectors del sistema $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m)$ i si cada $\mathbf{v}_i$ ($i = 1, 2, \dots, m$) és combinació lineal dels vectors del sistema $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_p)$, el vector $\mathbf{v}$ és combinació lineal de dels vectors del sistema $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_p)$.

Demostració. (1.) És suficient triar tots els coeficients nuls.
(2.) En efecte,

$$\mathbf{v} = 1\mathbf{v}$$

i, si hi ha altres vectors, els assignem a tots coeficient nul.

(3.) Si

$$\mathbf{v}_i = \sum_{j=1}^p \mu_{ij} \mathbf{w}_j$$

i

$$\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_m \mathbf{v}_m$$

aleshores, per substitució i per les regles de càlcul, tenim

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \lambda_1 \left(\sum_{j=1}^p \mu_{1j} \mathbf{w}_j \right) + \lambda_2 \left(\sum_{j=1}^p \mu_{2j} \mathbf{w}_j \right) + \dots + \lambda_m \left(\sum_{j=1}^p \mu_{mj} \mathbf{w}_j \right) \\ &= \left(\sum_{k=1}^m \lambda_k \mu_{k1} \right) \mathbf{w}_1 + \left(\sum_{k=1}^m \lambda_k \mu_{k2} \right) \mathbf{w}_2 + \dots + \left(\sum_{k=1}^m \lambda_k \mu_{kp} \right) \mathbf{w}_p \end{aligned}$$

■

Observació 1.13. Aquest darrer resultat s'expressa també així: si $\mathbf{v}$ depèn linealment dels vectors $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m$, i cadascun d'aquests depèn linealment de $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \dots, \mathbf{w}_p$, el vector $\mathbf{v}$ depèn linealment d'aquests darrers. Per aquesta raó, aquest resultat es le coneix com propietat transitiva de la dependència lineal.

Exemple 1.22. Considerem els vectors $\mathbf{u} = (1, 2, -1)$ i $\mathbf{v} = (6, 4, 2)$ de $\mathbb{R}^3$. Demostreu que $\mathbf{w} = (9, 2, 7)$ és combinació lineal de $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$, i que, en canvi, $\mathbf{w}' = (4, -1, 8)$ no és combinació lineal de $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$.

Solució. Perquè $\mathbf{w}$ sigui una combinació lineal de $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$, han de existir els escalars λ_1 i λ_2 tals que $\mathbf{w} = \lambda_1 \mathbf{u} + \lambda_2 \mathbf{v}$, és dir,

$$(9, 2, 7) = \lambda_1(1, 2, -1) + \lambda_2(6, 4, 2)$$

o bé,

$$(9, 2, 7) = (\lambda_1 + 6\lambda_2, 2\lambda_1 + 4\lambda_2, -\lambda_1 + 2\lambda_2)$$

Al igualar les components corresponents, s'obté el sistema següent

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 + 6\lambda_2 &= 9 \\ 2\lambda_1 + 4\lambda_2 &= 2 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 &= 7 \end{aligned} \right\}$$

Si es resol aquest sistema, s'obté la solució $\lambda_1 = -3$ i $\lambda_2 = 2$. D'aquesta manera, tenim

$$\mathbf{w} = -3\mathbf{u} + 2\mathbf{v}$$

De la mateixa manera, perquè $\mathbf{w}'$ sigui una combinació lineal de $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$ han de existir λ_1 i λ_2 tals que

$$(4, -1, 8) = \lambda_1(1, 2, -1) + \lambda_2(6, 4, 2)$$

o bé,

$$(4, -1, 8) = (\lambda_1 + 6\lambda_2, 2\lambda_1 + 4\lambda_2, -\lambda_1 + 2\lambda_2)$$

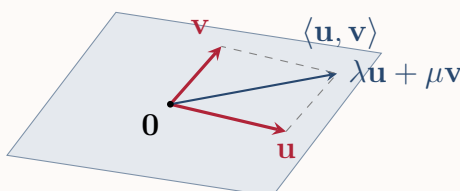
Igualant components, s'obté

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_1 + 6\lambda_2 = 4 \\ 2\lambda_1 + 4\lambda_2 = -1 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 = 8 \end{array} \right\}$$

Aquest sistema d'equacions és incompatible, de manera que no existeixen aquests escalars. Com a conseqüència, $\mathbf{w}'$ no és una combinació lineal de $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$. □

1.10 Clausura lineal

Definició 1.9. S'anomena **clusura lineal** del sistema $\mathcal{S} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m)$ al conjunt de tots els vectors de E que són combinació lineal dels vectors de $\mathcal{S}$. Denotem aquest conjunt per $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m \rangle$.



La clausura lineal de dos vectors no proporcionals de l'espai és el pla que determinen: el conjunt de totes les seves combinacions lineals.

Teorema 1.10. La clausura lineal de qualsevol sistema és un subespai vectorial de E .

Demostració. En efecte, de les relacions següents

$$\begin{aligned} (\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_m \mathbf{v}_m) + (\mu_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \mu_m \mathbf{v}_m) &= (\lambda_1 + \mu_1) \mathbf{v}_1 + \dots + (\lambda_m + \mu_m) \mathbf{v}_m \\ \delta(\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_m \mathbf{v}_m) &= (\delta \lambda_1) \mathbf{v}_1 + \dots + (\delta \lambda_m) \mathbf{v}_m \end{aligned}$$

es dedueix immediatament el que volem demostrar. ■

Definició 1.10. Un subespai vectorial S de E es diu que està **generat** pel sistema $\mathcal{S} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m)$ si S és la clausura lineal del sistema, és a dir, si es compleix

$$S = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m \rangle$$

També es diu que $\mathcal{S}$ és un **sistema generador** del subespai S .

Teorema 1.11. *La clausura lineal d'un sistema és el subespai més petit vectorial que conté al conjunt dels vectors del sistema.*

Demostració. Donat un sistema qualsevol $\mathcal{S} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m)$. Sigui $A = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m\}$ el conjunt dels vectors de $\mathcal{S}$. Pel teorema anterior la clausura lineal és un subespai vectorial de E . Per a qualsevol $\mathbf{v}_i \in A$ ($i = 1, \dots, m$) es compleix

$$\mathbf{v}_i = 0\mathbf{v}_1 + \dots + 1\mathbf{v}_i + \dots + 0\mathbf{v}_m$$

amb el que A està contingut en la clausura lineal de $\mathcal{S}$. Si S és qualsevol subespai de E que conté A , aleshores qualsevol combinació lineal dels vectors de A és clarament un altre vector de S . Per tant, la clausura lineal de $\mathcal{S}$ està contingut en S i, en conseqüència, és el més petit subespai vectorial que conté A . ■

Observació 1.14. Les nocions i propietats anteriors poden ampliar-se al cas d'una família qualsevol $(\mathbf{v}_i)_{i \in I}$, finita o no, de vectors de E . S'anomena clausura lineal d'una família $(\mathbf{v}_i)_{i \in I}$ al més petit subespai vectorial que la conté. Es pot demostrar, sense cap dificultat, que aquesta clausura lineal és la intersecció de la família de subespais que contenen al conjunt de vectors de la família en consideració. Finalment, es demostra que aquesta clausura lineal és el subespai de les combinacions lineals de cada subfamília finita de $(\mathbf{v}_i)_{i \in I}$.

Exemple 1.23. Donat el sistema $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ de vectors de $\mathbb{R}^3$, essent $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$ i $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$. Determineu la clausura lineal d'aquest sistema.

Solució. És clar que $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle \subset \mathbb{R}^3$. D'altra banda, tenim que tot vector (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ es pot escriure com

$$(x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)$$

és a dir,

$$(x, y, z) = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$$

la qual cosa és una combinació lineal de $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ i $\mathbf{e}_3$. Per tant, $\langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \rangle = \mathbb{R}^3$. □

Exemple 1.24. Els polinomis $1, x, x^2, \dots, x^n$ engendren l'espai vectorial $\mathbb{R}_n[x]$ (vegeu exemple 6), ja que qualsevol polinomi $p(x)$ de $\mathbb{R}_n[x]$ es pot escriure com

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

la qual cosa és una combinació lineal de $1, x, x^2, \dots, x^n$.

Exemple 1.25. Determineu si $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 2)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 0, 1)$, $\mathbf{v}_3 = (2, 1, 3)$ engendren $\mathbb{R}^3$.

Solució. N'hi ha prou de determinar si un vector arbitrari $\mathbf{v} = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$ es pot escriure com una combinació lineal de $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ i $\mathbf{v}_3$

$$\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \lambda_3 \mathbf{v}_3$$

Si expressem aquesta equació en termes de components, es té

$$(x, y, z) = \lambda_1(1, 1, 2) + \lambda_2(1, 0, 1) + \lambda_3(2, 1, 3)$$

o bé,

$$(x, y, z) = (\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3, \lambda_1 + \lambda_3, 2\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3)$$

o bé,

$$\left. \begin{array}{rrcr} \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & x \\ \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & y \\ 2\lambda_1 & + & \lambda_2 & + & 3\lambda_3 & = & z \end{array} \right\}$$

Per consegüent, el problema es redueix a determinar si aquest sistema és o no compatible per a tots els valors de x, y i z . Tot i que més endavant donarem mètodes més operatius per a resoldre aquestes qüestions, de moment ens acontentem a afirmar que el vector $(1, 0, 0)$ de $\mathbb{R}^3$ no és una combinació lineal de $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ i $\mathbf{v}_3$. En efecte, pot comprovar-se que el sistema següent

$$\left. \begin{array}{rrcr} \lambda_1 & + & \lambda_2 & + & 2\lambda_3 & = & 1 \\ \lambda_1 & & & + & \lambda_3 & = & 0 \\ 2\lambda_1 & + & \lambda_2 & + & 3\lambda_3 & = & 0 \end{array} \right\}$$

és incompatible. Per consegüent, els vectors $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ i $\mathbf{v}_3$ engendren un subespai vectorial diferent de $\mathbb{R}^3$. □

Exemple 1.26. Podem determinar x de manera que el vector $(-1, 2, 5, x)$ pertanyi al subespai de $\mathbb{Q}^4$ generat per $(4, -2, 1, 7)$ i $(1, 0, 2, 4)$?

Solució. Perquè $(-1, 2, 5, x) \in \langle (4, -2, 1, 7), (1, 0, 2, 4) \rangle$ han de existir dos escalars λ_1 i λ_2 de $\mathbb{Q}$ tals que

$$(-1, 2, 5, x) = \lambda_1(4, -2, 1, 7) + \lambda_2(1, 0, 2, 4)$$

o bé,

$$(-1, 2, 5, x) = (4\lambda_1 + \lambda_2, -2\lambda_1, \lambda_1 + 2\lambda_2, 7\lambda_1 + 4\lambda_2)$$

Igualant components, es té

$$\left. \begin{array}{l} 4\lambda_1 + \lambda_2 = -1 \\ -2\lambda_1 = 2 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = 5 \\ 7\lambda_1 + 4\lambda_2 = x \end{array} \right\}$$

De les dues primeres equacions del sistema s'obté $\lambda_1 = -1$ i $\lambda_2 = 3$. Aquests valors satisfan també la tercera equació del sistema. Per tant, ha de passar

$$x = -7 + 12 = 5$$

□

1.11 Sistemes equivalents

Definició 1.11. Es diu que dos sistemes $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$ i $(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_p)$ de E són **equivalents**, i ho denotem per $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m) \sim (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_p)$, quan els seus clausures lineals són iguals, és dir, quan

$$\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m \rangle = \langle \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_p \rangle$$

Teorema 1.12. *Dos sistemes són equivalents si i només si tot vector de cada sistema és combinació lineal dels vectors de l'altre.*

Demostració. És immediat a partir de la definició de clausura lineal d'un sistema. ■

Observació 1.15. És fàcil demostrar també que la relació definida anteriorment és de equivalència.

Teorema 1.13. *La clausura lineal d'un sistema no canvia quan s'afegeixen nous vectors al sistema que siguin combinació lineal dels primers.*

Demostració. Donat un sistema de vectors $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$, si

$$\mathbf{w} = \sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{v}_i$$

aleshores

$$\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m \rangle$$

ja que

$$\begin{aligned} \mu_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \mu_m \mathbf{v}_m + \mu \mathbf{w} &= \mu_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \mu_m \mathbf{v}_m + \sum_{i=1}^m \lambda_i \mathbf{v}_i \\ &= (\mu_1 + \lambda_1) \mathbf{v}_1 + \dots + (\mu_m + \lambda_m) \mathbf{v}_m \end{aligned}$$

i per d'altra banda

$$\mu_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \mu_m \mathbf{v}_m = \mu_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \mu_m \mathbf{v}_m + 0 \mathbf{w}$$

així amb qualsevol altre vector aïllat. ■

Observació 1.16. Fem les observacions següents:

1. Del teorema anterior es dedueix de manera immediata que

$$(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m, \mathbf{w}) \sim (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$$

si $\mathbf{w}$ és combinació lineal de $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$.

2. Després d'aquest resultat, escau preguntar-se en seguida si serà possible trobar un sistema de vectors equivalent amb un nombre més petit de vectors. Resoldrem aquesta qüestió en estudiar la independència lineal de vectors.

Definició 1.12. A continuació definim certes transformacions que aplicades sobre un sistema de vectors proporcionen sistemes equivalents. Aquestes operacions s'anomenen **transformacions elementals** i són les següents:

T1: Permutar dos vectors qualssevol

$$(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_j, \dots, \mathbf{v}_m) \sim (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_j, \dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_m) \quad (i \neq j)$$

T2: Multiplicar un vector qualsevol per un escalar λ diferent de zero

$$(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_m) \sim (\mathbf{v}_1, \dots, \lambda \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_m)$$

T3: Sumar a un vector qualsevol un múltiple escalar d'un altre vector

$$(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_j, \dots, \mathbf{v}_m) \sim (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i + \lambda \mathbf{v}_j, \dots, \mathbf{v}_j, \dots, \mathbf{v}_m) \quad (i \neq j)$$

Teorema 1.14. *La clausura lineal dels vectors d'un sistema no canvia en sotmetre el sistema a una o diverses transformacions elementals.*

Demostració. Suposem que el sistema $\mathcal{S}' = (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m)$ és el resultat d'aplicar una de les transformacions elementals sobre el sistema donat $\mathcal{S} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$. Es tracta de provar que $\langle \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m \rangle$, o el que és lo mateix, que $\mathcal{S} \sim \mathcal{S}'$. Provarem que tot vector $\mathbf{v}$, combinació lineal del sistema $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$, és també combinació lineal del nou sistema $(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m)$.

Si $\mathcal{S}'$ s'obté de $\mathcal{S}$ per T1, aleshores això és evident per la commutativitat de la suma, ja que els $\mathbf{w}_j$ són idèntics als $\mathbf{v}_i$, llevat de l'ordre.

Si $\mathcal{S}'$ s'obté de $\mathcal{S}$ per T2, aleshores reemplaçem $\mathbf{v}_i$ per $\mathbf{w}_i = \lambda \mathbf{v}_i$ ($\lambda \neq 0$), sense modificar els restants vectors. Aleshores es té

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_i \mathbf{v}_i + \dots + \lambda_m \mathbf{v}_m \\ &= \lambda_1 \mathbf{w}_1 + \dots + \frac{\lambda_i}{\lambda} \mathbf{w}_i + \dots + \lambda_m \mathbf{w}_m \end{aligned}$$

Si $\mathcal{S}'$ s'obté de $\mathcal{S}$ per T3, aleshores reemplaçem $\mathbf{v}_i$ per $\mathbf{w}_i = \mathbf{v}_i + \lambda \mathbf{v}_j$ ($i \neq j$), sense modificar els altres vectors. Aleshores es té

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_i \mathbf{v}_i + \dots + \lambda_m \mathbf{v}_m \\ &= \lambda_1 \mathbf{w}_1 + \dots + \lambda_i \mathbf{w}_i + \dots + (\lambda_j - \lambda_i \lambda) \mathbf{w}_j + \dots + \lambda_m \mathbf{w}_m \end{aligned}$$

D'altra banda, les transformacions elementals són reversibles, ja que les operacions inverses són del mateix tipus. Per tant, els sistemes $\mathcal{S}$ i $\mathcal{S}'$ són, ja que, equivalents. A més, la transitivitat de la relació $\sim$ demostra que una successió de transformacions (tal que cadascuna opera sobre el sistema que resulta de la precedent) aplica un sistema a un altre d'equivalent.

■

Exemple 1.27. Demostreu que els sistemes $\mathcal{S} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ i $\mathcal{S}' = (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$ de $\mathbb{R}^3$ són equivalents, essent $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 2)$, $\mathbf{v}_2 = (0, 1, 1)$, $\mathbf{w}_1 = (1, 0, 1)$ i $\mathbf{w}_2 = (2, -1, 1)$.

Solució. Per fer-ho, aplicarem transformacions elementals a $\mathcal{S}$ fins a obtenir $\mathcal{S}'$. Aplicant T3, s'obté

$$(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \sim (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2)$$

Ahora, aplicant T2,

$$(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2) \sim (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, -\mathbf{v}_2)$$

Finalment, aplicant T3,

$$(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, -\mathbf{v}_2) \sim (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, -\mathbf{v}_2 + 2(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2))$$

Per la transitivitat de la relació es dedueix

$$(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \sim (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, -\mathbf{v}_2 + 2(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2))$$

és a dir,

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$$

i

$$\mathbf{w}_2 = -\mathbf{v}_2 + 2(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)$$

Per consegüent, $\mathcal{S}$ i $\mathcal{S}'$ són equivalents.

□

1.12 Dependència i independència lineal

Definició 1.13. Direm que el sistema de vectors $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$ de un espai vectorial E és **lligat** quan existeix una successió finita $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ d'elements de $\mathbb{K}$, no tots nuls, tals que

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_m \mathbf{v}_m = \mathbf{0}$$

Quan el sistema de vectors $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$ de E és lligat, també es diu que els vectors $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$ del sistema són **linealment dependents**, i la relació

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_m \mathbf{v}_m = \mathbf{0}$$

on no tots els coeficients són nuls, s'anomena una **relació de dependència** d'aquests vectors.



l·ligat: $2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$

lliure: cap no és múltiple de l'altre

En el pla, dos vectors són linealment dependents exactament quan són proporcionals.

Teorema 1.15. *Assenyalem algunes conseqüències immediates de la definició:*

1. *Tot sistema que inclogui el vector $\mathbf{0}$ és l·ligat.*
2. *Si s'afegeixen altres vectors a un sistema l·ligat, el sistema que resulta és també l·ligat.*
3. *Tot sistema que inclogui dos vectors iguals és l·ligat.*
4. *El sistema $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$, amb $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$, és l·ligat si i només si algun dels seus vectors és combinació lineal dels que el precedeixen.*
5. *Perquè un sistema sigui l·ligat és necessari i suficient que existeixi un sub-sistema propi equivalent al sistema considerat.*

Demostració. (1.) Consisteix a triar tots els coeficients iguals a zero, tret del que multiplica el vector $\mathbf{0}$.

(2.) Consisteix a triar, per exemple, els coeficients nuls per als nous vectors.

(3.) Suposem el sistema $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$ en què per a certs i, j , amb $i \neq j$ i $1 \leq i < j \leq m$, es compleix $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_j$. Aleshores, és clar que

$$0\mathbf{v}_1 + \dots + 1\mathbf{v}_i + \dots + (-1)\mathbf{v}_j + \dots + 0\mathbf{v}_m = \mathbf{0}$$

el que significa que el sistema considerat és l·ligat.

(4.) Si el sistema $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$ de E és l·ligat, aleshores existeix una successió finita d'escalars $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$, no tots nuls, tals que

$$\lambda_1\mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_m\mathbf{v}_m = \mathbf{0}$$

De aquests λ_i no nuls, escollim el que té el més gran subíndex. Sigui $k = \max\{i : \lambda_i \neq 0\}$. Se compleix que $k > 1$, ja que de en cas contrari tindríem $\lambda_1\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$, i com per hipòtesi $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$, es deduiria que $\lambda_1 = 0$, el que no és possible. Aleshores tenim

$$\lambda_1\mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$$

i $\lambda_k \neq 0$. D'aquesta última relació s'obté

$$\mathbf{v}_k = -\frac{\lambda_1}{\lambda_k}\mathbf{v}_1 - \dots - \frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_k}\mathbf{v}_{k-1}$$

és a dir, podem expressar $\mathbf{v}_k$ com a combinació lineal de els vectors que el precedeixen $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{k-1}$.

Recíprocament, si existeix $\mathbf{v}_k$ amb $1 \leq k \leq m$ tal que

$$\mathbf{v}_k = \mu_1\mathbf{v}_1 + \dots + \mu_{k-1}\mathbf{v}_{k-1}$$

aleshores

$$-\mu_1 \mathbf{v}_1 - \cdots - \mu_{k-1} \mathbf{v}_{k-1} + 1 \mathbf{v}_k + 0 \mathbf{v}_{k+1} + \cdots + 0 \mathbf{v}_m = 0$$

el que significa que el sistema $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$ és lligat.

Amb una demostració anàloga es deduiria el teorema que resulta de substituir la hipòtesi $\mathbf{v}_1 \neq 0$ per $\mathbf{v}_m \neq 0$, i la paraula “preceden” per “siguen”.

(5.) Si el sistema $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$ de E és lligat, aleshores existeix una successió finita d'escalars $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$, no tots nuls, tals que

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_m \mathbf{v}_m = \mathbf{0}$$

Suposem que $\lambda_i \neq 0$, aleshores es té

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_i} \mathbf{v}_1 + \cdots + 1 \mathbf{v}_i + \cdots + \frac{\lambda_m}{\lambda_i} \mathbf{v}_m = \mathbf{0}$$

d'on

$$\mathbf{v}_i = -\frac{\lambda_1}{\lambda_i} \mathbf{v}_1 - \cdots - \frac{\lambda_m}{\lambda_i} \mathbf{v}_m$$

és a dir, $\mathbf{v}_i$ és combinació lineal dels vectors $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_m$. Aleshores, per aplicacions successives de T1, es té

$$(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_m) \sim (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_m, \mathbf{v}_i)$$

i, pel teorema 10, es té

$$(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_m, \mathbf{v}_i) \sim (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_m)$$

Per tant,

$$(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_m) \sim (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_m)$$

D'aquesta manera s'ha obtingut un subsistema propi equivalent al sistema original.

El recíproc és evident, ja que si el sistema donat és equivalent a un subsistema seu, qualsevol vector d'aquest darrer és combinació lineal dels vectors del sistema i, en conseqüència, el sistema és lligat. ■

Observació 1.17. Del darrer resultat del teorema anterior es dedueix que si en la relació de dependència

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_m \mathbf{v}_m = \mathbf{0}$$

és $\lambda_i \neq 0$, aleshores el sistema que s'obté eliminant el vector $\mathbf{v}_i$ és equivalent al sistema original. Observeu que només es pot suprimir **un** vector per cada relació de dependència: un cop eliminat $\mathbf{v}_i$, la relació anterior deixa de ser una relació entre els vectors del nou sistema.

Definició 1.14. Direm que el sistema $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$ de vectors de un espai vectorial E és **lliure** quan no és lligat.

Quan el sistema de vectors $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$ de E és lliure, també es diu que els vectors

$\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$ del sistema són **linealment independents**.

Observació 1.18. Dit d'una altra manera, perquè un sistema $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m)$ sigui lliure és necessari i suficient que la relació

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_m \mathbf{v}_m = \mathbf{0}$$

es compleixi només si tots els coeficients λ_i són nuls; la única combinació nul · la dels vectors del sistema correspon a triar tots els coeficients nuls.

Teorema 1.16. Assenyalem algunes conseqüències immediates de la definició:

1. Un vector $\mathbf{v}$ no nul constitueix per si sol un sistema lliure.
2. Tots els vectors d'un sistema lliure són diferents de $\mathbf{0}$.
3. Tots els vectors d'un sistema lliure són dos a dos diferents.
4. Tot subsistema d'un sistema lliure és també lliure.
5. En la clausura lineal d'un sistema lliure, tot vector pot escriure's de manera única com a combinació lineal dels vectors del sistema.
6. Si el sistema $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$ és lliure, mientras que el sistema $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m, \mathbf{w})$, obtingut afegint-hi un vector, és lligat, aleshores el vector $\mathbf{w}$ és combinació lineal dels vectors $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$.

Demostració. (1.) En efecte,

$$\lambda \mathbf{v} = \mathbf{0} \implies \lambda = 0$$

ja que la igualtat $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ queda excluida.

(2.) Qualsevol sistema que conté al vector $\mathbf{0}$ és lligat.

(3.) Qualsevol sistema que conté dos vectors iguals és lligat.

(4.) En efecte, si el nou sistema fos lligat, afegint-hi altres vectors continuaria essent un sistema lligat.

(5.) Suposem que el sistema $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$ és lliure. Sigui $\mathbf{v} \in \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m \rangle$ i suposem que $\mathbf{v}$ pudiera escriure's de dues maneres:

$$\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_m \mathbf{v}_m = \mu_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \mu_m \mathbf{v}_m$$

Aleshores, tindríem

$$(\lambda_1 - \mu_1) \mathbf{v}_1 + \dots + (\lambda_m - \mu_m) \mathbf{v}_m = \mathbf{0}$$

i per ser independents els vectors $\mathbf{v}_i$ hauríem de

$$\lambda_i - \mu_i = 0 \quad (i = 1, \dots, m)$$

En conseqüència, les dues descomposicions coincideixen.

(6.) Per ser el sistema $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m, \mathbf{w})$ lligat, tindrem la següent relació lineal

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_m \mathbf{v}_m + \mu \mathbf{w} = \mathbf{0}$$

on $\mu \neq 0$ ja que el sistema $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$ és lliure. Per consegüent podem aïllar $\mathbf{w}$, el que demostra la afirmació. ■

Observació 1.19. Fem les observacions següents:

1. Del **teorema 7** i del **teorema 15 (5)** es dedueix immediatament el resultat següent: si el sistema $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$ és lliure, aleshores

$$\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m \rangle = \langle \mathbf{v}_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle \mathbf{v}_m \rangle$$

2. Les nocions de dependència i independència lineal es generalitzen per a qualsevol família $(\mathbf{v}_i)_{i \in I}$ de vectors de E . Una família $(\mathbf{v}_i)_{i \in I}$ de vectors de E es dirà lliure si ho és tota subfamília finita. Una família s'anomenarà lligada si no és lliure. Esto significa que almenys hi ha una subfamília finita que no és lliure.

Teorema 1.17. Si l'espai vectorial E és generat pel sistema $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$, i E conté k vectors linealment independents, aleshores $k \leq m$.

Demostració. Suposem que $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k$ són vectors linealment independents de E . És clar que el sistema $(\mathbf{w}_1, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$ és generador de E . Com que $E = \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m \rangle$, $\mathbf{w}_1$ és combinació lineal de $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$. Per tant, $(\mathbf{w}_1, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$ és lligat, i pel **teorema 14 (4)** existeix un vector que és combinació lineal dels precedents, que no és $\mathbf{w}_1$ ja que $\mathbf{w}_1 \neq \mathbf{0}$ (per pertànyer a un sistema lliure); sigui aquest vector $\mathbf{v}_i$. Suprimint-lo obtenim altre sistema generador equivalent, és a dir,

$$E = \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_m \rangle = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_m \rangle$$

També serà generador el sistema $(\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_1, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_m)$ que al seu torn és lligat. Tornant a aplicar el **teorema 14 (4)** podem suprimir un altre vector $\mathbf{v}_j$, que no és $\mathbf{w}_2$ ni $\mathbf{w}_1$ perquè $(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)$ és un sistema lliure. Repetint aquest procés resulta que, si fuese $k > m$, el sistema $(\mathbf{w}_m, \dots, \mathbf{w}_1)$ seria generador; en conseqüència, $\mathbf{w}_{m+1}$ seria combinació lineal de $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m$ i el sistema $(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{m+1})$ seria lligat, contra la hipòtesi. ■

Exemple 1.28. Demostreu que dos vectors d'un espai vectorial E són linealment dependents si i només si un d'ells és un múltiple escalar de l'altre.

Solució. Siguin $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ dos vectors linealment dependents de E . Aleshores existeix una relació de dependència d'aquests vectors

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$$

amb algun $\lambda_i \neq 0$. Suposem que $\lambda_1 \neq 0$, aleshores

$$1\mathbf{v}_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$$

d'on

$$\mathbf{v}_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \mathbf{v}_2$$

amb el que $\mathbf{v}_1$ és múltiple escalar de $\mathbf{v}_2$. Recíprocament, si $\mathbf{v}_1 = \lambda \mathbf{v}_2$ per a algun $\lambda \in \mathbb{K}$, aleshores

$$1\mathbf{v}_1 + (-\lambda)\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$$

és una relació de dependència amb el coeficient de $\mathbf{v}_1$ diferent de zero i, per tant, $\mathbf{v}_1$ i $\mathbf{v}_2$ són linealment dependents. $\square$

Exemple 1.29. Determineu si el sistema $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ de $\mathbb{R}^3$ és o no lliure, essent $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 3)$, $\mathbf{v}_2 = (0, 1, 2)$, $\mathbf{v}_3 = (-2, 0, 1)$.

Solució. Suposem que

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \lambda_3 \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

Introduint els seus components, es té

$$\lambda_1(1, 2, 3) + \lambda_2(0, 1, 2) + \lambda_3(-2, 0, 1) = (0, 0, 0)$$

o bien

$$(\lambda_1 - 2\lambda_3, 2\lambda_1 + \lambda_2, 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3) = (0, 0, 0)$$

Igualant components, s'obté el següent sistema:

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_1 - 2\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{array} \right\}$$

resolent-lo, s'obté, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$. Per tant, el sistema és lliure. $\square$

Exemple 1.30. Demostreu que el sistema $(1 + x - 2x^2, 2 + 5x - x^2, x + x^2)$ de $\mathbb{R}_2[x]$ és lligat. Escriviu una relació de dependència.

Solució. Suposem que

$$\lambda_1(1 + x - 2x^2) + \lambda_2(2 + 5x - x^2) + \lambda_3(x + x^2) = \mathbf{0}$$

aleshores

$$(\lambda_1 + 2\lambda_2) + (\lambda_1 + 5\lambda_2 + \lambda_3)x + (-2\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3)x^2 = \mathbf{0}$$

Pel principi d'identitat de polinomis, s'obté el sistema següent:

$$\begin{array}{l} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + 5\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -2\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{array}$$

És fàcil comprovar que aquest sistema és compatible indeterminat i, en conseqüència, el sistema és lligat. Les seves solucions són, $\lambda_1 = -2\lambda_2$, $\lambda_2 = \lambda_2$, $\lambda_3 = -3\lambda_2$. Prenent $\lambda_2 = -1$, s'obté $\lambda_1 = 2$ i $\lambda_3 = 3$. Per tant,

$$2(1 + x - 2x^2) + (-1)(2 + 5x - x^2) + 3(x + x^2) = \mathbf{0}$$

és una relació de dependència. $\square$

1.13 Bases d'un espai vectorial de dimensió finita

Definició 1.15. S'anomena **base** d'un espai vectorial E a tota família lliure (finita o no) que engendra E .

Definició 1.16. Es diu que un espai vectorial E és de **dimensió finita** si admet almenys una família finita que engendra E .

Observació 1.20. Dit d'una altra manera, E és de dimensió finita si existeix un família finita $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$ de E tal que

$$E = \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m \rangle$$

Teorema 1.18. *Tot espai vectorial $E \neq \{0\}$ de dimensió finita posseeix una base.*

Demostració. Suposem que $E = \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m \rangle$. Si el sistema $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$ és lliure, formen una base i el teorema queda demostrat. En cas contrari, existeix almenys un vector $\mathbf{v}_i$ que és combinació lineal dels altres. Aleshores

$$E = \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_m \rangle$$

Apliquem de nou el mateix raonament al nou sistema

$$(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1}, \dots, \mathbf{v}_m)$$

Si és lliure, constitueix una base i, si no ho és, suprimim un altre vector, i es dedueix un tercer sistema generador. Repetint un nombre finit de vegades aquest procés, arribarem a un sistema lliure i generador de E , és a dir, a una base, o suprimirem tots els vectors. Ara bé, en aquest segon cas seria $E = \langle 0 \rangle = \{0\}$, el que no seria possible per hipòtesi. ■

Observació 1.21. Fem les observacions següents:

1. De la demostració del teorema anterior es dedueix de manera immediata el resultat següent: tot sistema generador de E conté un subsistema lliure equivalent.
2. En general, es demostra que tot espai vectorial (de dimensió finita o no) admet una base.

Teorema 1.19. *Totes les bases d'un espai vectorial E de dimensió finita són finites i tenen el mateix nombre de vectors.*

Demostració. Siguin $\mathcal{B}_1$ i $\mathcal{B}_2$ dues bases qualssevol de E , deducidas o no d'un sistema generador $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$ de E . El **teorema 16** prova que cadascuna d'elles té un nombre finit de vectors; n_1 per a $\mathcal{B}_1$ i n_2 per a $\mathcal{B}_2$, amb $n_1 \leq m$ i

$n_2 \leq m$. D'altra banda, cada base constitueix una família lliure i generatriz de E . Considerem $\mathcal{B}_1$ com família generatriz i $\mathcal{B}_2$ com família lliure, pel **teorema 16**, és $n_2 \leq n_1$. Repetint de nou el mateix raonament, canviant el paper de les dues bases, s'arriba a que $n_1 \leq n_2$. Per consegüent, $n_1 = n_2$. ■

Observació 1.22. En general, es demostra que totes les bases d'un espai vectorial (de dimensió finita o no) són equipotentes (de la mateixa cardinalidad).

Definició 1.17. El nombre de vectors de qualsevol base finita d'un espai vectorial E s'anomena **dimensió** de E i es denota per $\dim E$. Direm que E és de **dimensió infinita** si no té bases finites.

Observació 1.23. El subespai nul $\{0\}$ no posee base alguna, ja que la família (0) és lligada, però es admet que:

$$\dim \{0\} = 0$$

Corol·lari 1.20. *En un espai vectorial de dimensió finita, la dimensió coincideix amb el nombre màxim de vectors linealment independents de qualsevol sistema lliure, i també amb el nombre mínim de vectors de qualsevol sistema generador.*

Demostració. És una conseqüència immediata del **teorema 16**. ■

Corol·lari 1.21. *En un espai vectorial de dimensió finita, tota família lliure de E pot completar-se fins a obtenir una base.*

Demostració. Sigui $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ una base i $(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k)$ una família lliure de E , aleshores per l'**teorema 16** es poden substituir k vectors $\mathbf{v}_i$ pels $\mathbf{w}_j$ de manera que la família $(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k, \mathbf{v}_{i_1}, \dots, \mathbf{v}_{i_{n-k}})$ sigui una base de E . ■

Corol·lari 1.22. *Perquè un sistema de n vectors sigui una base d'un espai vectorial de dimensió n , és suficient que el sistema sigui generador de E o que sigui lliure.*

Demostració. Pel **corol·lari 3**, qualsevol sistema lliure de n vectors es pot completar fins a obtenir una base. Ara bé, totes les bases de l'espai tenen n vectors pel **teorema 18**. Per tant, el sistema és una base. D'altra banda, qualsevol sistema generador de n vectors d'un espai vectorial de dimensió n no és lligada, ja que, en cas contrari, pel **teorema 14 (5)**, existiria un subsistema propi generador, la qual cosa és impossible pel fet que el nombre mínim de vectors de qualsevol sistema generador és n , segons el **corol·lari 2**. ■

Definició 1.18. S'anomenen **coordenades d'un vector** $\mathbf{v}$ d'un espai vectorial E respecte de la base $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ a la única família finita d'escalars $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ tals que

$$\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{v}_n$$

Observació 1.24. Aquesta última definició té sentit en virtut del **teorema 15 (5)**.

Exemple 1.31. L'espai geomètric ordinari és de tres dimensions, perquè, elegits tres vectors no coplanaris (no situats en l'mateix pla) $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$, sabem que tot vector $\overrightarrow{OM}$ pot escriure's com segueix:

$$\overrightarrow{OM} = \lambda \overrightarrow{OA} + \mu \overrightarrow{OB} + \nu \overrightarrow{OC}$$

Exemple 1.32. L'espai $\mathbb{K}^n$ dels vectors que són n -tuples d'elements $\mathbb{K}$ és de dimensió n . En efecte, considerem els n vectors següents:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= (1, 0, \dots, 0) \\ \mathbf{e}_2 &= (0, 1, \dots, 0) \\ &\vdots \\ \mathbf{e}_n &= (0, 0, \dots, 1) \end{aligned}$$

dels quals el i -ésim, $\mathbf{e}_i$, té component i -ésima igual a 1 i el resto, igual a 0. El $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ és generador de $\mathbb{K}^n$, ja que qualsevol vector $\mathbf{v} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ de $\mathbb{K}^n$ pot escriure's com segueix:

$$\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{e}_n$$

A més, aquest sistema és lliure. En efecte, la relació

$$\lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{e}_n = \mathbf{0}$$

només és possible si $\lambda_i = 0$ per a tot $1 \leq i \leq n$.

La base introduïda d'aquesta forma, associada de manera particularment senzilla a la definició de $\mathbb{K}^n$ s'anomena **base natural**.

Exemple 1.33. Proveu que els vectors de la família $\mathcal{S}$, essent

$$\mathcal{S} = ((2, 1, 1), (1, 3, 1), (-2, 1, 3))$$

formen una base de $\mathbb{R}^3$.

Solució. Sabem que la dimensió de $\mathbb{R}^3$ és tres. Pel **corol·lari 2**, és suficient proveu que $\mathcal{S}$ és lliure. En efecte, suposem que

$$\lambda(2, 1, 1) + \mu(1, 3, 1) + \nu(-2, 1, 3) = (0, 0, 0)$$

és a dir,

$$(2\lambda + \mu - 2\nu, \lambda + 3\mu + \nu, \lambda + \mu + 3\nu) = (0, 0, 0)$$

Per igualació dels seus components s'obté el següent sistema:

$$\left. \begin{aligned} 2\lambda + \mu - 2\nu &= 0 \\ \lambda + 3\mu + \nu &= 0 \\ \lambda + \mu + 3\nu &= 0 \end{aligned} \right\}$$

la solució del qual és $\nu = 0, \lambda = 0, \mu = 0$. Per tant, $\mathcal{S}$ és una base de $\mathbb{R}^3$. □

Exemple 1.34. Completar la següent família lliure $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ per a formar una base de $\mathbb{R}^4$, essent $\mathbf{v}_1 = (1, 1, -1, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 1, 0, 1)$, $\mathbf{v}_3 = (1, 2, 1, 1)$.

Solució. Sabem que la família $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$ és una base de $\mathbb{R}^4$, essent $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1, 0)$, $\mathbf{e}_4 = (0, 0, 0, 1)$. Tenim

$$\mathbf{v}_1 = 1\mathbf{e}_1 + 1\mathbf{e}_2 + (-1)\mathbf{e}_3 + 1\mathbf{e}_4$$

d'on

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4$$

Per tant,

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4) \sim (\mathbf{v}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$$

Tenim

$$\mathbf{v}_2 = 1\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{e}_2 + 1\mathbf{e}_3 + 0\mathbf{e}_4$$

d'on

$$\mathbf{e}_3 = -\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$$

Per tant,

$$(\mathbf{v}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4) \sim (\mathbf{v}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{v}_2, \mathbf{e}_4)$$

Finalment, es té

$$\mathbf{v}_3 = (-1)\mathbf{v}_1 + 1\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{v}_2 + 0\mathbf{e}_4$$

d'on

$$\mathbf{e}_2 = \mathbf{v}_1 - 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$$

Per tant,

$$(\mathbf{v}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{v}_2, \mathbf{e}_4) \sim (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_2, \mathbf{e}_4)$$

A més, es compleix

$$(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_2, \mathbf{e}_4) \sim (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{e}_4)$$

Per consegüent,

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4) \sim (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{e}_4)$$

i, en conseqüència, $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{e}_4)$ és una base de $\mathbb{R}^4$. □

Exemple 1.35. El conjunt dels polinomis en una indeterminada x amb coeficients en un cos commutatiu $\mathbb{K}$ és un espai vectorial sobre $\mathbb{K}$ que denotem per $\mathbb{K}[x]$. La família $(1, x, x^2, \dots)$ és una base de $\mathbb{K}[x]$ ja que tot polinomi pot escriure's com a combinació lineal d'una subfamília finita. Aquest espai és de dimensió infinita.

Exemple 1.36. En l'espai vectorial $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{R}$ la família $(1, i)$ és una base. La família $(1 + i, 1 - i)$ és una altra base.

1.14 Dimensió d'un subespai vectorial

Teorema 1.23. *Si E és un espai vectorial de dimensió n , tot subespai vectorial S de E és de dimensió finita i es compleix*

$$\dim S \leq \dim E$$

A més

$$\dim S = \dim E \quad \text{implica} \quad S = E$$

Demostració. El nombre de vectors de qualsevol sistema lliure i generador de E està fitat per n . Tot sistema lliure i generador de S tindrà com màxim un nombre determinat m de vectors de E . Per tant, $m \leq n$. Si $m = n$, els vectors d'una base de S constitueixen un sistema lliure de n vectors de E , i en conseqüència, una base de E . Per tant, $S = E$. Finalment, si $E = \{\mathbf{0}\}$, es té igualment $S = \{\mathbf{0}\}$. ■

Teorema 1.24. *En un espai vectorial E de dimensió finita, si partim una base en dos parts complementàries, les clausures lineals de cadascun dels sistemes així definits són subespais suplementaris.*

Demostració. Sigui $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ una base de E . Considerem els sistemes $\mathcal{S} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ i $\mathcal{S}' = (\mathbf{v}_{k+1}, \dots, \mathbf{v}_n)$, i siguin

$$\begin{aligned} S &= \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \rangle \\ T &= \langle \mathbf{v}_{k+1}, \dots, \mathbf{v}_n \rangle \end{aligned}$$

Per construcció, és clar que $S + T = E$. Sigui $\mathbf{v} \in S \cap T$, aleshores

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_k \mathbf{v}_k \\ \mathbf{v} &= \lambda_{k+1} \mathbf{v}_{k+1} + \dots + \lambda_n \mathbf{v}_n \end{aligned}$$

d'aquí s'obté

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_k \mathbf{v}_k - \lambda_{k+1} \mathbf{v}_{k+1} - \dots - \lambda_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

d'on $\lambda_i = 0$ per a tot $1 \leq i \leq n$, ja que $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ és un sistema lliure. Per consegüent, $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ i, en conseqüència, $S \cap T = \{\mathbf{0}\}$. ■

Teorema 1.25. *En un espai vectorial E de dimensió n , tot subespai S admet almenys un subespai suplementari T i es compleix*

$$E = S \oplus T \quad \text{implica} \quad \dim E = \dim S + \dim T$$

Demostració. Sigui $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p)$ una base de S . Existeix en E almenys un vector $\mathbf{v}_1$ tal que el sistema $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p, \mathbf{v}_1)$ és lliure, ja que, en cas contrari, els vectors $\mathbf{u}_i$ formarien una base de E i tindríem $S = E$ i, en conseqüència, $T = \{\mathbf{0}\}$. Es repeteix el raonament amb el sistema lliure $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p, \mathbf{v}_1)$ que té $p + 1$ vectors. Podem afegir-hi un altre vector $\mathbf{v}_2$ de manera que s'obtingui un altre sistema lliure $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ si $p + 1 < n$. Aquest procés acaba quan s'hagin introduït $n - p$ nous vectors, perquè s'haurà obtingut una base de E . Els vectors del sistema lliure $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{n-p})$ engendren un subespai vectorial T , la dimensió del qual és $n - p$, i és un suplementari de S . Finalment, si $S = \{\mathbf{0}\}$, aleshores $T = E$. ■

Observació 1.25. Una demostració alternativa basada en resultats anteriors és la següent: Si $\mathcal{S}$ és una base de S , segons el **corol·lari 3** de la secció anterior, existeix un sistema $\mathcal{S}'$ lliure tal que $(\mathcal{S}, \mathcal{S}')$ és una base de E . D'aquí, pel **teorema 20**, els subespais $S = \langle \mathcal{S} \rangle$ i $T = \langle \mathcal{S}' \rangle$ són suplementaris.

Teorema 1.26. *Siguin S i T dos subespais vectorials d'un espai vectorial E de dimensió finita. Aleshores es compleix*

$$\dim S + \dim T = \dim(S \cap T) + \dim(S + T)$$

Demostració. Sigui $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p)$ una base de $S \cap T$. Pel **corol·lari 3** de la secció anterior, podem completar aquesta base fins a obtenir una base de S i una base de T . Así tenim que $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p, \mathbf{u}_{p+1}, \dots, \mathbf{u}_k)$ és una base de S i $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p, \mathbf{v}_{p+1}, \dots, \mathbf{v}_m)$ és una base de T . Aleshores

$$(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p, \mathbf{u}_{p+1}, \dots, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_{p+1}, \dots, \mathbf{v}_m)$$

constitueix un sistema de generador de $S + T$. Si demostrem que tots aquests vectors són linealment independents, haurem obtingut una base de $S + T$ amb un nombre de vectors que prova la igualtat del enunciat. Suposem

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{u}_i + \sum_{i=p+1}^m \mu_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$$

aleshores

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{u}_i = - \sum_{i=p+1}^m \mu_i \mathbf{v}_i$$

és un vector de $S \cap T$, d'on

$$- \sum_{i=p+1}^m \mu_i \mathbf{v}_i = \sum_{j=1}^p \nu_j \mathbf{u}_j$$

és a dir

$$\sum_{j=1}^p \nu_j \mathbf{u}_j + \sum_{i=p+1}^m \mu_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$$

i, com que $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p, \mathbf{v}_{p+1}, \dots, \mathbf{v}_m)$ és una base de T , es dedueix $\nu_j = 0$ ($j = 1, \dots, p$) i $\mu_i = 0$ ($i = p+1, \dots, m$). Per tant,

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{u}_i = \mathbf{0}$$

i, com que $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p, \mathbf{u}_{p+1}, \dots, \mathbf{u}_k)$ és una base de S , es dedueix $\lambda_i = 0$ ($i = 1, \dots, k$). ■

Corol·lari 1.27. *En les mateixes condicions del teorema anterior, es compleix*

$$\dim(S \oplus T) = \dim S + \dim T$$

En aquest cas, la reunió d'una base de S i d'una base de T da una base de $S \oplus T$.

Demostració. És immediat, sabent que quan la suma és directa, $S \cap T = \{\mathbf{0}\}$; a més, $\dim \{\mathbf{0}\} = 0$ ■

Corol·lari 1.28. *La suma $S + T$ de dos subespais és directa si i només si $\dim S + \dim T = \dim(S + T)$.*

Demostració. És immediat a partir del teorema precedent. ■

Exemple 1.37. Determineu una base per a la suma i la intersecció dels subespais S i T de $\mathbb{R}^4$ generats pels conjunts $\{(1, 2, 1, 0), (-1, 1, 1, 1)\}$ i $\{(2, -1, 0, 1), (1, -1, 3, 7)\}$ respectivament.

Solució. És clar que $\dim S = 2$ i $\dim T = 2$. Un vector $(x, y, z, t) \in S \cap T$ ha de complir

$$(x, y, z, t) = \alpha(1, 2, 1, 0) + \beta(-1, 1, 1, 1) = \lambda(2, -1, 0, 1) + \mu(1, -1, 3, 7)$$

és a dir

$$(\alpha - \beta, 2\alpha + \beta, \alpha + \beta, \beta) = (2\lambda + \mu, -\lambda - \mu, 3\mu, \lambda + 7\mu)$$

Per tant, s'obté el següent sistema

$$\left. \begin{array}{lcl} E_1 : & \alpha - \beta & = 2\lambda + \mu \\ E_2 : & 2\alpha + \beta & = -\lambda - \mu \\ E_3 : & \alpha + \beta & = 3\mu \\ E_4 : & \beta & = \lambda + 7\mu \end{array} \right\}$$

Efectuant les transformacions indicades

$$\begin{array}{lcl} E_1 + E_2 : & 3\alpha = \lambda \\ E_3 : & \beta = \lambda + 7\mu \end{array}$$

Substituint aquests resultats en E_3 es té

$$\lambda = -3\mu$$

Per tant, $\alpha = -\mu$, $\beta = 4\mu$ i $\lambda = -3\mu$. D'aquí, es té

$$(x, y, z, t) = -\mu(1, 2, 1, 0) + 4\mu(-1, 1, 1, 1) = \mu(-5, 2, 3, 4)$$

Per tant,

$$S \cap T = \langle (-5, 2, 3, 4) \rangle$$

i, en conseqüència, $((-5, 2, 3, 4))$ és una base de $S \cap T$ i $\dim(S \cap T) = 1$. Per la fórmula del **teorema 22**, es dedueix

$$\dim(S + T) = \dim S + \dim T - \dim(S \cap T) = 2 + 2 - 1 = 3$$

Sabem que

$$S + T = \langle (1, 2, 1, 0), (-1, 1, 1, 1), (2, -1, 0, 1), (1, -1, 3, 7) \rangle$$

i pel resultat anterior ha de ser un dels vectors generadors dependent dels altres. Per trobar-lo apliquem successives transformacions elementals amb objecte de trobar un sistema equivalent lliure.

$$\begin{array}{cccc|cccc} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 & \mathbf{v}_4 & \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_2 & \mathbf{v}_3 - 2\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_3 & \mathbf{v}_4 - \mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_4 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 & \sim 2 & 3 & -5 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & 1 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 7 & 0 & 1 & 1 & 7 \end{array} \sim$$

$$\begin{array}{cccc|cccc} \mathbf{v}_1 & \mathbf{u}_2 & 5\mathbf{u}_2 + 3\mathbf{u}_3 = \mathbf{w}_3 & \mathbf{u}_4 + \mathbf{u}_2 = \mathbf{w}_4 & \mathbf{v}_1 & \mathbf{u}_2 & \mathbf{w}_3 & \mathbf{w}_4 - \mathbf{w}_3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & \sim 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 4 & 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & 8 & 0 & 1 & 8 & 0 \end{array}$$

Per consegüent

$$S + T = \langle (1, 2, 1, 0), (0, 3, 2, 1), (0, 0, 4, 8) \rangle$$

i una base de $S + T$ és $((1, 2, 1, 0), (0, 3, 2, 1), (0, 0, 4, 8))$.

□

1.15 Espai vectorial quocient

Sigui E un espai vectorial i F un subespai vectorial de E .

Definició 1.19. Diem que $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in E$ estan **relacionats mòdul** F si $\mathbf{u} - \mathbf{v} \in F$. Simbòlicament, escrivim

$$\mathbf{u} \equiv \mathbf{v} \bmod F \text{ si i només si } \mathbf{u} - \mathbf{v} \in F$$

Teorema 1.29. *Aquesta relació és una congruència sobre E .*

Demostració. Primer provarem que $\equiv$ és una relació d'equivalència. En efecte, per a tot $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in E$ es té: (1) $\mathbf{u} \equiv \mathbf{u} \bmod F$, ja que $\mathbf{u} - \mathbf{u} = \mathbf{0} \in F$ ($\equiv$ és reflexiva); (2) si $\mathbf{u} \equiv \mathbf{v} \bmod F$, és a dir, $\mathbf{u} - \mathbf{v} \in F$, aleshores $-(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \mathbf{v} - \mathbf{u} \in F$, és a dir, $\mathbf{v} \equiv \mathbf{u} \bmod F$ ($\equiv$ és simètrica); (3) si $\mathbf{u} \equiv \mathbf{v} \bmod F$ i $\mathbf{v} \equiv \mathbf{w} \bmod F$, és a dir, si $\mathbf{u} - \mathbf{v} \in F$ i $\mathbf{v} - \mathbf{w} \in F$, aleshores $(\mathbf{u} - \mathbf{v}) + (\mathbf{v} - \mathbf{w}) = \mathbf{u} - \mathbf{w} \in F$, és a dir, $\mathbf{u} \equiv \mathbf{w} \bmod F$ ($\equiv$ és transitiva).

Segon, provarem que $\equiv$ és una relació compatible amb les operacions de E . En efecte, per a tot $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in E$ i $\lambda \in \mathbb{K}$, si $\mathbf{u}_1 \equiv \mathbf{v}_1 \bmod F$ i $\mathbf{u}_2 \equiv \mathbf{v}_2 \bmod F$, aleshores $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \equiv \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \bmod F$, ja que de

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_1 - \mathbf{v}_1 &\in F \\ \mathbf{u}_2 - \mathbf{v}_2 &\in F\end{aligned}$$

es dedueix

$$(\mathbf{u}_1 - \mathbf{v}_1) + (\mathbf{u}_2 - \mathbf{v}_2) = (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) - (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \in F$$

I, si $\mathbf{u}_1 - \mathbf{v}_1 \in F$, aleshores $\lambda \mathbf{u}_1 - \lambda \mathbf{v}_1 \in F$, ja que de $\mathbf{u}_1 - \mathbf{v}_1 \in F$ es dedueix que $\lambda(\mathbf{u}_1 - \mathbf{v}_1) = \lambda \mathbf{u}_1 - \lambda \mathbf{v}_1 \in F$. ■

Teorema 1.30. *El conjunt quocient E/F juntament amb les següents operacions:*

$$\begin{aligned}[\mathbf{u}] + [\mathbf{v}] &= [\mathbf{u} + \mathbf{v}] \\ \lambda [\mathbf{u}] &= [\lambda \mathbf{u}]\end{aligned}$$

on $[\mathbf{u}] = \{\mathbf{u} + \mathbf{v} : \mathbf{v} \in F\}$ designa la **classe del vector** $\mathbf{u} \in E$, és un **espai vectorial** sobre $\mathbb{K}$.

Definició 1.20. S'anomena **espai vectorial quocient mòdul** F , denotat per E/F , al conjunt quocient E/F amb les dos operacions definides en el teorema anterior. Denotarem també la classe del vector $\mathbf{u}$ per $\mathbf{u} + F$.

Teorema 1.31. *Si E és de dimensió finita, E/F també ho és i es compleix*

$$\dim(E/F) = \dim E - \dim F$$

Demostració. Completem una base $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$ de F fins a obtenir una base $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m, \mathbf{v}_{m+1}, \dots, \mathbf{v}_n)$ de E . És clar que

$$[\mathbf{v}_i] = [\mathbf{0}]$$

per a tot $1 \leq i \leq m$. Afirmem que $([\mathbf{v}_{m+1}], \dots, [\mathbf{v}_n])$ és una base de E/F . En efecte, tota classe $[\mathbf{u}]$ d'un vector

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{v}_i$$

es pot escriure com segueix

$$[\mathbf{u}] = \sum_{i=1}^n \lambda_i [\mathbf{v}_i] = \sum_{i=m+1}^n \lambda_i [\mathbf{v}_i]$$

Per tant, $([\mathbf{v}_{m+1}], \dots, [\mathbf{v}_n])$ és un sistema generador de E/F .

Per veure-ho que el sistema $([\mathbf{v}_{m+1}], \dots, [\mathbf{v}_n])$ és lliure, considerem

$$\sum_{i=m+1}^n \lambda_i [\mathbf{v}_i] = [\mathbf{0}]$$

és a dir,

$$\left[\sum_{i=m+1}^n \lambda_i \mathbf{v}_i \right] = [\mathbf{0}]$$

d'on

$$\sum_{i=m+1}^n \lambda_i \mathbf{v}_i \in F$$

Aleshores

$$\sum_{i=m+1}^n \lambda_i \mathbf{v}_i = \sum_{j=1}^m \mu_j \mathbf{v}_j$$

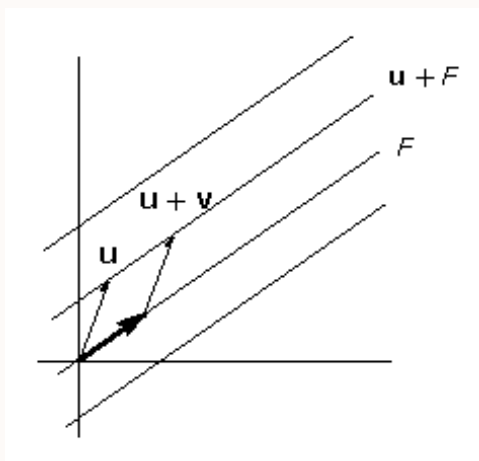
és a dir,

$$\sum_{j=1}^m \mu_j \mathbf{v}_j - \sum_{i=m+1}^n \lambda_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$$

Ara bé, $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m, \mathbf{v}_{m+1}, \dots, \mathbf{v}_n)$ és una base de E . Per tant, $\mu_j = 0$ ($j = 1, \dots, m$) i $\lambda_i = 0$ ($i = m+1, \dots, n$).

Hem obtingut una base de E/F , i demostrem així la igualtat del enunciat. ■

Exemple 1.38. Considerem un subespai $F = \langle \mathbf{v} \rangle$ de $\mathbb{R}^2$. Si representem els elements de $\mathbb{R}^2$ com punts del pla, els vectors de F corresponen als punts de una recta que passa per l'origen. Cadascuna de les classes $\mathbf{u} + F$ correspon, aleshores, a punts d'una recta paral·lela a F que passa per $\mathbf{u}$. L'espai $\mathbb{R}^2/F$ és, en aquest cas, el conjunt de rectes paral·leles a F . Anàlogament, si $F = \langle \mathbf{v} \rangle \subset \mathbb{R}^3$, aleshores $\mathbb{R}^3/F$ és el conjunt de rectes de $\mathbb{R}^3$ paral·leles a una recta F que passa per l'origen. Si $F = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \subset \mathbb{R}^3$ és de dimensió 2, F correspon a un pla que passa pel origen i $\mathbb{R}^3/F$ és el conjunt de plas paral·lels a F .



1.16 Rang d'un sistema de vectors

Definició 1.21. S'anomena **rang** d'un sistema $\mathcal{S} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$ de E , denotat per $\text{rang } \mathcal{S}$, a la dimensió de la clausura lineal d'aquest sistema, és a dir, en símbols

$$\text{rang } \mathcal{S} = \dim \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m \rangle$$

Observació 1.26. Dit d'una altra manera, el rang del sistema $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$ és el nombre màxim de vectors linealment independents que conté.

Teorema 1.32. Si $\mathcal{S}$ i $\mathcal{S}'$ són dos sistemes equivalents de E , aleshores

$$\text{rang } \mathcal{S} = \text{rang } \mathcal{S}'$$

Demostració. És una conseqüència immediata de la **definició 11**. ■

Corol·lari 1.33. Donat un sistema $\mathcal{S} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$, el seu rang no varia si s'efectua qualsevol de les transformacions elementals:

1. $\text{rang } (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_j, \dots, \mathbf{v}_m) = \text{rang } (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_j, \dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_m) \quad (i \neq j)$
2. $\text{rang } (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_m) = \text{rang } (\mathbf{v}_1, \dots, \lambda \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_m) \quad (\lambda \neq 0)$
3. $\text{rang } (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i, \dots, \mathbf{v}_j, \dots, \mathbf{v}_m) = \text{rang } (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_i + \lambda \mathbf{v}_j, \dots, \mathbf{v}_j, \dots, \mathbf{v}_m) \quad (i \neq j)$

Demostració. Estos resultats són conseqüències del **teorema 13**. ■

Corol·lari 1.34. Donat un sistema $\mathcal{S} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$, aleshores

$$\text{rang } (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m) = \text{rang } (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m, \mathbf{w})$$

si i només si $\mathbf{w}$ és combinació lineal dels vectors de $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$.

Demostració. És una conseqüència immediata del **teorema 12**. ■

Observació 1.27. Aquest darrer resultat permet assegurar que el rang d'un sistema no varia quan suprimim els vectors que són dependents dels restants; en particular, podem suprimir els vectors nuls, i dels vectors repetits, ens quedem només amb un d'ells.

Teorema 1.35. Donat un sistema de r vectors $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r)$ d'un espai vectorial E de dimensió n ($r \leq n$) i $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ una base de E . Si expressem aquests vectors en aquesta base

$$\mathbf{u}_i = \sum_{j=1}^n \lambda_{ij} \mathbf{v}_j \quad (i = 1, \dots, r)$$

i es compleix

$$\lambda_{ij} = 0 \text{ per a } j < i$$

i

$$\lambda_{ii} \neq 0 \text{ per a tot } i = 1, \dots, r$$

aleshores $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_r)$ és un sistema lliure.

Demostració. Considerem

$$\mu_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \mu_r \mathbf{u}_r = \mathbf{0}$$

Introduint les coordenades dels vectors en la base es té

$$\mu_1 \sum_{j=1}^n \lambda_{1j} \mathbf{v}_j + \dots + \mu_r \sum_{j=1}^n \lambda_{rj} \mathbf{v}_j = \mathbf{0}$$

D'aquí, com que $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ és lliure, es s'obtenen

$$\sum_{i=1}^r \mu_i \lambda_{ij} = 0 \quad (j = 1, \dots, n)$$

Si ara tenim en compte les propietats de les λ_{ij} , obtenim:

$$\mu_1 \lambda_{11} = 0$$

$$\mu_1 \lambda_{12} + \mu_2 \lambda_{22} = 0$$

$$\mu_1 \lambda_{13} + \mu_2 \lambda_{23} + \mu_3 \lambda_{33} = 0$$

$\vdots$

$$\mu_1 \lambda_{1r} + \mu_2 \lambda_{2r} + \dots + \mu_r \lambda_{rr} = 0$$

és a dir, $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_r = 0$. ■

Observació 1.28. El teorema anterior ens dona un mètode per determinar el rang d'un sistema. Per veure-ho, examina amb detall el següent exemple.

Exemple 1.39. En $\mathbb{R}^4$ determineu el rang del sistema $\mathcal{S} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$, essent $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 2, 0)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 1, 0, 6)$, $\mathbf{v}_3 = (-1, 2, 0, 1)$, $\mathbf{v}_4 = (1, 1, 1, 3)$.

Solució. Prenent la base canònica de $\mathbb{R}^4$, escrivim les coordenades d'aquests vectors per files (de la mateixa manera es faria per columnes) com segueix:

$$\begin{array}{lcl} \mathbf{v}_1 : & 1 & 1 \quad 2 \quad 0 \\ \mathbf{v}_2 : & 1 & 1 \quad 0 \quad 6 \\ \mathbf{v}_3 : & -1 & 2 \quad 0 \quad 1 \\ \mathbf{v}_4 : & 1 & 1 \quad 1 \quad 3 \end{array}$$

aplicant 3 vegades T3 s'obté

$$\begin{array}{lcl} v_1 : & 1 & 1 \quad 2 \quad 0 \\ v_2 - v_1 : & 0 & 0 \quad -2 \quad 6 \\ v_3 + v_1 : & 0 & 3 \quad 2 \quad 1 \\ v_4 - v_1 : & 0 & 0 \quad -1 \quad 3 \end{array}$$

aplicant ara 2 vegades T1 s'obté

$$\begin{array}{lcl} \mathbf{v}_1 : & 1 & 1 \quad 2 \quad 0 \\ \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_1 : & 0 & 3 \quad 2 \quad 1 \\ \mathbf{v}_4 - \mathbf{v}_1 : & 0 & 0 \quad -1 \quad 3 \\ \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 : & 0 & 0 \quad -2 \quad 6 \end{array}$$

aplicant una vez T3 s'obté

$$\begin{array}{lcl} \mathbf{v}_1 : & 1 & 1 \quad 2 \quad 0 \\ \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_1 : & 0 & 3 \quad 2 \quad 1 \\ \mathbf{v}_4 - \mathbf{v}_1 : & 0 & 0 \quad -1 \quad 3 \\ \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 - 2(\mathbf{v}_4 - \mathbf{v}_1) : & 0 & 0 \quad 0 \quad 0 \end{array}$$

finalment, suprimint el vector nul es té

$$\begin{array}{lcl} \mathbf{v}_1 : & 1 & 1 \quad 2 \quad 0 \\ \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_1 : & 0 & 3 \quad 2 \quad 1 \\ \mathbf{v}_4 - \mathbf{v}_1 : & 0 & 0 \quad -1 \quad 3 \end{array}$$

D'aquesta manera tenim

$$(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4) \sim (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_4 - \mathbf{v}_1)$$

Per tant,

$$\text{rang}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4) = \text{rang}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_4 - \mathbf{v}_1)$$

El sistema $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_4 - \mathbf{v}_1)$ a més és lliure, ja que compleix les coordenades d'aquests vectors compleixen les condicions del teorema anterior. Per tant,

$$\text{rang}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4) = \text{rang}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_4 - \mathbf{v}_1) = 3$$

Com a conseqüència sistema donat $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ és lligat. A més, a partir de les transformacions aplicades anteriorment deduïm una relació de dependència

$$\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 - 2(\mathbf{v}_4 - \mathbf{v}_1) = \mathbf{0}$$

és a dir

$$\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - 2\mathbf{v}_4 = \mathbf{0}$$

En general, comprovarem que el mètode ens dona no només el rang s del sistema $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_r)$, és a dir, la dimensió del subespai generat, sino també una base d'aquest subespai i les $r - s$ relacions de dependència existeixents entre els vectors del sistema. En particular, si E és de dimensió n i $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ és una base, aquest mètode permet calculeu les coordenades d'un vector qualsevol respecte d'aquesta base.

□

1.17 Isomorfismes d'espais vectorials

Definició 1.22. Donats dos espais vectorials E i E' sobre el mateix cos $\mathbb{K}$. S'anomena **isomorfisme** de E en E' a tota aplicació bijectiva $f : E \rightarrow E'$ que compleix:

1. Per a tot $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in E$, $f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v})$
2. Per a tot $\mathbf{u} \in E$ i $\lambda \in \mathbb{K}$, $f(\lambda\mathbf{u}) = \lambda f(\mathbf{u})$

Si existeix un isomorfisme de E en E' , aleshores es diu que E i E' són dos espais vectorials **isomorfs**. Escrivem aleshores

$$E \cong E'$$

Observació 1.29. Fem les observacions següents:

1. Afirmar que dos espais vectorials són isomorfs equival a dir que tots dos tenen la mateixa estructura d'espai vectorial.
2. Estudiarem amb detall els isomorfismes com cas particular dels homomorfismes d'espais vectorials (o aplicacions lineals) més endavant en la secció corresponent.

Teorema 1.36. Si E_1 i E_2 són dos subespais suplementaris de un espai vectorial E , aleshores els espais $E = E_1 \oplus E_2$ i $E_1 \times E_2$ són isomorfs.

Demostració. Si E_1 i E_2 són dos subespais suplementaris de E , aleshores $E = E_1 \oplus E_2$. Considerem la descomposició única de tot $\mathbf{v} \in E$ com

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$$

amb $\mathbf{v}_1 \in E_1$ i $\mathbf{v}_2 \in E_2$. Considerem l'aplicació f de $E_1 \times E_2$ en $E_1 \oplus E_2$ definida per

$$f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$$

Per construcció, és clar que f és bijectiva. A més es compleix

$$\begin{aligned} f((\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) + (\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2)) &= f(\mathbf{v}_1 + \mathbf{w}_1, \mathbf{v}_2 + \mathbf{w}_2) = \\ &= (\mathbf{v}_1 + \mathbf{w}_1) + (\mathbf{v}_2 + \mathbf{w}_2) = \\ &= (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) + (\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) = \\ &= f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) + f(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} f(\lambda(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)) &= f(\lambda\mathbf{v}_1, \lambda\mathbf{v}_2) = \\ &= \lambda\mathbf{v}_1 + \lambda\mathbf{v}_2 = \\ &= \lambda(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \\ &= \lambda f(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \end{aligned}$$

Per consegüent, f és un isomorfisme. ■

Observació 1.30. Si E_1 i E_2 són dos espais vectorials sobre $\mathbb{K}$, podem construir un nou espai vectorial E que els contingui tots dos llevat d'un isomorfisme. En efecte, considerem l'espai vectorial producte $E_1 \times E_2$. Tot vector $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ de l'espai producte $E_1 \times E_2$ pot descompondre's com segueix de manera única

$$(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = (\mathbf{v}_1, \mathbf{0}) + (\mathbf{0}, \mathbf{v}_2)$$

Considerem ara els dos subespais següents de $E_1 \times E_2$:

$$E'_1 = \{(\mathbf{v}_1, \mathbf{0}) : \mathbf{v}_1 \in E_1\}$$

i

$$E'_2 = \{(\mathbf{0}, \mathbf{v}_2) : \mathbf{v}_2 \in E_2\}$$

És evident que $E_1 \times E_2 = E'_1 \oplus E'_2$, ja que els dos subespais tenen intersecció $\{(\mathbf{0}, \mathbf{0})\}$.

D'altra banda, és immediat comprovar que les aplicacions, $f_1 : E'_1 \rightarrow E_1$ definida per $f_1(\mathbf{v}_1, \mathbf{0}) = \mathbf{v}_1$, i $f_2 : E'_2 \rightarrow E_2$ definida per $f_2(\mathbf{0}, \mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_2$, són isomorfismes d'espais vectorials.

Com a conseqüència d'això, en la pràctica s'identifica sempre E_i i E'_i ($i = 1, 2$); identificar per exemple E_1 i E'_1 vol dir, confondre els vectors $\mathbf{v}_1 \in E_1$ i $(\mathbf{v}_1, \mathbf{0}) \in E'_1$. Aquesta identificació permet dir que E_1 i E_2 són subespais suplementaris de $E_1 \times E_2$. Pel teorema, els espais $E_1 \times E_2$ i $E_1 \oplus E_2$ són isomorfs.

L'espai $E = E_1 \oplus E_2$ s'anomena **suma directa dels espais vectorials** donats E_1 i E_2 . Aleshores, és clar que E té E_1 i E_2 com a subespais suplementaris i es compleix que E i $E_1 \times E_2$ són isomorfs.

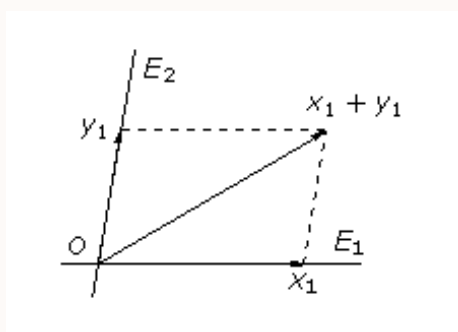
En aquestes condicions, si $\mathbf{v} \in E$, la descomposició única $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, fa que l'aplicació de E en E_i definida per

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \longmapsto \mathbf{v}_i$$

s'identifica amb l'aplicació de $E_1 \times E_2$ en E_i , que s'anomena la **projecció** π_i de $E_1 \times E_2$ sobre E_i ($i = 1, 2$). Per exemple, π_1 s'anomena **projecció de E sobre el subespai E_1 paral·lelament al subespai E_2** , suplementari de E_1 respecte de E . Es diu també que $\mathbf{v}_1$ (resp. $\mathbf{v}_2$) és la **component de $\mathbf{v}$ de E en E_1 (resp. E_2)**.

Exemple 1.40. Proveu que els espais vectorials següents $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ i $\mathbb{R}^2$ són isomorfs.

Solució. Si prenem $E_1 = E_2 = \mathbb{R}$. Segons la observació anterior, podem afirmar que els espais vectorials reals $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ i $\mathbb{R}^2$ són isomorfs. Si representem els elements de E_1 com els vectors de l'eix real Ox , els de E_2 com els vectors de l'eix real Oy , diferent de Ox , i els de $E_1 \times E_2$ com els vectors d'origen O del pla ordinari, aleshores identificar $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ i $\mathbb{R}^2$ equival a confondre (x_1, y_1) de $\mathbb{R}^2$ i $x_1 + y_1$ de $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$. La figura següent il·lustra aquest fet.



□

Teorema 1.37. Si E_1 i E_2 són dos subespais suplementaris de un espai vectorial E , aleshores l'espai quocient E/E_1 és isomorfo a E_2 .

Demostració. Si E_1 i E_2 són dos subespais suplementaris de un espai vectorial E , aleshores $E = E_1 \oplus E_2$. Donats $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ i $\mathbf{w} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$ de E , la relació $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \equiv \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \pmod{E_1}$ pot escriure's com segueix

$$(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) - (\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) = \mathbf{v}_1 - \mathbf{w}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{w}_2 \in E_1$$

equivalent a $\mathbf{v}_2 = \mathbf{w}_2$. Per tant, tots els vectors d'una mateixa classe tenen la mateixa component en E_2 . Considerem l'aplicació $f : E/E_1 \rightarrow E_2$ denida per

$$f([\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2]) = \mathbf{v}_2$$

És clar que f és exhaustiva, ja que qualsevol que sigui $\mathbf{v}_2$ de E_2 existeix $[\mathbf{0} + \mathbf{v}_2]$ tal que $f([\mathbf{0} + \mathbf{v}_2]) = \mathbf{v}_2$. A més, si

$$f([\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2]) = f([\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2])$$

aleshores $\mathbf{v}_2 = \mathbf{w}_2$. Per tant,

$$(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) - (\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) \in E_1$$

és a dir,

$$[\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2] = [\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2]$$

Per tant, f és injectiva. Se compleix

$$f([v] + [w]) = f([v + w]) = v_2 + w_2 = f([v]) + f([w])$$

i

$$f(\lambda[v]) = f([\lambda v]) = \lambda v_2 = \lambda f([v])$$

Per tant, f és un isomorfisme. ■

Corol·lari 1.38. *En un espai vectorial E , tots els subespais suplementaris d'un subespai vectorial E_1 de E són isomorfs.*

Demostració. És una conseqüència immediata del teorema anterior. ■

Teorema 1.39. *Dos espais vectorials E i E' de dimensió finita sobre el mateix cos K són isomorfs si i només si tenen la mateixa dimensió.*

Demostració. Suposem que E i E' són de la mateixa dimensió n . Elegim una base $(v_1, \dots, v_n)$ de E i una altra $(w_1, \dots, w_n)$ de E' . Pel **teorema 15 (5)**, tot vector $u \in E$ admet una expressió única com segueix

$$u = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n$$

Considerem l'aplicació f de E en E' definida per

$$f(u) = \mu_1 w_1 + \dots + \mu_n w_n$$

És clar que f és bijectiva. D'altra banda, si $f(v) = \nu_1 w_1 + \dots + \nu_n w_n$, aleshores es compleix:

$$\begin{aligned} f(u + v) &= (\mu_1 + \nu_1)w_1 + \dots + (\mu_n + \nu_n)w_n = \\ &= (\mu_1 w_1 + \dots + \mu_n w_n) + (\nu_1 w_1 + \dots + \nu_n w_n) = \\ &= f(u) + f(v) \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} f(\lambda u) &= \lambda \mu_1 w_1 + \dots + \lambda \mu_n w_n = \\ &= \lambda(\mu_1 w_1 + \dots + \mu_n w_n) = \\ &= \lambda f(u) \end{aligned}$$

Per tant, aquesta aplicació és un isomorfisme de E en E' .

Recíprocament, suposem que E i E' són isomorfs, i sigui f el isomorfisme de E en E' . Suposem també que $\dim E = n$ i $\dim E' = n'$. Elegim una base $(v_1, \dots, v_n)$ de E . Denotem per $w_i = f(v_i)$ per a cada $1 \leq i \leq n$. Qualsevol vector $u \in E$ admet una expressió única com segueix

$$u = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n$$

D'aquí, es té

$$\begin{aligned} f(\mathbf{u}) &= f(\mu_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \mu_n \mathbf{v}_n) = \\ &= \mu_1 f(\mathbf{v}_1) + \cdots + \mu_n f(\mathbf{v}_n) = \\ &= \mu_1 \mathbf{w}_1 + \cdots + \mu_n \mathbf{w}_n \end{aligned}$$

Com que f és exhaustiva, qualsevol vector $\mathbf{w} \in E'$ té una antiimagen en E . Suposem que $f(\mathbf{u}) = \mathbf{w}$, aleshores

$$\mathbf{w} = \mu_1 \mathbf{w}_1 + \cdots + \mu_n \mathbf{w}_n$$

Per tant, $(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n)$ és un sistema generador de E' . Veurem ara que $(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n)$ és lliure. Per fer-ho, considerem

$$\lambda_1 \mathbf{w}_1 + \cdots + \lambda_n \mathbf{w}_n = \mathbf{0}$$

és a dir

$$\lambda_1 f(\mathbf{v}_1) + \cdots + \lambda_n f(\mathbf{v}_n) = \mathbf{0}$$

D'aquí, segons la definició de isomorfisme, es dedueix

$$f(\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_n \mathbf{v}_n) = f(\mathbf{0})$$

ja que

$$f(\mathbf{0}) = f(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = f(\mathbf{0}) + f(\mathbf{0}) \quad \text{implica} \quad f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

Ara bé, f és injectiva. Per tant,

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_n \mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

Com que $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ és una base de E , es dedueix que $\lambda_i = 0$ per a tot $1 \leq i \leq n$. Per consegüent, $(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n)$ és una base de E' . En conseqüència, els dos espais vectorials tenen la mateixa dimensió. ■

Observació 1.31. En la demostració d'aquest teorema es prova també que si dos espais vectorials de dimensió finita són isomorfs, la aplicació transforma una base d'un en una base de l'altre. A més, el isomorfisme queda perfectament definit un cop elegida una base de cada espai vectorial. En concret, el isomorfisme associa vectors de les mateixes coordenades.

Corol·lari 1.40. *Tot espai vectorial E de dimensió n sobre $\mathbb{K}$ és isomorfo a $\mathbb{K}^n$.*

Demostració. El isomorfisme s'estableix una vez elegidas les bases: en E escollim una base arbitrària $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ i en $\mathbb{K}^n$ podem tomar la base natural $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$. Aleshores, el vector $\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_n \mathbf{v}_n$ de E de coordenades $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ respecte de la base considerada es correspon amb el vector $\mathbf{w} = \lambda_1 \mathbf{e}_1 + \cdots + \lambda_n \mathbf{e}_n$ de $\mathbb{K}^n$ de les mateixes coordenades en la base natural. ■

Observació 1.32. Després d'aquest darrer resultat, el estudi de E , des de el punt de vista de la seva estructura vectorial, s'identifica així amb l'estudi de $\mathbb{K}^n$ referit a la seva base natural. Aquesta és la raó per la que s'anomena també **base canònica** a la base natural de $\mathbb{K}^n$. Observeu que amb aquest resultat hem resolt el problema de determinar (llevat d'isomorfisme) tots els espais vectorials de dimensió finita.

Corol·lari 1.41. *Donats dos espais vectorials E_1 i E_2 de dimensions finites, aleshores es compleix*

$$\dim(E_1 \times E_2) = \dim(E_1 \oplus E_2) = \dim E_1 + \dim E_2$$

Demostració. Segons la **observació 30** es té

$$E_1 \times E_2 \cong E_1 \oplus E_2$$

Per tant, pel **teorema 30**, tenim

$$\dim(E_1 \times E_2) = \dim(E_1 \oplus E_2)$$

Per provar la darrera igualtat, suposem que $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ i $(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m)$ són bases de E_1 i E_2 respectivament. Aleshores és immediat provar que

$$((\mathbf{v}_1, \mathbf{0}), \dots, (\mathbf{v}_n, \mathbf{0}), (\mathbf{0}, \mathbf{w}_1), \dots, (\mathbf{0}, \mathbf{w}_m))$$

és una base de l'espai producte $E_1 \times E_2$. Per tanto

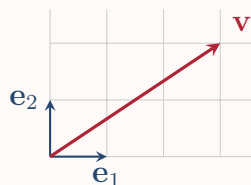
$$\dim(E_1 \times E_2) = n + m$$

■

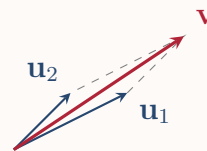
1.18 Canvi de coordenades

Definició 1.23. S'anomenen **coordenades d'un vector $\mathbf{v}$** d'un espai vectorial E respecte de la base $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ a la única família finita d'escalars $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ tals que

$$\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{v}_n$$



$$\mathbf{v} = 3\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2: \text{coordenades } (3, 2) \quad \mathbf{v} = 1\mathbf{u}_1 + 1\mathbf{u}_2: \text{coordenades } (1, 1)$$



Un mateix vector té coordenades diferents segons la base: $(3, 2)$ en la base canònica i $(1, 1)$ en la base $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$, amb $\mathbf{u}_1 = (2, 1)$ i $\mathbf{u}_2 = (1, 1)$.

Definició 1.24. Donat un espai vectorial E , en passar d'una base $\mathcal{B}_1$ a una base $\mathcal{B}_2$, diem que els vectors de E **canvien** els seus **coordenades**. Es diu que el vector $\mathbf{v}$ té coordenades $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ en $\mathcal{B}_1 = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ i $(\mu_1, \dots, \mu_n)$ en $\mathcal{B}_2 = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$. La base $\mathcal{B}_1$ s'anomena **base antiga** i a $\mathcal{B}_2$, la **base nova**. En el **teorema 31** s'indicarà com es calculen les coordenades noves a partir de les antigues i reciprocament, i, en l' **teorema 32** es donaran les equacions que caracteritzen la relació que hi ha entre les dues bases.

Observació 1.33. Suposant $E = E'$ en l'**teorema 30** i elegint dues bases diferents $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ i $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ de E , l'aplicació bijectiva que assigna a $\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{v}_n$ el vector $\mathbf{w} = \lambda_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{u}_n$, és un automorfisme de E (un isomorfisme de E en si mateix). Això fa que l'estudi de E , realitzat utilitzant la base antiga, es conservi idènticament quan canviem de base i reemplacem els vectors estudiats pels seus transformats en l'automorfisme associat, és a dir, els vectors expressats en la base nova.

Teorema 1.42. Donades dues bases diferents $\mathcal{B}_1 = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ i $\mathcal{B}_2 = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ d'un espai vectorial E . Sigui $\mathbf{v}$ un vector arbitrari de E de coordenades $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ en la base $\mathcal{B}_1$ i de coordenades $(\mu_1, \dots, \mu_n)$ en la base $\mathcal{B}_2$. Aleshores existeixen n^2 coeficients α_{ij} i β_{ij} tals que

$$\lambda_i = \mu_1 \alpha_{i1} + \dots + \mu_n \alpha_{in} \quad (i = 1, \dots, n)$$

i

$$\mu_i = \lambda_1 \beta_{i1} + \dots + \lambda_n \beta_{in} \quad (i = 1, \dots, n)$$

Demostració. Sigui $\mathbf{v}$ un vector arbitrari de E de coordenades $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ en la base antiga $\mathcal{B}_1$. Volem trobar les seves noves coordenades en la base nova $\mathcal{B}_2$. Els vectors de la nova base estan definits per mitjà de les seves coordenades en la base antiga per les equacions

$$\mathbf{u}_j = \alpha_{1j} \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_{nj} \mathbf{v}_n \quad (j = 1, \dots, n) \quad (1.18.1)$$

la qual cosa introdueix n^2 coeficients α_{ij} . El vector $\mathbf{v}$ es descompon de dues maneres

$$\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{v}_n = \mu_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \mu_n \mathbf{u}_n$$

essent $(\mu_1, \dots, \mu_n)$ les coordenades noves de $\mathbf{v}$. Reemplaçant els $\mathbf{u}_j$ de (1), s'obté

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_n \mathbf{v}_n = \mu_1 (\alpha_{11} \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_{n1} \mathbf{v}_n) + \dots + \mu_n (\alpha_{1n} \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_{nn} \mathbf{v}_n)$$

identificant en tots dos membres els coeficients de $\mathbf{v}_j$ es té

$$\lambda_i = \mu_1 \alpha_{i1} + \dots + \mu_n \alpha_{in} \quad (i = 1, \dots, n)$$

Aquestes són les expressions de les coordenades antigues en funció de les noves. Si es volen obtenir les fórmules inverses, n'hi ha prou d'escriure els vectors de la base antiga per mitjà de les seves coordenades en la nova base

$$\mathbf{v}_j = \beta_{1j} \mathbf{u}_1 + \dots + \beta_{nj} \mathbf{u}_n \quad (j = 1, \dots, n) \quad (1.18.2)$$

i procedint de la mateixa manera s'obté

$$\mu_i = \lambda_1 \beta_{i1} + \cdots + \lambda_n \beta_{in} \quad (i = 1, \dots, n)$$

■

Observació 1.34. Podem escriure aquestes equacions d'una manera més còmoda utilitzant matrius. Considerem les matrius següents

$$P = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \cdots & \beta_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{n1} & \cdots & \beta_{nn} \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$$

Les equacions que relacionen les coordenades noves en $\mathcal{B}_2$ en funció de les antigues en $\mathcal{B}_1$ es poden escriure així

$$B = QA$$

i les equacions que relacionen les coordenades antigues en funció de les noves com

$$A = PB$$

És important observar que les columnes de la matriu P són els vectors de la base nova $\mathcal{B}_2$ expressats en la base antiga $\mathcal{B}_1$. De la mateixa manera, les columnes de la matriu Q són els vectors de la base antiga $\mathcal{B}_1$ expressats en la base nova $\mathcal{B}_2$. Les matrius columna A i B són les coordenades d'un mateix vector expressades en $\mathcal{B}_1$ i $\mathcal{B}_2$, respectivament

Les matrius P i Q s'anomenen **matrius de canvi de base**. També es diu que P és la **matriu de pas** de la base nova $\mathcal{B}_2$ a la base antiga $\mathcal{B}_1$. De forma anàloga, Q s'anomena matriu de pas de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$.

Definició 1.25. Es defineix l'aplicació $\delta : \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_n \rightarrow \{0, 1\}$ per

$$\delta(i, j) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

essent $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \dots, n\}$. El valor $\delta(i, j)$ es representa per δ_{ij} i rep el nom de **símbol de Kronecker**.

Teorema 1.43. Donades dues bases diferents $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ i $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ d'un espai vectorial E . Les coordenades α_{ij} i β_{ij} dels vectors d'una base l'una respecte de l'altra, estan lligades per les equacions característiques següents

$$\sum_{k=1}^n \alpha_{kj} \beta_{ik} = \delta_{ij}$$

essent δ_{ij} el símbol de Kronecker.

Demostració. En les equacions (1), introduint les equacions (2), s'obté

$$\mathbf{u}_j = (\alpha_{1j} \beta_{11} + \cdots + \alpha_{nj} \beta_{1n}) \mathbf{u}_1 + \cdots + (\alpha_{1j} \beta_{n1} + \cdots + \alpha_{nj} \beta_{nn}) \mathbf{u}_n$$

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_j &= \left(\sum_{k=1}^n \alpha_{kj} \beta_{1k} \right) \mathbf{u}_1 + \cdots + \left(\sum_{k=1}^n \alpha_{kj} \beta_{nk} \right) \mathbf{u}_n = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \alpha_{kj} \beta_{ik} \mathbf{u}_i\end{aligned}$$

Donat que $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ és un sistema lliure, es dedueixen les següents relacions:

1. Si $j = i$, el coeficient de $\mathbf{u}_i$ en el segon membre ha de ser igual a 1. Per tant,

$$\sum_{k=1}^n \alpha_{ki} \beta_{ik} = 1 \quad (i = 1, \dots, n)$$

2. Si $j = r \neq i$, el coeficient de $\mathbf{u}_r$ en el segon membre ha de ser igual a 0. Per tant,

$$\sum_{k=1}^n \alpha_{kr} \beta_{ik} = 0 \quad (i = 1, \dots, r-1, r+1, \dots, n)$$

Introduint el símbol de Kronecker, les dues relacions anteriors s'escriuen en una sola com segueix

$$\sum_{k=1}^n \alpha_{kj} \beta_{ik} = \delta_{ij}$$

■

Observació 1.35. El teorema pot escriure's més còmodament utilitzant matrius. En efecte, observeu que la matriu associada a l'aplicació que defineix el símbol de Kronecker per

$$a_{ij} = \delta_{ij}$$

és la matriu que anomenem **matriu identitat d'ordre n** que la denotem per I_n

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Les equacions anteriors s'escriuen així

$$QP = I_n$$

Observeu que les matrius dels canvis de base són sempre invertibles. De la darrera igualtat es dedueix

$$P = Q^{-1} \quad \text{i} \quad Q = P^{-1}$$

Exemple 1.41. En $\mathbb{R}^3$ es consideren les bases $\mathcal{B}_1 = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ i $\mathcal{B}_2 = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ essent $\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{e}_1$, $\mathbf{v}_2 = -\mathbf{e}_2 + 2\mathbf{e}_3$ i $\mathbf{v}_3 = -3\mathbf{e}_3$. Trobeu les coordenades respecte de $\mathcal{B}_2$ del vector $\mathbf{u} = 4\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - 5\mathbf{e}_3$.

Solució. Segons la **observació 34**, sabem que la matriu de canvi de base o de pas de $\mathcal{B}_2$ a $\mathcal{B}_1$ té per vectors columna als $\mathbf{v}_i$ referits a la base antiga $\mathcal{B}_1$. En

aquest cas tenim

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Aleshores, segons la **observació 35**, la matriu Q de pas de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$ compleix

$$QP = I_3$$

Per tant,

$$Q = P^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

Si (x_1, y_1, z_1) són les coordenades d'un vector referides a la base $\mathcal{B}_1$ i (x_2, y_2, z_2) són les coordenades del mateix vector referides a la base $\mathcal{B}_2$. Aleshores es compleix

$$\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

Substituint les coordenades del vector u es té

$$\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Per tant

$$\mathbf{u} = 2\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$$

□

2 Resum

2.1 Conceptes clau

Espai vectorial	Conjunt E amb una suma i un producte per escalars d'un cos $\mathbb{K}$ que satisfan els vuit axiomes.
Subespai	$S \subseteq E$ no buit tal que $\lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{v} \in S$ per a tots $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in S$ i $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.
Clausura lineal	$\langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m \rangle$: conjunt de totes les combinacions lineals; és el subespai més petit que conté els vectors.
Sistema lligat	(Linealment dependent.) Existeix una combinació lineal nul $\cdot$ la amb algun coeficient diferent de zero; equival al fet que algun vector sigui combinació lineal dels altres.
Sistema lliure	(Linealment independent.) L'única combinació lineal nul $\cdot$ la és la trivial.
Base	Sistema alhora lliure i generador; cada vector hi té coordenades úniques.
Dimensió	Nombre de vectors de qualsevol base (totes en tenen el mateix).
Rang	Dimensió de la clausura lineal del sistema; no canvia amb les transformacions elementals T1, T2 i T3.
Suma directa	$S \oplus T$ quan $S \cap T = \{\mathbf{0}\}$; cada vector de la suma és descompon de manera única.
Espai quocient	E/F : classes $\mathbf{v} + F$ (varietats lineals paral·leles a F).

2.2 Fórmules per recordar

- **Fórmula de Grassmann:** $\dim(S + T) = \dim S + \dim T - \dim(S \cap T)$.
- **Dimensió del quocient:** $\dim(E/F) = \dim E - \dim F$.
- En un espai de dimensió n : tot sistema lliure té com a màxim n vectors; tot sistema generador en té com a mínim n ; i n vectors lliures (o generadors) formen automàticament una base.

- **Canvi de base:** si P té per columnes els vectors de la base nova expressats en l'antiga, aleshores $A = PB$, on A i B són les coordenades antigues i noves d'un mateix vector, i $Q = P^{-1}$ fa el pas invers.
- Dos espais vectorials de dimensió finita són isomorfs si i només si tenen la mateixa dimensió; en particular, tot espai de dimensió n sobre $\mathbb{K}$ és isomorf a $\mathbb{K}^n$.

2.3 Errors freqüents

- **La unió de subespais no és, en general, un subespai.** La intersecció sí que ho és sempre. La unió només ho és quan un dels subespais conté l'altre.
- **D'una relació de dependència només se'n pot eliminar un vector.** Si $\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_m \mathbf{v}_m = \mathbf{0}$ amb $\lambda_i \neq 0$, es pot suprimir $\mathbf{v}_i$ i el sistema resultant és equivalent; però no es poden suprimir alhora tots els vectors amb coeficient no nul.
- **Contenir el vector zero no fa subespai.** És condició necessària, però no suficient: cal comprovar el tancament respecte de la suma i del producte per escalars.
- **Coordenades no és el mateix que components.** Les components d'un vector de $\mathbb{K}^n$ són les seves coordenades en la base canònica; en una altra base, les coordenades canvien encara que el vector sigui el mateix.
- **Un sistema que conté el vector zero sempre és lligat,** encara que la resta de vectors siguin independents entre si.

3 Pràctica

3.1 Concepte d'espai vectorial

Exercici 3.1. Si $\mathbb{K}$ és el cos dels enters mòdul 3, considereu el espai vectorial dels vectors d'ordre n sobre $\mathbb{K}$. Quants vectors hi ha en aquest espai? Essent $\mathbf{v}$ un vector, què es pot dir de $\mathbf{v} + \mathbf{v} + \mathbf{v}$? Pot ser un vector la suma de tres vectors iguals?

Solució. És clar que $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$, ja que

$$\bar{m} = \{n \in \mathbb{Z} : n - m \in (3)\}$$

on (3) denota el conjunt de múltiples de 3. Aleshores,

$$\bar{0} = \{n \in \mathbb{Z} : n \in (3)\} = (3)$$

$$\bar{1} = \{n \in \mathbb{Z} : n - 1 = \text{múltiple de } 3\} = (3) + 1$$

$$\bar{2} = \{n \in \mathbb{Z} : n - 2 = \text{múltiple de } 3\} = (3) + 2$$

L'espai vectorial és $\mathbb{K}^n$, els vectors del qual són n -tuples ordenades d'elements de $\mathbb{K}$. En aquest espai hi ha, doncs, 3^n vectors.

Per calcular $\mathbf{v} + \mathbf{v} + \mathbf{v}$, fes clic en cada pas:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} + \mathbf{v} + \mathbf{v} &= (1 + 1 + 1)v \\ &= 0v && \text{ja que } 3 \equiv 0 \pmod{3} \\ &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Per tant, la suma de tres vectors iguals sempre és el vector zero. En conseqüència, només el vector zero és la suma de tres vectors iguals.

□

Exercici 3.2. Construiu un espai vectorial amb quatre vectors, utilitzant el cos dels enters mòdul 2.

Solució. Si $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$, aleshores $\mathbb{K}^2$ és un espai vectorial de $2^2 = 4$

elements sobre $\mathbb{K}$. La suma de vectors es defineix per la taula següent:

+	(0, 0)	(0, 1)	(1, 0)	(1, 1)
(0, 0)	(0, 0)	(0, 1)	(1, 0)	(1, 1)
(0, 1)	(0, 1)	(0, 0)	(1, 1)	(1, 0)
(1, 0)	(1, 0)	(1, 1)	(0, 0)	(0, 1)
(1, 1)	(1, 1)	(1, 0)	(0, 1)	(0, 0)

i el producte per escalars es defineix per la taula següent

	(0, 0)	(0, 1)	(1, 0)	(1, 1)
0	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)	(0, 0)
1	(0, 0)	(0, 1)	(1, 0)	(1, 1)

En ambdues taules hem escrit 0 i 1 en lloc de $\bar{0}$ i $\bar{1}$, respectivament.

□

Exercici 3.3. Demostreu que el conjunt E de les aplicacions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pot dotarse de manera natural de estructura d'espai vectorial real.

Solució. Per a cada parell $(f, g) \in E \times E$ definim l'aplicació $f + g$ per

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

i per a cada parell $(\lambda, f) \in \mathbb{R} \times E$ definim l'aplicació λf per

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

Es compleixen els 10 axiomes per ser espai vectorial real:

(1) Per a tot $f, g \in E$, $f + g \in E$ ja que l'addició de dos nombres reals és un nombre real.

(2) Per a tot $f, g, h \in E$, $(f + g) + h = f + (g + h)$, ja que

$$((f + g) + h)(x) =$$

per definició

$$(f + g)(x) + h(x) =$$

per definició

$$(f(x) + g(x)) + h(x) =$$

per la propietat associativa de l'addició en $\mathbb{R}$

$$f(x) + (g(x) + h(x)) =$$

per definició

$$f(x) + (g + h)(x) =$$

per definició

$$(f + (g + h))(x)$$

(3) Per a tot $f, g \in E$, $f + g = g + f$, ja que

$$(f + g)(x) =$$

per definició

$$f(x) + g(x) =$$

per la propietat commutativa de l'addició en $\mathbb{R}$

$$g(x) + f(x) =$$

per definició

$$(g + f)(x)$$

(4) Existeix l'aplicació $\mathbf{0}$ constant igual $0 \in \mathbb{R}$, definida per $\mathbf{0}(x) = 0$, tal que $f + \mathbf{0} = f$ per a tot $f \in E$, ja que

$$(f + \mathbf{0})(x) =$$

per definició

$$f(x) + \mathbf{0}(x) =$$

per definició de l'aplicació constant igual 0

$$f(x) + 0 =$$

per ser 0 el zero de $\mathbb{R}$

$$f(x)$$

(5) Per a cada $f \in E$ existeix l'aplicació $-f \in E$, definida per $(-f)(x) = -f(x)$, tal que $f + (-f) = \mathbf{0}$, ja que

$$(f + (-f))(x) =$$

per definició

$$f(x) + (-f)(x) =$$

per definició de $-f$

$$f(x) + (-f(x)) =$$

per ser $f(x)$ i $-f(x)$ dos nombres reals oposats

$$0 =$$

per definició de l'aplicació constant igual 0

$$\mathbf{0}(x)$$

(6) Per a tot $f \in E$ i $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda f \in E$, ja que la multiplicació de dos nombres reals és un nombre real.

(7) Per a tot $f, g \in E$ i $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda(f + g) = \lambda f + \lambda g$, ja que

$$(\lambda(f + g))(x) =$$

per definició

$$\lambda(f+g)(x) =$$

per definició

$$\lambda(f(x)+g(x)) =$$

per la propietat distributiva de la multiplicació respecte de l'addició en $\mathbb{R}$

$$\lambda f(x) + \lambda g(x) =$$

per definició

$$(\lambda f)(x) + (\lambda g)(x) =$$

per definició

$$(\lambda f + \lambda g)(x)$$

(8) Per a tot $f \in E$ i $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $(\lambda + \mu)f = \lambda f + \mu f$, ja que

$$((\lambda + \mu)f)(x) =$$

per definició

$$(\lambda + \mu)f(x) =$$

per la propietat distributiva en $\mathbb{R}$

$$\lambda f(x) + \mu f(x) =$$

per definició

$$(\lambda f)(x) + (\mu f)(x) =$$

per definició

$$(\lambda f + \mu f)(x)$$

(9) Per a tot $f \in E$ i $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $(\lambda\mu)f = \lambda(\mu f)$, ja que

$$((\lambda\mu)f)(x) =$$

per definició

$$(\lambda\mu)f(x) =$$

per la propietat associativa de la multiplicació en $\mathbb{R}$

$$\lambda(\mu f(x)) =$$

per definició

$$\lambda((\mu f)(x)) =$$

per definició

$$(\lambda(\mu f))(x)$$

(10) Per a tot $f \in E$, $1f = f$, ja que

$$(1f)(x) =$$

per definició

$$1f(x) =$$

per ser 1 la unitat en $\mathbb{R}$

$$f(x)$$

□

Exercici 3.4. Estudieu si els conjunts següents de nombres reals i les operacions que s'indiquen formen o no un espai vectorial sobre el cos dels nombres racionals:

(a) $A = \{x + i\sqrt{5} : x, i \in \mathbb{Z}\}$ i les operacions

$$(x_1 + y_1\sqrt{5}) + (x_2 + y_2\sqrt{5}) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)\sqrt{5}$$

$$\lambda(x + i\sqrt{5}) = (\lambda x) + (\lambda i)\sqrt{5}$$

(b) $B = \{x + i\sqrt{5} : x, i \in \mathbb{Q}\}$ i les mateixes operacions anteriors.

Solució. (a) A no té estructura d'espai vectorial sobre $\mathbb{Q}$, ja que $1/2 \in \mathbb{Q}$ i $1 + 2\sqrt{5} \in A$ i, en canvi

$$\frac{1}{2}(1 + 2\sqrt{5}) = \frac{1}{2} + \sqrt{5} \notin A$$

perquè $1/2 \notin \mathbb{Z}$.

(b) Per a B i les mateixes operacions es compleixen els 10 axiomes:

(1) Per a tot $x_1 + y_1\sqrt{5}, x_2 + y_2\sqrt{5} \in B$, $(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)\sqrt{5} \in B$, ja que $x_1 + x_2, y_1 + y_2 \in \mathbb{Q}$

(2) Per a tot $x_1 + y_1\sqrt{5}, x_2 + y_2\sqrt{5}, x_3 + y_3\sqrt{5} \in B$,

$$(x_1 + y_1\sqrt{5}) + [(x_2 + y_2\sqrt{5}) + (x_3 + y_3\sqrt{5})] =$$

per definició

$$(x_1 + y_1\sqrt{5}) + [(x_2 + x_3) + (y_2 + y_3)\sqrt{5}] =$$

per definició

$$(x_1 + (x_2 + x_3)) + (y_1 + (y_2 + y_3))\sqrt{5} =$$

per la propietat associativa de $+$ en $\mathbb{Q}$

$$((x_1 + x_2) + x_3) + ((y_1 + y_2) + y_3)\sqrt{5} =$$

per definició

$$[(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)\sqrt{5}] + (x_3 + y_3\sqrt{5}) =$$

per definició

$$[(x_1 + y_1\sqrt{5}) + (x_2 + y_2\sqrt{5})] + (x_3 + y_3\sqrt{5})$$

(3) Per a tot $x_1 + y_1\sqrt{5}, x_2 + y_2\sqrt{5} \in B$,

$$(x_1 + y_1\sqrt{5}) + (x_2 + y_2\sqrt{5}) =$$

per definició

$$(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)\sqrt{5} =$$

per la propietat commutativa de $+$ en $\mathbb{Q}$

$$(x_2 + x_1) + (y_2 + y_1)\sqrt{5} =$$

per definició

$$(x_2 + y_2\sqrt{5}) + (x_1 + y_1\sqrt{5})$$

(4) Existe $0 + 0\sqrt{5} \in B$ tal que, per a tot $x_1 + y_1\sqrt{5} \in B$

$$(0 + 0\sqrt{5}) + (x_1 + y_1\sqrt{5}) =$$

per definició

$$(0 + x_1) + (0 + y_1)\sqrt{5} =$$

per ser 0 l'element neutre de + en $\mathbb{Q}$

$$x_1 + y_1\sqrt{5}$$

(5) Per a cada $x_1 + y_1\sqrt{5} \in B$, existeix $(-x_1) + (-y_1)\sqrt{5} \in B$ tal que

$$((-x_1) + (-y_1)\sqrt{5}) + (x_1 + y_1\sqrt{5}) =$$

per definició

$$((-x_1) + x_1) + ((-y_1) + y_1)\sqrt{5} =$$

per ser $-x$ l'oposat de x per + en $\mathbb{Q}$

$$0 + 0\sqrt{5}$$

(6) Per a tot $x_1 + y_1\sqrt{5} \in B$ i $\lambda \in \mathbb{Q}$, $(\lambda x_1) + (\lambda y_1)\sqrt{5} \in B$, ja que $\lambda x_1, \lambda y_1 \in \mathbb{Q}$

(7) Per a tot $x_1 + y_1\sqrt{5}, x_2 + y_2\sqrt{5} \in B$ i $\lambda \in \mathbb{Q}$,

$$\lambda [(x_1 + y_1\sqrt{5}) + (x_2 + y_2\sqrt{5})] =$$

per definició

$$\lambda [(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)\sqrt{5}] =$$

per definició

$$(\lambda(x_1 + x_2)) + (\lambda(y_1 + y_2))\sqrt{5} =$$

per la propietat distributiva de la multiplicació respecte de l'addició en $\mathbb{Q}$

$$(\lambda x_1 + \lambda x_2) + (\lambda y_1 + \lambda y_2)\sqrt{5} =$$

per definició

$$(\lambda x_1 + \lambda y_1\sqrt{5}) + (\lambda x_2 + \lambda y_2\sqrt{5}) =$$

per definició

$$\lambda (x_1 + y_1\sqrt{5}) + \lambda (x_2 + y_2\sqrt{5})$$

(8) Per a tot $x_1 + y_1\sqrt{5} \in B$ i $\lambda, \mu \in \mathbb{Q}$,

$$(\lambda + \mu) (x_1 + y_1\sqrt{5}) =$$

per definició

$$((\lambda + \mu) x_1) + ((\lambda + \mu) y_1)\sqrt{5} =$$

per la propietat distributiva de la multiplicació respecte de l'addició en $\mathbb{Q}$

$$(\lambda x_1 + \mu x_1) + (\lambda y_1 + \mu y_1)\sqrt{5} =$$

per definició

$$(\lambda x_1 + \lambda y_1 \sqrt{5}) + (\mu x_1 + \mu y_1 \sqrt{5}) =$$

per definició

$$\lambda (x_1 + y_1 \sqrt{5}) + \mu (x_1 + y_1 \sqrt{5})$$

(9) Per a tot $x_1 + y_1 \sqrt{5} \in B$ i $\lambda, \mu \in \mathbb{Q}$,

$$\lambda [\mu (x_1 + y_1 \sqrt{5})] =$$

per definició

$$\lambda (\mu x_1 + \mu y_1 \sqrt{5}) =$$

per definició

$$\lambda (\mu x_1) + \lambda (\mu y_1) \sqrt{5} =$$

per la propietat associativa de la multiplicació en $\mathbb{Q}$

$$(\lambda \mu) x_1 + (\lambda \mu) y_1 \sqrt{5} =$$

per definició

$$(\lambda \mu) (x_1 + y_1 \sqrt{5})$$

(10) Per a tot $x_1 + y_1 \sqrt{5} \in B$,

$$1 (x_1 + y_1 \sqrt{5}) =$$

per definició

$$(1x_1) + (1y_1) \sqrt{5} =$$

per ser 1 la unitat de la multiplicació en $\mathbb{Q}$

$$x_1 + y_1 \sqrt{5}$$

Per tant, B és un espai vectorial sobre $\mathbb{Q}$.

□

3.2 Subespais vectorials

Exercici 3.5. Considerem l'espai vectorial real $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de les funcions reals de variable real. Esbrineu quins dels següents subconjunts són subespais vectorials: (a) $S_1 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f(x^2) = (f(x))^2\}$; (b) $S_2 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f(0) = f(2)\}$; (c) $S_3 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f(2) = 3 + f(-1)\}$.

Solució. (a) Si $f, g \in S_1$, aleshores

$$f(x^2) = (f(x))^2$$

$$g(x^2) = (g(x))^2$$

Per tant,

$$(f + g)(x^2) =$$

per definició,

$$f(x^2) + g(x^2) =$$

per hipòtesi,

$$(f(x))^2 + (g(x))^2$$

D'altra banda,

$$((f + g)(x))^2 =$$

per definició,

$$(f(x) + g(x))^2 =$$

desenvolupant,

$$(f(x))^2 + 2f(x)g(x) + (g(x))^2$$

En general,

$$(f(x))^2 + (g(x))^2 \neq (f(x))^2 + 2f(x)g(x) + (g(x))^2$$

Per consegüent, $f + g \notin S_1$ i, en conseqüència, S_1 no és subespai vectorial.

(b) Si $f, g \in S_2$, aleshores

$$f(0) = f(2)$$

$$g(0) = g(2)$$

Per tant,

$$(f + g)(0) =$$

per definició,

$$f(0) + g(0) =$$

per hipòtesi,

$$f(2) + g(2) =$$

per definició,

$$(f + g)(2)$$

Per tant, $f + g \in S_2$. A més,

$$(\lambda f)(0) =$$

per definició,

$$\lambda f(0) =$$

per hipòtesi,

$$\lambda f(2) =$$

per definició,

$$(\lambda f)(2)$$

Per tant, $\lambda f \in S_2$. Observeu que $\mathbf{0} \in S_2$, essent $\mathbf{0}$ la funció constant igual 0. En conseqüència, S_2 és subespai vectorial.

(c) Si $f, g \in S_3$, aleshores

$$f(2) = 3 + f(-1)$$

$$g(2) = 3 + g(-1)$$

Per tant,

$$(f + g)(2) =$$

per definició,

$$f(2) + g(2) =$$

per hipòtesi i efectuant operacions,

$$6 + f(-1) + g(-1) =$$

D'altra banda,

$$3 + (f + g)(-1) =$$

per definició,

$$3 + f(-1) + g(-1)$$

És clar que

$$6 + f(-1) + g(-1) \neq 3 + f(-1) + g(-1)$$

Per consegüent, $f + g \notin S_3$ i, en conseqüència, S_3 no és subespai vectorial. $\square$

Exercici 3.6. En l'espai vectorial $\mathbb{R}^4$ considerem el conjunt $S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x + 3y + z - 2t = 0\}$. Proveu que S és un subespai vectorial de $\mathbb{R}^4$.

Solució. Si $\mathbf{u} = (x_1, y_1, z_1, t_1), \mathbf{v} = (x_2, y_2, z_2, t_2) \in S$, aleshores

$$2x_1 + 3y_1 + z_1 - 2t_1 = 0$$

$$2x_2 + 3y_2 + z_2 - 2t_2 = 0$$

Per definició,

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2, t_1 + t_2)$$

A més es compleix,

$$2(x_1 + x_2) + 3(y_1 + y_2) + (z_1 + z_2) - 2(t_1 + t_2) =$$

efectuant operacions,

$$2x_1 + 3y_1 + z_1 - 2t_1 + 2x_2 + 3y_2 + z_2 - 2t_2 =$$

per hipotesis,

$$0 + 0 = 0$$

Per tant, $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in S$.

Si $\mathbf{u} = (x_1, y_1, z_1, t_1), \lambda \in \mathbb{R}$, aleshores per definició es té

$$\lambda \mathbf{u} = \mathbf{u} = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1, \lambda t_1)$$

A més es compleix,

$$2(\lambda x_1) + 3(\lambda y_1) + (\lambda z_1) - 2(\lambda t_1) =$$

efectuant operacions,

$$\lambda(2x_1 + 3y_1 + z_1 - 2t_1) =$$

per hipòtesi,

$$\lambda 0 = 0$$

Per tant, $\lambda \mathbf{u} \in S$. Observeu que $\mathbf{0} = (0, 0, 0, 0) \in S$.

Per consegüent, S és un subespai vectorial de $\mathbb{R}^4$.

□

Exercici 3.7. Estudieu si els conjunts següents són subespais de $\mathbb{R}^4$. (a) $S_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : xy = 0\}$; (b) $S_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x = 1\}$; (c) $S_3 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x^2 + i^2 + z^2 + t^2 = 0\}$.

Solució. (a) És clar que $\mathbf{u} = (1, 0, 0, 0), \mathbf{v} = (0, 1, 0, 0) \in S_1$ però $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (1, 1, 0, 0) \notin S_1$. Per tant, S_1 no és subespai vectorial.

(b) És clar que $\mathbf{0} = (0, 0, 0, 0) \notin S_2$. Per tant, S_2 no és subespai vectorial.

(c) La equació

$$x^2 + i^2 + z^2 + t^2 = 0$$

només és vàlida en $\mathbb{R}$ si $x = y = z = t = 0$. Per tant, $S_3 = \{\mathbf{0}\}$ i, en conseqüència, és subespai vectorial de $\mathbb{R}^4$.

□

3.3 Intersecció de subespais vectorials

Exercici 3.8. Donats els subespais $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ i $T = \{(\lambda, \lambda + \mu, \lambda - \mu) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ de $\mathbb{R}^3$. Determineu el subespai intersecció $S \cap T$ i expresseu-lo paramètricament.

Solució. En primer lloc hem d'observar que el subespai T viene donat en forma paramètrica. Qualsevol vector $\mathbf{v} = (x, y, z)$ de T ha de complir

$$\left. \begin{array}{l} x = \lambda \\ i = \lambda + \mu \\ z = \lambda - \mu \end{array} \right\}$$

on $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. D'aquestes equacions es dedueix

$$i + z = 2\lambda$$

i, d'aquí, s'obté

$$i + z = 2x$$

és a dir

$$2x - i - z = 0$$

Per tant, podem escriure

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - i - z = 0\}$$

D'aquesta manera, és evident que

$$S \cap T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0 \text{ i } 2x - i - z = 0\}$$

Per expressar-lo en forma paramètrica hem de resoldre el sistema lineal format per les dues equacions definitives del subespai:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ 2x - i - z = 0 \end{array} \right\}$$

Sumant les dues equacions s'obté

$$x = 0$$

i, per tant,

$$i = -z$$

Si ara fem $z = \lambda$, amb $\lambda \in \mathbb{R}$, aleshores

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \\ i = -\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right\}$$

i, en conseqüència

$$S \cap T = \{(0, -\lambda, \lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

□

3.4 Subespai generat per un conjunt

Exercici 3.9. Donat el conjunt $A = \{(1, 1, 1), (1, 0, -1)\}$ de vectors de $\mathbb{R}^3$. Trobeu el subespai generat per A .

Solució. És clar que per construcció

$$\langle A \rangle = \{\lambda(1, 1, 1) + \mu(1, 0, -1) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

Per tant, si $(x, y, z) \in \langle A \rangle$, aleshores han de existir $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tals que

$$(x, y, z) = \lambda(1, 1, 1) + \mu(1, 0, -1)$$

Per tant, efectuant operacions

$$(x, y, z) = (\lambda + \mu, \lambda, \lambda - \mu)$$

Tenint present que dos vectors són iguals si tenen les mateixes components, es té

$$\left. \begin{array}{l} x = \lambda + \mu \\ y = \lambda \\ z = \lambda - \mu \end{array} \right\}$$

Sumant la primera i la tercera equació, s'obté

$$x + z = 2\lambda$$

I de la segona, s'obté

$$x + z = 2y$$

Per consegüent

$$\langle A \rangle = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y + z = 0\}$$

□

3.5 Suma de subespais vectorials

Exercici 3.10. En l'espai vectorial $\mathbb{R}^4$ es considera el subespai S generat pels vectors $\mathbf{u}_1 = (1, -2, 0, 3)$, $\mathbf{u}_2 = (2, 1, -2, 4)$, $\mathbf{u}_3 = (0, 2, -1, 1)$, i el subespai T generat per $\mathbf{v}_1 = (1, 0, -1, 4)$, $\mathbf{v}_2 = (1, 1, -1, 0)$. Calculeu $S + T$ i determineu si la suma és o no directa.

Solució. Un vector (x, y, z, t) de $S + T$ ha de complir

$$(x, y, z, t) = \alpha(1, -2, 0, 3) + \beta(2, 1, -2, 4) + \gamma(0, 2, -1, 1) + \lambda(1, 0, -1, 4) + \mu(1, 1, -1, 0)$$

Efectuant operacions, es té

$$(x, y, z, t) = (\alpha + 2\beta + \lambda + \mu, -2\alpha + \beta + 2\gamma + \mu, -2\beta - \gamma - \lambda - \mu, 3\alpha + 4\beta + \gamma + 4\lambda)$$

és a dir,

$$\left. \begin{array}{l} E_1 : x = \alpha + 2\beta + \lambda + \mu \\ E_2 : y = -2\alpha + \beta + 2\gamma + \mu \\ E_3 : z = -2\beta - \gamma - \lambda - \mu \\ E_4 : t = 3\alpha + 4\beta + \gamma + 4\lambda \end{array} \right\}$$

D'aquí, per successives reduccions, s'obté

$$5E_1 + 4E_2 + 9E_3 + E_4 : 5x + 4y + 9z + t = 0$$

Per consegüent,

$$S + T = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 5x + 4y + 9z + t = 0\}$$

Observeu que es compleix

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_3$$

Per tant,

$$\mathbf{v}_1 \in S \cap T$$

i, en conseqüència,

$$S \cap T \neq \{\mathbf{0}\}$$

i la suma no és directa.

□

3.6 Combinacions lineals

Exercici 3.11. Escriuiu el vector $\mathbf{w} = (1, 1, 1)$ com una combinació lineal de els vectors del sistema $\mathcal{S} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ de $\mathbb{R}^3$, essent $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 3)$, $\mathbf{v}_2 = (0, 1, 2)$, $\mathbf{v}_3 = (-1, 0, 1)$.

Solució. Cal trobar escalars $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tals que

$$\mathbf{w} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \lambda_3 \mathbf{v}_3$$

o bé,

$$(1, 1, 1) = \lambda_1(1, 2, 3) + \lambda_2(0, 1, 2) + \lambda_3(-1, 0, 1)$$

o bé,

$$(1, 1, 1) = (\lambda_1 - \lambda_3, 2\lambda_1 + \lambda_2, 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3)$$

Igualant components, s'obté el següent sistema lineal

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_1 - \lambda_3 = 1 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 1 \end{array} \right\}$$

les solucions del qual són, $\lambda_3 = \lambda_1 - 1$, $\lambda_2 = -2\lambda_1 + 1$, $\lambda_1 = \lambda_1$. Per exemple, per a obtenir una solució particular, es pot prendre $\lambda_1 = 1$. Aleshores $\lambda_2 = -1$ i $\lambda_3 = 0$, i es té

$$\mathbf{w} = 1\mathbf{v}_1 + (-1)\mathbf{v}_2 + 0\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$$

Otras elecciones per a λ_1 producen otras maneras de escriure $\mathbf{w}$ com una combinació lineal de $\mathcal{S}$.

□

Exercici 3.12. Escriuiu el polinomi $p(x) = 2 + 6x^2$ com una combinació lineal dels polinomis $p_1(x) = 2 + x + 4x^2$, $p_2(x) = 1 - x + 3x^2$, $p_3(x) = 3 + 2x + 5x^2$ de $\mathbb{R}_2[x]$.

Solució. És necessari trobeu escalars $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tals que

$$p(x) = \lambda_1 p_1(x) + \lambda_2 p_2(x) + \lambda_3 p_3(x)$$

és a dir,

$$2 + 6x^2 = \lambda_1(2 + x + 4x^2) + \lambda_2(1 - x + 3x^2) + \lambda_3(3 + 2x + 5x^2)$$

efectuant operacions s'obté

$$2 + 6x^2 = (2\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3) + (\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3)x + (4\lambda_1 + 3\lambda_2 + 5\lambda_3)x^2$$

Pel principi d'identitat de polinomis, s'obté el següent sistema lineal

$$\left. \begin{array}{l} 2\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 = 2 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ 4\lambda_1 + 3\lambda_2 + 5\lambda_3 = 6 \end{array} \right\}$$

la solució del qual és: $\lambda_1 = 4, \lambda_3 = -2, \lambda_2 = 0$. Per tanto,

$$p(x) = 4p_1(x) + 0p_2(x) + (-2)p_3(x) = 4p_1(x) - 2p_3(x)$$

□

Exercici 3.13. Esbrineu si la matriu

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

és o no una combinació lineal de les matrius

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Solució. Es tracta de trobar $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tals que

$$A = \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 + \lambda_3 M_3$$

és a dir

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Efectuant operacions s'obté

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + 4\lambda_3 & 2\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 & 3\lambda_1 + 4\lambda_2 - 2\lambda_3 \end{pmatrix}$$

D'aquesta igualtat de matrius s'obté el següent sistema

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 + 4\lambda_3 &= 6 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 &= 3 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 &= 0 \\ 3\lambda_1 + 4\lambda_2 - 2\lambda_3 &= 8 \end{aligned} \right\}$$

la solució del qual és: $\lambda_1 = 2, \lambda_3 = 1, \lambda_2 = 1$. Per tanto,

$$A = 2M_1 + M_2 + M_3$$

□

3.7 Clausura lineal

Exercici 3.14. Donats els vectors $\mathbf{v}_1 = (3, 1, -1), \mathbf{v}_2 = (-1, 2, 0), \mathbf{v}_3 = (0, 7, -1)$ de $\mathbb{R}^3$, trobar a perquè el vector $\mathbf{w} = (1, 5, a)$ pertanyi a la clausura lineal de aquests vectors.

Solució. Hem de trobar a de manera que es compleixi

$$\mathbf{w} \in \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle$$

és a dir

$$\mathbf{w} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \lambda_3 \mathbf{v}_3$$

per a certs $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$. Per tanto tenim

$$(1, 5, a) = \lambda_1(3, 1, -1) + \lambda_2(-1, 2, 0) + \lambda_3(0, 7, -1)$$

és a dir

$$(1, 5, a) = (3\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_1 + 2\lambda_2 + 7\lambda_3, -\lambda_1 - \lambda_3)$$

Per tant, es té el sistema

$$\left. \begin{array}{l} 3\lambda_1 - \lambda_2 = 1 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 7\lambda_3 = 5 \\ -\lambda_1 - \lambda_3 = a \end{array} \right\}$$

De la primera equació es té $\lambda_2 = 3\lambda_1 - 1$. Substituint aquest resultat en la segona s'obté $\lambda_3 = 1 - \lambda_1$. Substituint aquest darrer resultat en la tercera equació s'obté $a = -1$.

□

Exercici 3.15. Trobeu un sistema homogeni d'equacions lineals que tingui com subespai solució $F = \langle (1, 1, 1, 1), (2, 1, 0, 3) \rangle$.

Solució. Considerem una solució arbitrària d'aquest sistema (x, y, z, t) . Aleshores han de existir $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tals que

$$(x, y, z, t) = \alpha_1(1, 1, 1, 1) + \alpha_2(2, 1, 0, 3)$$

és a dir,

$$(x, y, z, t) = (\alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1, \alpha_1 + 3\alpha_2)$$

Per tant, el següent sistema

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_1 + 2\alpha_2 = x \\ \alpha_1 + \alpha_2 = i \\ \alpha_1 = z \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 = t \end{array} \right\}$$

ha de ser compatible. Substituint el valor de $\alpha_1 = z$ en les equacions del sistema es té

$$\begin{aligned} 2\alpha_2 &= x - z \\ \alpha_2 &= i - z \\ 3\alpha_2 &= t - z \end{aligned}$$

Per tant, ha de complir-se

$$\frac{x - z}{2} = i - z = \frac{t - z}{3}$$

o bien

$$\left. \begin{array}{l} x - 2y + z = 0 \\ 3y - 2z - t = 0 \end{array} \right\}$$

Observeu a més que hem demostrat que

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - 2y + z = 0 \text{ i } 3y - 2z - t = 0\}$$

□

Exercici 3.16. Trobeu un sistema generador $\mathcal{S}$ de l'espai vectorial de les solucions del següent sistema lineal homogeni:

$$\left. \begin{array}{l} x - i = 0 \\ 2x + y + z = 0 \\ x + i - z = 0 \end{array} \right\}$$

Suposeu que els coeficients del sistema són elements de: (a) $\mathbb{R}$; (b) $\mathbb{Z}_2$; (c) $\mathbb{Z}_5$.

Solució. En qualsevol dels tres cass és necessari resoldre el sistema.

(a) En aquest cas, la solució és: $x = y = z = 0$. Per tant, $\mathcal{S} = ((0, 0, 0))$.

(b) En aquest cas, el sistema s'escriu de la manera següent

$$\left. \begin{array}{l} [x] + [y] = [0] \\ [y] + [z] = [0] \\ [x] + [y] + [z] = [0] \end{array} \right\} \pmod{2}$$

la solució del qual és $[x] = [y] = [z] = [0]$. Per tant, $\mathcal{S} = ([0], [0], [0])$.

(c) En aquest cas, el sistema s'escriu de la manera següent

$$\left. \begin{array}{l} [x] + [4y] = [0] \\ [2x] + [y] + [z] = [0] \\ [x] + [y] + [4z] = [0] \end{array} \right\} \pmod{5}$$

De la suma de les dues primeres equacions, multiplicant la primera per $[3]$, s'obté

$$[3y] + [z] = [0]$$

és a dir,

$$[z] = [2y]$$

De la suma de la segona i tercera, multiplicant la tercera per $[3]$, s'obté

$$[4y] + [3z] = [0]$$

és a dir, multiplicant per $[2]$,

$$[3y] + [z] = [0]$$

és a dir, obtenim que $[z] = [2y]$. Per tant, les solucions del sistema són: $[x] = [y], [z] = [2y], [y] = [y]$. Qualsevol solució del sistema és de la forma $([y], [y], [2y])$ amb $[y] \in \mathbb{Z}_5$, és a dir,

$$([y], [y], [2y]) = [y] ([1], [1], [2])$$

Per consegüent, $\mathcal{S} = ([1], [1], [2])$.

□

Exercici 3.17. En l'espai vectorial $\mathbb{R}^3$ es consideren els subespais vectorials

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$$

$$S_2 = \{(\lambda, 2\lambda, 3\lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Demostreu que $\mathbb{R}^3 = S_1 \oplus S_2$.

Solució. Primero hem d'comprovar que $S_1 \cap S_2 = \{(0, 0, 0)\}$ i, segon, que $S_1 + S_2 = \mathbb{R}^3$. En efecte, si $\mathbf{u} = (x, y, z) \in S_1 \cap S_2$, aleshores es compleix $x + y + z = 0$, ja que $\mathbf{u} \in S_1$, $y = 2x$, $z = 3x$ ja que $\mathbf{u} \in S_2$. Per tant,

$$x + 2x + 3x = 5x = 0$$

o sigui $x = 0$; d'on, $y = z = 0$. En conseqüència, $S_1 \cap S_2 = \{(0, 0, 0)\}$. Considerem $\mathbf{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, hem de trobar $\mathbf{v} \in S_1$ i $\mathbf{w} \in S_2$ tals que

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$$

És clar, per d'altra banda, que si $(x, y, z) \in S_1$, aleshores $z = -x - y$. Per tant,

$$(x, y, -x - y) = x(1, 0, -1) + y(0, 1, -1)$$

i, en conseqüència,

$$S_1 = \langle (1, 0, -1), (0, 1, -1) \rangle$$

Per tant, si $\mathbf{v} \in S_1$, aleshores $\mathbf{v} = \alpha(1, 0, -1) + \beta(0, 1, -1)$ i, si $\mathbf{w} \in S_2$, aleshores $\mathbf{w} = (\lambda, 2\lambda, 3\lambda)$. Aleshores

$$(x, y, z) = \alpha(1, 0, -1) + \beta(0, 1, -1) + \lambda(1, 2, 3)$$

o bien

$$\begin{aligned}\alpha + \lambda &= x \\ \beta + 2\lambda &= y \\ -\alpha - \beta + 3\lambda &= z\end{aligned}$$

Coneguts x, y, z , i resolent el sistema, s'obté

$$\lambda = \frac{x + y + z}{6}$$

per tant

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{5x - y - z}{6} \\ \beta &= \frac{-x + 2y - z}{3}\end{aligned}$$

Per consegüent, $S_1 + S_2 = \mathbb{R}^3$. En conseqüència, $\mathbb{R}^3 = S_1 \oplus S_2$. Observeu a més que els dos subespais són suplementaris.

□

3.8 Sistemes equivalents

Exercici 3.18. Considerem els sistemes $\mathcal{S}_1 = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4)$ i $\mathcal{S}_2 = (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3)$ de l'espai vectorial $\mathbb{R}_2[x]$, essent $\mathbf{p}_1 = 2 + x^2$, $\mathbf{p}_2 = 1 + 2x + x^2$, $\mathbf{p}_3 = 2x + x^2$, $\mathbf{p}_4 = 1 + x$, $\mathbf{q}_1 = 1$, $\mathbf{q}_2 = x$, $\mathbf{q}_3 = x^2$. Demostreu que són equivalents.

Solució. Per demostrar-ho veurem que els vectors de cada sistema són combinació lineal dels de l'altre. En efecte, és fàcil trobar les següents relacions

$$\begin{aligned}\mathbf{q}_1 &= \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3 \\ \mathbf{q}_2 &= -\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 + \mathbf{p}_4 \\ \mathbf{q}_3 &= \mathbf{p}_1 - 2\mathbf{p}_2 + 2\mathbf{p}_3\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_1 &= 2\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_3 \\ \mathbf{p}_2 &= \mathbf{q}_1 + 2\mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3 \\ \mathbf{p}_3 &= 2\mathbf{q}_2 + \mathbf{q}_3 \\ \mathbf{p}_4 &= \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2\end{aligned}$$

Per tant, $\mathcal{S}_1 \sim \mathcal{S}_2$.

□

3.9 Dependència i independència lineal

Exercici 3.19. Quines de les següents famílies finites d'elements de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ són lliures? (a) (f_1, f_2, f_3) , definides de la manera següent: $f_1(x) = \sin x$, $f_2(x) = \cos x$, $f_3(x) = 1$; (b) (g_1, g_2) , definides per $g_1(x) = e^x$, $g_2(x) = e^{x+2}$; (c) (h_1, h_2, h_3) , definides com $h_1(x) = 2$, $h_2(x) = x + 2$, $h_3(x) = x^2$; (d) (j_1, j_2, j_3) , $j_1(x) = 0$, $j_2(x) = 1$, $j_3(x) = x + 1$.

Solució. (a) Considerem

$$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \alpha_3 f_3 = \mathbf{0}$$

Aleshores, per a tot $x \in \mathbb{R}$ es compleix

$$\alpha_1 \sin x + \alpha_2 \cos x + \alpha_3 1 = 0$$

En particular, per a $x = 0$, $x = \pi/2$, $x = \pi$, es té

$$\left. \begin{aligned}\alpha_2 + \alpha_3 &= 0 \\ \alpha_1 + \alpha_3 &= 0 \\ -\alpha_2 + \alpha_3 &= 0\end{aligned}\right\}$$

la solució del qual és $\alpha_3 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_1 = 0$. Per tant, la família és lliure.

(b) Considerem

$$\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 = \mathbf{0}$$

Aleshores, per a tot $x \in \mathbb{R}$ es compleix

$$\alpha_1 e^x + \alpha_2 e^{x+2} = 0$$

és a dir,

$$(\alpha_1 + \alpha_2 e^2) e^x = 0$$

De on

$$\alpha_1 = -e^2 \alpha_2$$

Prenent $\alpha_2 = 1$ i $\alpha_1 = -e^2$, es té

$$-e^2 g_1 + g_2 = 0$$

Per tant, la família és lligada.

(c) Considerem

$$\alpha_1 h_1 + \alpha_2 h_2 + \alpha_3 h_3 = \mathbf{0}$$

Aleshores, per a tot $x \in \mathbb{R}$, es compleix

$$\alpha_1 2 + \alpha_2 (x + 2) + \alpha_3 x^2 = 0$$

és a dir,

$$2(\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 = 0$$

De on s'obté

$$\left. \begin{array}{l} 2(\alpha_1 + \alpha_2) = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{array} \right\}$$

la solució del qual és $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Per tant, la família és lliure.

(d) La família és lligada ja que conté el vector zero.

□

Exercici 3.20. Trobeu els valors de a i b perquè els vectors $(3, 2, a, 5)$, $(2, -3, 5, a)$, $(0, 13, b, 7)$ de $\mathbb{R}^4$ siguin linealment dependents.

Solució. Considerem

$$\lambda_1 (3, 2, a, 5) + \lambda_2 (2, -3, 5, a) + \lambda_3 (0, 13, b, 7) = (0, 0, 0, 0)$$

és a dir,

$$(3\lambda_1 + 2\lambda_2, 2\lambda_1 - 3\lambda_2 + 13\lambda_3, a\lambda_1 + 5\lambda_2 + b\lambda_3, 5\lambda_1 + a\lambda_2 + 7\lambda_3) = (0, 0, 0, 0)$$

Per tant,

$$\begin{aligned} 3\lambda_1 + 2\lambda_2 &= 0 \\ 2\lambda_1 - 3\lambda_2 + 13\lambda_3 &= 0 \\ a\lambda_1 + 5\lambda_2 + b\lambda_3 &= 0 \\ 5\lambda_1 + a\lambda_2 + 7\lambda_3 &= 0 \end{aligned}$$

De les dues primeres equacions s'obté

$$\lambda_2 = -\frac{3}{2}\lambda_1 \quad \text{i} \quad \lambda_3 = -\frac{1}{2}\lambda_1$$

Substituint aquests resultats en les dues següents i suposant que $\lambda_1 \neq 0$ (ja que en cas contrari serien linealment independents) s'obté

$$\left. \begin{array}{l} 2a - b = 15 \\ -3a = -3 \end{array} \right\}$$

d'on resulta

$$a = 1 \quad \text{i} \quad b = -13$$

□

Exercici 3.21. En l'espai vectorial dels nombres reals $\mathbb{R}$ sobre el cos dels nombres racionals $\mathbb{Q}$, proveu que els vectors $1, \sqrt{2}, \sqrt{5}$ són linealment independents.

Solució. Considerem

$$\alpha_1 1 + \alpha_2 \sqrt{2} + \alpha_3 \sqrt{5} = 0$$

amb $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{Q}$. Aïllant $\alpha_2 \sqrt{2}$ i elevant al quadrat, s'obté

$$\alpha_2 \sqrt{2} = -\alpha_1 - \alpha_3 \sqrt{5} \quad \implies \quad 2\alpha_2^2 = \alpha_1^2 + 5\alpha_3^2 + 2\alpha_1\alpha_3\sqrt{5}$$

Si fos $\alpha_1\alpha_3 \neq 0$, aleshores

$$\sqrt{5} = \frac{2\alpha_2^2 - \alpha_1^2 - 5\alpha_3^2}{2\alpha_1\alpha_3}$$

seria un nombre racional, cosa que no és possible. Per tant, $\alpha_1 = 0$ o $\alpha_3 = 0$. Considerem els dos casos:

Si $\alpha_3 = 0$, la relació és reduïda a $\alpha_1 + \alpha_2 \sqrt{2} = 0$. Si fos $\alpha_2 \neq 0$, aleshores $\sqrt{2} = -\alpha_1/\alpha_2$ seria racional, cosa que no és possible. Per tant, $\alpha_2 = 0$ i, en conseqüència, $\alpha_1 = 0$.

Si $\alpha_1 = 0$, la relació és reduïda a $\alpha_2 \sqrt{2} + \alpha_3 \sqrt{5} = 0$. Si fos $\alpha_3 \neq 0$, elevant al quadrat s'obtindria $2\alpha_2^2 = 5\alpha_3^2$, és a dir, $(\alpha_2/\alpha_3)^2 = 5/2$, cosa que no és possible per a cap nombre racional, perquè l'equació $2p^2 = 5q^2$ no té solucions enteres no nul·les (unicitat de la factorització en nombres primers). Per tant, $\alpha_3 = 0$ i, pel cas anterior, $\alpha_2 = \alpha_1 = 0$.

En conseqüència, els vectors són linealment independents.

□

3.10 Bases d'un espai vectorial de dimensió finita

Exercici 3.22. Demostreu que els vectors $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (1, 1, 2)$ i $\mathbf{u}_3 = (1, 2, 3)$ formen una base de $\mathbb{R}^3$, i trobeu les coordenades del vector $\mathbf{v} = (6, 9, 14)$ en aquesta base.

Solució. Sabem que la dimensió de l'espai vectorial és tres. Per tant, els vectors formaran una base són linealment independents. Per veure-ho, considerem

$$\lambda_1(1, 1, 1) + \lambda_2(1, 1, 2) + \lambda_3(1, 2, 3) = (0, 0, 0)$$

és a dir,

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3, \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3, \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3) = (0, 0, 0)$$

Per tant, s'obté el sistema següent

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \end{array} \right\}$$

la solució del qual és $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Per tant, els vectors són linealment independents i, en conseqüència, formen base. Las coordenades (x, y, z) de $\mathbf{v}$ en aquesta base compleixen

$$x(1, 1, 1) + i(1, 1, 2) + z(1, 2, 3) = (6, 9, 14)$$

és a dir,

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 6 \\ x + i + 2z = 9 \\ x + 2y + 3z = 14 \end{array} \right\}$$

la solució del qual és $x = 1, i = 2$ i $z = 3$. Per consegüent, les coordenades de $\mathbf{v}$ són $(1, 2, 3)$ en la base en qüestió. □

Exercici 3.23. En l'espai vectorial $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, es consideren les funcions f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 definides de la manera següent: $f_1(x) = 1, f_2(x) = \sin^2 x, f_3(x) = \cos^2 x, f_4(x) = \sin 2x, f_5(x) = \cos 2x$. Es demana: (a) estudiar-ne la dependència o independència lineal; (b) determineu la dimensió i una base del subespai $F = \langle f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 \rangle$; (c) calculeu les coordenades de f i g amb respecte de la base trobada en (b), essent $f(x) = \cos 2x + \sin 2x$ i $g(x) = \cos x$.

Solució. (a) Els vectors són linealment dependents, ja que es té

$$\begin{aligned} f_3 &= \frac{1}{2}f_1 + \frac{1}{2}f_5 \\ f_2 &= \frac{1}{2}f_1 - \frac{1}{2}f_5 \end{aligned}$$

ja que $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$ i $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$.

(b) Per les relacions anteriors i, aplicant transformacions elementals, es té

$$(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5) \sim (f_1, f_4, f_5)$$

Per tant,

$$F = \langle f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 \rangle = \langle f_1, f_4, f_5 \rangle$$

Provarem que f_1, f_4, f_5 són linealment independents. Considerem

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_4 + \lambda_3 f_5 = \mathbf{0}$$

és a dir, per a tot $x \in \mathbb{R}$ es compleix

$$\lambda_1 1 + \lambda_2 \sin 2x + \lambda_3 \cos 2x = 0$$

Prenent $x = 0, x = \pi/4, x = \pi/2$ es té el sistema següent

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \\ \lambda_1 - \lambda_3 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

la solució del qual és $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. En conseqüència, $\dim F = 3$ i (f_1, f_4, f_5) és una base de F .

(c) És clar que

$$f = 0f_1 + 1f_4 + 1f_5$$

Per tant, les coordenades de f en la base considerada són $(0, 1, 1)$. D'altra banda, es compleix $g \notin F$ ja que, en cas contrari, tindríem per a tot $x \in \mathbb{R}$

$$\cos x = \alpha + \beta \sin 2x + \gamma \cos 2x$$

Prenent $x = 0$ i $x = \pi$, s'obtindria

$$\begin{aligned} 1 &= \alpha + \gamma \\ -1 &= \alpha + \gamma \end{aligned}$$

la qual cosa és una contradicció. Per consegüent, no té sentit parlar de coordenades en F .

□

3.11 Dimensió d'un subespai vectorial

Exercici 3.24. Considerem l'espai vectorial $\mathbb{R}_n[x]$ dels polinomis amb coeficients reals de grau menor o igual que n . Se pide: (a) demostreu que el polinomi x^n i les seves n primeres derivades formen una base de $\mathbb{R}_n[x]$; (b) estudiar si els vectors $p_1(x) = 1 + 3x + 5x^2, p_2(x) = -1 + 2x^2, p_3(x) = 3 + 3x + x^2$ són o no linealment independents; (c) siguin $r_1(x) = 1 + x^2, r_2(x) = 1 - x^2$ i $S_1 = \langle r_1(x), r_2(x) \rangle$, estudiar si $p(x)$ i $r(x)$ pertanyen a S_1 , essent $p(x) = 1 + 5x^2, r(x) = 1 + x$; (d) sigui $S_2 = \langle p_1(x), p_2(x), p_3(x) \rangle$, calculeu $S_1 \cap S_2$ i $S_1 + S_2$.

Solució. (a) Se compleix:

$$f_0(x) = x^n$$

$$f_1(x) = nx^{n-1}$$

$$f_2(x) = n(n-1)x^{n-2}$$

$$\vdots$$

$$f_{n-1}(x) = n(n-1)(n-2) \cdots 2x$$

$$f_n(x) = n!$$

Hay que proveu que $(f_0(x), f_1(x), \dots, f_n(x))$ és una base de $\mathbb{R}_n[x]$. Qualsevol polinomi $p(x)$ de $\mathbb{R}_n[x]$ és de la forma

$$p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

expressant-se també de la manera següent:

$$p(x) = \frac{a_0}{n!}f_n(x) + \frac{a_1}{n(n-1)\dots 2}f_{n-1}(x) + \dots + \frac{a_{n-1}}{n}f_1(x) + a_nf_0(x)$$

és a dir, $p(x)$ és combinació lineal de $f_0(x), f_1(x), \dots, f_n(x)$. D'altra banda, sabem que $\dim \mathbb{R}_n[x] = n + 1$. Per tant, $(f_0(x), f_1(x), \dots, f_n(x))$ és una base.

(b) Observeu que $p_3(x) = p_1(x) - p_2(x)$. Per tant, són linealment dependents.

(c) Perquè $p(x) \in \langle r_1(x), r_2(x) \rangle$ han de existir $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tals que

$$p(x) = \lambda_1 r_1(x) + \lambda_2 r_2(x)$$

és a dir,

$$1 + 5x^2 = \lambda_1(1 + x^2) + \lambda_2(1 - x^2)$$

D'aquí s'obté el sistema

$$\left. \begin{array}{l} \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 5 \end{array} \right\}$$

la solució del qual és $\lambda_2 = -2, \lambda_1 = 3$. Per tant, $p(x) \in S_1$. De la mateixa manera, $r(x) \in \langle r_1(x), r_2(x) \rangle$ ha de complir-se

$$r(x) = \mu_1 r_1(x) + \mu_2 r_2(x)$$

és a dir,

$$1 + x = \mu_1(1 + x^2) + \mu_2(1 - x^2)$$

o bé,

$$1 + x = \mu_1 + \mu_2 + 0x + (\mu_1 - \mu_2)x^2$$

el que no és possible, ja que $r(x)$ té coeficient 1 en x i, en canvi, $\mu_1 r_1(x) + \mu_2 r_2(x)$ té coeficient 0 en x . Per tant, $r(x) \notin S_1$.

(d) Per (b) es té $S_2 = \langle p_1(x), p_2(x) \rangle$ i $\dim S_2 = 2$. D'altra banda, $(r_1(x), r_2(x))$ és una base de S_1 i $\dim S_1 = 2$. Per determinar $p(x)$ de manera que $p(x) \in S_1 \cap S_2$ ha de complir-se

$$p(x) = \alpha p_1(x) + \beta p_2(x) \quad \text{i} \quad p(x) = \lambda r_1(x) + \mu r_2(x)$$

és a dir,

$$\alpha(1 + 3x + 5x^2) + \beta(-1 + 2x^2) = \lambda(1 + x^2) + \mu(1 - x^2)$$

o bé,

$$\alpha - \beta + 3\alpha x + (5\alpha + 2\beta)x^2 = \lambda + \mu + (\lambda - \mu)x^2$$

Per tant, tenim el següent sistema

$$\left. \begin{array}{l} \alpha - \beta = \lambda + \mu \\ 3\alpha = 0 \\ 5\alpha + 2\beta = \lambda - \mu \end{array} \right\}$$

la solució del qual és $\alpha = 0, \lambda = \frac{1}{2}\beta, \mu = -\frac{3}{2}\beta$. Prenent $\beta = 1$, un vector de la intersecció és $-1 + 2x^2$. Per consegüent, $S_1 \cap S_2 = \langle -1 + 2x^2 \rangle$ i $\dim(S_1 \cap S_2) = 1$. Aleshores

$$\dim(S_1 + S_2) = \dim S_1 + \dim S_2 - \dim(S_1 \cap S_2) = 2 + 2 - 1 = 3$$

És clar que $S_1 + S_2 = \langle p_1(x), p_2(x), r_1(x), r_2(x) \rangle$. Ara bé, només tres d'aquests vectors són linealment independents. Per trobar-los, considerem

$$\alpha(1 + 3x + 5x^2) + \beta(-1 + 2x^2) + \gamma(1 + x^2) + \delta(1 - x^2) = \mathbf{0}$$

d'on s'obté

$$(\alpha - \beta + \gamma + \delta) + 3\alpha x + (5\alpha + 2\beta + \gamma - \delta)x^2 = \mathbf{0}$$

Per tant, ha de complir-se

$$\left. \begin{array}{l} \alpha - \beta + \gamma + \delta = 0 \\ 3\alpha = 0 \\ 5\alpha + 2\beta + \gamma - \delta = 0 \end{array} \right\}$$

D'aquí s'obté, $\alpha = 0, \beta = -2\gamma$ i $\delta = -3\gamma$. Prenent, per exemple, $\gamma = 1$, aleshores $\beta = -2$ i $\delta = -3$ i, en conseqüència, tenim $-2p_2(x) + r_1(x) - 3r_2(x) = 0$, és a dir,

$$r_2(x) = \frac{1}{3}r_1(x) - \frac{2}{3}p_2(x)$$

és a dir, $r_2(x)$ depèn linealment dels altres. Per tant, $(p_1(x), p_2(x), r_1(x))$ és una base de $S_1 + S_2$. □

3.12 Espai vectorial quocient

Exercici 3.25. Sigui E un espai vectorial de dimensió 3 i (e_1, e_2, e_3) una base de E . Sigui F el subespai generat per (v_1, v_2) essent $v_1 = e_1 - e_2$ i $v_2 = e_1 + e_2$. Trobeu una base de l'espai vectorial quocient E/F .

Solució. És clar que el sistema (v_1, v_2) és lliure. Per tant, $\dim F = 2$. En conseqüència,

$$\dim E/F = \dim E - \dim F = 3 - 2 = 1$$

Per trobeu una base de E/F n'hi ha prou de trobar un vector no nul de E/F , és a dir, una classe no nul·la. Si $[v] \neq [0]$, aleshores $v \notin F$. Per tant, v pot ser qualsevol vector que sigui linealment independent amb v_1 i v_2 ; per exemple, podem tomar e_3 . Per consegüent, $(e_3 + F)$ és una base de E/F . □

Exercici 3.26. Obtener una base de l'espai vectorial quocient $\mathbb{R}^4$ mòdul el subespai

$$F = \langle (1, 0, 1, 1), (1, 2, 1, 1), (2, 2, 2, 2) \rangle$$

Solució. Observem que

$$(2, 2, 2, 2) = (1, 0, 1, 1) + (1, 2, 1, 1)$$

Per tant, $\dim F = 2$. D'aquí,

$$\dim \mathbb{R}^4 / F = 4 - 2 = 2$$

Per obtenir una base de $\mathbb{R}^4 / F$ n'hi ha prou de trobar una base del subespai suplementari de F respecte de $\mathbb{R}^4$. Obtindrem aquesta base completant la base de F a una base de $\mathbb{R}^4$. Sigui (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canònica de $\mathbb{R}^4$ i $v_1 = (1, 0, 1, 1), v_2 = (1, 2, 1, 1)$. Observem que

$$e_1 = v_1 - e_3 - e_4$$

Per tant, (v_1, e_2, e_3, e_4) és una base de $\mathbb{R}^4$. Observem també que

$$e_2 = -\frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2$$

Per tant, (v_1, v_2, e_3, e_4) és una base de $\mathbb{R}^4$. En conseqüència, (e_3, e_4) és una base del subespai suplementari de F . Per consegüent, $(e_3 + F, e_4 + F)$ és una base de $\mathbb{R}^4 / F$. □

3.13 Rang d'un sistema de vectors

Exercici 3.27. Determineu, segons els valors de α , el rang del sistema $\mathcal{S} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ de vectors de $\mathbb{R}^3$, essent $\mathbf{v}_1 = (\alpha, -1, -1), \mathbf{v}_2 = (-1, -\alpha, -1), \mathbf{v}_3 = (-1, -1, \alpha)$.

Solució. Prenent la base canònica de $\mathbb{R}^3$, escrivim les coordenades d'aquests vectors per files (de la mateixa manera es faria per columnes) com segueix:

$$\begin{array}{lcl} \mathbf{v}_1 : & \alpha & -1 \quad -1 \\ \mathbf{v}_2 : & -1 & -\alpha \quad -1 \\ \mathbf{v}_3 : & -1 & -1 \quad \alpha \end{array}$$

Aplicant T1 s'obté

$$\begin{array}{lcl} \mathbf{v}_3 : & -1 & -1 \quad \alpha \\ \mathbf{v}_2 : & -1 & -\alpha \quad -1 \\ \mathbf{v}_1 : & \alpha & -1 \quad -1 \end{array}$$

aplicant 2 veges T3 s'obté

$$\begin{array}{lcl} \mathbf{v}_3 : & -1 & -1 \quad \alpha \\ \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 : & 0 & -\alpha + 1 \quad -1 - \alpha \\ \mathbf{v}_1 + \alpha \mathbf{v}_3 : & 0 & -1 - \alpha \quad -1 + \alpha^2 \end{array}$$

o de manera equivalent

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{v}_3 : & -1 & -1 & \alpha \\ \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 : & 0 & 1 - \alpha & -(1 + \alpha) \\ \mathbf{v}_1 + \alpha \mathbf{v}_3 : & 0 & -(\alpha + 1) & (\alpha + 1)(\alpha - 1) \end{array}$$

Aplicant T2, suposant que $\alpha + 1 \neq 0$, s'obté

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{v}_3 : & -1 & -1 & \alpha \\ \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 : & 0 & 1 - \alpha & -(1 + \alpha) \\ \frac{\mathbf{v}_1 + \alpha \mathbf{v}_3}{\alpha + 1} : & 0 & -1 & \alpha - 1 \end{array}$$

Aplicant T1, es té

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{v}_3 : & -1 & -1 & \alpha \\ \frac{\mathbf{v}_1 + \alpha \mathbf{v}_3}{\alpha + 1} : & 0 & -1 & \alpha - 1 \\ \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 : & 0 & 1 - \alpha & -(1 + \alpha) \end{array}$$

aplicant T3, es té

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{v}_3 : & -1 & -1 & \alpha \\ \frac{\mathbf{v}_1 + \alpha \mathbf{v}_3}{\alpha + 1} : & 0 & -1 & \alpha - 1 \\ \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 + \frac{(1 - \alpha)(\mathbf{v}_1 + \alpha \mathbf{v}_3)}{\alpha + 1} : & 0 & 0 & -(1 + \alpha) - (\alpha - 1)^2 \end{array}$$

o de manera equivalent

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{v}_3 : & -1 & -1 & \alpha \\ \frac{\mathbf{v}_1 + \alpha \mathbf{v}_3}{\alpha + 1} : & 0 & -1 & \alpha - 1 \\ \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 + \frac{(1 - \alpha)(\mathbf{v}_1 + \alpha \mathbf{v}_3)}{\alpha + 1} : & 0 & 0 & -\alpha^2 + \alpha - 2 \end{array}$$

De on obtenim que si $\alpha \neq -1$, aleshores

$$(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) \sim \left(\mathbf{v}_3, \frac{\mathbf{v}_1 + \alpha \mathbf{v}_3}{\alpha + 1}, \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 + \frac{(1 - \alpha)(\mathbf{v}_1 + \alpha \mathbf{v}_3)}{\alpha + 1} \right)$$

i, els vectors d'aquest darrer sistema són linealment independents, ja que $-\alpha^2 + \alpha - 2 \neq 0$ per a tot $\alpha \in \mathbb{R}$. Per tanto, si $\alpha \neq -1$ aleshores $\text{rang } \mathcal{S} = 3$. Si fuese $\alpha = -1$, aleshores tindriem

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{v}_3 : & -1 & -1 & -1 \\ \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 : & 0 & 2 & 0 \\ \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3 : & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Suprimint la tercera fila es té

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{v}_3 : & -1 & -1 & -1 \\ \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 : & 0 & 2 & 0 \end{array}$$

Per tant, si $\alpha = -1$

$$(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) \sim (\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3)$$

i es té $\text{rang } \mathcal{S} = 2$. A més, la relació de dependència en aquest cas és

$$\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

□

Exercici 3.28. Determineu el rang del sistema $\mathcal{S}$ de $\mathbb{R}^4$ i si escau, les relacions de dependència entre els vectors del sistema, essent $\mathcal{S} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4)$ amb $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1, 1)$, $\mathbf{v}_2 = (0, 1, 2, -1)$, $\mathbf{v}_3 = (1, 0, -2, 3)$, $\mathbf{v}_4 = (2, 1, 0, -1)$.

Solució. Prenent la base canònica de $\mathbb{R}^4$, escrivim les coordenades d'aquests vectors per columnes (de la mateixa manera es faria per files) com segue:

$$\begin{array}{cccc} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 & \mathbf{v}_4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \end{array}$$

Aplicant dues vegades T3, es té

$$\begin{array}{cccc} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_4 - 2\mathbf{v}_1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & -3 \end{array}$$

Aplicant de nou dues vegades T3, es té

$$\begin{array}{cccc} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_4 - 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -4 \end{array}$$

Per tant,

$$\text{rang}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4) = \text{rang}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, -\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, -2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_4) = 4$$

ja que els vectors del sistema $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, -\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, -2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_4)$ són linealment independents.

□

3.14 Producte d'espais vectorials. Isomorfismes d'espais vectorials

Exercici 3.29. Siguin els espais vectorials E i F amb $E = F = \mathbb{R}^2$. Calculeu una base de l'espai vectorial producte $E \times F$ associada a la base natural de $\mathbb{R}^2$.

Solució. Sabem que l'espai vectorial $E \times F$ és de dimensió 4, essent una base els vectors $\mathbf{v}_1 = (\mathbf{e}_1, \mathbf{0})$, $\mathbf{v}_2 = (\mathbf{e}_2, \mathbf{0})$, $\mathbf{v}_3 = (\mathbf{0}, \mathbf{e}_1)$ i $\mathbf{v}_4 = (\mathbf{0}, \mathbf{e}_2)$.

Sabem que

$$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^2 \cong (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}) \oplus (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}) \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^4$$

D'aquí, podem identificar el vector $\mathbf{v}_1 = (\mathbf{e}_1, \mathbf{0})$ de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ amb el vector $(1, 0, 0, 0)$ de $\mathbb{R}^4$. D'aquesta manera, tenim

$$((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$$

és una base de l'espai producte.

□

3.15 Canvi de coordenades

Exercici 3.30. Calculeu la matriu de canvi de la base $\mathcal{B}_1 = ((1, 1, 0), (-1, 0, 2), (0, 2, 5))$ a la base $\mathcal{B}_2 = ((0, 1, 1), (1, 1, 1), (3, 1, 0))$ de $\mathbb{R}^3$.

Solució. Sigui $\mathcal{B}_0$ la base natural de $\mathbb{R}^3$. Sabem que la matriu de pas de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_0$ és

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

i la matriu de pas de $\mathcal{B}_2$ a $\mathcal{B}_0$ és

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si (x_1, y_1, z_1) són les coordenades d'un vector en $\mathcal{B}_1$ i (x_2, y_2, z_2) són les coordenades del mateix vector en $\mathcal{B}_2$. Aleshores, es compleix

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

com que les matrius de canvi són sempre invertibles, podem escriure

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

és a dir

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ -2 & 5 & 9 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

Per tant, la matriu de pas de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$ és

$$Q^{-1}P = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ -2 & 5 & 9 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

Observeu el següent diagrama per a recordar com es pot deduir directament la matriu en qüestió

$$\mathcal{B}_2 \xleftarrow{Q^{-1}} \mathcal{B}_0 \xleftarrow{P} \mathcal{B}_1$$

No hi ha que olvidar que el diagrama per a qualsevol base $\mathcal{B}$ que no sigui la natural és sempre el següent

$$\mathcal{B}_0 \xleftarrow{P} \mathcal{B}$$

on la matriu P té per columnes les coordenades dels vectors de la base $\mathcal{B}$.

□

4 Exercicis proposats

1. Demostreu que el conjunt $\mathbb{C}$ dels nombres complexos, amb les operacions

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$
$$\lambda(a + bi) = \lambda a + \lambda bi$$

té estructura d'espai vectorial real.

2. Considereu el conjunt de les funcions definides sobre l'interval $[0, 1]$ i tals que $2f(0) = f(1)$. Formen un espai vectorial real?
3. Considereu el conjunt dels polinomis de grau menor o igual a 4, sobre un cos $\mathbb{K}$ (inclòs el polinomi nul). Formen un espai vectorial sobre $\mathbb{K}$?
4. Considerem l'espai vectorial real $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de les funcions reals de variable real. Determineu quins dels següents subconjunts són subespais vectorials: (a) $S_1 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f(-x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}\}$; (b) $S_2 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}\}$; (c) $S_3 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f \text{ és contínua}\}$; (d) $S_4 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}\}$; (e) $S_5 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f \text{ és dues vegades derivable i } f'' - f' + f = \mathbf{0}\}$; (f) $S_6 = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f(1) = f(2) + 3\}$.
5. Considerem l'espai vectorial real $\mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R})$ de les matrius d'ordre $n \times m$ amb coeficients reals. Determineu quins dels següents subconjunts són subespais vectorials: (a) $S_1 = \{A \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R}) : a_{11} = 0\}$; (b) $S_2 = \{A \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R}) : \sum_{i=1}^n a_{ii} = 0, n = m\}$; (c) $S_3 = \{A \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbb{R}) : a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j, n = m\}$.
6. Considérese les inclusiones $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}) \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, essent $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}) = \{a + b\sqrt[3]{5} : a, b \in \mathbb{Q}\}$. Demostreu que cadascun d'aquests cos és un espai vectorial sobre l'anterior.
7. Escriviu el vector $\mathbf{w} = (2, 2, 3)$ com una combinació lineal dels vectors del sistema $\mathcal{S} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ de $\mathbb{R}^3$, essent $\mathbf{v}_1 = (2, 1, 4)$, $\mathbf{v}_2 = (1, -1, 3)$, $\mathbf{v}_3 = (3, 2, 5)$.
8. Escriviu el polinomi $p(x) = 2 + 2x + 3x^2$ com una combinació lineal dels polinomis $p_1(x) = 2 + x + 4x^2$, $p_2(x) = 1 - x + 3x^2$, $p_3(x) = 3 + 2x + 5x^2$ de $\mathbb{R}_2[x]$.
9. Esbrineu si la matriu

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

és o no una combinació lineal de les matrius

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

10. (a) Expressieu $(4a, a-b, a+2b)$ com una combinació lineal de $(4, 1, 1)$ i $(0, -1, 2)$.
 (b) Expressieu $(3a + b + 3c, -a + 4b - c, 2a + b + 2c)$ com una combinació lineal de $(3, -1, 2)$ i $(1, 4, 1)$. (c) Expressieu $(2a - b + 4c, 3a - c, 4b + c)$ com una combinació lineal de tres vectors diferents de zero.
11. Expressieu $\mathbf{v} = (1, 1)$ com una combinació lineal de $\mathbf{v}_1 = (1, -1)$, $\mathbf{v}_2 = (3, 0)$, $\mathbf{v}_3 = (2, 1)$, de dues maneres diferents.
12. Expressieu (si és possible) els següents elements de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ com una combinació lineal de les famílies corresponents: (a) $\sin x$ i $(1, x, x^2, \dots)$; (b) $x^2 + x - 1$ i $(1, x - 1, (x - 1)^2)$; (c) 1 i $(x + 1, x^2 - 1, x^3 + 1)$; 0 i $((x - 1)^2, x, x^2 + 2, \sqrt{3})$.
13. En l'espai vectorial $\mathbb{R}^4$ es considera el subespai generat pels vectors $(2, 3, 1, -5)$ i $(0, 2, -1, 3)$. Trobeu a i b perquè el vector $(2, a, 3, -b)$ pertanyi a aquest subespai.
14. Trobeu un sistema generador $\mathcal{S}$ de l'espai vectorial de les solucions dels següents sistemes lineals homogenis:

$$(a) \quad \left. \begin{array}{l} x + 4y + 8z = 0 \\ 2x + 5y + 6z = 0 \\ 3x + i - 4z = 0 \end{array} \right\} \quad (b) \quad \left. \begin{array}{l} 2x - 3y + z = 0 \\ 6x - 9y + 3z = 0 \\ -4x + 6y - 2z = 0 \end{array} \right\}$$

15. Dels sistemes següents, determineu quins engendran $\mathbb{R}^3$. En cas negatiu, doneu una descripció geomètrica del subespai que engendran. (a) $\mathcal{S}_1 = ((4, 7, 3), (-1, 2, 6), (2, -3, 5))$; (b) $\mathcal{S}_2 = ((-2, 5, 0), (4, 6, 3))$; $\mathcal{S}_3 = ((1, 0, 3), (2, 0, -1), (4, 0, 5), (2, 0, 6))$.
16. Trobeu un sistema d'equacions lineals homogènies el qual espai de solucions és cadascun dels següents subespais vectorials:

$$\begin{aligned} S_1 &= \langle (1, -2, 0, 3), (1, -1, -1, 4), (1, 0, -2, 5) \rangle \\ S_2 &= \langle (1, 2, 0, 1) \rangle \\ S_3 &= \langle 8 + 3x, 2x + 3x^2 \rangle \quad (\text{considerat com a subespai de } \mathbb{R}_2[x]) \\ S_4 &= \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

17. Es consideren els subespais S i T de $\mathbb{R}^4$ definits de la manera següent:

$$\begin{aligned} S &= \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x = y = z\} \\ T &= \{(\alpha + \beta + \gamma + 3\delta, \alpha + \beta + 2\delta, \alpha + \delta, \alpha + \gamma) : \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

- (a) Està $T \subset S$? (b) Calculeu $S \cap T$.

18. Trobeu $S \cap T$ i $S + T$, essent

$$\begin{aligned} S &= \langle (1, 0, 1), (1, 1, 0) \rangle \\ T &= \langle (1, 2, 3), (0, 0, 1) \rangle \end{aligned}$$

Esbrineu si la suma és o no directa. Esbrineu també si S i T són o no subespais suplementaris respecto $\mathbb{R}^3$.

19. Demostreu que els sistemes $\mathcal{S}_1 = ((1, 2, -1), (2, -1, 0))$ i $\mathcal{S}_2 = ((-4, 7, -2), (-1, -7, 3))$ de $\mathbb{R}^3$ són equivalents.
20. En l'espai vectorial $\mathbb{R}^4$ es consideren els vectors $(1, 2, 0, a), (3, 2, b, -1), (2, 7, a, -3)$. Determineu a i b perquè aquests vectors siguin linealment dependents.
21. En $\mathbb{R}^4$ estudiar la independència lineal dels vectors

$$(1, 7, -1, 0), (2, 13, 0, 1), (3, 17, 4, 2), (0, 5, -2, 1)$$

22. Proveu que si u_1, u_2, u_3 són vectors linealment independents d'un espai vectorial E , també ho són $u_1 + u_2, u_2 + u_3, u_1 + u_3$.
23. Calculeu l'espai vectorial quocient de l'espai vectorial $\mathbb{R}^4$ mòdul el subespai F , essent: (a) $F = \{(x, y, z, t) : x + y = z - t = 0\}$; (b) $F = \langle (1, 1, 1, 1), (1, 2, 3, 4), (1, 3, 5, 6) \rangle$; (c) $F = \{(x, y, z, t) : x + y = x - y = z + t = x - t = 0\}$.
24. Siguin

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

$$M' = \left\{ \begin{pmatrix} a-b & 2a \\ b & a+2b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

Trobeu una base de $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})/M$ i $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})/M'$.

25. Determineu els rangs dels sistemes de vectors de $\mathbb{R}^4$ i, si escau, les relacions entre els vectors de $\mathcal{S}_i$ ($i = 1, 2$). (a) $\mathcal{S}_1 : \mathbf{v}_1 = (1, 0, 1, 0), \mathbf{v}_2 = (2, 1, 0, 1), \mathbf{v}_3 = (0, 2, -1, 1), \mathbf{v}_4 = (3, -1, 2, 0)$; (b) $\mathcal{S}_2 : \mathbf{v}_1 = (1, 0, 2, 3), \mathbf{v}_2 = (7, 4, -2, -1), \mathbf{v}_3 = (5, 2, 4, 7), \mathbf{v}_4 = (3, 2, 0, 1)$.
26. Determineu, segons els valors de α (o de α, β, γ) els rangs dels sistemes $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2, \mathcal{S}_3$ de vectors de $\mathbb{R}^3$. (a) $\mathcal{S}_1 : \mathbf{v}_1 = (\alpha, 1, 1), \mathbf{v}_2 = (1, \alpha, 1), \mathbf{v}_3 = (1, 1, \alpha)$; (b) $\mathcal{S}_2 : \mathbf{v}_1 = (\alpha, 1, 1), \mathbf{v}_2 = (-1, -\alpha, -1), \mathbf{v}_3 = (-1, -1, \alpha)$; $\mathcal{S}_3 : \mathbf{v}_1 = (0, \gamma, -\beta), \mathbf{v}_2 = (-\gamma, 0, \alpha), \mathbf{v}_3 = (\beta, -\alpha, 0)$.
27. Determineu una base del subespai F de $\mathbb{R}^4$ descrit per (x, y, z, t) del qual sap que $x = y - 3z$ i $z = t$. Completeu la base obtinguda per a obtenir una base de $\mathbb{R}^4$.
28. En $\mathbb{R}^3$ verificar que els vectors $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ són independents i calculeu les coordenades de $\mathbf{x}$ respecte de la base $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$. Els vectors són $\mathbf{a} = (-1, 1, 1), \mathbf{b} = (1, -1, 1), \mathbf{c} = (1, 1, -1)$ i $\mathbf{x} = (2, -3, -1)$.
29. Determineu el rang del sistema de vectors $\mathbf{v}_i$ ($i = 1, \dots, n$) de $\mathbb{R}^n$ que tenen coordenades $\alpha_{ij} = 1 + (\alpha - 1)\delta_{ij}$, on α és un escalar conegut i δ_{ij} és el símbol de Kronecker.
30. Siguin F, G, H subespais de l'espai vectorial E . Demostreu o doneu contraexemples de les afirmacions següents:
- $F \cap (G + H) = (F \cap G) + (F \cap H)$
 - $F + (G \cap H) = (F + G) \cap (F + H)$
 - $\dim(F \cap (G + H)) = \dim(F \cap G) + \dim(F \cap H) + \dim(F \cap G \cap H)$

31. Considerem l'espai vectorial $\mathbb{R}_3[t]$ de els polinomis amb coeficients reals de grau com a màxim tres. Siguin F i G els subespais

$$F = \{p(t) \in \mathbb{R}_3[t] : p(0) = p(1) = p'(1/2) = p'''(0) = 0\}$$

$$G = \langle t+1, t, t-1 \rangle$$

- a) Calculeu les seves dimensions i trobeu una base de cadascun d'ells
 b) Considerem els polinomis $t^2 - 5t + 2$ i $3t - 4$. Es demana: (i) Són de G ?
 (ii) En cas afirmatiu, trobeu $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tals que

$$p(t) = \alpha(t+1) + \beta t + \gamma(t-1)$$

essent $p(t)$ cadascun dels dos polinomis anteriors. (iii) Són aquests α, β, γ únics? En cas afirmatiu, justificar la resposta. En cas contrari, trobar-los.

- c) Calculeu les dimensions i trobeu una base de $F + G$ i $F \cap G$. És la suma $F + G$ directa?

- d) Trobeu una base d'un complementari de $F + G$ en $\mathbb{R}_3[t]$.

32. Considerem en $\mathbb{C}^3$ el sistema $\mathcal{S} = ((2-i, 1, 1), (1, 2+i, 3), (1, 2+3i, 2))$. Esbrineu: (a) Si $\mathcal{S}$ és un sistema generador d'un subespai de $\mathbb{C}^3$ de dimensió 1; (b) Si $\mathcal{S}$ és un sistema generador d'un subespai de $\mathbb{C}^3$ de dimensió 2; (c) És una base de $\mathbb{C}^3$? (d) És un sistema lliure?

4.1 Pràctica amb ordinador

Els càlculs d'aquesta unitat (rangs, independència, bases, interseccions) es poden comprovar amb **SageMath**, un sistema de càlcul simbòlic lliure que treballa amb aritmètica exacta sobre $\mathbb{Q}$ i sobre cossos finits. No cal instal·lar res: els fragments següents es poden executar al navegador a <https://sagecell.sagemath.org>. Us proposem de resoldre primer cada exercici a mà i fer servir l'ordinador només per verificar el resultat.

1. Comproveu el rang del sistema de vectors de l'exercici corresponent del capítol de pràctica:

```
A = matrix(QQ, [[1,1,2,0], [1,1,0,6], [-1,2,0,1], [1,1,1,3]])
print(A.rank())           # rang del sistema
print(A.kernel())         # relacions de dependència entre files
```

2. Calculeu una base de la intersecció de dos subespais de $\mathbb{R}^4$ i compareu-la amb el càlcul manual:

```
V = QQ^4
S = V.span([[1,2,1,0], [-1,1,1,1]])
T = V.span([[2,-1,0,1], [1,-1,3,7]])
I = S.intersection(T)
print(I.dimension()); print(I.basis())
```

3. Sobre el cos finit $\mathbb{Z}_5$, estudieu la dependència lineal del sistema de l'exercici de sistemes homogenis:

```
V = GF(5)^3
S = V.span([[1,4,0], [2,1,1], [1,1,4]])
print(S.dimension())      # dimensió del subespai generat
```

Observeu que un mateix sistema de coeficients pot tenir rang diferent segons el cos sobre el qual es treballa.

5 Tests interactius

Test 1. Espais i subespais

Instruccions. Marca una sola resposta per pregunta. En acabar, prem el botó **Corregir**. El camp **Nota** mostrarà el resultat.

Corregir Netejar **Nota:**

1. Quin ingredient és imprescindible en la definició d'un espai vectorial?

- (a) Una distància entre vectors
- (b) Un conjunt, un cos d'escalars i dues operacions compatibles
- (c) Una base ordenada fixada
- (d) Un producte escalar

Correcció:

2. Quin és el vector neutre de la suma en un espai vectorial?

- (a) Qualsevol vector de norma 1
- (b) El vector més petit
- (c) El vector zero
- (d) El vector unitari

Correcció:

3. Si W és un subespai de V , quina condició ha de complir sempre?

- (a) $0 \in W$ i W és tancat per suma i producte per escalars
- (b) W ha de ser finit
- (c) W ha de tenir exactament una base
- (d) W no pot contenir el vector zero

Correcció:

4. Quin conjunt és un subespai de $\mathbb{R}^2$?

- (a) $\{(x, y) : x + y = 1\}$
- (b) $\{(x, y) : xy = 0\}$
- (c) $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$
- (d) $\{(x, y) : y = 2x\}$

Correcció:

5. El conjunt de polinomis reals de grau menor o igual que 4 és:

- (a) Un conjunt sense estructura vectorial
- (b) Un espai vectorial real
- (c) Un espai vectorial només si s'exclou el polinomi nul
- (d) Un cos

Correcció:

6. Si $u, v \in W$ i $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, una manera compacta de provar que W és subespai és comprovar que:

- (a) $u + v = 0$
- (b) $\lambda u = \mu v$
- (c) $\lambda u + \mu v \in W$
- (d) u i v són independents

Correcció:

7. La intersecció de dos subespais d'un mateix espai vectorial és:

- (a) Sempre un subespai
- (b) Mai un subespai
- (c) Un subespai només si la intersecció és buida
- (d) Un subespai només en dimensió dos

Correcció:

8. Quin conjunt de matrius 2×2 reals és un subespai?

- (a) Les matrius amb determinant 1
- (b) Les matrius de traça 0

- (c) Les matrius invertibles
- (d) Les matrius amb una entrada positiva

Correcció:

9. El conjunt solució d'un sistema lineal homogeni és:

- (a) Sempre buit
- (b) Una recta que no passa per l'origen
- (c) Un conjunt que no conté el zero
- (d) Un subespai vectorial

Correcció:

10. Quina afirmació és falsa en general?

- (a) V és subespai de si mateix
- (b) $\{0\}$ és subespai de V
- (c) La unió de dos subespais és sempre un subespai
- (d) Tot subespai és tancat per producte per escalars

Correcció:

Test 2. Generadors, independència i bases

Instruccions. Marca una sola resposta per pregunta. En acabar, prem el botó **Corregir**. El camp **Nota** mostrarà el resultat.

Corregir Netejar **Nota:**

1. Una combinació lineal de $v_1, \dots, v_n$ és una expressió de la forma:

- (a) $v_1 v_2 \cdots v_n$
- (b) $v_1 + \cdots + v_n + n$
- (c) $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$
- (d) $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n$

Correcció:

2. El subespai generat per una família de vectors és:

- (a) El conjunt de totes les seves combinacions lineals

- (b) El conjunt dels vectors de la família només
- (c) Sempre tot l'espai
- (d) Sempre el subespai nul

Correcció:

3. Una família és linealment independent si:

- (a) Tots els vectors tenen norma 1
- (b) Cap vector és zero i prou
- (c) Genera tot l'espai
- (d) L'única combinació lineal nul·la és la trivial

Correcció:

4. Si una família conté el vector zero, aleshores és:

- (a) Sempre generadora
- (b) Linealment dependent
- (c) Linealment independent
- (d) Una base

Correcció:

5. Una base d'un espai vectorial és una família:

- (a) Només independent
- (b) Només generadora
- (c) Generadora i linealment independent
- (d) Amb vectors ortogonals

Correcció:

6. La dimensió d'un espai vectorial finit és:

- (a) El nombre de vectors de qualsevol base
- (b) El nombre de tots els vectors de l'espai
- (c) Sempre el nombre d'equacions d'un sistema
- (d) La suma de les coordenades d'una base

Correcció:

7. A $\mathbb{R}^3$, tres vectors linealment independents:

- (a) No poden generar $\mathbb{R}^3$
- (b) Formen una base de $\mathbb{R}^3$
- (c) Són necessàriament iguals
- (d) Tenen suma nul · la

Correcció:

8. Què indica que v pertanyi a $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$?

- (a) v és perpendicular a tots els v_i
- (b) v és un dels v_i
- (c) $v = 0$
- (d) v és combinació lineal dels v_i

Correcció:

9. En un espai de dimensió n , una família de més de n vectors és sempre:

- (a) Una base
- (b) Independent
- (c) Dependent
- (d) Ortonormal

Correcció:

10. Les coordenades d'un vector respecte d'una base són:

- (a) Sempre úniques només si el vector és zero
- (b) Úniques per a cada vector
- (c) No existeixen si la dimensió és finita
- (d) Sempre totes iguals

Correcció:

Test 3. Revisió global

Instruccions. Marca una sola resposta per pregunta. En acabar, prem el botó **Corregir**. El camp **Nota** mostrarà el resultat.

Corregir Netejar **Nota:**

1. Sigui $\mathbb{E}$ l'espai de matrius reals 2×2 i $\mathbb{F}$ el conjunt de matrius simètriques de traça 0. Aleshores $\mathbb{F}$ és:

- (a) Un subespai de dimensió 1
- (b) Un subespai de dimensió 2
- (c) Un subespai de dimensió 3
- (d) No és subespai

Correcció:

2. Quin és el subespai generat per $(1, 0)$ i $(0, 1)$ a $\mathbb{R}^2$?

- (a) $\{0\}$
- (b) $\mathbb{R}^2$
- (c) La recta $y = x$
- (d) Només els dos vectors donats

Correcció:

3. Si $U + W$ és suma directa, què es compleix?

- (a) $U = W$
- (b) $U + W = \{0\}$
- (c) $U \cap W = \{0\}$
- (d) $U \cap W = U$

Correcció:

4. La fórmula de Grassmann afirma que:

- (a) $\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$
- (b) $\dim(U + W) = \dim U \cdot \dim W$
- (c) $\dim(U \cap W) = \dim U + \dim W$
- (d) $\dim V = 0$

Correcció:

5. Quin conjunt és base de $\mathbb{R}^2$?

- (a) $\{(1, 0), (2, 0)\}$
- (b) $\{(0, 0), (1, 1)\}$
- (c) $\{(1, 1), (2, 2)\}$

- (d) $\{(1, 0), (1, 1)\}$

Correcció:

6. Una recta vectorial de $\mathbb{R}^3$ té dimensió:

- (a) 0
(b) 2
(c) 1
(d) 3

Correcció:

7. Un pla vectorial de $\mathbb{R}^3$ té dimensió:

- (a) 1
(b) 2
(c) 3
(d) 4

Correcció:

8. Si $\dim V = n$, qualsevol base de V té:

- (a) n vectors
(b) $n + 1$ vectors
(c) $2n$ vectors
(d) Un nombre arbitrari de vectors

Correcció:

9. En general, $U + W$ és:

- (a) La unió de U i W
(b) La intersecció de U i W
(c) El producte cartesià de U i W
(d) El conjunt de sumes $u + w$, amb $u \in U$ i $w \in W$

Correcció:

10. Quin criteri detecta dependència lineal?

- (a) Que tots els vectors siguin no nuls
(b) Que la família tingui un sol vector no nul

- (c) Que algun vector sigui combinació lineal dels altres
- (d) Que els vectors pertanyin a un mateix cos

Correcció: