

Teoria de categories

Capítol 1: Categories i morfismes especials

Revisió 2

Miquel Àngel Perelló

Setembre de 2026

Índex

Sobre aquest fascicle	iii
I Teoria	1
1 Categories	2
1.1 Cap al concepte de categoria	2
1.2 Definició de categoria	3
1.3 Fletxes, camins i diagrames commutatius	5
1.4 Exemples de categories	6
1.4.1 Categories finites	6
1.4.2 Categories de conjunts	8
1.4.3 Estructures elementals com a categories	8
1.4.4 Categories de conjunts estructurats	11
1.4.5 Conjunts i relacions	12
1.4.6 Categories de grafs	13
1.4.7 Resum: objectes i morfismes dels exemples	14
1.5 Isomorfismes	14
1.6 Classes especials de morfismes	18
1.6.1 Monomorfismes i epimorfismes	18
1.6.2 Seccions i retraccions	19
1.7 Construccions sobre categories	20
1.7.1 La categoria oposada	20
1.7.2 La categoria producte	21
1.7.3 Subcategories	22
1.7.4 Categories sobre i sota un objecte	22
1.8 Principi de dualitat	23
1.8.1 Traducció formal d'un enunciat	24
1.8.2 Primer exemple: de monomorfisme a epimorfisme	25
1.8.3 Segon exemple: del producte al coproducte	26
1.8.4 Diccionari bàsic de dualitats	26

1.8.5	Abast i precaucions	27
1.9	Propietats duals dels morfismes	27
1.9.1	Propietats dels monomorfismes	28
1.9.2	Les propietats duals dels epimorfismes	28
1.9.3	Condicions necessàries i suficients	29
1.10	Grafs i categories lliures	29
1.11	Categories segons la mida	31
II	Pràctica: exercicis resolts	33
1	Categories	34
1.1	Definició de categoria	34
1.2	Fletxes, camins i diagrames commutatius	35
1.3	Primers exemples	36
1.4	Isomorfismes	37
1.5	Construccions sobre categories	39
1.6	Grafs i categories lliures	40
1.7	Qüestions de mida	40
III	Exercicis proposats	41
1	Categories	42
1.1	Categories i axiomes	42
1.2	Fletxes, camins i diagrames commutatius	43
1.3	Primers exemples	43
1.4	Isomorfismes	44
1.5	Construccions sobre categories	44
1.6	Grafs i categories lliures	45
1.7	Qüestions de mida	45
IV	Test interactiu	46
1	Categories	47
	Bibliografia	52
	Índex alfabètic	53

Sobre aquest fascicle

Aquest fascicle recull el capítol 1 de *Teoria de categories*, **Categories i morfismes especials**, en la revisió 2. Inclou la teoria, la pràctica amb exercicis resolts, els exercicis proposats amb indicacions i el test interactiu amb una clau de respostes també llegible en paper.

El prefaci i la introducció es publiquen separadament al fascicle *Prefaci i introducció* (**catintro**). Les remissions a altres capítols o apèndixs es refereixen al volum complet i no impliquen que aquests materials formin part d'aquesta revisió publicada.

Part I

Teoria

1 Categories i morfismes especials

Prerequisits

Nocions bàsiques de conjunts i aplicacions. Cap coneixement previ de teoria de categories.

Objectius

En acabar el capítol, el lector ha de saber: enunciar la definició de categoria i verificar-la en exemples (**Set**, preordres, monoides, grafs); llegir i escriure diagrames commutatius; distingir monomorfismes, epimorfismes, seccions i retraccions; formar la categoria oposada i aplicar el principi de dualitat; i distingir categories petites de localment petites.

1.1 Cap al concepte de categoria

Quan comencem a estudiar matemàtiques, aprenem a treballar amb molts tipus d'estructures: ordres, grups, espais vectorials, espais topològics, etc. Aviat notem que aquestes estructures rarament apareixen soles. Al costat de cadascuna hi ha sempre una classe de transformacions que les relacionen respectant la seva manera de comportar-se: entre ordres, les aplicacions monòtones; entre grups, els homomorfismes; entre espais vectorials, les aplicacions lineals; entre espais topològics, les aplicacions contínues. Aquestes transformacions admissibles les anomenarem, en general, *morfismes* o *fletxes*.

La noció general de categoria proporciona una caracterització de la idea de «transformació que preserva l'estructura» i, per tant, d'una mena d'estructures que admeten aquestes transformacions.

A aquesta idea s'hi afegeix una observació cabdal: totes aquestes estructures concretes tenen un conjunt subjacent. Per això, si volem preservar l'estructura, primer haurem de fer compatible aquesta noció amb les aplicacions de conjunts. Com hem dit a la secció «Mirar els objectes des de fora» de la introducció, la teoria de categories desplaça la visió clàssica, puntual i conjuntista, de les aplicacions cap a una visió abstracta com a fletxes.

Recordem breument la notació de fletxa per a les aplicacions entre conjunts. Una aplicació f amb domini X i codomini Y es denota $f: X \rightarrow Y$, o bé com a fletxa $X \xrightarrow{f} Y$. L'operació fonamental sobre les aplicacions és la *composició*: si

$f: X \rightarrow Y$ i $g: Y \rightarrow Z$, es defineix $g \circ f: X \rightarrow Z$ per

$$(g \circ f)(x) := g(f(x)).$$

Perquè la composició estigui definida, el codomini de f ha de coincidir amb el domini de g ; amb fletxes, $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$. A més, per a cada conjunt X hi ha l'aplicació *identitat* sobre X ,

$$\text{id}_X: X \rightarrow X, \quad \text{id}_X(x) := x.$$

Aquestes operacions es regeixen per la llei d'associativitat i les lleis de la unitat: per a $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ i $h: Z \rightarrow W$,

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f), \quad f \circ \text{id}_X = f = \text{id}_Y \circ f.$$

Observem que aquestes equacions es formulen purament en termes de les operacions sobre aplicacions, sense cap referència als elements dels conjunts X , Y , Z , W .

Això no és cap ingenuïtat, sinó una evidència sobre les estructures que hem mencionat: els homomorfismes entre grups, les aplicacions monòtones entre preordres, les aplicacions lineals entre espais vectorials i les aplicacions contínues entre espais topològics satisfan les condicions que acabem d'escriure.

Aquesta és la idea que orientarà tot el que segueix: estudiar un objecte no pel que és per dins, sinó pel paper que fa dins del sistema de fletxes que el connecten amb els altres. És el que ens permetrà de parlar-ne amb un mateix llenguatge i, fins i tot, estendre'l a altres tipus d'objectes no necessàriament basats en la noció d'aplicació, com ara grafs, sistemes deductius o relacions entre conjunts.

1.2 Definició de categoria

Definició 1.1. Una **categoria** $\mathbf{C}$ consta de les dades següents:

1. una col·lecció d'**objectes** $A, B, C, \dots$, que denotem $\text{Ob}(\mathbf{C})$;
2. una col·lecció de **morfismes** $f, g, h, \dots$; cada morfisme f té associats un únic **domini** A i un únic **codomini** B , i ho escrivim com $A = \text{dom}(f)$ i $B = \text{cod}(f)$; en aquest cas també escrivim $f: A \rightarrow B$ o com a fletxa $A \xrightarrow{f} B$;
3. per a cada objecte A , un morfisme **identitat** $\text{id}_A: A \rightarrow A$;
4. per a cada parella de morfismes componibles $f: A \rightarrow B$ i $g: B \rightarrow C$, la **composició** $g \circ f: A \rightarrow C$.

Aquestes dades han de satisfer els dos axiomes següents, sempre que les composicions indicades tinguin sentit:

1. **Associativitat.** $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$, per a $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$, $h: C \rightarrow D$.
2. **Identitats.** $\text{id}_B \circ f = f$ i $f \circ \text{id}_A = f$, per a tot $f: A \rightarrow B$.

Parlem aquí de *col · leccions* i no de *conjunts*, deliberadament: en alguns exemples els objectes són massa nombrosos per formar un conjunt. Precisarem aquesta qüestió a la secció 1.11. Quan la col · lecció de morfismes de A a B és un conjunt, se sol denotar

$$\mathrm{Hom}_C(A, B)$$

o simplement $\mathrm{Hom}(A, B)$ quan la categoria és clara i l'anomenem *homconjunt* de A i B .

Observació 1.1. Fem algunes precisions sobre la definició.

1. Els morfismes també s'anomenen **fletxes**, i sovint farem servir les dues paraules indistintament.
2. Com que cada morfisme té un únic domini i un únic codomini, els homconjunts són **disjunts dos a dos**: si $(A, B) \neq (A', B')$, aleshores $\mathrm{Hom}(A, B) \cap \mathrm{Hom}(A', B') = \emptyset$. Cada fletxa pertany, doncs, a un únic $\mathrm{Hom}(A, B)$.
3. L'axioma d'associativitat fa que puguem escriure $h \circ g \circ f$ sense parèntesis, sabent que el resultat no depèn de la manera d'agrupar-los.
4. Els axiomes d'identitat diuen que id_A es comporta com un neutre per la composició. Veurem tot seguit que aquesta propietat determina id_A de manera única.
5. Aquesta definició axiomàtica pren com a termes no definits els objectes i els morfismes. Una categoria és qualsevol estructura que contingui aquestes dues menes de dades i que satisfaci les condicions i propietats de la definició. De fet, se'n pot prescindir d'una: com que cada objecte queda determinat per la seva identitat, una categoria petita es pot descriure en un llenguatge amb *una sola* mena d'individus —les fletxes— i tres relacions primitives de domini, codomini i composició, amb els objectes reconstruïts com les fletxes identitat. L'apèndix sobre l'axiomàtica relacional del volum complet desenvolupa aquesta presentació relacional i en demostra l'equivalència amb la definició d'aquí.

Proposició 1.1. La fletxa identitat d'un objecte és única.

Demostració. Suposem que $e_A: A \rightarrow A$ i $e'_A: A \rightarrow A$ són dues fletxes identitat de A . Com que e_A és una identitat,

$$e_A \circ e'_A = e'_A.$$

D'altra banda, com que e'_A és una identitat,

$$e_A \circ e'_A = e_A.$$

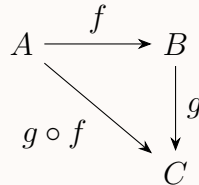
Per tant $e_A = e'_A$.



1.3 Fletxes, camins i diagrames commutatius

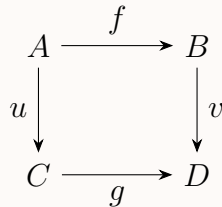
La definició anterior es pot llegir algebraicament, mitjançant equacions, però també gràficament. Aquesta segona lectura serà una part essencial del llenguatge categòric.

Si $f: A \rightarrow B$ i $g: B \rightarrow C$ són componibles, la composició es pot representar amb el triangle



La fletxa directa de A a C és precisament el resultat de seguir el camí $A \rightarrow B \rightarrow C$.

Més generalment, un diagrama pot contenir diferents camins dirigits amb el mateix origen i el mateix destí. Per exemple,



té dos camins de A a D : primer f i després v , o primer u i després g .

Definició 1.2. Un diagrama com l'anterior **commuta** si els dos camins determinen el mateix morfisme, és a dir, si

$$v \circ f = g \circ u.$$

En general, direm que un diagrama commuta quan tots els camins dirigits amb el mateix origen i el mateix destí que cal comparar donen la mateixa composició.

Observació 1.2. Un dibuix de fletxes no és automàticament un diagrama commutatiu. El dibuix especifica objectes i morfismes; afirmar que *commuta* afegeix una o més igualtats entre composicions de fletxes. Per això convé aprendre a passar en tots dos sentits:

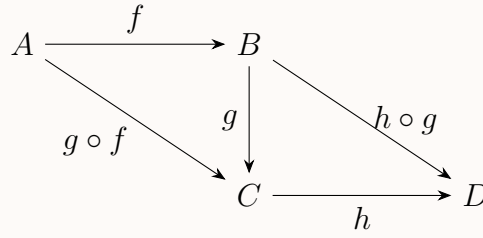
$$\text{diagrama} \quad \longleftrightarrow \quad \text{equacions entre fletxes i composicions.}$$

L'associativitat es pot llegir com un diagrama commutatiu. En una cadena

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$$

podem agrupar les composicions de dues maneres, $(h \circ g) \circ f$ o $h \circ (g \circ f)$. El diagrama següent ho mostra com un paral·lelogram de vèrtexs A, B, D, C i costats $f, h \circ g$,

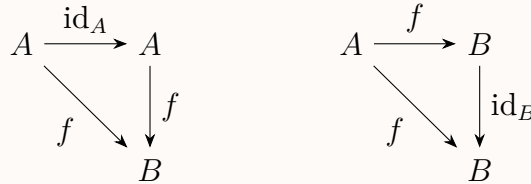
h i $g \circ f$; la diagonal interior és g .



Recórrer $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$ agrupant primer $g \circ f$ i després component amb h , o agrupant primer $h \circ g$ i precomponent amb f , dona la mateixa fletxa $A \rightarrow D$. Això és exactament l'axioma d'associativitat:

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

Les identitats també tenen una lectura diagramàtica. Si $f: A \rightarrow B$, inserir id_A abans de f o id_B després de f no canvia el camí:



A partir d'ara, quan una propietat categòrica tingui una expressió diagramàtica natural, la farem visible al mateix lloc on aparegui.

1.4 Exemples de categories

La força de la definició es veu de seguida en la varietat d'exemples que hi encaixen. En cadascun cal identificar els objectes, els morfismes, les identitats i la composició. Comencem pels exemples més petits, que malgrat la seva simplicitat apareixeran sovint com a *categories índex* (vegeu la definició de diagrama al capítol «Límits i colímits» del volum complet) per construir diagrames.

1.4.1 Categories finites

Per descomptat, els objectes d'una categoria no cal que siguin conjunts. Considerem alguns exemples molt senzills que es poden descriure per complet. En cada cas identifiquem els objectes, els morfismes, la composició i les identitats; l'associativitat i les lleis d'identitat es comproven directament, ja que hi ha molt poques composicions a considerar.

1. La *categoria buida* $\mathbf{0}$ no té cap objecte ni cap morfisme. No hi ha composició ni identitats que definir, i els axiomes es compleixen trivialment perquè no hi ha res a comprovar; és la categoria «sense res».

2. La categoria *unitat* **1**, també anomenada categoria *terminal*, té un únic objecte $*$ i un únic morfisme, la identitat id_* . La composició és $\text{id}_* \circ \text{id}_* = \text{id}_*$, i els axiomes es redueixen a aquesta igualtat:

$$* \xrightarrow{\text{id}_*} *$$

3. La categoria **2** té dos objectes, $*$ i $\star$, i una única fletxa no trivial entre ells, a més de les dues identitats. Les úniques composicions són les que involucren identitats, de manera que els axiomes es compleixen automàticament. A partir d'ara, com és costum, no dibuixem les identitats:

$$* \longrightarrow \star$$

4. La categoria amb **dues fletxes paral·leles** té dos objectes i dues fletxes no trivials f, g amb el mateix domini i el mateix codomini. Com que cap parell d'aquestes fletxes no és componible, de nou les úniques composicions són amb identitats:

$$* \rightrightarrows \star$$

Aquesta darrera reapareixerà com a categoria índex dels *equalitzadors* (vegeu el capítol «Límits i colímits» del volum complet).

5. La categoria **3** té tres objectes i dues fletxes consecutives; la composició obliga a incloure també la seva composició. Amb aquesta composició (i les identitats) els axiomes se satisfan:

$$\begin{array}{ccc} * & \longrightarrow & \star \\ & \searrow & \downarrow \\ & & \bullet \end{array}$$

Observació 1.3. Afegir fletxes no és gratuït: la composició obliga a incloure totes les composicions. Dues fletxes de sentits oposats $f: * \rightarrow \star$ i $g: \star \rightarrow *$

$$* \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xleftarrow{g} \end{array} \star$$

generen $g \circ f$, $f \circ g$, $g \circ f \circ g$, i així indefinidament; la categoria resultant és infinita. Per obtenir-ne una de finita cal imposar equacions entre composicions —per exemple $g \circ f = \text{id}_*$ i $f \circ g = \text{id}_\star$, cosa que fa de f un isomorfisme (la definició 1.5). En canvi, dues fletxes *paral·leles* $f, g: * \rightarrow \star$ no són componibles entre elles, i la categoria és finita sense afegir res.

1.4.2 Categories de conjunts

A la categoria **Set**, els objectes són els conjunts i els morfismes són les aplicacions entre conjunts. La composició és la composició habitual d'aplicacions i la identitat de cada conjunt A és l'aplicació identitat $\text{id}_A(x) = x$. L'associativitat i les lleis d'identitat són propietats ben conegudes de les aplicacions, de manera que **Set** és una categoria. Serà una categoria de referència: quan un concepte categòric nou ens desconcerti, mirar què vol dir a **Set** sol ser un bon primer pas.

Si ens restringim als conjunts finits i a les aplicacions entre ells, obtenim la categoria **FinSet**: els objectes són els conjunts finits, els morfismes són les aplicacions entre ells, i la composició i les identitats són les mateixes que a **Set**. Com que la composició d'aplicacions entre conjunts finits torna a ser una aplicació entre conjunts finits, els axiomes se satisfan igual que a **Set**.

Tot conjunt S es pot veure també com una categoria: els objectes són els elements de S i els únics morfismes són les identitats, una per objecte. La composició és forçada ($\text{id}_x \circ \text{id}_x = \text{id}_x$) i els axiomes es compleixen trivialment. Una categoria en què els únics morfismes són les identitats s'anomena **categoria discreta**. En una categoria discreta no hi ha cap informació més enllà de la col·lecció d'objectes.

Observació 1.4. Una categoria no queda determinada pels seus objectes: cal dir també quines són les fletxes. Amb només dos objectes, per exemple, hem trobat ja tres categories ben diferents:

- la **categoria discreta** de dos punts, només amb les identitats i cap fletxa no trivial;
- la categoria **2**, amb una única fletxa no trivial d'un objecte a l'altre;
- la categoria amb **dues fletxes paral·leles**, amb dues fletxes no trivials entre els mateixos objectes.

Totes tres tenen els mateixos dos objectes, però són categories diferents perquè difereixen en les fletxes. En particular, **2** no és la categoria discreta de dos punts: la presència de la fletxa no trivial les distingeix.

1.4.3 Estructures elementals com a categories

Les estructures matemàtiques més simples sovint són categories. Per exemple, un monoide no s'assembla a una categoria d'un sol objecte: és exactament una categoria d'un sol objecte. Recollim aquesta idea en una llista d'identificacions, i tot seguit les justifiquem:

- un conjunt és una categoria discreta (ja vist a la subsecció anterior);
- un monoide és una categoria d'un sol objecte;
- un grup és una categoria d'un sol objecte en què tot morfisme és un isomorfisme;
- un preordre és una categoria prima;
- un ordre parcial és una categoria prima en què els únics isomorfismes són les

identitats;

- un sistema deductiu és una categoria prima.

En tots els casos, els objectes i els morfismes deixen de ser conjunts i aplicacions: passen a ser els elements i les relacions internes de l'estructura.

Preordres. Un *preordre* és un parell $(P, \leq)$ on P és un conjunt i $\leq$ una relació binària sobre P reflexiva ($x \leq x$) i transitiva (si $x \leq y$ i $y \leq z$, aleshores $x \leq z$). Per exemple, $(\mathbb{R}, \leq)$, o els subconjunts d'un conjunt ordenats per la inclusió $\subseteq$.

Tot preordre $(P, \leq)$ és una categoria. Els objectes són els elements de P , i

$$\text{Hom}(x, y) = \begin{cases} \{(x, y)\} & \text{si } x \leq y, \\ \emptyset & \text{altrament,} \end{cases}$$

és a dir, hi ha exactament una fletxa $x \rightarrow y$ quan $x \leq y$. La identitat és $\text{id}_x = (x, x)$ (existeix per reflexivitat) i la composició és $(y, z) \circ (x, y) = (x, z)$ (existeix per transitivitat):

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{(x, y)} & y \\ & \searrow (x, z) & \downarrow (y, z) \\ & & z \end{array}$$

Com que cada homconjunt té com a màxim un element, l'associativitat i les lleis d'identitat se satisfan automàticament. Una categoria en què $|\text{Hom}(x, y)| \leq 1$ per a tot parell d'objectes s'anomena **prima** (en anglès, *thin category*).

Si el preordre és a més antisimètric ($x \leq y$ i $y \leq x$ impliquen $x = y$), és un *ordre parcial*. Categòricament, l'antisimetria diu que els únics isomorfismes (la definició 1.5) són les identitats: si $x \rightarrow y$ i $y \rightarrow x$ existeixen totes dues, aleshores $x = y$.

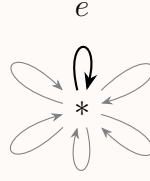
Monoïdes. Un *monoïde* és una terna $(M, *, e)$ on $*$ és una operació associativa sobre M amb element neutre e . Per exemple, $(\mathbb{N}, +, 0)$, o les paraules sobre un alfabet amb la concatenació i la paraula buida.

Tot monoïde és una categoria amb un sol objecte $*$. L'homconjunt és tot el monoïde, $\text{Hom}(*, *) = M$, de manera que els morfismes són els elements de M . La composició és l'operació del monoïde (amb la convenció $g \circ f = g * f$, on l'element de la dreta actua primer) i la identitat és $\text{id}_* = e$. Els axiomes de categoria són exactament els de monoïde. Els morfismes, aquí, no són aplicacions: són els elements de M .

Grups. Un *grup* és una terna $(G, *, e)$ que és un monoïde en què, a més, tot element a té un invers a^{-1} amb $a * a^{-1} = e = a^{-1} * a$. Per exemple, $(\mathbb{Z}, +, 0)$, o les permutacions d'un conjunt amb la composició.

Un grup és una categoria d'un sol objecte en què tot morfisme és un isomorfisme. En efecte, vist com a monoïde-categoria, l'invers de l'element a és exactament el morfisme invers de la fletxa corresponent. La teoria de grups és, doncs, la part

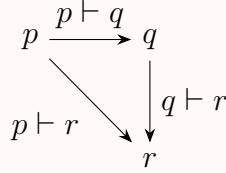
invertible de la teoria de monoides. Cada element del grup és un bucle sobre l'únic objecte, i la identitat e n'és el bucle destacat:



Sistemes deductius. Fixem un *sistema deductiu* i considerem la relació de deduïbilitat $\vdash$ entre fórmules, reflexiva ($p \vdash p$) i transitiva (de $p \vdash q$ i $q \vdash r$ se segueix $p \vdash r$). Aquest sistema és una categoria: els objectes són les fórmules $p, q, r, \dots$ i

$$\text{Hom}(p, q) = \begin{cases} \{*\} & \text{si } p \vdash q, \\ \emptyset & \text{altrament.} \end{cases}$$

La identitat de p correspon a $p \vdash p$ i la composició, a l'encadenament de deduccions:



Com el preordre, és una categoria prima. A diferència de l'ordre parcial, però, un sistema deductiu no acostuma a ser antisimètric: dues fórmules diferents poden ser interdeduïbles ($p \vdash q$ i $q \vdash p$ amb $p \neq q$), com $p \wedge q$ i $q \wedge p$. Categòricament, això vol dir que hi ha isomorfismes no trivials: fórmules distintes però isomorfes. Registrem només *si* q és deduïble de p , no *com*; a la versió que distingeix les proves hi tornem tot seguit.

Observació 1.5 (Les proves mateixes com a fletxes). Hi ha una interpretació lògica més fina en què una prova concreta

$$\pi: p \longrightarrow q$$

és ella mateixa un morfisme, i dues proves $\pi, \rho: p \rightarrow q$ poden ser morfismes diferents. La composició representa aleshores l'encadenament de proves i la identitat, la prova trivial d'una fórmula a partir d'ella mateixa. Passem, doncs, d'una sola fletxa (registrar *si* hi ha deducció) a moltes fletxes (registrar *quina* prova).

Per obtenir una categoria de proves completament definida cal fixar el sistema deductiu i precisar també quan dues derivacions es consideren iguals —per exemple, mitjançant una equivalència adequada entre proves. No necessitem encara aquesta teoria; de moment distingirem entre la categoria prima de la *deduïbilitat* i aquesta interpretació més rica de les *proves com a fletxes*. Hi tornarem quan el llenguatge categòric ens permeti fer-ho amb més precisió.

1.4.4 Categories de conjunts estructurats

Ara considerem les categories els objectes de les quals són conjunts amb alguna estructura, i els morfismes, les aplicacions que preserven aquesta estructura. En tots els casos la composició és la d'aplicacions i les identitats són les aplicacions identitat, de manera que l'associativitat i les lleis d'identitat s'hereten de les de **Set**; només cal comprovar, en cada cas, que la composició d'aplicacions que respecten l'estructura torna a respectar-la, i que la identitat també ho fa.

Grups. Considerem ara la categoria **Grp**, que té per objectes tots els grups i per morfismes els homomorfismes de grups. Un *homomorfisme de grups* $h: G \rightarrow H$ és una aplicació entre els conjunts subjacents que preserva l'operació: $h(a * b) = h(a) * h(b)$ per a tot a, b (d'on se segueix que preserva també el neutre i els inversos). Si $h: G \rightarrow H$ i $k: H \rightarrow K$ són homomorfismes, la composició també ho és, ja que

$$k(h(a * b)) = k(h(a) * h(b)) = k(h(a)) * k(h(b));$$

i l'aplicació identitat preserva trivialment l'operació. Com que la composició i les identitats són les d'aplicacions entre conjunts, l'associativitat i les lleis d'identitat s'hereten de **Set**.

Espais vectorials. Fixem un cos $\mathbb{K}$ i considerem la categoria **Vect** $_{\mathbb{K}}$, que té per objectes els espais vectorials sobre $\mathbb{K}$ i per morfismes les aplicacions lineals. Un *espai vectorial* sobre $\mathbb{K}$ és un grup abelià $(V, +)$ amb una multiplicació per escalars $\mathbb{K} \times V \rightarrow V$ compatible amb les operacions. Una *aplicació lineal* $f: V \rightarrow W$ és una aplicació entre els conjunts subjacents que preserva l'estructura: $f(u + v) = f(u) + f(v)$ i $f(\lambda v) = \lambda f(v)$. Si $f: V \rightarrow W$ i $g: W \rightarrow U$ són lineals, la composició també ho és, ja que

$$g(f(u + v)) = g(f(u)) + g(f(v)) \quad \text{i} \quad g(f(\lambda v)) = \lambda g(f(v));$$

i la identitat és lineal. Per tant la composició i les identitats són les d'aplicacions entre conjunts, i l'associativitat i les lleis d'identitat s'hereten de **Set**.

Espais topològics. Considerem ara la categoria **Top**, que té per objectes els espais topològics i per morfismes les aplicacions contínues. Un *espai topològic* és un parell $(X, \mathcal{T}_X)$ on X és un conjunt i $\mathcal{T}_X$ una família de subconjunts de X (els *oberts*) tal que:

- $\emptyset, X \in \mathcal{T}_X$;
- si $U, V \in \mathcal{T}_X$, aleshores $U \cap V \in \mathcal{T}_X$;
- si $\{U_i\}_{i \in I}$ és una família qualsevol en $\mathcal{T}_X$, aleshores $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}_X$.

Una *aplicació contínua* $f: (X, \mathcal{T}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{T}_Y)$ és una aplicació $f: X \rightarrow Y$ que preserva l'estructura en el sentit següent: $f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X$ per a tot $U \in \mathcal{T}_Y$. Si $f: X \rightarrow Y$ i $g: Y \rightarrow Z$ són contínues, la composició també ho és, ja que $(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$ és obert quan U ho és; i la identitat és contínua, perquè $\text{id}^{-1}(U) = U$. Per tant, un cop més, la composició i les identitats són les d'aplicacions entre conjunts, i l'associativitat i les lleis d'identitat s'hereten de **Set**.

Monoides. Considerem ara la categoria **Mon**, que té per objectes els monoides i per morfismes els homomorfismes de monoides. Un *homomorfisme de monoides* $h: M \rightarrow N$ és una aplicació entre els conjunts subjacents que preserva l'operació i el neutre: $h(a * b) = h(a) * h(b)$ i $h(e_M) = e_N$. Si $h: M \rightarrow N$ i $k: N \rightarrow P$ són homomorfismes, la composició també ho és, ja que

$$k(h(a * b)) = k(h(a) * h(b)) = k(h(a)) * k(h(b)) \quad \text{i} \quad k(h(e_M)) = k(e_N) = e_P;$$

i la identitat preserva trivialment l'operació i el neutre. Com que la composició i les identitats són les d'aplicacions entre conjunts, l'associativitat i les lleis d'identitat s'hereten de **Set**.

Ordres parcials. Considerem ara la categoria **Pos**, que té per objectes els ordres parcials i per morfismes les aplicacions monòtones. Una *aplicació monòtona* $f: P \rightarrow Q$ és una aplicació entre els conjunts subjacents que preserva l'ordre: si $x \leq y$, aleshores $f(x) \leq f(y)$. Si $f: P \rightarrow Q$ i $g: Q \rightarrow R$ són monòtones, la composició també ho és, ja que

$$x \leq y \implies f(x) \leq f(y) \implies g(f(x)) \leq g(f(y));$$

i la identitat preserva trivialment l'ordre. Un cop més, la composició i les identitats són les d'aplicacions entre conjunts, i les lleis s'hereten de **Set**.

Convé no confondre les dues mirades: un monoide concret és una categoria (d'un sol objecte) i un ordre parcial concret és una categoria (prima), mentre que **Mon** i **Pos** tenen *tots* els monoides i *tots* els ordres parcials per objectes, respectivament.

Observació 1.6 (Categories com a contextos matemàtics). Cada una d'aquestes categories és l'*àmbit* on es desenvolupa una teoria matemàtica: **Top** és el context de la topologia general, **Grp** el de la teoria de grups, **Vect_ℝ** el de l'àlgebra lineal, i així successivament. Aquí, la categoria la formen tots els objectes d'una mena; a les estructures elementals, en canvi, un sol objecte estructurat ja és una categoria.

1.4.5 Conjunts i relacions

Com hem avançat a la introducció (secció «Mirar els objectes des de fora»), els conjunts admeten una segona categoria, on els morfismes no són aplicacions sinó *relacions*. La categoria **Rel** té per objectes els conjunts i, per morfismes $X \rightarrow Y$, les relacions $R \subseteq X \times Y$. La identitat de X és la relació diagonal $\Delta_X = \{(x, x) \mid x \in X\}$, i la composició de $R \subseteq X \times Y$ amb $S \subseteq Y \times Z$ és

$$S \circ R = \{(x, z) \mid \exists y \in Y. (x, y) \in R \text{ i } (y, z) \in S\} \subseteq X \times Z.$$

Comprovem que **Rel** és una categoria. Per a l'associativitat, siguin $R \subseteq X \times Y$, $S \subseteq Y \times Z$ i $T \subseteq Z \times W$. Aleshores $(x, w) \in T \circ (S \circ R)$ si i només si existeixen $y \in Y$ i $z \in Z$ amb $(x, y) \in R$, $(y, z) \in S$ i $(z, w) \in T$, i aquesta mateixa condició caracteritza $(x, w) \in (T \circ S) \circ R$; per tant $T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R$. Per a la identitat, $(x, y) \in R \circ \Delta_X$ si i només si existeix x' amb $(x, x') \in \Delta_X$ i $(x', y) \in R$, és a dir $x' = x$

i $(x, y) \in R$; per tant $R \circ \Delta_X = R$, i anàlogament $\Delta_Y \circ R = R$. Compondre relacions equival a aplicar un quantificador existencial sobre el terme intermedi: aquest és el primer pont amb la lògica que assenyalàvem a la introducció. A diferència de **Set**, aquí un morfisme $X \rightarrow Y$ no assigna a cada element de X un únic element de Y ; pot relacionar-lo amb diversos, o amb cap.

1.4.6 Categories de grafs

Definició 1.3. Un **graf dirigit** G consta d'un conjunt V_G de **vèrtexs**, un conjunt E_G d'**arestes** i dues aplicacions

$$s_G, t_G: E_G \longrightarrow V_G,$$

que assignen a cada aresta el seu **origen** i el seu **destí**, respectivament.

Definició 1.4. Un **morfisme de grafs** $F: G \rightarrow H$ és una parella d'aplicacions

$$F_V: V_G \rightarrow V_H, \quad F_E: E_G \rightarrow E_H,$$

que preserven origen i destí:

$$F_V \circ s_G = s_H \circ F_E, \quad F_V \circ t_G = t_H \circ F_E.$$

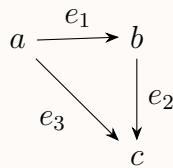
Equivalentment, han de commutar els dos quadrats següents:

$$\begin{array}{ccc} E_G & \xrightarrow{F_E} & E_H \\ s_G \downarrow & & \downarrow s_H \\ V_G & \xrightarrow{F_V} & V_H \end{array} \quad \begin{array}{ccc} E_G & \xrightarrow{F_E} & E_H \\ t_G \downarrow & & \downarrow t_H \\ V_G & \xrightarrow{F_V} & V_H \end{array}$$

Els grafs dirigits i els morfismes de grafs formen una categoria, que denotarem **Graph**. La identitat d'un graf és la parella d'identitats sobre vèrtexs i arestes, i la composició es fa component a component. Les equacions que expressen la preservació de l'origen i el destí es conserven sota composició.

Aquest exemple és especialment rellevant perquè els grafs són l'esquelet combinatori dels diagrames: tenen vèrtexs i arestes dirigides, però encara no incorporen per si sols identitats, composicions ni axiomes categòrics.

Per fixar idees, vet aquí un graf dirigit concret amb tres vèrtexs $V_G = \{a, b, c\}$ i tres arestes:



Aquí e_1 va de a a b , e_2 de b a c i e_3 de a a c . A diferència d'una categoria, un graf no

demana que hi hagi cap aresta que «composi» e_1 i e_2 : e_3 hi és perquè l’hem posada, no perquè cap axioma l’obligui. Aquesta és exactament la diferència entre un graf i una categoria: la categoria afegeix identitats, composició i els axiomes que les regeixen. Per a un desenvolupament complet dels grafs, amb nombrosos exemples i els homomorfismes de grafs, vegeu l’apèndix «Graf» del volum complet.

1.4.7 Resum: objectes i morfismes dels exemples

La taula següent recull, per a cada exemple d’aquesta secció, quina mena de cosa són els objectes i els morfismes, i si són conjunts i aplicacions o no.

Categoria	Objectes	Conj.?	Morfismes	Func.?
0, 1, 2, 3	marcadors abstractes	no	fletxes formals	no
Set, FinSet	conjunts	sí	aplicacions	sí
categoria discreta	elements d’un conjunt	sí	només identitats	sí
Grp, Vect$_{\mathbb{K}}$, Top, Mon, Pos	conjunts estructurats	sí	preserven l’estructura	sí
un monoide	elements de M	no	elements de M	no
un preordre, un sistema deductiu	elements de l’estructura	no	parells (relacions)	no
Rel	conjunts	sí	relacions	no
Graph	parells de conjunts	sí	parells d’aplicacions	sí

Aquesta taula fa visible que la definició de categoria no pressuposa res sobre la naturalesa dels objectes ni dels morfismes: no cal que els objectes siguin conjunts, ni que els morfismes siguin aplicacions. La categoria **Rel** n’és l’exemple més clar: els seus objectes són conjunts, però els seus morfismes —les relacions— no són funcions. És precisament aquesta llibertat la que permet fer servir un mateix llenguatge per a estructures ben diferents.

1.5 Isomorfismes

Entre tots els morfismes d’una categoria, n’hi ha uns d’especialment importants: els que tenen invers. Capturen, en el llenguatge abstracte de les fletxes, la idea que dos objectes tenen la mateixa estructura des del punt de vista de la categoria.

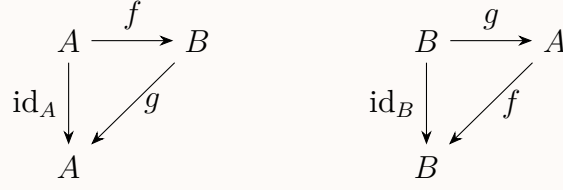
Definició 1.5. En una categoria **C**, un morfisme $f: A \rightarrow B$ és un **isomorfisme** si existeix un morfisme $g: B \rightarrow A$ tal que

$$g \circ f = \text{id}_A \quad \text{i} \quad f \circ g = \text{id}_B.$$

El morfisme g s’anomena **invers** de f . Si existeix un isomorfisme entre A i B , diem que A i B són **isomorfs**, i escrivim $A \cong B$.

La situació es caracteritza per dues equacions, $g \circ f = \text{id}_A$ i $f \circ g = \text{id}_B$, que es

llegeixen com dos triangles commutatius:



Cada triangle diu que anar d'un objecte a l'altre amb f o g i tornar és el mateix que seguir la identitat.

Proposició 1.2. L'invers d'un isomorfisme, si existeix, és únic.

Demostració. Suposem que $f: A \rightarrow B$ té dos inversos, g i g' . Aleshores

$$g = g \circ \text{id}_B = g \circ (f \circ g') = (g \circ f) \circ g' = \text{id}_A \circ g' = g'.$$

Per tant $g = g'$. Com que l'invers és únic, el podem denotar sense ambigüitat f^{-1} . ■

Proposició 1.3. Sigui $\mathbf{C}$ una categoria.

1. Per a cada objecte A , la identitat id_A és un isomorfisme, amb $\text{id}_A^{-1} = \text{id}_A$.
2. Si f és un isomorfisme, aleshores f^{-1} també ho és, i $(f^{-1})^{-1} = f$.
3. Si $f: A \rightarrow B$ i $g: B \rightarrow C$ són isomorfismes, aleshores $g \circ f$ també ho és, i

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Demostració. (1) De $\text{id}_A \circ \text{id}_A = \text{id}_A$ se segueix que id_A és el seu propi invers. (2) Les equacions $g \circ f = \text{id}_A$ i $f \circ g = \text{id}_B$ que fan de $g = f^{-1}$ l'invers de f diuen també que f és l'invers de g ; per tant f^{-1} és un isomorfisme i $(f^{-1})^{-1} = f$. (3) Comprovem que $f^{-1} \circ g^{-1}$ és l'invers de $g \circ f$:

$$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} = g \circ \text{id}_B \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = \text{id}_C,$$

i anàlogament $(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = \text{id}_A$. ■

Corol·lari 1.4. Donada una categoria $\mathbf{C}$, definim sobre $\text{Ob}(\mathbf{C})$ la relació $\cong_{\mathbf{C}}$ per: $A \cong_{\mathbf{C}} B$ si i només si existeix un isomorfisme $f: A \rightarrow B$. Aleshores $\cong_{\mathbf{C}}$ és una relació d'equivalència.

Demostració. És reflexiva: id_A és un isomorfisme per (1), de manera que $A \cong_{\mathbf{C}} A$. És simètrica: si f és un isomorfisme de A a B , aleshores f^{-1} ho és de B a A per (2), de manera que $B \cong_{\mathbf{C}} A$. És transitiva: si $f: A \rightarrow B$ i $g: B \rightarrow C$ són isomorfismes, aleshores $g \circ f$ també ho és per (3), de manera que $A \cong_{\mathbf{C}} C$. ■

Observació 1.7. La relació $\cong_{\mathbf{C}}$ permet pensar en la *igualtat estructural* dels objectes de $\mathbf{C}$: dos objectes isomorfs són indistingibles des del punt de vista de la categoria, perquè tota construcció feta amb composició i identitats es transporta d'un a l'altre a través de l'isomorfisme. Des del punt de vista categòric, doncs, dos objectes isomorfs són *la mateixa estructura*, i és per això que la igualtat estricta d'objectes rarament és rellevant: el que importa no és si A i B són iguals, sinó si són isomorfs. Aquesta és una de les idees centrals de la teoria de categories.

Exemple 1.1. A **Set**, els isomorfismes són exactament les aplicacions **bijectives**. En efecte, una aplicació té inversa per la composició si i només si és injectiva i exhaustiva.

Exemple 1.2 (Isomorfismes en les categories de conjunts estructurats). A **Grp**, **Vect** $_{\mathbb{K}}$ i **Mon**, els isomorfismes són les aplicacions bijectives que preserven l'estructura i la inversa de les quals també la preserva; recuperem així les nocions habituals d'isomorfisme de grups, d'espais vectorials i de monoides. A **Top**, en canvi, un isomorfisme és un **homeomorfisme**: una aplicació contínua i bijectiva amb inversa contínua. Aquí es veu que la bijectivitat no basta: hi ha aplicacions contínues i bijectives que no són isomorfismes, perquè la seva inversa no és contínua. La definició categòrica capta la noció correcta sense haver-la d'enunciar cas per cas.

Exemple 1.3. En un preordre, un isomorfisme entre x i y vol dir que hi ha fletxes $x \rightarrow y$ i $y \rightarrow x$, és a dir,

$$x \leq y \quad \text{i} \quad y \leq x.$$

En un ordre parcial això obliga $x = y$. En un preordre general, en canvi, poden existir objectes isomorfs diferents: són exactament els elements equivalents per la relació $x \sim y$ si $x \leq y$ i $y \leq x$.

Exemple 1.4 (Isomorfisme i equivalència lògica). A la categoria prima d'un sistema deductiu, dues fórmules p i q són isomorfs exactament quan

$$p \vdash q \quad \text{i} \quad q \vdash p.$$

Per tant, l'isomorfisme categòric es tradueix aquí en **interdeduïbilitat**. Aquest és un primer exemple de com una noció categòrica adquireix una lectura lògica natural.

Observació 1.8. L'exemple dels preordres mostra per què la definició categòrica és la bona. Es podria pensar a definir un isomorfisme com un morfisme «bijectiu», però això requeriria parlar dels elements dels objectes, i no sempre té sentit. A més, fins i tot quan en té, pot donar la noció equivocada: a **Pos** existeixen aplicacions monòtones bijectives que no són isomorfismes perquè la seva inversa no és monòtona. La definició mitjançant composició i identitats evita aquest parany.

Observació 1.9 (Propietats invariants per isomorfisme). Una propietat dels objectes d'una categoria és **invariant per isomorfisme** si, sempre que un objecte la té, tot objecte isomorf a ell també la té. Aquestes són les propietats genuïnament categòriques: no depenen de la identitat concreta de l'objecte, sinó només de com es relaciona amb els altres, llevat d'isomorfisme.

Aquesta noció dona un mètode útil. Per provar que dos objectes *són* isomorfs, n'hi ha prou d'exhibir un isomorfisme entre ells. Provar que *no* ho són sol ser més difícil, perquè caldria descartar tots els isomorfismes possibles; la via pràctica és trobar una propietat invariant per isomorfisme que un dels objectes tingui i l'altre no. Per exemple, a **Pos**, siguin A la cadena $a < b < c$ i B l'ordre amb $x < y$ i $x < z$ però y, z incomparables. Comprovar directament que no són isomorfs exigiria descartar totes les bijeccions monòtones amb inversa monòtona; en canvi, n'hi ha prou d'observar que *estar totalment ordenat* és una propietat invariant per isomorfisme, que A té i B no. Per tant A i B no són isomorfs.

Observació 1.10. La noció d'isomorfisme és autènticament categòrica: es formula només amb composició i identitats, de manera que té sentit a *qualsevol* categoria, sense referència als elements dels objectes. Això la fa més abstracta i més general que les nocions d'isomorfisme pròpies de cada context —bijeccions, isomorfismes de grups, homeomorfismes—, que en són casos particulars.

Aquesta generalitat es fa visible en un cas que ja coneixem. Havíem identificat els monoides amb les categories d'un sol objecte; ara podem identificar els grups amb exactament aquelles categories d'un sol objecte en què tota fletxa és un isomorfisme. Portant la mateixa idea a un nombre qualsevol d'objectes s'obté una noció d'importància considerable en les matemàtiques actuals: un *grupoide* és una categoria en què tot morfisme és un isomorfisme.

El grupoide unifica dos casos que ja hem trobat. Un grup és un grupoide amb un sol objecte, com acabem de veure. I un preordre en què tot morfisme és un isomorfisme és, precisament, un en què $x \leq y$ implica $y \leq x$: una relació simètrica, és a dir, una *relació d'equivalència*. Així, una relació d'equivalència no és res més que un grupoide prim: les classes d'isomorfisme dels seus objectes són les classes d'equivalència.

Definició 1.6. Un morfisme $f: A \rightarrow A$, amb domini i codomini iguals, s'anomena **endomorfisme** de A . Un endomorfisme que a més és un isomorfisme s'anomena **automorfisme** de A .

Els automorfismes d'un objecte A , amb la composició, formen un grup, el **grup d'automorfismes** de A , que escrivim $\text{Aut}(A)$. Torna a aparèixer així la identificació d'abans: $\text{Aut}(A)$ és el grup associat a la categoria d'un sol objecte que té els automorfismes de A com a fletxes.

1.6 Classes especials de morfismes

Els isomorfismes són els morfismes invertibles: tenen un invers per tots dos costats. Sovint, però, un morfisme té invers només per un costat, o satisfà una propietat de cancel·lació més feble que la invertibilitat. Aquestes nocions — monomorfismes, epimorfismes, seccions i retraccions — són bàsiques i, com veurem, generalitzen categòricament la injectivitat i l'exhaustivitat de les aplicacions.

Recordem que, a **Set**, una aplicació f és *injectiva* si $f(a) = f(a')$ implica $a = a'$, i *exhaustiva* si tot element del codomini té alguna antiimatge. Aquestes definicions parlen d'elements; les versions categòriques que segueixen les reformulen només amb fletxes.

1.6.1 Monomorfismes i epimorfismes

Definició 1.7. Un morfisme $f: A \rightarrow B$ és un **monomorfisme** (o **mono**), i escrivim $f: A \rightarrowtail B$, si es pot cancel·lar per l'esquerra: per a tota parella de morfismes $g, h: C \rightarrow A$,

$$C \begin{array}{c} \xrightarrow{g} \\ \xrightarrow{h} \end{array} A \xrightarrow{f} B \quad f \circ g = f \circ h \implies g = h.$$

Un morfisme $f: A \rightarrow B$ és un **epimorfisme** (o **epi**), i escrivim $f: A \twoheadrightarrow B$, si es pot cancel·lar per la dreta: per a tota parella $g, h: B \rightarrow C$,

$$A \xrightarrow{f} B \begin{array}{c} \xrightarrow{g} \\ \xrightarrow{h} \end{array} C \quad g \circ f = h \circ f \implies g = h.$$

Definició 1.8. Un morfisme que és alhora un monomorfisme i un epimorfisme s'anomena **bimorfisme**.

Exemple 1.5. A **Set**, els monomorfismes són exactament les aplicacions **injectives** i els epimorfismes, les **exhaustives**. Vegem el cas dels monomorfismes: si f és injectiva i $f \circ g = f \circ h$, aleshores per a cada c tenim $f(g(c)) = f(h(c))$, d'on $g(c) = h(c)$; recíprocament, si f no és injectiva, hi ha $a \neq a'$ amb $f(a) = f(a')$, i les dues aplicacions constants $g, h: \{*\} \rightarrow A$ amb valors a i a' compleixen $f \circ g = f \circ h$ però $g \neq h$.

Per als epimorfismes: si f és exhaustiva i $g \circ f = h \circ f$, aleshores per a cada $b \in B$ existeix a amb $f(a) = b$, i $g(b) = g(f(a)) = h(f(a)) = h(b)$, d'on $g = h$; recíprocament, si f no és exhaustiva, hi ha $b_0 \in B$ sense antiimatge, i les aplicacions $g, h: B \rightarrow \{0, 1\}$ definides per $g \equiv 0$ i $h(b) = 0$ si b és a la imatge de f , $h(b_0) = 1$, compleixen $g \circ f = h \circ f$ però $g \neq h$.

Proposició 1.5. Tot isomorfisme és un bimorfisme: si f és un isomorfisme, aleshores és alhora un monomorfisme i un epimorfisme.

Demostració. Sigui $f: A \rightarrow B$ un isomorfisme amb invers f^{-1} . Si $f \circ g = f \circ h$, aleshores

$$g = f^{-1} \circ (f \circ g) = f^{-1} \circ (f \circ h) = h,$$

de manera que f és mono. Si $g \circ f = h \circ f$, aleshores

$$g = (g \circ f) \circ f^{-1} = (h \circ f) \circ f^{-1} = h,$$

de manera que f és epi. ■

Observació 1.11. A **Set**, un morfisme és un isomorfisme si i només si és alhora mono i epi —és a dir, injectiu i exhaustiu, o sigui **bijectiu**. Dit d'una altra manera, a **Set** els bimorfismes són exactament els isomorfismes. El recíproc de la proposició anterior, però, no és cert: en general un bimorfisme no és un isomorfisme. L'única fletxa no trivial de la categoria **2** és un bimorfisme —per la simple raó que gairebé no hi ha morfismes amb què fer les cancel·lacions—, però no té invers, de manera que no és un isomorfisme. Un exemple més substancial es dona a **Top**: una bijecció contínua és un bimorfisme, però no és un isomorfisme si la seva inversa no és contínua.

1.6.2 Seccions i retraccions

Definició 1.9. Sigui $f: A \rightarrow B$ un morfisme. Una **secció** de f és un morfisme $s: B \rightarrow A$ amb $f \circ s = \text{id}_B$, és a dir, un *invers per la dreta*:

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{s} & A \\ \text{id}_B \downarrow & \swarrow f & \\ B & & \end{array}$$

Una **retracció** de f és un morfisme $r: B \rightarrow A$ amb $r \circ f = \text{id}_A$, és a dir, un *invers per l'esquerra*:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \text{id}_A \downarrow & \swarrow r & \\ A & & \end{array}$$

Un morfisme que té secció s'anomena **epimorfisme escindit** (o *retracció escindida*); un morfisme que té retracció s'anomena **monomorfisme escindit**. La terminologia varia entre autors; en aquest llibre fixem «invers per la dreta» = secció i «invers per l'esquerra» = retracció.

La taula següent resumeix el diccionari, que convé tenir present perquè la

nomenclatura no és uniforme a la literatura:

morfisme s, r	equació	invers lateral	f resulta
s secció de f	$f \circ s = \text{id}_B$	invers per la dreta	epimorfisme escindit
r retracció de f	$r \circ f = \text{id}_A$	invers per l'esquerra	monomorfisme escindit

Proposició 1.6. Si $f: A \rightarrow B$ té secció, aleshores f és un epimorfisme. Si f té retracció, aleshores f és un monomorfisme.

Demostració. Suposem que f té retracció r , amb $r \circ f = \text{id}_A$, i siguin $g, h: C \rightarrow A$ amb $f \circ g = f \circ h$. Composant per l'esquerra amb r ,

$$g = \text{id}_A \circ g = (r \circ f) \circ g = r \circ (f \circ g) = r \circ (f \circ h) = (r \circ f) \circ h = h,$$

de manera que f és mono. El cas de la secció és anàleg: si f té secció s , amb $f \circ s = \text{id}_B$, i $g, h: B \rightarrow C$ amb $g \circ f = h \circ f$, aleshores composant per la dreta amb s ,

$$g = g \circ \text{id}_B = g \circ (f \circ s) = (g \circ f) \circ s = (h \circ f) \circ s = h \circ (f \circ s) = h \circ \text{id}_B = h,$$

de manera que f és epi. ■

Observació 1.12. El recíproc no val en general: hi ha monomorfismes sense retracció i epimorfismes sense secció. En efecte, a **Set** tota aplicació injectiva amb domini no buit té retracció i tota exhaustiva té secció —aquesta darrera afirmació és, de fet, equivalent a l'*axioma de l'elecció*—, però en altres categories la situació és diferent. Finalment, un morfisme és un **isomorfisme** si i només si té alhora secció i retracció, i en aquest cas totes dues coincideixen: si $f \circ s = \text{id}_B$ i $r \circ f = \text{id}_A$, aleshores

$$r = r \circ \text{id}_B = r \circ (f \circ s) = (r \circ f) \circ s = \text{id}_A \circ s = s.$$

1.7 Construccions sobre categories

A partir de categories donades se'n poden construir de noves. Aquestes construccions seran útils constantment, i algunes —com la categoria oposada— són fonamentals.

1.7.1 La categoria oposada

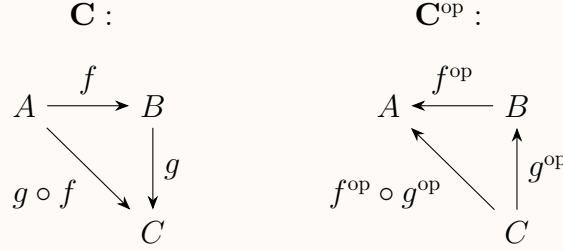
Definició 1.10. Donada una categoria $\mathbf{C}$, la seva **categoria oposada** $\mathbf{C}^{\text{op}}$ té els mateixos objectes, $\text{Ob}(\mathbf{C}^{\text{op}}) = \text{Ob}(\mathbf{C})$, i intercanvia domini i codomini dels morfismes:

$$\text{Hom}_{\mathbf{C}^{\text{op}}}(A, B) = \text{Hom}_{\mathbf{C}}(B, A).$$

És a dir, $\mathbf{C}^{\text{op}}$ s'obté invertint el sentit de totes les fletxes. Escrivim $f^{\text{op}}: B \rightarrow A$ per al morfisme de $\mathbf{C}^{\text{op}}$ corresponent a un morfisme $f: A \rightarrow B$ de $\mathbf{C}$. Les identitats de $\mathbf{C}^{\text{op}}$ són les de $\mathbf{C}$, i la composició s'obté invertint l'ordre:

$$g^{\text{op}} \circ f^{\text{op}} = (f \circ g)^{\text{op}}.$$

Visualment, la composició a $\mathbf{C}$ i la corresponent a $\mathbf{C}^{\text{op}}$ inverteixen l'ordre:



L'associativitat a $\mathbf{C}^{\text{op}}$ es dedueix de la de $\mathbf{C}$ invertint l'ordre. La categoria oposada és la base de la **dualitat**, que desenvolupem a la secció 1.8: tota afirmació formulada purament en el llenguatge categòric dona, invertint les fletxes, una afirmació dual, i aquesta correspondència es pot fer del tot precisa.

Observació 1.13. Aplicar dues vegades l'oposada retorna la categoria de partida:

$$(\mathbf{C}^{\text{op}})^{\text{op}} = \mathbf{C}.$$

Invertir les fletxes i tornar-les a invertir les deixa com estaven.

Vegem com queda l'oposada en dos casos. Quan un preordre $(P, \leq)$ es considera com una categoria —amb un morfisme $x \rightarrow y$ quan $x \leq y$ —, la seva oposada té un morfisme $x \rightarrow y$ exactament quan $y \leq x$. I quan un monoide $(M, *, e)$ es considera com una categoria, la seva oposada té els mateixos morfismes —els elements de M —, però la composició de a i b és $b * a$ en lloc de $a * b$.

1.7.2 La categoria producte

Definició 1.11. Donades dues categories $\mathbf{C}$ i $\mathbf{D}$, la **categoria producte** $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ té per objectes les parelles (A, X) amb A objecte de $\mathbf{C}$ i X objecte de $\mathbf{D}$, i per morfismes $(A, X) \rightarrow (B, Y)$ les parelles (f, g) amb $f: A \rightarrow B$ a $\mathbf{C}$ i $g: X \rightarrow Y$ a $\mathbf{D}$. La composició es fa component a component,

$$(f', g') \circ (f, g) = (f' \circ f, g' \circ g),$$

i la identitat de (A, X) és $(\text{id}_A, \text{id}_X)$. Els axiomes de categoria per a $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$ se segueixen dels de $\mathbf{C}$ i $\mathbf{D}$ aplicats a cada component.

Exemple 1.6. Prenem la categoria **2** de la subsecció 1.4.1 —dos objectes i una única fletxa no trivial—, i n'escriuim els objectes com 0 i 1, amb la fletxa no trivial $0 \rightarrow 1$. La categoria producte $\mathbf{2} \times \mathbf{2}$ té quatre objectes, que es disposen de

manera natural en un quadrat:

$$\begin{array}{ccc} (0, 0) & \longrightarrow & (0, 1) \\ \downarrow & \searrow & \downarrow \\ (1, 0) & \longrightarrow & (1, 1) \end{array}$$

Cada fletxa és una parella de fletxes de $\mathbf{2}$. Com que $\mathbf{2}$ és prima, també ho és $\mathbf{2} \times \mathbf{2}$: entre dos objectes hi ha com a màxim un morfisme. Per això els dos camins del quadrat de $(0, 0)$ a $(1, 1)$ tenen necessàriament la mateixa composició, que és la diagonal; el quadrat commuta.

1.7.3 Subcategories

Una altra manera d'obtenir noves categories a partir de categories antigues és restringint-ne els objectes o les fletxes.

Definició 1.12. Una **subcategoria** $\mathbf{S}$ d'una categoria $\mathbf{C}$ ve donada per una subcol·lecció d'objectes $\text{Ob}(\mathbf{S}) \subseteq \text{Ob}(\mathbf{C})$ i, per a cada parella $A, B \in \text{Ob}(\mathbf{S})$, una subcol·lecció de morfismes $\text{Hom}_{\mathbf{S}}(A, B) \subseteq \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B)$, de manera que:

- la identitat id_A pertany a $\text{Hom}_{\mathbf{S}}(A, A)$ per a cada $A \in \text{Ob}(\mathbf{S})$;
- la composició de dos morfismes de $\mathbf{S}$ componibles pertany a $\mathbf{S}$.

Amb aquestes condicions, $\mathbf{S}$ és una categoria per dret propi, amb la composició i les identitats heretades de $\mathbf{C}$.

Dos casos particulars, en cert sentit oposats, són especialment útils. Es diu que $\mathbf{S}$ és una **subcategoria plena** quan $\text{Hom}_{\mathbf{S}}(A, B) = \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B)$ per a tot $A, B \in \text{Ob}(\mathbf{S})$; una subcategoria plena queda determinada, doncs, només per la seva col·lecció d'objectes. Simètricament, es diu que $\mathbf{S}$ és una **subcategoria ampla** quan $\text{Ob}(\mathbf{S}) = \text{Ob}(\mathbf{C})$, encara que només contingui alguns dels morfismes. En resum: una subcategoria plena restringeix els objectes i conserva tots els morfismes entre ells; una subcategoria ampla conserva tots els objectes i en restringeix els morfismes.

Exemple 1.7. **FinSet** és una subcategoria plena de **Set**: pren com a objectes els conjunts finits i, entre dos d'ells, totes les aplicacions. Els grups abelians formen una subcategoria plena de **Grp**, ja que un cop triats els objectes no en descartem cap homomorfisme. En canvi, la subcategoria de **Set** que té tots els conjunts per objectes però només les aplicacions *injectives* per morfismes és una subcategoria ampla que no és plena: conserva tots els objectes, però deixa fora les aplicacions que no són injectives.

1.7.4 Categories sobre i sota un objecte

Fixat un objecte A d'una categoria $\mathbf{C}$, se'n pot construir una categoria nova els objectes de la qual són els morfismes que apunten cap a A .

Definició 1.13. Sigui $\mathbf{C}$ una categoria i A un objecte. La **categoria de $\mathbf{C}$ sobre A** (en anglès, *slice category*), que escrivim $\mathbf{C}/A$, té:

- per objectes, els morfismes $x: X \rightarrow A$ de $\mathbf{C}$ amb codomini A ;
- per morfismes de $x: X \rightarrow A$ a $y: Y \rightarrow A$, els morfismes $h: X \rightarrow Y$ de $\mathbf{C}$ que fan commutar el triangle

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{h} & Y \\ & \searrow x & \swarrow y \\ & A & \end{array} \quad \text{és a dir, } y \circ h = x.$$

La composició i les identitats són les de $\mathbf{C}$: si h va de x a y i k de y a z , la composició $k \circ h$ va de x a z , i la identitat de $x: X \rightarrow A$ és id_X .

Anàlogament es defineix la **categoria de $\mathbf{C}$ sota A** (en anglès, *coslice category*), que escrivim $A/\mathbf{C}$: els seus objectes són els morfismes $x: A \rightarrow X$ de $\mathbf{C}$ amb domini A , i un morfisme de $x: A \rightarrow X$ a $y: A \rightarrow Y$ és un morfisme $h: X \rightarrow Y$ de $\mathbf{C}$ amb $h \circ x = y$, és a dir, que fa commutar el triangle sota A :

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ x \swarrow & & \searrow y \\ X & \xrightarrow{h} & Y \end{array}$$

La composició i les identitats són, un cop més, les de $\mathbf{C}$.

Exemple 1.8. A $\mathbf{Set}/A$, un objecte és una aplicació $x: X \rightarrow A$. Mirant les fibres $x^{-1}(a)$ per a cada $a \in A$, un tal objecte és el mateix que una família de conjunts $\{x^{-1}(a)\}_{a \in A}$ indexada per A . La categoria de **Set** sobre A és, doncs, la de les famílies de conjunts indexades per A .

Exemple 1.9. Prenem $A = \{*\}$, un conjunt d'un sol element. Un objecte de $\{*\}/\mathbf{Set}$ és una aplicació $\{*\} \rightarrow X$, és a dir, l'elecció d'un element distingit de X , el **punt base**. Un morfisme és una aplicació que respecta el punt base. Així, $\{*\}/\mathbf{Set}$ és la categoria dels **conjunts apuntats** (en anglès, *pointed sets*).

1.8 Principi de dualitat

La dualitat no és només una llista de parelles de conceptes. És un principi que transforma definicions, enunciats i demostracions: la categoria oposada permet formular-lo amb precisió. Una afirmació categòrica es dualitza *invertint totes les fletxes* i, per tant, l'ordre de totes les composicions. Aquesta secció fa explícit aquest mecanisme; el retrobarem en tractar objectes inicials i terminals, productes i coproductes, productes fibrats i coproductes fibrats (en anglès, *pullbacks* i *pushouts*), i límits i colímits.

1.8.1 Traducció formal d'un enunciat

Formulem els enunciats sobre categories en un llenguatge de primer ordre amb igualtat, la signatura del qual té dues menes de variables —objectes i morfismes— i els símbols d'operació no lògics

$$\text{dom}(_), \quad \text{cod}(_), \quad \text{id}(_), \quad \circ(_, _),$$

és a dir, domini, codomini, identitat i composició. Els axiomes de la teoria de categories, que abreujaem CT, són:

$$\begin{aligned} \text{dom}(\text{id}_A) &= A, & \text{cod}(\text{id}_A) &= A; \\ f \circ \text{id}_{\text{dom}(f)} &= f, & \text{id}_{\text{cod}(f)} \circ f &= f; \\ \text{dom}(g \circ f) &= \text{dom}(f), & \text{cod}(g \circ f) &= \text{cod}(g); \\ h \circ (g \circ f) &= (h \circ g) \circ f, \end{aligned}$$

amb la convenció que $g \circ f$ existeix només quan $\text{dom}(g) = \text{cod}(f)$. (Aquí fem servir la presentació *funcional* de les categories; l'apèndix sobre l'axiomàtica relacional del volum complet en desenvolupa una de *relacional*, equivalent.)

Donat un enunciat φ en aquest llenguatge, formem el seu **dual** φ^{op} fent les substitucions següents:

1. $f \circ g$ per $g \circ f$;
2. dom per cod ;
3. cod per dom .

Les variables, els connectors lògics i els quantificadors es mantenen; només s'intercanvien domini i codomini i s'inverteix l'ordre de les composicions. Com que aquestes substitucions transformen un enunciat ben format en un altre enunciat ben format, φ^{op} és sintàcticament correcte.

Observació 1.14. Convé no confondre aquests connectors i quantificadors amb la lògica que una categoria pot codificar *internament*. Els $\forall, \exists, \wedge, \vee$ amb què escrivim φ pertanyen al llenguatge amb què *parlem* d'una categoria, i sota dualitat es mantenen. En canvi, quan els objectes d'una categoria són ells mateixos proposicions i els morfismes són deduccions —com al sistema deductiu de la subsecció 1.4.3—, la conjunció, la disjunció, el cert i el fals són *construccions dins* de la categoria, i aleshores la dualitat sí que les intercanvia: la conjunció es converteix en disjunció, i el cert en el fals. Aquesta és la versió categòrica de la dualitat lògica clàssica, que desenvoluparem més endavant. Els dos nivells —la lògica amb què escrivim els enunciats i la lògica que una categoria codifica— no s'han de barrejar.

Dualitat sintàctica. Si $\gamma \vdash \varphi$, aleshores $\gamma^{\text{op}} \vdash \varphi^{\text{op}}$: dualitzar una deducció dona una deducció, perquè els termes substituïts (dom , cod , la composició) es comporten com a constants indefinides sotmeses a unes regles, i les regles no distingeixen l'original del dual. Ara bé, el conjunt d'axiomes CT és *autodual*: en dualitzar cada axioma se n'obté un altre del mateix conjunt (per exemple, $\text{dom}(\text{id}_A) = A$

i $\text{cod}(\text{id}_A) = A$ s'intercanvien, i l'associativitat es dualitza en ella mateixa). És a dir, $\text{CT}^{\text{op}} = \text{CT}$. Se'n segueix el primer principi de dualitat.

Teorema 1.7 (Dualitat sintàctica). Per a qualsevol enunciat φ en el llenguatge de la teoria de categories, si φ es dedueix dels axiomes CT, també el seu dual:

$$\text{CT} \vdash \varphi \implies \text{CT} \vdash \varphi^{\text{op}}.$$

Demostració. Suposem $\text{CT} \vdash \varphi$. Dualitzant tota la deducció obtenim, per la dualitat sintàctica, $\text{CT}^{\text{op}} \vdash \varphi^{\text{op}}$. Com que $\text{CT}^{\text{op}} = \text{CT}$, això és $\text{CT} \vdash \varphi^{\text{op}}$. ■

Dualitat semàntica. La dualitat també té una lectura en termes d'interpretacions. Recordem la categoria oposada $\mathbf{C}^{\text{op}}$: té els mateixos objectes que $\mathbf{C}$, els morfismes amb domini i codomini intercanviats, i la composició $g^{\text{op}} \circ f^{\text{op}} = (f \circ g)^{\text{op}}$. Una interpretació d'un enunciat φ a $\mathbf{C}$ dona automàticament una interpretació de φ^{op} a $\mathbf{C}^{\text{op}}$, i recíprocament. Si φ es compleix a totes les categories, aleshores es compleix en particular a totes les categories de la forma $\mathbf{C}^{\text{op}}$; per tant φ^{op} es compleix a totes les categories $(\mathbf{C}^{\text{op}})^{\text{op}}$. Com que $(\mathbf{C}^{\text{op}})^{\text{op}} = \mathbf{C}$ per a tota $\mathbf{C}$, concloem que φ^{op} es compleix a totes les categories.

Teorema 1.8 (Dualitat semàntica). Per a qualsevol afirmació φ sobre categories, si φ es compleix a totes les categories, també el seu dual:

$$\models \varphi \implies \models \varphi^{\text{op}}.$$

Més precisament, $\mathbf{C}^{\text{op}} \models \varphi$ si i només si $\mathbf{C} \models \varphi^{\text{op}}$.

La manera habitual d'usar el principi és aquesta: s'aplica un teorema conegut a $\mathbf{C}^{\text{op}}$ i se'n tradueix la conclusió al llenguatge de $\mathbf{C}$. No cal repetir la demostració; **la demostració dual és la demostració original amb totes les fletxes invertides.**

1.8.2 Primer exemple: de monomorfisme a epimorfisme

Recordem (secció 1.6.1) que $m: A \rightarrow B$ és un **monomorfisme** si, per a tot parell $u, v: X \rightarrow A$,

$$X \xrightarrow[u]{u} A \xrightarrow{m} B \quad m \circ u = m \circ v \implies u = v.$$

Formem-ne el dual amb les substitucions de la subsecció anterior: intercanviem domini i codomini i invertim l'ordre de cada composició. L'enunciat dual diu que, per a tot parell $u, v: A \rightarrow X$,

$$B \xrightarrow{m} A \xrightarrow[u]{u} X \quad u \circ m = v \circ m \implies u = v,$$

que és exactament la definició d'**epimorfisme**. El dual de «ser un monomorfisme» és, doncs, «ser un epimorfisme».

Ara podem dualitzar teoremes sense repetir-ne la demostració. Per exemple, en qualsevol categoria, si $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ són monomorfismes, la composició $g \circ f$ també ho és. Pel principi de dualitat, l'enunciat dual val igualment:

en qualsevol categoria, la composició de dos epimorfismes és un epimorfisme.

No n'hem hagut de fer cap demostració nova.

1.8.3 Segon exemple: del producte al coproducte

A tall d'avançament —els definirem en rigor al capítol de límits—, considerem el producte i el coproducte de dos objectes, que il·lustren la dualització d'un enunciat amb un quantificador d'existència única.

Un *producte* de A i B és un objecte $A \times B$ amb dos morfismes $\pi_1: A \times B \rightarrow A$ i $\pi_2: A \times B \rightarrow B$ tals que, per a tot X i tot parell $f: X \rightarrow A$, $g: X \rightarrow B$, existeix un únic $u: X \rightarrow A \times B$ amb $\pi_1 \circ u = f$ i $\pi_2 \circ u = g$:

$$\begin{array}{ccccc} & & X & & \\ & f \swarrow & \downarrow u & \searrow g & \\ A & \xleftarrow{\pi_1} & A \times B & \xrightarrow{\pi_2} & B \end{array}$$

Invertint totes les fletxes obtenim un objecte $A + B$ amb dos morfismes $\iota_1: A \rightarrow A + B$ i $\iota_2: B \rightarrow A + B$ tals que, per a tot X i tot parell $f: A \rightarrow X$, $g: B \rightarrow X$, existeix un únic $u: A + B \rightarrow X$ amb $u \circ \iota_1 = f$ i $u \circ \iota_2 = g$:

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\iota_1} & A + B & \xleftarrow{\iota_2} & B \\ & \searrow f & \downarrow u & \swarrow g & \\ & & X & & \end{array}$$

Aquesta és la definició del *coproducte* $A + B$. Els quantificadors $\forall$ i $\exists$ i la conjunció de les dues equacions es mantenen; el que s'inverteix és el domini i el codomini de cada morfisme i l'ordre de cada composició.

Anàlogament es dualitzen els altres exemples que hem trobat: el dual d'una secció és una retracció (secció 1.6.1), i el dual de la categoria de $\mathbf{C}$ sobre A és la categoria de $\mathbf{C}$ sota A (secció 1.13). En tots els casos, la mateixa regla —invertir les fletxes— transforma cada noció en la seva dual.

1.8.4 Diccionari bàsic de dualitats

Recollim les parelles duals. Les primeres ja han aparegut en aquest capítol; la resta les trobarem més endavant, i la taula creixerà a mesura que apareguin nous conceptes.

Concepte	Concepte dual
<i>Ja vistos en aquest capítol</i>	
monomorfisme	epimorfisme
secció	retracció
producte	coproducte
categoria sobre A ($\mathbf{C}/A$)	categoria sota A ($A/\mathbf{C}$)
<i>Més endavant</i>	
objecte inicial	objecte terminal
equalitzador	coequalitzador
producte fibrat	coproducte fibrat
con	cocon
límit	colímit

Algunes nocions són **autoduals**: la identitat, l'isomorfisme i la commutativitat d'un diagrama continuen sent nocions del mateix tipus després de dualitzar-les.

1.8.5 Abast i precaucions

El principi s'aplica a enuncisats formulats *categòricament*. Una afirmació que faci servir informació externa —elements d'un conjunt, oberts d'un espai o una construcció concreta— no té necessàriament un dual fins que no es reformula amb objectes i morfismes.

No s'ha de concloure que una categoria concreta sigui equivalent a la seva oposada. El principi relaciona teoremes sobre $\mathbf{C}$ amb teoremes sobre $\mathbf{C}^{\text{op}}$; no afirma que $\mathbf{C}$ i $\mathbf{C}^{\text{op}}$ siguin la mateixa categoria. Per exemple, **Set** no s'identifica amb **Set**^{op}, encara que els teoremes generals sobre productes tinguin teoremes duals sobre coproductes.

Finalment, convé situar bé l'abast del principi. El mecanisme que hem descrit —dualitzar les fórmules d'un llenguatge de manera que els axiomes quedin invariants— no és exclusiu del llenguatge de categories. La lògica clàssica en dona una altra instància: al llenguatge de les àlgebres booleanes, la involució que intercanvia $\wedge$ amb $\vee$ i el cert amb el fals deixa els axiomes invariants, i produeix la dualitat de De Morgan. Un exemple encara més antic és la **dualitat projectiva**: al pla projectiu, intercanviar *punt* per *recta* —i «passar per» per «tallar-se en»— deixa els axiomes invariants, de manera que cada teorema té un teorema dual, com el de Desargues o la parella Pascal–Brianchon. En tots els casos actua el mateix mecanisme: una involució del llenguatge que preserva els axiomes. Són, doncs, instàncies d'un mateix principi de dualitat, aplicat a llenguatges diferents; no dualitats de naturalesa distinta. Quan una categoria codifica lògica —com el sistema deductiu de la subsecció 1.4.3, on la conjunció és el producte i la disjunció el coproducte—, la dualitat de fletxes es projecta exactament sobre la dualitat de De Morgan.

1.9 Propietats duals dels morfismes

El principi de dualitat estalvia feina: n'hi ha prou de demostrar les propietats dels monomorfismes; les dels epimorfismes se n'obtenen invertint les fletxes, sense

cap demostració nova. Ho il·lustrem amb les propietats bàsiques.

1.9.1 Propietats dels monomorfismes

Proposició 1.9. La composició de dos monomorfismes és un monomorfisme: si $f: A \rightarrow B$ i $g: B \rightarrow C$ són monos, aleshores $g \circ f$ ho és.

Demostració. Siguin $u, v: X \rightarrow A$ amb $(g \circ f) \circ u = (g \circ f) \circ v$, és a dir $g \circ (f \circ u) = g \circ (f \circ v)$. Com que g és mono, $f \circ u = f \circ v$; i com que f és mono, $u = v$.

$$X \begin{array}{c} \xrightarrow{u} \\ \xrightarrow{v} \end{array} A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

■

Proposició 1.10. Si la composició $g \circ f$ és un monomorfisme, aleshores f és un monomorfisme.

Demostració. Siguin $u, v: X \rightarrow A$ amb $f \circ u = f \circ v$. Composant amb g , $(g \circ f) \circ u = (g \circ f) \circ v$; com que $g \circ f$ és mono, $u = v$. (No cal cap hipòtesi sobre g .)

■

Proposició 1.11. Tota retracció és un monomorfisme, i tot isomorfisme és una retracció. Per tant,

$$\text{isomorfisme} \implies \text{monomorfisme escindit} \implies \text{monomorfisme}.$$

Demostració. Si f té retracció r (amb $r \circ f = \text{id}_A$) i $f \circ u = f \circ v$, aleshores $u = r \circ f \circ u = r \circ f \circ v = v$, de manera que f és mono; un morfisme amb retracció és, per definició, un *monomorfisme escindit*. I tot isomorfisme té retracció, el seu invers. La cadena d'implícacions se'n segueix.

■

1.9.2 Les propietats duals dels epimorfismes

Aplicant el principi de dualitat a les proposicions anteriors —invertint les fletxes— obtenim, sense cap demostració nova, les propietats corresponents dels epimorfismes.

Proposició 1.12 (dual de la proposició 1.9). La composició de dos epimorfismes és un epimorfisme.

Proposició 1.13 (dual de la proposició 1.10). Si la composició $g \circ f$ és un epimorfisme, aleshores g és un epimorfisme.

Proposició 1.14 (dual de la proposició 1.11). Tota secció és un epimorfisme, i tot isomorfisme és una secció. Per tant,

$$\text{isomorfisme} \implies \text{epimorfisme escindit} \implies \text{epimorfisme}.$$

Observem l'asimetria que revela la dualitat: a la proposició 1.10, d'un mono $g \circ f$ hereta el factor *de la dreta*, f ; a la seva dual 1.13, d'un epi hereta el factor *de l'esquerra*, g .

1.9.3 Condicions necessàries i suficients

Les implicacions anteriors *no* es reverteixen en general, i és aquí on convé anar amb compte. Un monomorfisme no és necessàriament escindit, i un bimorfisme no és necessàriament un isomorfisme. El diagrama següent resumeix les implicacions vàlides a qualsevol categoria (les fletxes que no es poden invertir van marcades amb contraexemples):

$$\text{iso} \implies \text{mono escindit} \xRightarrow{(1)} \text{mono} \xRightarrow{(2)} \text{—}$$

- (1) **mono** $\nRightarrow$ **mono escindit**. A **Grp**, l'homomorfisme $\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot 2} \mathbb{Z}$ és un monomorfisme, però no té retracció: no és escindit.
- (2) **mono** + **epi** $\nRightarrow$ **iso**. L'única fletxa no trivial de **2** és mono i epi (un bimorfisme), però no té invers; i a **Top**, una bijecció contínua amb inversa no contínua és mono i epi sense ser iso.

Sí que valen, però, aquestes caracteritzacions de l'isomorfisme:

$$f \text{ és iso} \iff f \text{ és mono escindit i epi} \iff f \text{ és epi escindit i mono}.$$

Les demostracions d'aquestes equivalències, i la de la cadena d'implicacions anterior, es proposen a les parts de pràctica i d'exercicis.

1.10 Grafs i categories lliures

Els grafs i les categories estan estretament relacionats, però no són el mateix. Un graf dirigit només especifica vèrtexs i arestes. Una categoria, a més, disposa d'identitats, permet compondre fletxes i exigeix que aquestes composicions satisfacin els axiomes. Podem resumir la diferència així:

$$\text{categoria} \approx \text{graf dirigit} + \text{identitats} + \text{composició} + \text{axiomes}.$$

Aquesta fórmula és una guia conceptual, no una definició formal. De fet, per a una categoria petita, si oblidem la composició i quines fletxes són identitats, els objectes i morfismes formen un graf dirigit: és el seu *graf subjacent*. Les fletxes identitat no desapareixen —continuen sent arestes del graf, un bucle a cada vèrtex—, només que ja no estan marcades com a identitats; per a categories grans, a més, cal tenir en compte les qüestions de mida.

Hi ha una manera natural de fer el camí contrari: generar una categoria a partir d'un graf dirigit prenent com a morfismes tots els camins possibles.

Definició 1.14. Donat un graf dirigit G , la **categoria lliure generada pel graf G** , que escrivim $\text{Free}(G)$, té:

- per objectes, els vèrtexs de G ;
- per morfismes $A \rightarrow B$, els **camins** de A a B , és a dir, les seqüències finites d'arestes encadenades que van d' A a B ;
- per composició, la **concatenació** de camins;
- per identitat de cada vèrtex, el **camí buit** de longitud zero en aquell vèrtex.

Per exemple, a partir del graf

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

la categoria lliure conté, a més de les identitats, la fletxa composta $g \circ f: A \rightarrow C$:

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & g \circ f & & \end{array}$$

La concatenació de camins és associativa, i el camí buit actua com a neutre; per això els axiomes de categoria se satisfan automàticament. La comprovació detallada, amb la fórmula explícita de la concatenació i la convenció d'ordre, es troba a l'apèndix «Graf» del volum complet. El nom *lliure* quedarà justificat més endavant, quan disposem del llenguatge dels functors i puguem formular la propietat universal d'aquesta construcció.

Exemple 1.10. Prenem el cas d'un graf amb **un sol vèrtex**. Aleshores totes les arestes són bucles —comencen i acaben a l'únic vèrtex— i cap parell no deixa d'estar encadenat, de manera que un camí és simplement una seqüència finita d'arestes $a_1 a_2 \cdots a_n$, és a dir, una *paraula* sobre el conjunt E de les arestes. La composició és la concatenació de paraules i la identitat és la *paraula buida* ε , de longitud zero. Comprovem que $(E^*, \text{concatenació}, \varepsilon)$ és un monoide: la concatenació és associativa, ja que $(uv)w$ i $u(vw)$ són totes dues la paraula que juxtaposa u , v i w en aquest ordre; i la paraula buida és neutra, perquè $\varepsilon u = u = u \varepsilon$ per a tota paraula u . Així, $\text{Free}(G)$ té un únic objecte, i el seu conjunt de morfismes és el **monoide lliure** E^* sobre E . El monoide lliure és, doncs, el cas particular de la categoria lliure per a un graf amb un sol vèrtex.

Exemple 1.11. La categoria lliure sobre el graf amb dos vèrtexs A, B i una sola arista $A \rightarrow B$ és la categoria finita **2**. Si, en canvi, el graf té dues arestes en sentits oposats, $e: A \rightarrow B$ i $f: B \rightarrow A$, la categoria lliure té infinits morfismes: e , f , $f \circ e$, $e \circ f$, $e \circ f \circ e$, i així successivament, perquè cap relació no identifica camins diferents. Així, *un graf finit no genera necessàriament una categoria lliure finita*.

Aquesta construcció —generar l'estructura més econòmica a partir d'unes dades, sense imposar cap relació que no hi vingui forçada— és un exemple del patró *lliure*, que reapareix per a monoides, grups i moltes altres estructures i que es

formalitza al capítol «Adjuncions» del volum complet com una *adjunció* entre un functor lliure i un functor oblit.

1.11 Categories segons la mida

Hem parlat de «col · lecció» d'objectes en lloc de «conjunt», i ara podem precisar per què. En alguns exemples, els objectes són massa nombrosos per formar un conjunt.

Observació 1.15 (La paradoxa de Russell). La categoria **Set** té per objectes tots els conjunts. Ara bé, no pot existir el conjunt de tots els conjunts. En efecte, si U fos aquest conjunt, en podríem separar el subconjunt $R = \{x \in U \mid x \notin x\}$ dels conjunts que no es pertanyen a si mateixos, i preguntar-nos si $R \in R$: si $R \in R$, la definició força $R \notin R$; i si $R \notin R$, la definició força $R \in R$. Totes dues possibilitats són contradictòries. Aquesta és la **paradoxa de Russell**, i mostra que la col · lecció de tots els conjunts és massa gran per ser un conjunt.

Per això, en parlar dels objectes d'una categoria, diem «col · lecció» i no «conjunt»: pot ser massa gran. Segons la mida d'aquestes col · leccions distingim tres menes de categories.

Definició 1.15. Una categoria és **petita** si la seva col · lecció d'objectes i la seva col · lecció de morfismes són tots dos conjunts. En cas contrari es diu **gran**. I és **localment petita** si, per a cada parella d'objectes A, B , la col · lecció de morfismes $\text{Hom}(A, B)$ és un conjunt, encara que la col · lecció de tots els objectes pugui ser massa gran per ser-ho.

Moltes de les categories habituals que utilitzem —**Set**, **Grp**, **Top**, **Graph** i altres— són localment petites però no petites: tenen massa objectes per formar un conjunt, però entre dos objectes qualssevol hi ha només un conjunt de morfismes. Les categories dels preordres sobre conjunts i les categories finites, en canvi, són petites. Al llarg del llibre suposarem, tret que diguem el contrari, que les categories amb què treballem són localment petites; això garanteix que sempre podem parlar del conjunt $\text{Hom}(A, B)$, cosa que serà essencial més endavant.

Observació 1.16 (Dues perspectives sobre la mida). Hem plantejat la mida des de la teoria clàssica de conjunts: les categories es construeixen *damunt* d'una teoria de conjunts prèvia, i les qüestions de mida —distingir quines col · leccions són conjunts i quines són massa grans per ser-ho— són el preu de tenir-hi objectes tan nombrosos com els de **Set**. Aquesta és la perspectiva que adoptem al llibre, perquè és la que el lector ja coneix. Hi ha, però, una segona perspectiva: el llenguatge estructural —de conjunts o de categories— pot servir ell mateix de *fonament* de les matemàtiques, sense construir-se damunt d'una teoria de conjunts prèvia. Aleshores la mida es planteja amb altres eines. L'apèndix sobre l'axiomàtica relacional del volum complet n'ofereix un tast, en presentar les categories petites de manera purament relacional; un

desenvolupament complet d'aquesta via pertany a un tractament estructural dels fonaments.

Síntesi del capítol.

Idees centrals

(1) Una categoria són objectes i morfismes amb composició associativa i identitats; el que importa no és què són els objectes, sinó com es relacionen a través de les fletxes. (2) Moltes nocions es defineixen *categòricament* —només amb fletxes, sense parlar dels elements dels objectes—: isomorfisme, monomorfisme i epimorfisme en són els primers exemples, i generalitzen «bijectiu», «injectiu» i «exhaustiu». (3) Dos objectes isomorfs són indistingibles des de la categoria: la igualtat rellevant és $\cong$, no la igualtat estricta. (4) A partir de categories donades se'n construeixen de noves: l'oposada, el producte, les subcategories i les categories sobre i sota un objecte. (5) El **principi de dualitat** —invertir totes les fletxes— dona, de cada noció i cada teorema, una versió dual gratuïta; és un cas d'un mecanisme més general, comú a la lògica i a la geometria projectiva. (6) La distinció entre categories petites, grans i localment petites controla quan $\text{Hom}(A, B)$ és un conjunt.

Errors típics

Creure que «mono + epi $\Rightarrow$ iso» (fals a **Top** i a **2**: un bimorfisme no és sempre un isomorfisme); confondre un monomorfisme amb un monomorfisme escindit; confondre la igualtat d'objectes amb l'isomorfisme; escriure la composició en l'ordre equivocat en dualitzar; i oblidar la hipòtesi de localment petitesa en parlar d'homconjunts.

Lectura recomanada

[1, cap. 1] per a la introducció paral·lela; [3, cap. 1] per a una presentació breu i moderna; [2, I] per a la formulació clàssica. Per a la presentació relacional de les categories petites, l'apèndix sobre l'axiomàtica relacional del volum complet.

Part II

Pràctica: exercicis resolts

1 Categories i morfismes especials

En aquest capítol resollem amb detall una selecció d'exercicis corresponents al capítol *Categories* de la part de Teoria. L'objectiu no és només arribar al resultat, sinó mostrar *com* es raona en el llenguatge categòric: comprovar axiomes, seguir camins, traduir diagrames a equacions i reconèixer una mateixa estructura en conjunts, preordres, lògica i grafs. Convé intentar cada exercici abans de llegir-ne la solució.

1.1 Definició de categoria

Exercici 1.1. Comprova que els conjunts amb les relacions formen una categoria **Rel**, on un morfisme $A \rightarrow B$ és una relació $R \subseteq A \times B$, la identitat de A és la relació d'igualtat, i la composició de $R \subseteq A \times B$ amb $S \subseteq B \times C$ és

$$S \circ R = \{(a, c) \in A \times C \mid \exists b \in B \text{ tal que } (a, b) \in R \text{ i } (b, c) \in S\}.$$

Solució. Hem de comprovar els dos axiomes. Comencem per les **identitats**. Sigui $\Delta_A = \{(a, a) \mid a \in A\}$ la relació d'igualtat sobre A . Per a tota relació $R \subseteq A \times B$,

$$R \circ \Delta_A = \{(a, b) \mid \exists a' (a, a') \in \Delta_A \text{ i } (a', b) \in R\} = R,$$

perquè $(a, a') \in \Delta_A$ obliga $a' = a$. Anàlogament $\Delta_B \circ R = R$.

Per a l'**associativitat**, siguin $R \subseteq A \times B$, $S \subseteq B \times C$ i $T \subseteq C \times D$. Un parell (a, d) pertany a $T \circ (S \circ R)$ si i només si existeixen $b \in B$ i $c \in C$ tals que

$$(a, b) \in R, \quad (b, c) \in S, \quad (c, d) \in T.$$

La mateixa condició caracteritza $(T \circ S) \circ R$. Per tant

$$T \circ (S \circ R) = (T \circ S) \circ R,$$

i **Rel** és una categoria.

□

1.2 Fletxes, camins i diagrames commutatius

Exercici 1.2. Llegeix el diagrama següent i escriu l'equació que expressa que commuta:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ u \downarrow & & \downarrow v \\ C & \xrightarrow{g} & D \end{array}$$

Explica també per què l'ordre de les composicions és el que escrius.

Solució. Hi ha dos camins dirigits de A a D . El camí superior-dret és

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{v} D,$$

i per tant determina $v \circ f$. El camí esquerre-inferior és

$$A \xrightarrow{u} C \xrightarrow{g} D,$$

i determina $g \circ u$. El quadrat commuta exactament quan

$$\boxed{v \circ f = g \circ u}.$$

L'ordre de cada composició es llegeix de dreta a esquerra: en $v \circ f$ seguim primer f i després v .

□

Exercici 1.3. Considera a **Set** quatre còpies de $\mathbb{Z}$ i les aplicacions

$$f(n) = n + 1, \quad u(n) = 2n, \quad v(n) = 2n, \quad g(n) = n + 2.$$

Comprova que el quadrat

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{f} & \mathbb{Z} \\ u \downarrow & & \downarrow v \\ \mathbb{Z} & \xrightarrow{g} & \mathbb{Z} \end{array}$$

commuta.

Solució. Cal comprovar que $v \circ f = g \circ u$. Per a qualsevol $n \in \mathbb{Z}$,

$$(v \circ f)(n) = v(n + 1) = 2n + 2,$$

mentre que

$$(g \circ u)(n) = g(2n) = 2n + 2.$$

Les dues aplicacions coincideixen en tots els enters. Per tant

$$v \circ f = g \circ u,$$

i el quadrat commuta. Aquest exemple mostra com una afirmació sobre funcions es pot llegir simultàniament com una igualtat algebraica i com la commutativitat d'un diagrama.

□

1.3 Primers exemples

Exercici 1.4. Sigui T un sistema deductiu amb una relació de deduïbilitat $\vdash_T$ reflexiva i transitiva. Comprova amb detall que les fórmules, amb una única fletxa $A \rightarrow B$ quan $A \vdash_T B$, formen una categoria prima $\mathbf{Prov}_T$.

Solució. Els **objectes** són les fórmules. Entre dues fórmules A i B posem un únic morfisme $A \rightarrow B$ exactament quan $A \vdash_T B$.

La **identitat** existeix perquè la deduïbilitat és reflexiva:

$$A \vdash_T A.$$

Per tant hi ha una fletxa $\text{id}_A: A \rightarrow A$.

La **composició** existeix perquè la deduïbilitat és transitiva. Si

$$A \vdash_T B \quad \text{i} \quad B \vdash_T C,$$

aleshores

$$A \vdash_T C.$$

Diagramàticament,

$$A \xrightarrow{\quad} B \xrightarrow{\quad} C$$

Finalment, entre dues fórmules hi ha com a màxim una fletxa. Això fa que les igualtats exigides pels axiomes d'associativitat i identitat siguin automàtiques sempre que les composicions existeixin. Per tant $\mathbf{Prov}_T$ és una categoria prima. Cal remarcar que hem oblidat: si hi ha dues demostracions diferents de B a partir d' A , aquesta categoria les identifica en una sola fletxa. Només conserva la relació de deduïbilitat.

□

Exercici 1.5. Siguin els grafs dirigits G i H següents:

$$G : \quad 0 \xrightarrow{a} 1, \quad H : \quad \begin{array}{ccc} & & y \\ & \nearrow r & \\ x & \xrightarrow{s} & z \end{array}$$

Defineix $F_V(0) = x$, $F_V(1) = y$ i $F_E(a) = r$. Comprova que això defineix un morfisme de grafs $F: G \rightarrow H$. Explica per què substituir $F_E(a) = r$ per $F_E(a) = s$, mantenint F_V , no defineix un morfisme de grafs.

Solució. En G tenim

$$s_G(a) = 0, \quad t_G(a) = 1,$$

i en H ,

$$s_H(r) = x, \quad t_H(r) = y.$$

Per tant

$$F_V(s_G(a)) = F_V(0) = x = s_H(r) = s_H(F_E(a))$$

i

$$F_V(t_G(a)) = F_V(1) = y = t_H(r) = t_H(F_E(a)).$$

Així es compleixen les dues equacions

$$F_V \circ s_G = s_H \circ F_E, \quad F_V \circ t_G = t_H \circ F_E,$$

i F és un morfisme de grafs.

Si poséssim $F_E(a) = s$, l'origen encara seria correcte perquè $s_H(s) = x$, però el destí fallaria:

$$t_H(s) = z \neq y = F_V(1).$$

Per tant el quadrat corresponent al destí no commutaria i no tindríem un morfisme de grafs.

□

1.4 Isomorfismes

Exercici 1.6. En una categoria qualsevol, comprova que si $f: A \rightarrow B$ i $g: B \rightarrow C$ tenen inversos, aleshores $g \circ f$ també en té, i

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Solució. La situació és

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C.$$

Per recórrer aquest camí en sentit contrari hem d'invertir també l'ordre: primer g^{-1} i després f^{-1} . Proposem, doncs, $f^{-1} \circ g^{-1}$ com a invers.

D'una banda,

$$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f = f^{-1} \circ f = \text{id}_A,$$

i de l'altra,

$$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = \text{id}_C.$$

Per tant $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

□

Exercici 1.7. Comprova que a **Rel** una relació $R: A \rightarrow B$ és un isomorfisme si i només si és el graf d'una bijecció de A a B .

Solució. Si $f: A \rightarrow B$ és una bijecció i R és el seu graf, el graf de f^{-1} és una relació $B \rightarrow A$ i les dues composicions són les relacions d'igualtat. Per tant R és un isomorfisme.

Recíprocament, suposem que R té un invers $S: B \rightarrow A$, és a dir,

$$S \circ R = \Delta_A, \quad R \circ S = \Delta_B.$$

Per a cada $a \in A$, com $(a, a) \in S \circ R$, existeix algun $b \in B$ amb $(a, b) \in R$ i $(b, a) \in S$. Així cada a es relaciona amb almenys un b .

Si $(a, b) \in R$ i $(a, b') \in R$, triem b_0 amb $(a, b_0) \in R$ i $(b_0, a) \in S$. Llavors

$$(b_0, b) \in R \circ S = \Delta_B, \quad (b_0, b') \in R \circ S = \Delta_B,$$

i per tant $b = b_0 = b'$. Així cada a es relaciona amb un únic b , i R és el graf d'una aplicació $f: A \rightarrow B$.

Aplicat a S , el mateix argument dona una aplicació $g: B \rightarrow A$. Les igualtats $S \circ R = \Delta_A$ i $R \circ S = \Delta_B$ es converteixen en

$$g \circ f = \text{id}_A, \quad f \circ g = \text{id}_B.$$

Per tant f és bijectiva i R n'és el graf. □

Exercici 1.8. Sigui $\mathbf{C}$ una categoria. Comprova que la relació «ésser isomorf» entre objectes de $\mathbf{C}$ és una relació d'equivalència.

Solució. **Reflexivitat:** id_A és el seu propi invers, de manera que $A \cong A$.

Simetria: si $f: A \rightarrow B$ és un isomorfisme amb invers $f^{-1}: B \rightarrow A$, aleshores f^{-1} és també un isomorfisme, amb invers f ; per tant $B \cong A$.

Transitivitat: si $f: A \rightarrow B$ i $g: B \rightarrow C$ són isomorfismes, la composició $g \circ f$ també ho és pel primer exercici de la secció; per tant $A \cong C$. □

Exercici 1.9. A la categoria prima $\mathbf{Prov}_T$, comprova que dues fórmules A i B són isomorfes si i només si són interdeduïbles:

$$A \vdash_T B \quad \text{i} \quad B \vdash_T A.$$

Solució. Si $A \cong B$, per definició existeixen fletxes

$$A \longrightarrow B \quad \text{i} \quad B \longrightarrow A.$$

A $\mathbf{Prov}_T$ això significa exactament $A \vdash_T B$ i $B \vdash_T A$.

Recíprocament, si tenim aquestes dues deduccions, existeixen les dues fletxes.

Com que $\mathbf{Prov}_T$ és prima, qualsevol endomorfisme $A \rightarrow A$ és necessàriament l'única fletxa id_A , i igualment per a B . Per tant les dues composicions són les identitats i les fletxes són inverses. Així $A \cong B$. □

Exercici 1.10. Demostra que un morfisme f és un isomorfisme si i només si és un monomorfisme escindit (té retracció) i un epimorfisme.

Solució. Si f és un isomorfisme, el seu invers és alhora retracció i secció, de manera que f és mono escindit; i tot isomorfisme és epi. Recíprocament, suposem que $f: A \rightarrow B$ té una retracció r (amb $r \circ f = \text{id}_A$) i que és epi. De $r \circ f = \text{id}_A$ obtenim

$$f \circ r \circ f = f = f \circ \text{id}_B,$$

i com que f és epi, es pot cancel·lar per la dreta, d'on $f \circ r = \text{id}_B$. Així r és també invers per la dreta de f : f és un isomorfisme amb invers r . □

1.5 Construccions sobre categories

Exercici 1.11. Descriu explícitament la categoria producte $\mathbf{2} \times \mathbf{3}$, on $\mathbf{2}$ és la categoria associada a l'ordre $0 < 1$ i $\mathbf{3}$ la categoria associada a $0 < 1 < 2$. Quants objectes i quants morfismes té? Com es componen?

Solució. Els objectes són les parelles (i, j) amb $i \in \{0, 1\}$ i $j \in \{0, 1, 2\}$. N'hi ha sis i es poden disposar en una graella:

$$\begin{array}{ccccc} (0, 0) & \longrightarrow & (0, 1) & \longrightarrow & (0, 2) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (1, 0) & \longrightarrow & (1, 1) & \longrightarrow & (1, 2) \end{array}$$

Només hi hem dibuixat les fletxes bàsiques; les composicions produeixen també fletxes més llargues i diagonals.

Com que $\mathbf{2}$ i $\mathbf{3}$ són primes, entre (i, j) i (i', j') hi ha un únic morfisme exactament quan

$$i \leq i' \quad \text{i} \quad j \leq j'.$$

$\mathbf{2}$ té tres morfismes i $\mathbf{3}$ en té sis. Com que un morfisme del producte és una parella, hi ha

$$3 \cdot 6 = 18$$

morfismes. La composició es fa component a component. Tots els quadrats de la graella commuten perquè el producte és també una categoria prima. □

Exercici 1.12. Descriu explícitament la categoria oposada $\mathbf{P}^{\text{op}}$ quan $\mathbf{P}$ és un preordre $(P, \leq)$ vist com a categoria. Quina relació d'ordre li correspon?

Solució. A $\mathbf{P}$ hi ha un morfisme $x \rightarrow y$ exactament quan $x \leq y$. A $\mathbf{P}^{\text{op}}$ les fletxes s'inverteixen:

$$x \longrightarrow y \text{ a } \mathbf{P}^{\text{op}} \iff y \longrightarrow x \text{ a } \mathbf{P} \iff y \leq x.$$

Per tant $\mathbf{P}^{\text{op}}$ és el preordre invers $(P, \geq)$. En aquest exemple, invertir les fletxes és literalment invertir la desigualtat. □

1.6 Grafs i categories lliures

Exercici 1.13. Considera el graf amb un sol vèrtex i dues arestes que són bucles, a i b . Descriu la categoria lliure que genera. Quants morfismes té?

Solució. La categoria lliure té un sol objecte. Els morfismes són tots els camins finits:

$$\varepsilon, \quad a, \quad b, \quad aa, \quad ab, \quad ba, \quad bb, \quad aaa, \quad \dots$$

on ε és el camí buit i actua com a identitat. La composició és la concatenació de paraules. Com que cap relació no identifica camins diferents, hi ha una infinitat numerable de morfismes: és el monoide lliure sobre l'alfabet $\{a, b\}$. □

1.7 Qüestions de mida

Exercici 1.14. En una categoria petita, l'oposada $\mathbf{C}^{\text{op}}$ també és petita. Comprova-ho, i comprova a més que $\mathbf{C}$ i $\mathbf{C}^{\text{op}}$ tenen exactament el mateix nombre de morfismes.

Solució. Els objectes de $\mathbf{C}^{\text{op}}$ són els mateixos que els de $\mathbf{C}$. Cada morfisme $f: A \rightarrow B$ de $\mathbf{C}$ correspon al mateix morfisme vist com $f: B \rightarrow A$ a $\mathbf{C}^{\text{op}}$. Això dona una bijecció entre les col·leccions de morfismes de totes dues categories. Per tant, si els objectes i els morfismes de $\mathbf{C}$ formen conjunts, també ho fan els de $\mathbf{C}^{\text{op}}$. En particular, $\mathbf{C}$ és petita si i només si ho és $\mathbf{C}^{\text{op}}$. □

Part III

Exercicis proposats

1 Categories i morfismes especials

Els exercicis següents completen els resultats al capítol corresponent de la part de Pràctica. Cada enunciat va acompanyat d'una indicació breu per si el lector s'encalla; convé, però, intentar-lo primer sense mirar-la. La marca «★» assenyala un exercici de consolidació i «★★» un d'ampliació.

1.1 Categories i axiomes

Exercici 1.1. Comprova que un conjunt qualsevol X dona lloc a una categoria **discreta**: els objectes són els elements de X i els únics morfismes són les identitats. Verifica els axiomes. ★

Indicació: No hi ha cap morfisme entre objectes diferents; l'única composició possible en cada objecte és $\text{id}_x \circ \text{id}_x$.

Exercici 1.2. Sigui $\mathbf{C}$ una categoria. Comprova que fixar un objecte A i considerar només les fletxes $A \rightarrow A$, amb la composició de $\mathbf{C}$, dona un **monoide**. Quin és el seu element neutre? ★

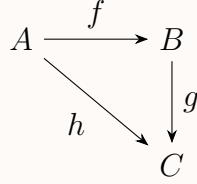
Indicació: Els morfismes $A \rightarrow A$ es poden compondre entre ells i el resultat torna a anar d' A a A . El neutre és id_A .

Exercici 1.3. Comprova que els espais topològics amb les aplicacions contínues formen una categoria **Top**. Cal usar dues propietats de les aplicacions contínues: quines? ★

Indicació: La composició de contínues és contínua, i la identitat és contínua.

1.2 Fletxes, camins i diagrames commutatius

Exercici 1.4. Escriu l'equació que expressa la commutativitat del triangle



i explica quins són els dos camins que es comparen. ★

Indicació: Tots dos camins comencen a A i acaben a C ; un passa per B i l'altre és la fletxa directa.

Exercici 1.5. Representa mitjançant un quadrat commutatiu l'equació

$$q \circ u = v \circ p,$$

on $u: A \rightarrow B$, $q: B \rightarrow D$, $p: A \rightarrow C$ i $v: C \rightarrow D$. ★

Indicació: Col·loca A a l'angle superior esquerre i D a l'inferior dret. Els dos membres de l'equació són dos camins d' A a D .

Exercici 1.6. Dona un exemple de quatre aplicacions entre conjunts que formen un quadrat que *no* commuti. Indica explícitament un element sobre el qual les dues composicions donin resultats diferents. ★

Indicació: Pots treballar amb conjunts molt petits, per exemple $\{0, 1\}$, i comparar els dos camins sobre l'element 0.

1.3 Primers exemples

Exercici 1.7. En un sistema deductiu T , suposem

$$A \vdash_T B, \quad B \vdash_T C, \quad C \vdash_T A.$$

Dibuixa el diagrama corresponent a $\mathbf{Prov}_T$ i comprova que A , B i C són isomorfs dos a dos. ★

Indicació: La transitivitat dona també $A \vdash_T C$, $B \vdash_T A$ i $C \vdash_T B$. En una categoria prima, dues fletxes en sentits oposats ja donen un isomorfisme.

Exercici 1.8. Comprova directament que la composició de dos morfismes de grafs és un morfisme de grafs. Si $F: G \rightarrow H$ i $K: H \rightarrow L$, verifica les equacions d'origen i destí per a $K \circ F$. ★

Indicació: Per a l'origen, parteix de

$$F_V \circ s_G = s_H \circ F_E, \quad K_V \circ s_H = s_L \circ K_E,$$

i compon les igualtats adequadament. Fes el mateix amb t .

Exercici 1.9. Explica amb precisió quina informació té un graf dirigit que encara no té l'estructura d'una categoria. Després indica què afegeix la categoria lliure sobre aquest graf. ★

Indicació: Un graf té vèrtexs, arestes, origen i destí. Una categoria necessita, a més, identitats, composició i axiomes; la categoria lliure els genera mitjançant camins.

1.4 Isomorfismes

Exercici 1.10. Comprova que a la categoria **Mon** dels monoides i els homomorfismes, un isomorfisme és exactament un homomorfisme bijectiu. Compara-ho amb el que pot passar a **Pos**. ★★

Indicació: Comprova que la inversa d'un homomorfisme bijectiu torna a ser un homomorfisme; per a **Pos**, en canvi, la inversa d'una aplicació monòtona bijectiva pot no ser monòtona.

Exercici 1.11. En una categoria, un morfisme $f: A \rightarrow B$ es diu que té una **secció** si existeix $s: B \rightarrow A$ amb $f \circ s = \text{id}_B$. Comprova que tot isomorfisme té secció. Després, prenent $A = \{0, 1\}$, $B = \{*\}$ i f l'única aplicació $A \rightarrow B$, dona una secció $s: B \rightarrow A$ explícita i comprova que f no és isomorfisme. ★

Indicació: Tria $s(*) = 0$ o $s(*) = 1$. Aleshores $f \circ s = \text{id}_B$, però $s \circ f \neq \text{id}_A$.

Exercici 1.12. Comprova que si $g \circ f$ és un isomorfisme, no cal que ho siguin ni f ni g . Busca'n un exemple senzill a **Set** i representa'l amb fletxes. ★

Indicació: Pensa en una inclusió seguida d'una projecció entre conjunts de mides diferents.

Exercici 1.13. Demuestra la caracterització dual de l'exercici resolt a la part de pràctica: un morfisme f és un isomorfisme si i només si és un epimorfisme escindit (té secció) i un monomorfisme. ★

Indicació: És el dual de «mono escindit i epi $\Rightarrow$ iso»: parteix d'una secció s amb $f \circ s = \text{id}_B$ i fes servir que f és mono per veure que $s \circ f = \text{id}_A$.

1.5 Construccions sobre categories

Exercici 1.14. Descriu la categoria producte $\mathbf{3} \times \mathbf{3}$, on $\mathbf{3}$ és la categoria associada a l'ordre $0 < 1 < 2$. Quants objectes i quants morfismes té? Dibuixa les fletxes bàsiques i explica quines altres fletxes apareixen per composició. ★★

Indicació: $\mathbf{3}$ té tres objectes i sis morfismes. En el producte, els objectes i els morfismes són parelles.

Exercici 1.15. Compara directament $(\mathbf{C} \times \mathbf{D})^{\text{op}}$ i $\mathbf{C}^{\text{op}} \times \mathbf{D}^{\text{op}}$. Comprova que tenen els mateixos objectes i que els seus morfismes, identitats i composicions s'identifiquen component a component. ★

Indicació: Un morfisme $(A, X) \rightarrow (B, Y)$ a $(\mathbf{C} \times \mathbf{D})^{\text{op}}$ és, per definició, un morfisme $(B, Y) \rightarrow (A, X)$ a $\mathbf{C} \times \mathbf{D}$. Escriu què significa això en cadascuna de les dues components.

1.6 Grafs i categories lliures

Exercici 1.16. Classifica, fins a isomorfisme, els grafs dirigits que generen una categoria lliure amb exactament **quatre** morfismes. Recorda que les identitats compten com a morfismes. ★★

Indicació: Compta primer les identitats, una per vèrtex, i després les arestes i els camins que generen. Recorda també que la definició de graf permet arestes paral·leles. Evita els cicles, que produeixen infinits camins.

Exercici 1.17. Considera el graf

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C.$$

Llista tots els morfismes de la categoria lliure que genera, dibuixa també la fletxa composta i comprova que hi ha exactament sis morfismes. ★

Indicació: Compta els tres camins buits, les dues arestes f i g , i el camí compost de longitud dos.

Exercici 1.18. Per què un graf amb un cicle, per exemple una aresta $a: A \rightarrow A$, genera sempre una categoria lliure amb infinits morfismes? ★

Indicació: El cicle es pot recórrer tantes vegades com es vulgui: $a, a^2, a^3, \dots$, i cada repetició dona un camí diferent.

1.7 Qüestions de mida

Exercici 1.19. Comprova que un preordre, vist com a categoria, és una categoria **petita** sempre que el conjunt subjacent P sigui un conjunt. Quants morfismes hi ha, com a màxim, entre dos objectes? ★

Indicació: Entre dos objectes hi ha zero o un morfisme; la col·lecció total de morfismes es pot identificar amb un subconjunt de $P \times P$.

Exercici 1.20. Explica per què **Set** és localment petita. És a dir, per què, donats dos conjunts A i B , la col·lecció d'aplicacions $A \rightarrow B$ és un conjunt. ★

Indicació: Les aplicacions $A \rightarrow B$ es poden identificar amb certs subconjunts de $A \times B$; per tant formen un subconjunt de $\mathcal{P}(A \times B)$.

Exercici 1.21. Explica per què **Graph** és localment petita: donats dos grafs dirigits G i H , per què els morfismes de grafs $G \rightarrow H$ formen un conjunt? ★

Indicació: Un morfisme de grafs és una parella d'aplicacions $V_G \rightarrow V_H$ i $E_G \rightarrow E_H$ que satisfà dues condicions. Aquestes parelles formen un subconjunt d'un producte de dos conjunts d'aplicacions.

Part IV

Test interactiu

1 Categories i morfismes especials

Aquest test recull els conceptes essencials del capítol. Cada pregunta té una única resposta correcta. Els camps interactius funcionen en lectors de PDF compatibles amb formularis i JavaScript.

Instruccions. Marca una sola resposta per pregunta. En acabar, prem el botó **Corregir**. El camp **Nota** mostrarà el resultat.

Corregir Netejar **Nota:**

1. Quines dades formen una categoria?

- (a) Només una col·lecció d'objectes i una relació d'ordre.
- (b) Objectes, morfismes, identitats i composició, subjectes als axiomes d'associativitat i identitat.
- (c) Objectes, elements i una operació interna en cada objecte.
- (d) Únicament morfismes i una operació de composició total.

Correcció:

2. Si $f: A \rightarrow B$ i $g: B \rightarrow C$, com s'interpreta $g \circ f$?

- (a) Primer actua g i després f .
- (b) Només està definit quan $A = C$.
- (c) Primer actua f i després g .
- (d) És sempre igual a $f \circ g$.

Correcció:

3. En un quadrat amb $f: A \rightarrow B$, $u: A \rightarrow C$, $v: B \rightarrow D$ i $g: C \rightarrow D$, què significa que el quadrat commuti?

- (a) $f \circ v = u \circ g$.

- (b) $v \circ f = g \circ u$.
- (c) $v \circ g = f \circ u$.
- (d) Que totes quatre fletxes siguin isomorfismes.

Correcció:

4. Com es veu un monoide com una categoria?
- (a) Com una categoria sense objectes.
 - (b) Com una categoria amb un sol objecte, on els elements del monoide són els morfismes.
 - (c) Com una categoria amb un objecte per a cada element del monoide i sense fletxes.
 - (d) Només els grups es poden interpretar com a categories.

Correcció:

5. En la categoria associada a un preordre $(P, \leq)$, quan hi ha una fletxa $x \rightarrow y$?
- (a) Quan $x = y$ i només en aquest cas.
 - (b) Quan $y \leq x$.
 - (c) Exactament quan $x \leq y$; entre dos objectes hi ha com a màxim una fletxa.
 - (d) Sempre hi ha dues fletxes entre dos objectes comparables.

Correcció:

6. Què conserva la categoria prima $\mathbf{Prov}_T$ associada a una relació de deduïbilitat?
- (a) La forma interna completa de cada demostració.
 - (b) El nombre de demostracions diferents entre dues fórmules.
 - (c) Només si existeix una deducció $A \vdash_T B$, mitjançant una única fletxa $A \rightarrow B$.
 - (d) Només les fórmules que no són demostrables.

Correcció:

7. Quina condició ha de satisfer un morfisme de grafes $F: G \rightarrow H$?
- (a) Ha d'enviar tots els vèrtexs al mateix vèrtex.
 - (b) Només ha de ser una aplicació entre conjunts d'arestes.
 - (c) Ha de convertir totes les arestes en identitats.

- (d) Les aplicacions sobre vèrtexs i arestes han de preservar origen i destí, és a dir, fer commutar els dos quadrats corresponents.

Correcció:

8. Quins són els isomorfismes a **Set**?

- (a) Les aplicacions injectives.
- (b) Les aplicacions bijectives.
- (c) Les aplicacions exhaustives.
- (d) Totes les aplicacions.

Correcció:

9. Quan són isomorfes dues fórmules A i B a **Prov_T**?

- (a) Exactament quan $A \vdash_T B$ i $B \vdash_T A$.
- (b) Només quan són literalment la mateixa cadena de símbols.
- (c) Quan no hi ha cap deducció entre elles.
- (d) Quan hi ha exactament una prova concreta de B a partir d' A .

Correcció:

10. Què fa la construcció de la categoria oposada **C^{op}**?

- (a) Conserva els objectes i inverteix el sentit de totes les fletxes.
- (b) Intercanvia objectes per morfismes.
- (c) Elimina tots els morfismes no invertibles.
- (d) Conserva les fletxes i canvia només les identitats.

Correcció:

11. Què és un objecte de la categoria producte **C × D**?

- (a) Un morfisme de **C** a **D**.
- (b) Un objecte que pertany simultàniament a **C** i a **D**.
- (c) Una parella (A, X) amb A objecte de **C** i X objecte de **D**.
- (d) Un subconjunt del producte cartesià dels objectes.

Correcció:

12. Quina és la identitat d'un vèrtex en la categoria lliure sobre un graf dirigit?

- (a) Qualsevol bucle del graf.

- (b) La primera aresta que surt del vèrtex.
- (c) No hi ha identitats si el graf no les dibuixa.
- (d) El camí buit de longitud zero en aquell vèrtex.

Correcció:

13. Què significa que una categoria sigui localment petita?

- (a) Que tingui un nombre finit d'objectes.
- (b) Que, per a cada parella d'objectes A, B , la col·lecció $\text{Hom}(A, B)$ sigui un conjunt.
- (c) Que la col·lecció de tots els objectes sigui un conjunt.
- (d) Que tots els seus morfismes siguin isomorfismes.

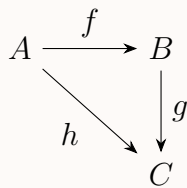
Correcció:

14. Què passa si un graf finit conté un cicle i en prenem la categoria lliure?

- (a) La categoria lliure continua tenint necessàriament un nombre finit de morfismes.
- (b) El cicle es converteix automàticament en una identitat.
- (c) El cicle es pot repetir arbitràriament i genera infinits camins, per tant infinits morfismes.
- (d) La construcció deixa de ser una categoria.

Correcció:

15. Quina equació expressa que el triangle següent **commuta**?



- (a) $h = g \circ f$.
- (b) $f = g \circ h$.
- (c) $g = f \circ h$.
- (d) $f \circ g \circ h = \text{id}$.

Correcció:

Respostes. (Per si el vostre lector de PDF no admet la correcció automàtica.)

1. b **2.** c **3.** b **4.** b **5.** c **6.** c **7.** d **8.** b **9.** a **10.** a
11. c **12.** d **13.** b **14.** c **15.** a

Bibliografia

- [1] S. Awodey, *Category Theory*, 2a edició, Oxford Logic Guides 52, Oxford University Press, 2010.
- [2] S. Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, 2a edició, Graduate Texts in Mathematics 5, Springer, 1998.
- [3] T. Leinster, *Basic Category Theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 143, Cambridge University Press, 2014.

Índex alfabètic

- Aut, 17
- automorfisme, 17
- bimorfisme, 18
- categoria, 3
 - buida, 6
 - discreta, 8
 - finita, 6
 - gran, 31
 - lliure, 29, 30
 - localment petita, 31
 - oposada, 20
 - petita, 31
 - prima, 9
 - producte, 21
 - sobre un objecte, 22
 - sota un objecte, 22
 - unitat, 6
- codomini, 3
- composició, 3
- conjunt apuntat, 23
- deduïbilitat, 10
- diagrama commutatiu, 5
- domini, 3
- dualitat, 21
 - d'un enunciat, 24
 - noció autodual, 27
 - principi de, 23, 25
 - projectiva, 27
- endomorfisme, 17
- epimorfisme, 18
- espai topològic, 11
- espai vectorial, 11
- Free, 30
- graf dirigit, 13
- Graph**, 13
- grup, 9
- grupoide, 17
- homeomorfisme, 16
- identitat, 3
- invers
 - per un costat, 19
- isomorfisme, 14
- monoide, 9
 - lliure, 30
- monomorfisme, 18
- morfisme, 3
- morfisme de grafs, 13
- objecte, 3
- preordre, 9
- prova
 - com a morfisme, 10
- Rel**, 12
- retracció, 19
- secció, 19
- subcategoria, 22
 - ampla, 22
 - plena, 22