

Miquel Àngel Perelló

1 de juliol de 2026

Índex

1	Teoria	1
1.1	El conjunt dels nombres reals	1
1.1.1	Existència de nombres que no són racionals	1
1.1.2	Expressió decimal dels nombres irracionals	5
1.1.3	El conjunt dels nombres reals	6
1.1.4	La recta real	7
1.2	Operacions amb nombres reals	12
1.2.1	Aproximacions	13
1.2.2	Suma i producte de nombres reals	13
1.2.3	El cos dels nombres reals	18
1.3	L'ordre en el conjunt dels nombres reals	24
1.3.1	Enfocament numèric i geomètric	24
1.3.2	Enfocament algebraic	25
1.3.3	Valor absolut	28
1.3.4	Distància entre dos nombres reals	29
1.3.5	Intervals i semirectes	31
1.3.6	Conjunts fitats	32
1.4	Potències enteres de nombres reals	33
1.4.1	Potències d'exponent natural	33
1.4.2	Potències d'exponent enter	36
1.4.3	Notació científica	37
1.5	Arrels de nombres reals	38
1.5.1	Arrels quadrades	38
1.5.2	Arrels cúbiques	39
1.5.3	Arrels enèsimes	40
1.5.4	Càlcul d'arrels	41
1.6	Càlcul amb radicals	45
1.6.1	Propietats de les operacions amb arrels	46
1.6.2	Radicals equivalents	50
1.6.3	Introducció i extracció de factors en una arrel	52

1.6.4	Suma d'arrels	53
1.6.5	Racionalització de denominadors	53
1.6.6	Potències d'exponent racional	56
2	Pràctica	61
2.1	El conjunt dels nombres reals	61
2.2	Les operacions en el conjunt dels nombres reals	70
2.3	L'ordre en el conjunt dels nombres reals	77
2.4	Potències enteres de nombres reals	88
2.5	Arrels de nombres reals	97
2.6	Càlcul amb radicals	103
3	Exercicis proposats	123
4	Tests interactius	132
4.1	Test 1: conjunts numèrics, ordre i intervals	132
4.2	Test 2: radicals i potències	134
4.3	Test 3: síntesi de la unitat	137

Prefaci

Aquests apunts reuneixen en un únic volum els materials d'aprendes dedicats als nombres reals: teoria, exercicis resolts, exercicis proposats i tests d'autoavaluació. L'objectiu és oferir una presentació ordenada i progressiva dels conceptes bàsics que permeten treballar amb els diferents conjunts numèrics i, en particular, amb la recta real.

El text conserva el contingut original dels documents independents, però l'organitza en format de llibre per facilitar-ne la lectura continuada, la consulta i la impressió. La part teòrica introdueix les nocions fonamentals; la pràctica mostra procediments i problemes resolts; els exercicis proposats permeten consolidar l'aprenentatge, i els tests finals serveixen com a comprovació ràpida de la comprensió assolida.

Introducció

L'estudi dels nombres reals ocupa un lloc central en les matemàtiques del batxillerat. Els nombres naturals, enters, racionals i irracionals s'integren finalment en el conjunt dels nombres reals, que permet representar magnituds, mesurar longituds, ordenar quantitats i descriure processos continus.

Els objectius principals d'aquesta unitat són:

- reconèixer els diferents conjunts numèrics i les seves relacions d'inclusió;
- comprendre la diferència entre nombres racionals i irracionals;
- interpretar la recta real com a model geomètric dels nombres reals;
- treballar amb intervals, aproximacions, potències i radicals;
- aplicar aquests conceptes en exercicis i problemes.

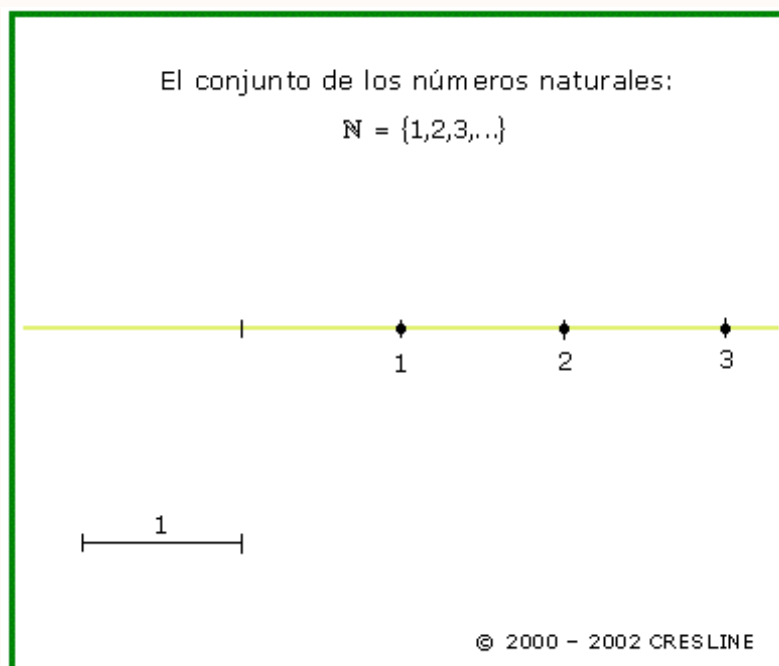
1 Teoria

1.1 El conjunt dels nombres reals

En aquesta secció veurem que no tots els nombres decimals que necessitem per resoldre problemes elementals de mesura de longituds són exactes o periòdics, és a dir, nombres racionals. Aquesta insuficiència del conjunt dels nombres racionals conduirà a la necessitat d'ampliar-lo amb nous nombres, que anomenarem irracionals i que es caracteritzaran per tenir una expressió decimal amb infinites xifres decimals no periòdiques. D'aquesta manera, afegint els nombres irracionals als nombres racionals, formarem un nou conjunt de nombres, que anomenarem conjunt dels nombres reals i que designarem per $\mathbb{R}$. Veurem també que aquest conjunt de nombres es pot representar mitjançant els punts d'una recta; per aquest motiu, la recta que representa gràficament el conjunt dels nombres reals s'anomena recta real.

1.1.1 Existència de nombres que no són racionals

En la figura 1 hem dibuixat una línia recta i damunt seu, prenent com a unitat el segment que s'indica, hem representat alguns nombres naturals¹.



¹Recorda que el conjunt dels nombres naturals es simbolitza per $\mathbb{N}$ i que $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, indicant amb aquesta notació que $\mathbb{N}$ és un conjunt els elements del qual són 1, 2, 3,

Figura 1

Ara, sobre la mateixa recta, en la figura 2 hem representat alguns nombres enters².

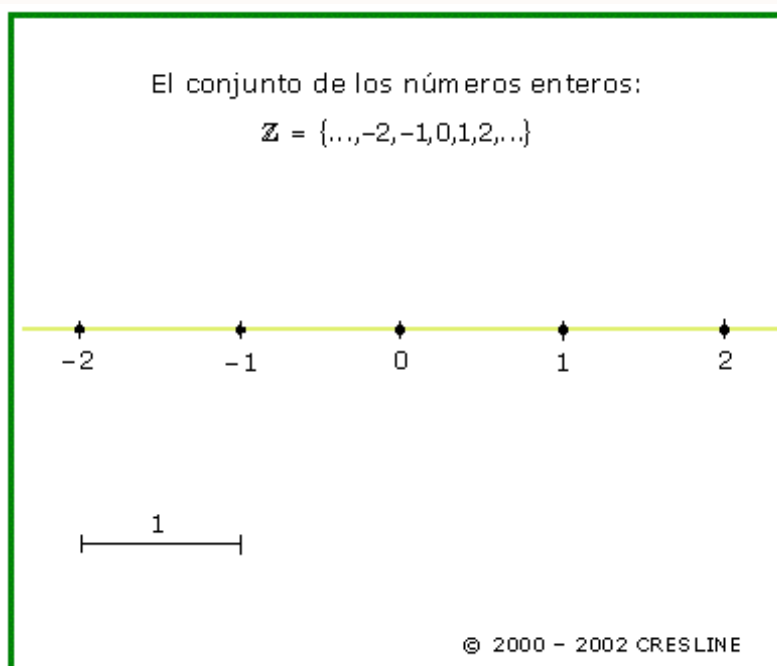


Figura 2

Com hauràs observat tot d'una, en representar aquests nombres hem hagut d'assenyalar el punt que correspon a 0 i els punts que corresponen als nombres negatius; els punts que corresponen als nombres positius ja estaven assenyalats en representar els nombres naturals. Per aquesta raó, tenim que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ ³ i $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+$ ⁴. Ara, de nou sobre la mateixa recta, en la figura 3 hem representat alguns nombres racionals⁵.

²Recorda que el conjunt dels nombres enters es simbolitza per $\mathbb{Z}$ i que $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$, indicant amb aquesta notació que $\mathbb{Z}$ és un conjunt els elements del qual són $\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$.

³Amb aquesta notació indiquem que el conjunt $\mathbb{N}$ és un subconjunt del conjunt $\mathbb{Z}$, és a dir, que tot nombre natural és un nombre enter.

⁴Amb aquesta notació indiquem que qualsevol nombre enter és un nombre enter positiu, és a dir, un nombre natural, o bé és un nombre enter negatiu o bé és zero. En efecte, $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ i $\mathbb{Z}^- = \{-1, -2, -3, \dots\}$ i, per tant, $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+$, on $\cup$ és l'operació entre conjunts que anomenem unió.

⁵Recorda que el conjunt dels nombres racionals es simbolitza per $\mathbb{Q}$ i que

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{n}{m} : n, m \in \mathbb{Z} \text{ i } m \neq 0 \right\}$$

indicant amb aquesta notació que $\mathbb{Q}$ és un conjunt els elements del qual són, per exemple, -2 , $-\frac{1}{3}$ o $\frac{3}{2}$.

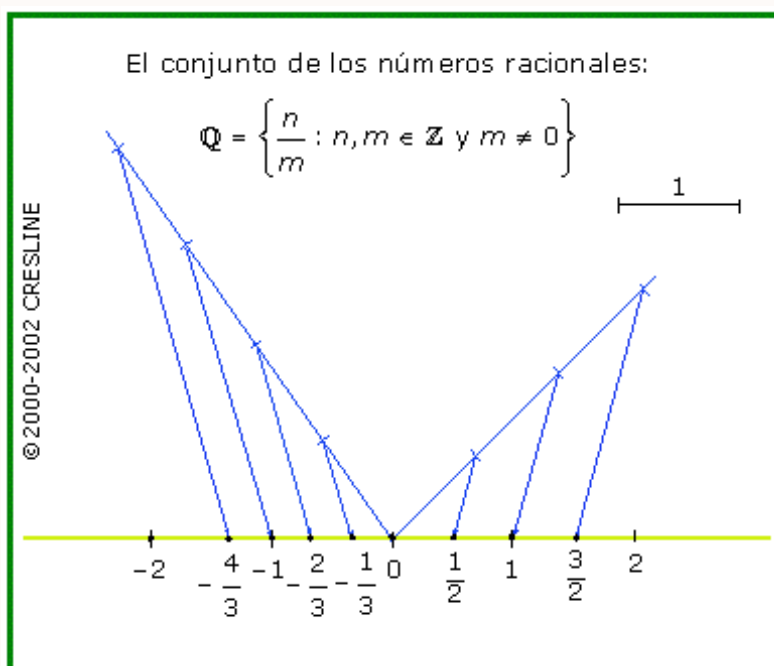


Figura 3

Com hauràs observat tot d'una, en representar aquests nombres hem hagut d'assenyalar els punts de la recta que corresponen a les fraccions; els punts que corresponen als nombres enters⁶ ja estaven assenyalats. Per aquesta raó, tenim que

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

És clar que també tenim en aquest cas que

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^+$$

és a dir, qualsevol nombre racional és un nombre racional positiu o bé negatiu o bé és zero.

Arribats a aquest punt, és natural fer-se ara la següent pregunta: una vegada representats tots els nombres racionals sobre la recta, queden buits damunt seu? És a dir, hi ha punts de la recta que no corresponen amb cap nombre considerat fins ara? Per respondre aquesta qüestió, farem la següent construcció amb regla, escaire i compàs. En la figura 4 hem construït un quadrat de costat 1 mitjançant regla i escaire.

⁶Fraccions equivalents de la forma $\frac{n}{1}$ amb $n \in \mathbb{Z}$

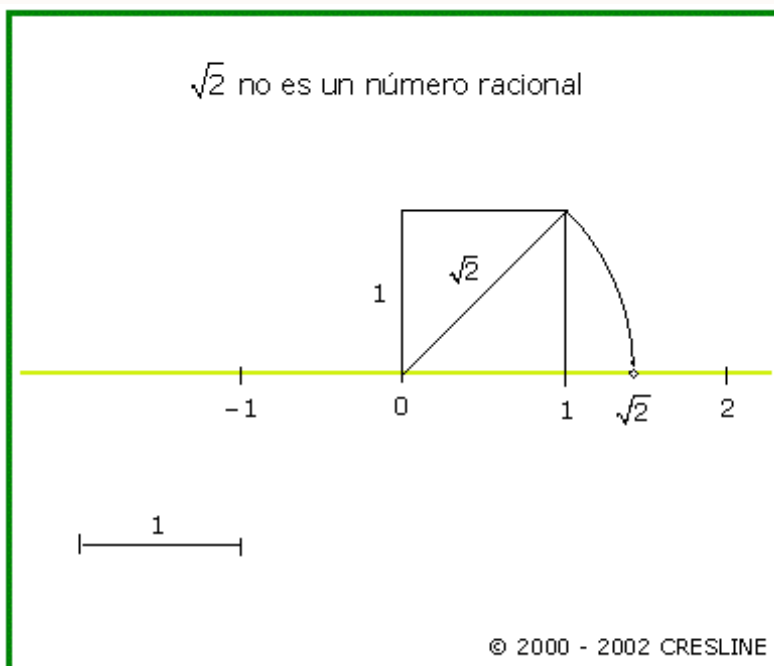


Figura 4

Pel teorema de Pitàgores⁷, la diagonal d'aquest quadrat mesura $\sqrt{2}$. Ara, mitjançant el compàs, hem assenyalat $\sqrt{2}$ sobre la recta. És $\sqrt{2}$ un nombre racional? Si ho fos, s'hauria de poder escriure com una fracció

$$\sqrt{2} = \frac{n}{m} \quad (1.1.1)$$

on $n, m \in \mathbb{Z}$. Suposem que és així i veurem que això condueix a una contradicció⁸. Podem suposar també que la fracció és irreductible, ja que, en cas contrari, la podríem simplificar fins a obtenir-ne una d'equivalent i irreductible. Aleshores, els nombres enters n i m són primers entre si i, a més, m no pot ser 1, ja que, si ho fos, $\sqrt{2}$ seria un nombre enter; però la construcció anterior mostra que $\sqrt{2}$ és major que 1 i menor que 2. Per tant, es complirà (1.1.1) si el quadrat del nombre $\frac{n}{m}$ és 2, és a dir,

$$\left(\frac{n}{m}\right)^2 = \frac{n^2}{m^2} = 2.$$

Ara bé, això no és possible, ja que els nombres enters n^2 i m^2 , com que són quadrats, tenen descomposicions en factors primers en què tots els exponents són parells. A més, com que hem suposat que n i m són primers entre si, no tenen cap factor en comú. Per tant, la fracció $\frac{n^2}{m^2}$ també és irreductible i no pot ser igual a 2.

En definitiva, obtenim una conclusió clara: $\sqrt{2}$ no és cap nombre racional. Així, en representar tots els nombres racionals sobre la recta, encara hi queden punts que

⁷Recorda que el teorema de Pitàgores afirma que un triangle és rectangle si i només si es compleix que

$$h^2 = c_1^2 + c_2^2$$

on h indica el costat de major longitud i c_1, c_2 els altres dos costats.

⁸Volem demostrar que $\sqrt{2}$ no és un nombre racional i, per fer-ho, utilitzarem el mètode de demostració anomenat reducció a l'absurd: si a partir de la hipòtesi contrària i de raonaments correctes s'arriba a una contradicció, necessàriament la conclusió inicial és vertadera.

no corresponen a cap nombre racional; un d'aquests punts és $\sqrt{2}$. El teorema de Pitàgores permet situar sobre la recta longituds expressades amb arrels quadrades; per exemple, en la figura 5 hem situat $\sqrt{3}$ a partir de $\sqrt{2}$,

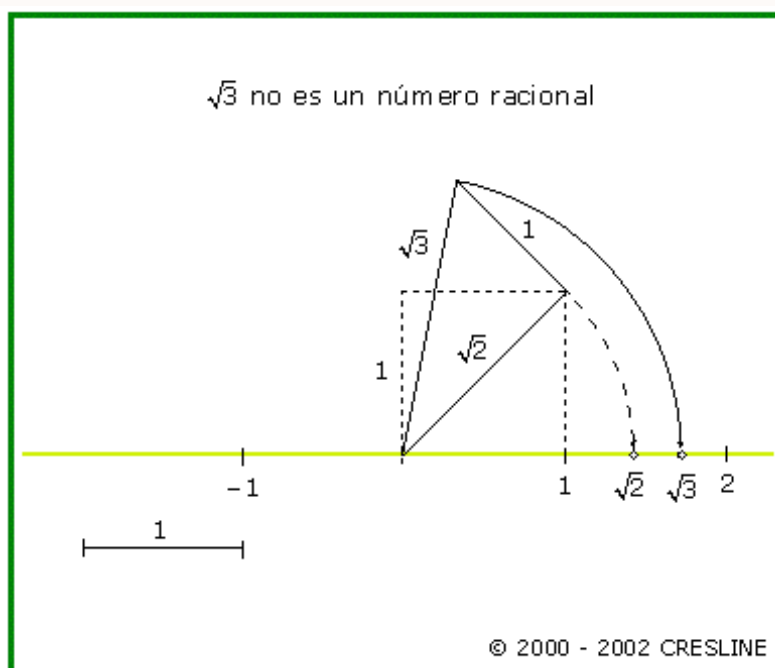


Figura 5

i de la mateixa manera es poden situar $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, ... El fet que sigui possible dibuixar sobre una recta longituds que no estan representades per nombres racionals suggereix l'existència de nous nombres. A aquests nombres que no són racionals els anomenarem **nombres irracionals**.

Tot seguit se'ns planteja una nova pregunta: quina mena de nombres són els nombres irracionals? La resposta a aquesta qüestió la trobarem en l'apartat següent.

1.1.2 Expressió decimal dels nombres irracionals

El nombre irracional $\sqrt{2}$ que hem descobert a l'apartat anterior pot situar-se sobre la recta fent ús del regle i el compàs, com hem vist en la figura 4, però què classe de nombre és? Serà un nombre que, elevat al quadrat, sigui 2. Per construcció, sabem que $\sqrt{2}$ està entre 1 i 2. Continuem provant valors de $\sqrt{2}$, per tempteig, usant una calculadora per trobar 1.1^2 , 1.2^2 , etc. (de moment, no val fer servir la tecla $\sqrt{}$). Després de diverses proves, obtindrem els següents resultats:

1. $\sqrt{2}$ està comprès entre 1.4 i 1.5 ja que $1.4^2 = 1.96$ i $1.5^2 = 2.25$
2. $\sqrt{2}$ està comprès entre 1.41 i 1.42 ja que $1.41^2 = 1.9881$ i $1.42^2 = 2.0164$
3. $\sqrt{2}$ està comprès entre 1.414 i 1.415 ja que $1.414^2 = 1.999396$ i $1.415^2 = 2.002225$

Encara no hem trobat un nombre decimal el quadrat del qual sigui 2, però hem millorat el resultat que havíem obtingut per construcció. Aquest mètode permetrà

assolir la precisió que es vulgui amb només repetir aquest procés tantes vegades com sigui necessari. Naturalment, la calculadora té la tecla $\sqrt{}$ per calcular arrels. Fent-la servir, obtindràs un resultat com el següent (depèn de quantes xifres sigui capaç de manejar la calculadora)

$$\sqrt{2} = 1.414213562$$

però, com pots imaginar en seguida, aquest resultat no és exacte, perquè si ho fos, aleshores $\sqrt{2}$ seria un nombre racional i això no és possible com s'ha vist a l'apartat anterior. A més, per la mateixa raó, $\sqrt{2}$ tampoc és un nombre decimal periòdic⁹. Per tant, només podem escriure

$$\sqrt{2} = 1.41421356\dots$$

i, de la mateixa manera, passa que

$$\sqrt{3} = 1.732050808\dots$$

i, en general, tots els nombres que hem anomenat irracionals tenen una expressió decimal que té un nombre infinit de xifres decimals no periòdiques. Aquesta caracterització dels nombres irracionals condueix a la definició de nombre real com veurem en el següent apartat.

1.1.3 El conjunt dels nombres reals

Dels dos apartats anteriors podem concloure afirmant que no tots els nombres decimals que necessitem per resoldre problemes elementals de mesura de longituds són finits o periòdics, és a dir, no són nombres racionals. Aquesta insuficiència del conjunt $\mathbb{Q}$ condueix a la necessitat d'ampliar-lo amb els nombres decimals infinits no periòdics, és a dir, amb els nombres irracionals. D'aquesta manera, formem un nou conjunt de nombres que anomenarem **conjunt dels nombres reals** i que simbolitzarem per $\mathbb{R}$. Per tant, un nombre real serà un nombre decimal exacte, periòdic o no. És clar que si simbolitzem el conjunt dels nombres irracionals per $\mathbb{I}$, aleshores

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

i, per tant, és evident que per construcció es compleix

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

El conjunt dels nombres reals $\mathbb{R}$ conté, a més de 0, els nombres decimals positius (situats a la seva dreta en la recta) i els negatius (situats a la seva esquerra en la recta). Si simbolitzem per $\mathbb{R}^+$ el conjunt dels nombres decimals positius i per $\mathbb{R}^-$, el dels negatius, obtenim

$$\mathbb{R} = \mathbb{R}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^+$$

i els tres conjunts són disjunts entre si¹⁰. Com a resum, en la figura 6 mostrem la classificació dels nombres reals.

⁹Recorda que tot nombre decimal exacte o periòdic admet una fracció generatriu que el representa i, per tant, és un nombre racional.

¹⁰Recorda que dos conjunts A i B s'anomenen disjunts si el seu intersecció és el conjunt buit $A \cap B = \emptyset$.

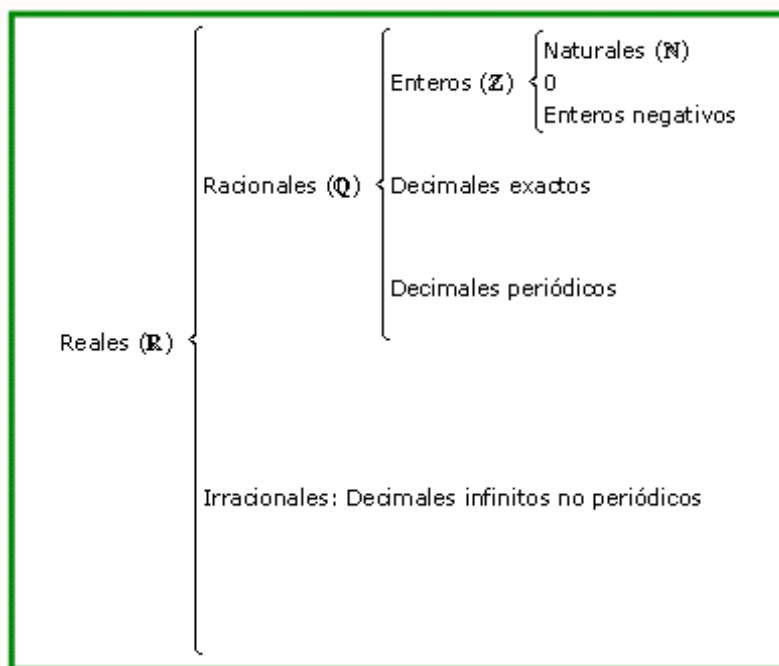


Figura 6

Finalment, ens queda per resoldre una última qüestió molt important. Situat tots els nombres reals sobre la recta considerada a l'apartat 1, queda aquesta recta sense cap forat? La resposta a aquesta pregunta és afirmativa com veurem en el següent apartat.

1.1.4 La recta real

El problema que ens plantegem ara és el següent: donat un nombre real, podem identificar-lo com un únic punt de la recta considerada a l'apartat 1? i, recíprocament, donat un punt de la recta, podem identificar-lo com un únic nombre real? Com veurem a continuació, la resposta és sí a ambdues preguntes. D'aquesta manera, s'estableix una correspondència bijectiva entre els nombres reals i els punts de la recta i, com a conseqüència, els nombres reals omplen totalment la recta. D'aquí ve el nom de recta real a la recta com representació gràfica del conjunt dels nombres reals.

1.1.4.1 Tot nombre real és un punt de la recta

Si el nombre real és un nombre racional ja sabem que podem situar-lo com un únic punt de la recta; hem representat alguns nombres racionals en la figura 3. Si el nombre és irracional, també hem vist com es situa sobre la recta en els casos més senzills com $\sqrt{2}$ o $\sqrt{3}$; hem situat aquests punts en les figures 4 i 5, respectivament. Ara bé, hi ha altres nombres irracionals que no admeten construccions geomètriques tan simples (fent servir regle i compàs). Per exemple, la longitud d'una circumferència¹¹ de diàmetre 1 és el nombre pi

$$\pi = 3.141592654\dots$$

¹¹Recorda que la longitud L d'una circumferència de radi r ve donada per la fórmula $L = 2\pi r$.

que també és un nombre irracional. Podem aproximar π de la següent manera: en la circumferència de diàmetre 1 s'inscriu i es circumscriu un hexàgon regular. La longitud d'aquesta circumferència serà menor que el perímetre¹² del hexàgon circumscriu i major que el perímetre del hexàgon inscrit. En la mateixa circumferència es van inscrivint i circumscriuint successivament polígons regulars amb doble nombre de costats que el polígon anterior i es van calculant els perímetres respectius. D'aquesta manera, es pot aproximar π tant com es vulgui. En la figura 7 hem anotat algunes aproximacions successives de π .

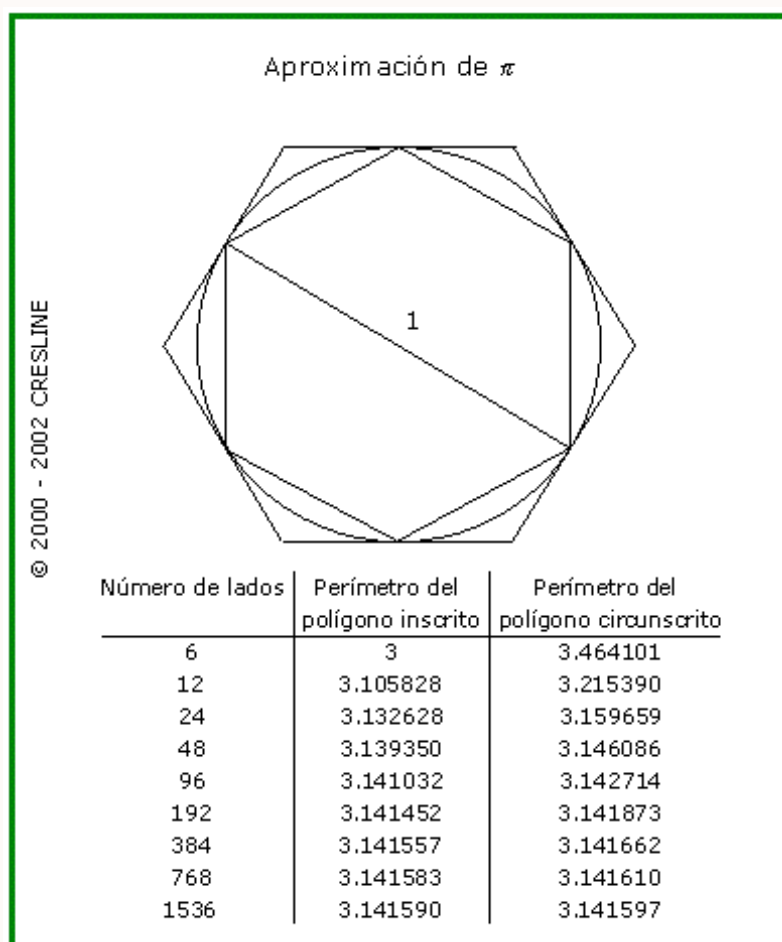


Figura 7

En general, ja que, el problema es redueix a situar sobre la recta un nombre decimal infinit no periòdic. Per veure com es fa això, utilitzarem el nombre irracional $\sqrt{2}$ que hem construït mitjançant regla i compàs a l'apartat 1. Mitjançant calculadora, obtenim la seva expressió decimal

$$\sqrt{2} = 1.41421356...$$

A partir del nombre decimal podem construir la següent successió de nombres racionals

$$1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, 1.41421, \dots \quad (1.1.2)$$

obtinguts prenent les primeres xifres decimals del nombre. Cada nombre d'aquesta llista és menor que $\sqrt{2}$ i es diu que són les **aproximacions successives per defecte**

¹²Recorda que s'anomena perímetre d'un polígon a la suma de tots els seus costats.

de $\sqrt{2}$. Sumant ara una unitat a l'última xifra decimal dels nombres que apareixen en (1.1.2), obtenim

$$2, 1.5, 1.42, 1.415, 1.4143, 1.41422, \dots \quad (1.1.3)$$

Tots aquests nombres racionals són majors que $\sqrt{2}$ i es diu que són les **aproximacions successives per excés** de $\sqrt{2}$. Per tant, el punt de la recta que hem d'assignar a $\sqrt{2}$ s'ha de situar una mica més a la dreta que els punts corresponents als nombres racionals en (1.1.2) i una mica més a l'esquerra que els corresponents a (1.1.3). En la figura 8, hem situat sobre la recta els nombres racionals de (1.1.2) i (1.1.3).

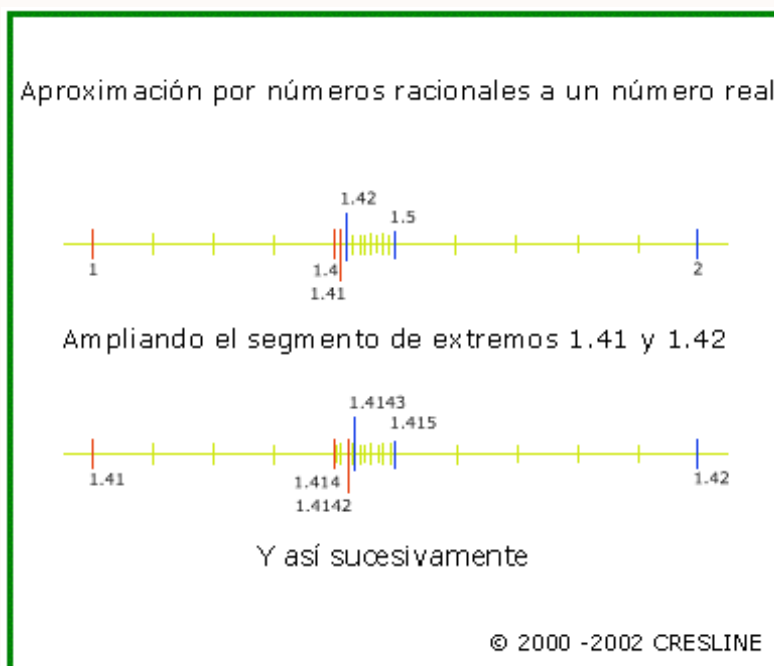


Figura 8

Si ara considerem els segments sobre la recta d'extrems 1 i 2, 1.4 i 1.5, 1.41 i 1.42, ... tenim que les seves longituds són respectivament 1, 0.1, 0.01, ... Els segments sobre la recta s'anomenen **intervals** i es denoten col·locant els extrems entre parèntesis quadrats, és a dir, els segments de recta considerats anteriorment s'escriuen així

$$[1, 2], [1.4, 1.5], [1.41, 1.42], \dots \quad (1.1.4)$$

Hem dibuixat aquests segments en la figura 9, i ens adonem en seguida que cada interval està contingut en l'anterior. Diem aleshores que són **intervals encaixats**.

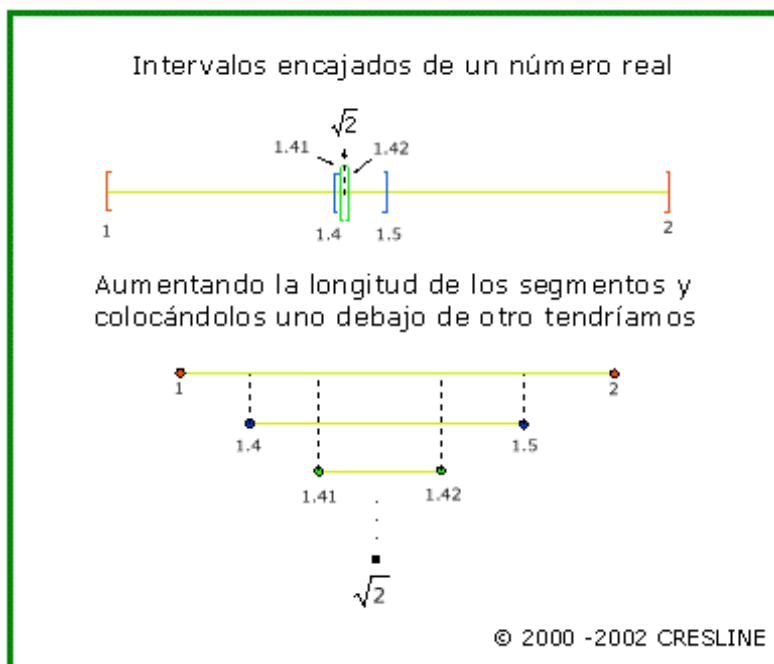


Figura 9

Ara hem d'assumir¹³ un resultat teòric conegut com **propietat dels intervals encaixats**¹⁴. Segons aquesta propietat, tots aquests intervals tenen un únic punt en comú; de fet hi ha infinits, ja que, hi ha infinites xifres decimals en l'expressió decimal de $\sqrt{2}$, i la longitud de cada un d'ells és la desena part de l'anterior. Com que, per construcció, tots els intervals (1.1.4) contenen $\sqrt{2}$, aquest punt comú correspon a $\sqrt{2}$. Es diu aleshores que la **successió d'intervals encaixats (1.1.4) defineix $\sqrt{2}$** ; encara que és impossible trobar el punt corresponent a $\sqrt{2}$, tanmateix, la propietat dels intervals encaixats n'assegura l'existència sobre la recta. A partir d'aquesta definició, es comprèn per què els nombres racionals i els irracionals estan tan pròxims uns dels altres fins al punt que entre dos nombres reals qualssevol existeixen infinits racionals i infinits irracionals.

1.1.4.2 Tot punt de la recta és un nombre real

Si en una recta s'han fixat un origen i una unitat, tot punt P d'aquesta recta correspon a un únic nombre real. El procés que cal seguir per identificar P com un nombre real és invers al seguit a l'apartat anterior. En la figura 10 hem situat un punt qualsevol P de la recta.

¹³Aquest resultat encara que és intuïtiu, és una de les propietats fonamentals que es dedueixen de la construcció axiomàtica dels nombres reals que es veurà en estudis superiors de matemàtiques.

¹⁴Segons aquesta propietat, en tota successió d'intervals encaixats tals que la seva longitud es fa tan petita com es vulgui existeix un únic punt pertanyent a tots els intervals de la successió.

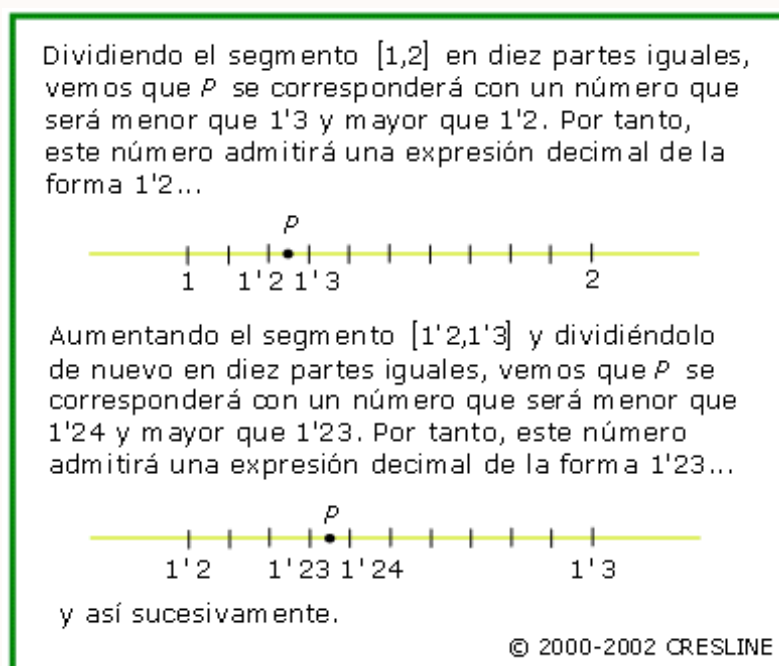


Figura 10

En teoria, el procés indicat en la figura anterior es pot repetir indefinidament. A més, com tots els intervals que anem construïnt són encaixats i la longitud de cada un d'ells és la desena part de l'anterior, per la propietat dels intervals encaixats, existirà un nombre real i només un comú a tots ells i aquest nombre real correspondrà per construcció al punt P . Tanmateix, hem de fer una important observació. La possible expressió decimal del nombre real corresponent a P serà única excepte quan P coincideixi amb alguna de les subdivisions successives. En efecte, si en un pas del procés de subdivisió, P s'identifica amb un nombre de la subdivisió realitzada en aquest pas, en el pas següent tenim dos possibles eleccions: una consisteix a triar el subinterval a l'esquerra de P , i l'altra, consisteix a triar el subinterval a la dreta de P . En la figura 11 es mostra amb més de detall en tractar un exemple.

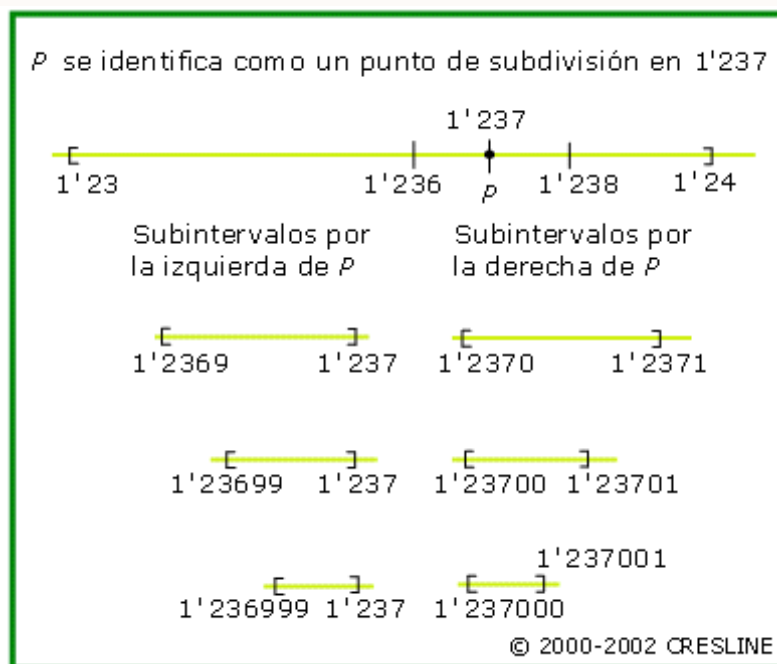


Figura 11

Ens adonem en seguida que l'expressió decimal del nombre real corresponent a P per l'esquerra serà de la forma $1.236999\dots$, mentre que la seva expressió decimal per la dreta serà $1.237000\dots$. Sabem que cadascuna d'aquestes col·leccions d'interval·ls encaixats ha de tenir un únic nombre real comú i podem observar que en cada col·lecció el nombre decimal exacte 1.237 , corresponent al punt P , pertany a tots els interval·ls. Per tant, les dues successions d'interval·ls encaixats defineixen el mateix nombre 1.237 i aquest és el que correspon al punt P . Com a conseqüència, $1.236999\dots$ i $1.237000\dots$ representen el mateix nombre real (racional) 1.237 .

En resum, tot punt de la recta està representat per un nombre amb, possiblement, infinites xifres decimals, però identificant els decimals exactes amb els decimals de període 9 i amb els de període 0.

En aquesta recta, entre dos racionals existeix sempre un altre racional, entre dos irracionals existeix sempre un racional tan proper com es vulgui. Aquesta idea prové de la forma com s'han definit els nombres irracionals a partir dels interval·ls encaixats d'extrems racionals.

1.2 Operacions amb nombres reals

En aquesta secció veurem que tot el treball operatiu amb nombres reals s'ha de fer amb aproximacions; per sumar i multiplicar dos nombres reals caldrà sumar i multiplicar les seves aproximacions. També es poden fer les operacions geomètricament, utilitzant les operacions amb segments. Admetrem que les operacions anteriors en $\mathbb{R}$ compleixen les mateixes propietats que en $\mathbb{Q}$. D'aquesta manera, el conjunt dels nombres reals té estructura de cos. Com a conseqüència, podrem aplicar totes les propietats que es dedueixen d'aquesta estructura algebraica a $\mathbb{R}$; per exemple, podrem resoldre equacions com

$$2x + 3 = 4$$

de la següent manera

$$2x = 4 + (-3)$$

ja que l'equació $x + a = b$ té la solució única $x = b + (-a)$; efectuant operacions, tenim

$$2x = 1$$

Aleshores,

$$x = \frac{1}{2}$$

ja que l'equació $a \cdot x = b$, amb $a \neq 0$, té la solució única $x = \frac{1}{a} \cdot b$.

1.2.1 Aproximacions

En la pràctica, en treballar amb els nombres reals que són irracionals ens trobem amb el problema de saber com cal escriure'ls i operar amb ells. En no poder-los escriure de forma exacta, ja que són nombres amb infinites xifres decimals, ens veiem obligats a treballar amb aproximacions. Les aproximacions decimals per defecte i per excés de cada grau, utilitzades per identificar un nombre irracional sobre la recta real, ens donen un bon mètode d'aproximació.

Cuadro de aproximaciones de π		
Grado de aproximación	Por defecto	Por exceso
unidades	3	4
décimas	3.1	3.2
centésimas	3.14	3.15
milésimas	3.141	3.142
diezmilésimas	3.1415	3.1416
cienmilésimas	3.14159	3.14160
mil milésimas	3.141592	3.141593

© 2000-2002 CRESLINE

És clar que treballar amb una aproximació, en lloc de treballar amb el valor exacte, comporta una certa càrrega d'error. Tot i que aquí no tractarem el problema dels errors en els càlculs amb nombres aproximats, en els resultats de les operacions amb nombres reals sempre precisarem les xifres significatives que podem considerar correctes; a l'apartat següent ho veurem amb alguns exemples.

1.2.2 Suma i producte de nombres reals

Com ja sabem com se sumen i es multipliquen dos nombres racionals (encara que dependrà de com estiguin representats els dos nombres, podrem fer-ho sempre

de forma exacta utilitzant fraccions), només caldrà tractar els dos casos següents: suma i producte de dos nombres irracionals, i suma i producte de dos nombres, un racional i l'altre irracional.

1.2.2.1 Suma

Per sumar dos nombres irracionals, en no poder-los escriure de forma exacta, ens veiem obligats a treballar amb les seves aproximacions. Per exemple, per sumar $\sqrt{2}$ i π , primer considerem les seves aproximacions decimals per defecte i per excés:

$$\sqrt{2} \quad \left\{ \begin{array}{cccccc} 1 & 1.4 & 1.41 & 1.414 & 1.4142 & \dots \\ 2 & 1.5 & 1.42 & 1.415 & 1.4143 & \dots \end{array} \right.$$

i

$$\pi \quad \left\{ \begin{array}{cccccc} 3 & 3.1 & 3.14 & 3.141 & 3.1415 & \dots \\ 4 & 3.2 & 3.15 & 3.142 & 3.1416 & \dots \end{array} \right.$$

Després, sumem cada aproximació per defecte (resp. per excés) de $\sqrt{2}$ amb la corresponent aproximació per defecte (resp. per excés) del mateix grau de π , obtenint les següents aproximacions de $\sqrt{2} + \pi$:

$$\sqrt{2} + \pi \quad \left\{ \begin{array}{cccccc} 4 & 4.5 & 4.55 & 4.555 & 4.5557 & \dots \\ 6 & 4.7 & 4.57 & 4.557 & 4.5559 & \dots \end{array} \right.$$

Finalment, a partir d'aquestes aproximacions, determinem quantes xifres podem considerar com correctes. En aquest cas, podem assegurar quatre xifres correctes en el resultat

$$\sqrt{2} + \pi = 4.555\dots$$

És clar que, procedint d'aquesta manera, podem trobar tantes xifres decimals exactes com vulguem, n'hi haurà prou amb augmentar la precisió dels sumands (ampliar el nombre d'aproximacions decimals).

En general, si volem obtenir la suma (o la resta) amb un cert grau n d'aproximació, les aproximacions dels sumands s'hauran de prendre amb aproximació de grau $n+1$; per exemple, si volem calcular $\sqrt{2} + \pi$ amb aproximació fins a les mil · lèsimes, s'han de prendre $\sqrt{2}$ i π amb aproximació fins a les deu mil · lèsimes, és a dir, $\sqrt{2} = 1.4142\dots$ i $\pi = 3.1415\dots$ i, d'aquesta manera, obtenim

$$\sqrt{2} + \pi = 4.555\overset{?}{7}\dots = 4.555\dots$$

assegurant la precisió buscada.

Per sumar dos nombres, un racional i l'altre irracional, es procedeix de la mateixa manera. Per exemple, per sumar $7/6$ i $\sqrt{2}$, primer donarem l'expressió decimal del nombre racional

$$\frac{7}{6} = 1.1666\dots$$

i després considerarem les seves aproximacions decimals per defecte i per excés

$$\frac{7}{6} \quad \left\{ \begin{array}{cccccc} 1 & 1.1 & 1.16 & 1.166 & 1.1666 & \dots \\ 2 & 1.2 & 1.17 & 1.167 & 1.1667 & \dots \end{array} \right.$$

De la mateixa manera, tenim

$$\sqrt{2} \quad \left\{ \begin{array}{cccccc} 1 & 1.4 & 1.41 & 1.414 & 1.4142 & \dots \\ 2 & 1.5 & 1.42 & 1.415 & 1.4143 & \dots \end{array} \right.$$

Per tant,

$$\frac{7}{6} + \sqrt{2} \quad \left\{ \begin{array}{cccccc} 2 & 2.5 & 2.57 & 2.580 & 2.5808 & \dots \\ 4 & 2.7 & 2.59 & 2.582 & 2.5810 & \dots \end{array} \right.$$

i, en conseqüència,

$$\frac{7}{6} + \sqrt{2} = 2.58\dots$$

és a dir, només podem assegurar dues xifres decimals exactes en el resultat.

1.2.2.2 Producte

De la mateixa manera a com hem fet la suma, es fa producte. Per exemple, per multiplicar $\sqrt{2}$ i π considerem les seves respectives aproximacions decimals per defecte i per excés

$$\sqrt{2} \quad \left\{ \begin{array}{cccccc} 1 & 1.4 & 1.41 & 1.414 & 1.4142 & \dots \\ 2 & 1.5 & 1.42 & 1.415 & 1.4143 & \dots \end{array} \right.$$

i

$$\pi \quad \left\{ \begin{array}{cccccc} 3 & 3.1 & 3.14 & 3.141 & 3.1415 & \dots \\ 4 & 3.2 & 3.15 & 3.142 & 3.1416 & \dots \end{array} \right.$$

Després, multipliquem cada aproximació per defecte (resp. per excés) de $\sqrt{2}$ per la corresponent aproximació per defecte (resp. per excés) del mateix grau de π , obtenint

$$\sqrt{2} \cdot \pi \quad \left\{ \begin{array}{cccccc} 3 & 4.34 & 4.4274 & 4.441374 & 4.44270930 & \dots \\ 8 & 4.80 & 4.4730 & 4.445930 & 4.44316488 & \dots \end{array} \right.$$

Finalment, a partir d'aquestes aproximacions, determinem quantes xifres podem considerar com correctes. En aquest cas, podem assegurar tres xifres correctes en el resultat

$$\sqrt{2} \cdot \pi = 4.44\dots$$

És clar que, procedint d'aquesta manera, podem trobar tantes xifres decimals exactes com vulguem; n'hi haurà prou amb augmentar la precisió dels factors (ampliar el nombre d'aproximacions decimals).

En general, si volem obtenir el producte (o el quocient) amb n xifres significatives¹⁵, haurem de prendre una xifra significativa més per als factors; per exemple, en trobar-se $\sqrt{2} \cdot \pi$ entre 3 i 8, per obtenir un resultat amb aproximació fins a les centèsimes, necessitem garantir que tres de les seves xifres siguin significatives, i, per tant, haurem de prendre cada factor amb quatre xifres significatives, és a dir, $\sqrt{2} = 1.4142\dots$ i $\pi = 3.1415\dots$ i, d'aquesta manera, obtenim

$$\sqrt{2} \cdot \pi = 4.44\overbrace{27093}^{\dots} = 4.44\dots$$

¹⁵Recorda que si b és una aproximació d'un nombre real a , les xifres significatives de b són aquelles que coincideixen amb les de a , excepte els zeros que tenen com a única finalitat sigui situar la coma decimal

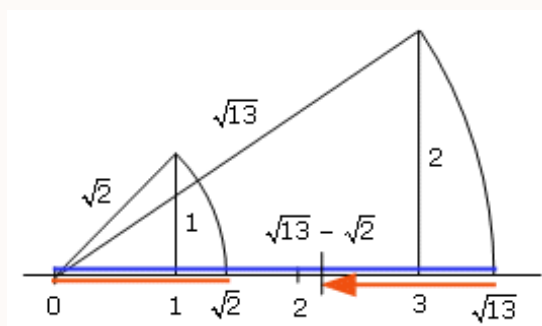
1.2.2.3 Operacions amb segments

Per sumar (o restar) dos nombres reals a i b , el punt que correspon al nombre $a + b$ s'obté traslladant el punt corresponent al nombre a una distància igual a la longitud del segment corresponent al nombre b cap a la dreta, si b és positiu, i cap a l'esquerra, si b és negatiu; en la figura 12, suposant que a i b són positius, es mostra la suma $a + b$ i la resta $a - b = a + (-b)$.



Figura 12

Per exemple, a la figura següent, utilitzant procediments geomètrics, representem sobre la recta real $\sqrt{13} - \sqrt{2}$.



Per obtenir gràficament el producte de dos nombres reals a i b , aplicarem el teorema de Thales¹⁶: suposem que hem situat sobre la recta real els nombres a i b , tracemos una recta auxiliar pel punt O corresponent al nombre 0 i, mitjançant el compàs, construïm damunt seu i a partir de O un segment de longitud b , obtindrem de aquest manera un punt P . Unim ara amb una recta el punt P amb el punt U corresponent al nombre 1. Mitjançant regla i escaire, tracem pel punt corresponent a b una recta paral·lela a la recta anterior que tallarà a la recta auxiliar en un punt Q . Mitjançant compàs, construïm sobre la recta real un segment de longitud OQ , la longitud de aquest segment serà el producte $a \cdot b$; en la figura 13 es mostrà el mètode seguit per obtenir gràficament $a \cdot b$.

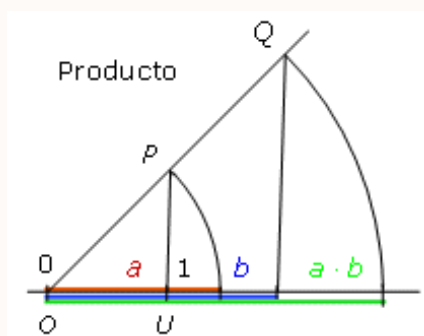


Figura 13

¹⁶Recorda que el teorema de Thales diu que els segments determinats sobre dues rectes concurrents tallades per diverses rectes paral·leles són proporcionals.

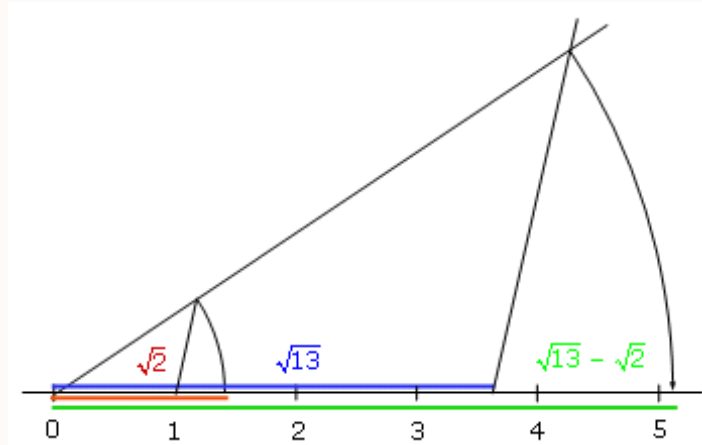
Observa que, pel teorema de Thales,

$$\frac{\overline{OP}}{\overline{OU}} = \frac{\overline{OQ}}{b}$$

però $\overline{OP} = a$ i $\overline{OU} = 1$, per tant

$$\overline{OQ} = a \cdot b$$

Per exemple, a la figura següent, utilitzant procediments geomètrics, representem sobre la recta real $\sqrt{13} \cdot \sqrt{2}$.



Per obtenir gràficament el invers d'un nombre real a , amb $a \neq 0$, podem aplicar la mateixa construcció anterior però prenent $ab = 1$; en la figura 14 podràs veure els passos que cal fer per obtenir $1/a$.

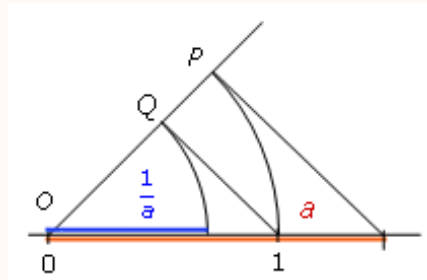


Figura 14

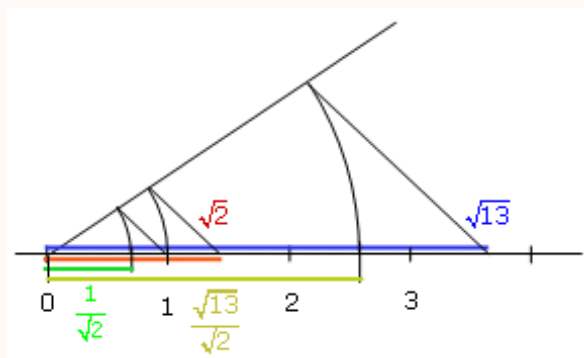
Observa que, pel teorema de Thales,

$$\frac{\overline{OP}}{a} = \frac{\overline{OQ}}{1}$$

però $\overline{OP} = 1$, per tant

$$\overline{OQ} = \frac{1}{a}$$

Finalment, per obtenir gràficament el quocient $\frac{a}{b}$ de dos nombres reals a i b , amb $b \neq 0$, primer es representarà el invers de b i, després, s'obtindrà el producte $a \cdot \frac{1}{b}$. Per exemple, a la figura següent, utilitzant procediments geomètrics, representem sobre la recta real $\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{2}}$.



1.2.3 El cos dels nombres reals

Es demostra (en aquest nivell encara no disposem de les eines suficients per provar aquests resultats) que les operacions de suma i producte de nombres reals compleixen les mateixes propietats que la suma i el producte de nombres racionals.

L'operació suma de nombres reals compleix les següents propietats:

1. Llei de composició interna: $a + b \in \mathbb{R}$, per tot $a, b \in \mathbb{R}$
2. Associativa: $a + (b + c) = (a + b) + c$, per tot $a, b, c \in \mathbb{R}$
3. Element neutre: existeix $0 \in \mathbb{R}$ tal que $a + 0 = 0 + a = a$, per tot $a \in \mathbb{R}$.
4. Commutativa: $a + b = b + a$, per tot $a, b \in \mathbb{R}$
5. Element simètric: per cada $a \in \mathbb{R}$ existeix $-a \in \mathbb{R}$, anomenat **oposat** de a , tal que $a + (-a) = (-a) + a = 0$

L'operació producte de nombres reals compleix les següents propietats:

6. Llei de composició interna: $a \cdot b \in \mathbb{R}$, per tot $a, b \in \mathbb{R}$
7. Associativa: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$, per tot $a, b, c \in \mathbb{R}$
8. Element neutre: existeix $1 \in \mathbb{R}$ tal que $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$, per tot $a \in \mathbb{R}$
9. Commutativa: $a \cdot b = b \cdot a$, per tot $a, b \in \mathbb{R}$
10. Element simètric: per cada $a \in \mathbb{R}$ amb $a \neq 0$ existeix $1/a \in \mathbb{R}$, anomenat **invers** de a , tal que $a \cdot (1/a) = (1/a) \cdot a = 1$

Finalment, les dues operacions compleixen la propietat

11. Distributiva del producte respecte de la suma:

$$\begin{aligned} a \cdot (b + c) &= a \cdot b + a \cdot c \\ (b + c) \cdot a &= b \cdot a + c \cdot a \end{aligned}$$

per a tot $a, b, c \in \mathbb{R}$

Pel fet de satisfer aquestes 11 propietats es diu que el conjunt $\mathbb{R}$ dels nombres reals és un **cos** o que té la estructura de cos. Per aquesta raó, es diu que $\mathbb{R}$ és el **cos dels nombres reals**.

És clar que per restar i dividir dos nombres reals procedirem en la forma habitual, és a dir,

$$a - b = a + (-b)$$

i

$$a : b = a \cdot \frac{1}{b}$$

sempre que $b \neq 0$. Les regles de càlcul en $\mathbb{R}$, que es dedueixen per tenir estructura de cos, són les mateixes que les del conjunt dels nombres racionals $\mathbb{Q}$, que també té estructura de cos. A continuació, considerem algunes d'elles pel seu interès en la pràctica: si $a, b, c \in \mathbb{R}$, aleshores es compleixen les següents propietats

1. Si $a + b = b$, aleshores $a = 0$

En efecte,

$$\begin{aligned} a + b &= b \\ (a + b) + (-b) &= b + (-b) \\ a + (b + (-b)) &= b + (-b) \\ a + 0 &= 0 \\ a &= 0 \end{aligned}$$

2. Si $a \cdot b = b$ i $b \neq 0$, aleshores $a = 1$

En efecte,

$$\begin{aligned} a \cdot b &= b \\ (a \cdot b) \cdot \frac{1}{b} &= b \cdot \frac{1}{b} \\ a \cdot \left(b \cdot \frac{1}{b}\right) &= b \cdot \frac{1}{b} \\ a \cdot 1 &= 1 \\ a &= 1 \end{aligned}$$

3. Si $a + b = 0$, aleshores $a = -b$

En efecte,

$$\begin{aligned} a + b &= 0 \\ (a + b) + (-b) &= 0 + (-b) \\ a + (b + (-b)) &= -b \\ a + 0 &= -b \\ a &= -b \end{aligned}$$

4. Si $a \cdot b = 1$ i $b \neq 0$, aleshores $a = \frac{1}{b}$

En efecte,

$$\begin{aligned}
 a \cdot b &= 1 \\
 (a \cdot b) \cdot \frac{1}{b} &= 1 \cdot \frac{1}{b} \\
 a \cdot \left(b \cdot \frac{1}{b}\right) &= \frac{1}{b} \\
 a \cdot 1 &= \frac{1}{b} \\
 a &= \frac{1}{b}
 \end{aligned}$$

5. Si $a + c = b + c$, aleshores $a = b$

En efecte,

$$\begin{aligned}
 a + c &= b + c \\
 (a + c) + (-c) &= (b + c) + (-c) \\
 a + (c + (-c)) &= b + (c + (-c)) \\
 a + 0 &= b + 0 \\
 a &= b
 \end{aligned}$$

6. Si $a \cdot c = b \cdot c$ i $c \neq 0$, aleshores $a = b$

En efecte,

$$\begin{aligned}
 a \cdot c &= b \cdot c \\
 (a \cdot c) \cdot \frac{1}{c} &= (b \cdot c) \cdot \frac{1}{c} \\
 a \cdot \left(c \cdot \frac{1}{c}\right) &= b \cdot \left(c \cdot \frac{1}{c}\right) \\
 a \cdot 1 &= b \cdot 1 \\
 a &= b
 \end{aligned}$$

7. $a \cdot 0 = 0$

En efecte,

$$\begin{aligned}
 a + (-a) &= 0 \\
 a \cdot (1 + (-1)) &= 0 \\
 a \cdot 0 &= 0
 \end{aligned}$$

8. Si $a \cdot b = 0$, aleshores $a = 0$ o $b = 0$

En efecte, si $a \neq 0$ aleshores

$$\begin{aligned}
 a \cdot b &= 0 \\
 a \cdot b &= a \cdot 0 \\
 b \cdot a &= 0 \cdot a
 \end{aligned}$$

d'on $b = 0$ pel apartat anterior. Anàlogament, si $b \neq 0$ aleshores

$$\begin{aligned} a \cdot b &= 0 \\ a \cdot b &= 0 \cdot b \end{aligned}$$

d'on $a = 0$ pel apartat anterior.

$$9. \quad a \cdot (-b) = (-a) \cdot b = -(a \cdot b)$$

En efecte,

$$\begin{aligned} a \cdot b + a \cdot (-b) &= a \cdot (b + (-b)) \\ &= a \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

d'on $a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$. Anàlogament,

$$\begin{aligned} a \cdot b + (-a) \cdot b &= (a + (-a)) \cdot b \\ &= 0 \cdot b \\ &= b \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$10. \quad (-1) \cdot a = -a$$

En efecte,

$$\begin{aligned} a + (-1) \cdot a &= (1 + (-1)) \cdot a \\ &= 0 \cdot a \\ &= a \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Per tant, $(-1) \cdot a = -a$, ja que l'oposat d'un nombre és únic.

$$11. \quad -(-a) = a$$

En efecte,

$$(-a) + a = 0$$

per tant, $-(-a) = a$ ja que l'oposat d'un nombre és únic.

$$12. \quad (-a) \cdot (-b) = a \cdot b$$

En efecte,

$$\begin{aligned} (-a) \cdot (-b) &= [(-1) \cdot a] \cdot [(-1) \cdot b] \\ &= [a \cdot (-1)] \cdot [(-1) \cdot b] \\ &= a \cdot [(-1) \cdot (-1)] \cdot b \\ &= a \cdot [-(-1)] \cdot b \\ &= a \cdot 1 \cdot b \\ &= a \cdot b \end{aligned}$$

13. $(-a)^n = a^n$, si n és un nombre natural par major que 2

En efecte,

$$\begin{aligned} (-a)^n &= [(-1) \cdot a]^n \\ &= [(-1) \cdot a] \cdot \overset{n \text{ vegades}}{\dots} \cdot [(-1) \cdot a] \\ &= \left[(-1) \cdot \overset{n \text{ vegades}}{\dots} \cdot (-1) \right] \cdot \left(a \cdot \overset{n \text{ vegades}}{\dots} \cdot a \right) \\ &= 1 \cdot a^n \\ &= a^n \end{aligned}$$

doncs, n és par i $(-1) \cdot (-1) = 1 \cdot 1 = 1$.

14. $(-a)^n = -a^n$, si n és un nombre natural senar major que 1

En efecte,

$$\begin{aligned} (-a)^n &= (-a)^{n-1} \cdot (-a) \\ &= a^{n-1} \cdot (-a) \\ &= -(a^{n-1} \cdot a) \\ &= -a^n \end{aligned}$$

pues $n - 1$ és par i pel apartat anterior $(-a)^{n-1} = a^{n-1}$.

15. L'equació $x + a = b$ té la solució única $x = b + (-a)$

En efecte,

$$\begin{aligned} (b + (-a)) + a &= b + ((-a) + a) \\ &= b + 0 \\ &= b \end{aligned}$$

per tant, $x = b + (-a)$ és una solució de l'equació. Suposem ara que y fos una altra solució de l'equació. Aleshores

$$\begin{aligned} y + a &= b \\ (y + a) + (-a) &= b + (-a) \\ y + (a + (-a)) &= b + (-a) \\ y + 0 &= b + (-a) \\ y &= b + (-a) \end{aligned}$$

cosa que indica que la solució $x = b + (-a)$ és única.

16. L'equació $a \cdot x = b$, amb $a \neq 0$, té la solució única $x = \frac{1}{a} \cdot b$

En efecte,

$$\begin{aligned} a \cdot \left(\frac{1}{a} \cdot b \right) &= \left(a \cdot \frac{1}{a} \right) \cdot b \\ &= 1 \cdot b \\ &= b \end{aligned}$$

per tant, $x = \frac{1}{a} \cdot b$ és una solució de l'equació. Suposem ara que y fos una altra solució de l'equació. Aleshores

$$\begin{aligned} a \cdot y &= b \\ \frac{1}{a} \cdot (a \cdot y) &= \frac{1}{a} \cdot b \\ \left(\frac{1}{a} \cdot a\right) \cdot y &= x \\ 1 \cdot y &= x \\ y &= x \end{aligned}$$

cosa que indica que la solució $x = \frac{1}{a} \cdot b$ és única.

17. $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ per tot $a, b \in \mathbb{R}$

En efecte, per exemple,

$$\begin{aligned} (a + b)^2 &= (a + b) \cdot (a + b) \\ &= ((a + b) \cdot a) + ((a + b) \cdot b) \\ &= (a \cdot a + b \cdot a) + (a \cdot b + b \cdot b) \\ &= a^2 + b \cdot a + a \cdot b + b^2 \\ &= a^2 + a \cdot b + a \cdot b + b^2 \\ &= a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \end{aligned}$$

De forma anàloga es prova l'altra igualtat.

18. $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$

En efecte,

$$\begin{aligned} (a + b) \cdot (a - b) &= (a \cdot (a - b)) + (b \cdot (a - b)) \\ &= (a \cdot a + a \cdot (-b)) + (b \cdot a + b \cdot (-b)) \\ &= a^2 - a \cdot b + b \cdot a - b^2 \\ &= a^2 - a \cdot b + a \cdot b - b^2 \\ &= a^2 - b^2 \end{aligned}$$

19. $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

En efecte, per exemple, sabem que

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

y aleshores

$$\begin{aligned} (a + b)^3 &= (a + b)^2 \cdot (a + b) \\ &= (a^2 + 2ab + b^2) \cdot (a + b) \\ &= (a^2 \cdot (a + b)) + (2ab \cdot (a + b)) + (b^2 \cdot (a + b)) \\ &= a^3 + a^2b + 2ab \cdot a + 2ab \cdot b + b^2a + b^3 \\ &= a^3 + a^2b + 2a \cdot a \cdot b + 2ab^2 + b^2a + b^3 \\ &= a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3 \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \end{aligned}$$

De forma anàloga es prova l'altra igualtat.

1.3 L'ordre en el conjunt dels nombres reals

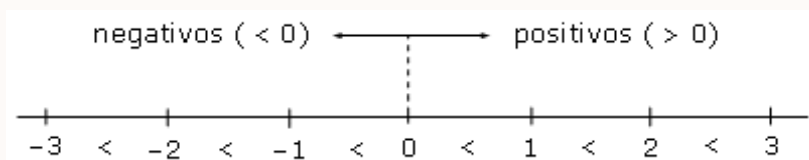
Veurem en aquesta secció quin significat té el que donats dos nombres reals a i b , a sigui major que b , que simbolitzem per $a > b$ o també per $b < a$, i es llegeix en aquest cas b és menor que a ; escribiremos també $a \geq b$ per indicar que a és major o igual que b , o també $b \leq a$, i es llegeix aleshores com b es menor o igual que a . Per introduir la noció d'ordre en $\mathbb{R}$, a més dels enfocaments numèric i geomètric, donarem un altre basat en l'existència del conjunt dels nombres reals positius $\mathbb{R}^+$ i l'estabilitat de les operacions en $\mathbb{R}$ sobre aquest conjunt. Encara que aquest enfocament no és tan intuïtiu com els dos primers, tanmateix té la avantatge que ens permetrà demostrar les propietats de l'ordre en $\mathbb{R}$ d'una forma més clara i senzilla. A partir de l'ordre en $\mathbb{R}$ definirem el valor absolut de un nombre real i, a partir del valor absolut definirem la distància entre dos nombres reals. Finalment, distingirem alguns subconjunts de la recta real com són els intervals i les semirectes.

1.3.1 Enfocament numèric i geomètric

Des d'un punt de vista numèric, direm que $a > b$ si i només si es pot trobar una aproximació decimal (per defecte o per excés) de a que sigui major que l'aproximació del mateix grau de b . Per exemple, $a = 1.234578\dots$ i $b = 1.234586\dots$, aleshores $b > a$, ja que

Aprox. de a per defecte	Aprox. de b per defecte	Resultat de la comparació
1	1	Iguals
1.2	1.2	Iguals
1.23	1.23	Iguals
1.234	1.234	Iguals
1.2345	1.2345	Iguals
1.23457	1.23458	La de b és major

El zero el considerarem més petit que qualsevol nombre real positiu i major que qualsevol nombre real negatiu, i els nombres reals negatius els ordenarem pels seus oposats respectius (que seran positius). Així, si a i b són negatius, $-a$ i $-b$ seran positius, i si $-a < -b$, aleshores $a > b$.



L'ordre en $\mathbb{R}$ pot també derivar-se a partir de la seva representació gràfica com la recta real. D'aquesta manera, $a > b$ significa que el punt corresponent a a es troba a la dreta del punt corresponent a b , i $a < b$, significa que el punt corresponent a a es troba a l'esquerra del punt corresponent a b .

Els ordres ja existents en els conjunts $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ i $\mathbb{N}$ són coherents amb l'ordre que acabem de definir en $\mathbb{R}$. Això vol dir, per exemple, que en considerar $\mathbb{Q}$ com subconjunt de $\mathbb{R}$, si a, b són dos nombres racionals tals que $a > b$ en $\mathbb{R}$, aleshores $a > b$ en $\mathbb{Q}$, és a dir, l'ordre en $\mathbb{R}$ indueix sobre $\mathbb{Q}$ el mateix ordre que ja coneixem en $\mathbb{Q}$.

1.3.2 Enfocament algebraic

Els dos enfocaments donats a l'apartat anterior són suficients per tenir una idea clara de l'ordre en $\mathbb{R}$. Tanmateix, hi ha una forma de expressar les relacions de desigualtat $>$ i $\geq$ que és especialment útil per fer les demostracions de les propietats de l'ordre en $\mathbb{R}$. Aquest nou enfocament no suposa cap intuïció prèvia (numèrica o geomètrica) sobre $\mathbb{R}$, només l'existència del subconjunt dels nombres reals positius $\mathbb{R}^+$ i les següents propietats:

1. Si $a, b \in \mathbb{R}^+$, aleshores $a + b \in \mathbb{R}^+$
2. Si $a, b \in \mathbb{R}^+$, aleshores $a \cdot b \in \mathbb{R}^+$
3. Si $a \in \mathbb{R}$, aleshores es compleix exactament una de les següents relacions:

$$a \in \mathbb{R}^+ \quad a = 0 \quad -a \in \mathbb{R}^+$$

Les dues primeres propietats asseguren l'estabilitat sobre $\mathbb{R}^+$ de les operacions de suma i producte en $\mathbb{R}$. La tercera propietat divideix $\mathbb{R}$ en tres tipus d'elements diferents; estableix que el conjunt

$$\mathbb{R}^- = \{-a : a \in \mathbb{R}^+\}$$

dels nombres reals negatius no té elements en comú amb $\mathbb{R}^+$ i, a més, que

$$\mathbb{R} = \mathbb{R}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^+$$

A partir d'aquests supòsits (per altra banda, molt naturals), fem les definicions següents:

1. Diem que a és positiu i escrivim $a > 0$, si $a \in \mathbb{R}^+$
2. Diem que a és no negatiu i escrivim $a \geq 0$, si $a \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$
3. Diem que a és negatiu i escrivim $a < 0$, si $-a \in \mathbb{R}^+$
4. Diem que a és no positiu i escrivim $a \leq 0$, si $-a \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$
5. Diem que a és major que b i escrivim $a > b$ o $b < a$, si $a - b \in \mathbb{R}^+$
6. Diem que a és major o igual que b i escrivim $a \geq b$ o $b \leq a$, si $a - b \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

1.3.2.1 Propietats de l'ordre en $\mathbb{R}$

Una de les utilitats pràctiques de les següents propietats és la seva aplicació a la resolució d'inequacions. Per exemple, farem servir aquestes propietats per resoldre una inequació com

$$-\frac{x}{3} + 2 < \frac{x}{2} + 5$$

En efecte, primer traiem els denominadors multiplicant cada membre per 6.

$$-2x + 12 < 3x + 30$$

observa que en multiplicar per un nombre real positiu el signe no se inverte. Segon,

$$\begin{array}{rcl} -2x + 12 - 3x < & & 3x + 30 - 3x \\ -5x + 12 < & & 30 \end{array}$$

observa que podem sumar qualsevol nombre real a ambdós membres resultant una inequació equivalent. De la mateixa manera, tenim

$$\begin{array}{rcl} -5x + 12 - 12 < & & 30 - 12 \\ -5x < & & 8 \end{array}$$

Tercer, multipliquem per $-1/5$ que, com que és negatiu, obligarà a invertir el signe de la desigualtat. Així, obtenim

$$x > -\frac{8}{5}$$

que ens diu que tots els nombres reals majors que $-8/5$ són solució de la inequació dada. Veurem en un altre apartat que les solucions d'una inequació poden expressar-se mitjançant determinats subconjunts de la recta real. En aquest cas, el conjunt de solucions se expressaria com la següent semirecta abierta

$$\left(-\frac{8}{5}, +\infty\right)$$

1. **Propiedad transitiva:** per tot $a, b, c \in \mathbb{R}$, si $a > b$ i $b > c$, aleshores $a > c$

En efecte, $a > b$ i $b > c$ si $a - b \in \mathbb{R}^+$ i $b - c \in \mathbb{R}^+$. Per tant,

$$(a - b) + (b - c) = a - c \in \mathbb{R}^+$$

és a dir, $a > c$.

2. **Tricotomía:** donats dos nombres reals qualssevol a i b , es compleix una, i només una, d'aquestes tres relacions

$$a > b \quad a = b \quad a < b$$

En efecte, com $a - b \in \mathbb{R}$ aleshores es compleix exactament una de les següents relacions:

$$a - b \in \mathbb{R}^+ \quad a - b = 0 \quad -(a - b) = b - a \in \mathbb{R}^+$$

és a dir,

$$a > b \quad a = b \quad b > a$$

3. **Propiedad reflexiva:** per tot $a \in \mathbb{R}$, $a \leq a$.

En efecte, $a - a = 0 \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ i, per tant, $a \leq a$.

4. **Propiedad antisimétrica:** per tot $a, b \in \mathbb{R}$, si $a \geq b$ i $b \leq a$, aleshores $a = b$

En efecte, suposem que fos $a \neq b$. Aleshores, per la propietat anterior, es deduiria que $a > b$ o bé que $a < b$. Ara bé, no pot passar $a > b$ perquè es contradiu amb la hipòtesi que $a \leq b$, ni tampoc pot passar $a < b$ perquè es contradiu amb la hipòtesi que $a \geq b$. Per tant, no és possible que $a \neq b$ i, per tant, ha de ser $a = b$.

5. **Propiedad de traslación:** si $a > b$, aleshores $a + c > b + c$, qualssevol que siguin $a, b, c \in \mathbb{R}$

En efecte, $a > b$ si $a - b \in \mathbb{R}^+$. Podem escriure

$$a - b = (a + c) - (b + c)$$

i, per tant,

$$(a + c) - (b + c) \in \mathbb{R}^+$$

és a dir,

$$a + c > b + c$$

Aquesta propietat s'expressa dient que el sentit d'una desigualtat¹⁷ no canvia si es suma un mateix nombre real a ambdós costats de la desigualtat.

6. **Propiedad del producto per nombres positius:** si $a > b$ y $c > 0$, aleshores $a \cdot c > b \cdot c$, qualssevol que siguin $a, b, c \in \mathbb{R}$

En efecte, $a > b$ si $a - b \in \mathbb{R}^+$. Aleshores, com $c \in \mathbb{R}^+$, deduïm que

$$(a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c \in \mathbb{R}^+$$

és a dir,

$$a \cdot c > b \cdot c$$

Aquesta propietat es coneix dient que en multiplicar per un nombre positiu ambdós costats d'una desigualtat, el sentit de la desigualtat no canvia.

7. **Propiedad del producto per nombrés negatius:** si $a > b$ y $c < 0$, aleshores $a \cdot c < b \cdot c$, qualssevol que siguin $a, b, c \in \mathbb{R}$

En efecte, $a > b$ si $a - b \in \mathbb{R}^+$. Com $c < 0$, aleshores $-c \in \mathbb{R}^+$ i, per tant,

$$(a - b) \cdot (-c) = b \cdot c - a \cdot c \in \mathbb{R}^+$$

és a dir,

$$b \cdot c > a \cdot c$$

Aquesta propietat es coneix dient que en multiplicar els dos membres de una desigualtat per un nombre negatiu, el sentit de la desigualtat se inverteix.

8. **Propiedad de la suma:** si $a > b$ i $c > d$, aleshores $a + c > b + d$, qualssevol que siguin $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

En efecte, $a > b$ i $c > d$ si $a - b \in \mathbb{R}^+$ i $c - d \in \mathbb{R}^+$. Aleshores

$$(a - b) + (c - d) = (a + c) - (b + d) \in \mathbb{R}^+$$

és a dir,

$$a + c > b + d$$

¹⁷De la mateixa manera que amb el símbol $=$ expressem la relació de igualtat, amb els símbols $>$ i $\geq$ expressarem la relació de desigualtat, que pot ser estricta en el primer cas, i no estricta, en el segon.

1.3.3 Valor absolut

Donat un nombre real qualsevol a , dels nombres a i $-a$ el major d'ells s'anomena **valor absolut** de a , i el designem per $|a|$. El valor absolut d'un nombre real pot també definir-se de la següent manera

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

és a dir, el valor absolut d'un nombre real no negatiu és el mateix nombre, mentre que si el nombre real és negatiu, el seu valor absolut és l'oposat d'aquest nombre. En qualsevol cas, és evident que el valor absolut d'un nombre real és sempre un nombre no negatiu.

1.3.3.1 Propietats

1. $|a| = 0$ si i només si $a = 0$

En efecte, si $a = 0$, aleshores $|0| = 0$. Recíprocament, si fos $a \neq 0$, aleshores $-a \neq 0$ i, per tant, $|a| \neq 0$. Com a conseqüència, si $|a| = 0$, aleshores $a = 0$.

Per exemple, si $|x - 3| = 0$, aleshores $x = 3$.

2. $|-a| = |a|$, per tot $a \in \mathbb{R}$

En efecte, si $a = 0$, aleshores $|-0| = |0| = 0$. Si $a > 0$, aleshores $-a < 0$ i, per tant, $|-a| = -(-a) = a = |a|$. Finalment, si $a < 0$, aleshores $-a > 0$ i, per tant, $|-a| = -a = |a|$.

Per exemple, si $|x - 5| = 2$, aleshores tenim dos possibilitats: $x - 5 = 2$ o $x - 5 = -2$, és a dir, $x = 7$ o $x = 3$.

3. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$, per tot $a, b \in \mathbb{R}$

En efecte, si $a = 0$ o $b = 0$, aleshores $|a \cdot b| = |a| \cdot |b| = 0$. Si $a > 0$ i $b > 0$, aleshores $a \cdot b > 0$ i, per tant, $|a \cdot b| = a \cdot b = |a| \cdot |b|$. Si $a > 0$ y $b < 0$, aleshores $a \cdot b < 0$ i, per tant,

$$|a \cdot b| = -(a \cdot b) = a \cdot (-b) = |a| \cdot |b|$$

De la mateixa manera es tracten els altres dos casos restants.

Per exemple, si $|(x - 2)(x + 5)| = 0$, aleshores $|x - 2| |x + 5| = 0$. Per tant, $|x - 2| = 0$ o $|x + 5| = 0$, d'on $x - 2 = 0$ o $x + 5 = 0$, és a dir, $x = 2$ o $x = -5$.

4. Si $b \geq 0$, aleshores $|a| \leq b$ si i només si $-b \leq a \leq b$

En efecte, si $|a| \leq b$, aleshores per la definició de valor absolut es té $a \leq b$ i $-a \leq b$, però $-a \leq b$ equival a $-b \leq a$. Recíprocament, si $-b \leq a \leq b$, aleshores se té $a \leq b$ com $-a \leq b$, ja que $b \geq 0$. Per tant, $|a| \leq b$.

Per exemple, si $|x - 2| \leq 3$, aleshores $-3 \leq x - 2 \leq 3$, és a dir, $-3 \leq x - 2$ i $x - 2 \leq 3$. Per tant, $-1 \leq x$ i $x \leq 5$.

5. $|a + b| \leq |a| + |b|$, per tot $a, b \in \mathbb{R}$

En efecte, puixò que per definició $|a| \geq 0$ i $|b| \geq 0$, pel apartat anterior es té $-|a| \leq a \leq |a|$ i $-|b| \leq b \leq |b|$. D'aquí, obtenim

$$a + b \leq |a| + |b|$$

i

$$-(|a| + |b|) = -|a| - |b| \leq a + b$$

Per tant,

$$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|$$

i, en conseqüència,

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

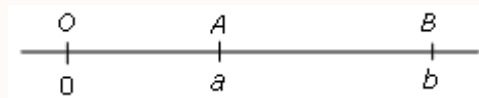
Per exemple, $2 = |2| = |(-3) + 5| \leq |-3| + |5| = 3 + 5 = 8$.

1.3.4 Distància entre dos nombres reals

Dos nombres reals qualssevol a i b corresponen amb dos punts A i B de la recta real. Aleshores, la longitud del segment AB ve donada per $|a - b|$. En efecte, suposem que $a < b$. Aleshores poden donar-se els tres casos següents:

a) Que $0 < a < b$, cas en què

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = b - a$$



D'altra banda, com que és $a - b < 0$, aleshores

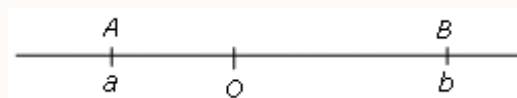
$$|a - b| = -(a - b) = b - a$$

i, per tant

$$\overline{AB} = |a - b|$$

b) Que $a < 0 < b$, cas en què

$$\overline{AB} = \overline{AO} + \overline{OB} = -a + b$$



D'altra banda, com que és $b > 0$, tenim que $-b < 0$. De $a < 0$ i $-b < 0$, obtenim $a + (-b) = a - b < 0$. Aleshores,

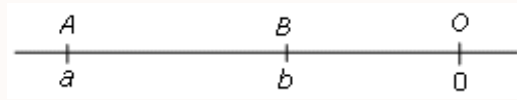
$$|a - b| = -(a - b) = -a + b$$

i, per tant,

$$\overline{AB} = |a - b|$$

c) Que $a < b < 0$, cas en què

$$\overline{AB} = \overline{AO} - \overline{BO} = -a - (-b) = -a + b$$



Per altra banda, com que és $a < b < 0$, tenim que $a - b < 0$. Aleshores,

$$|a - b| = -(a - b) = -a + b$$

Definim la distància entre dos nombres reals a i b com la longitud del segment AB . Segons el que acabem de demostrar, si designem aquesta distància per $d(a, b)$, aleshores podem escriure

$$d(a, b) = |a - b|$$

Per exemple,

$$d(7, 9) = |7 - 9| = |-2| = 2$$

$$d(-7, 9) = |-7 - 9| = |-16| = 16$$

$$d(-7, -9) = |-7 - (-9)| = |2| = 2$$

1.3.4.1 Propietats de la distància

Les propietats de la distància són conseqüències immediates de les propietats del valor absolut.

1. $d(a, b) \geq 0$, qualssevol que siguin $a, b \in \mathbb{R}$, i $d(a, b) = 0$ si i només si $a = b$

En efecte, com que és $d(a, b) = |a - b|$ és evident que $d(a, b) \geq 0$. A més, $d(a, b) = |a - b| = 0$ si i només si $a - b = 0$, és a dir, $a = b$.

2. $d(a, b) = d(b, a)$, qualssevol que siguin $a, b \in \mathbb{R}$

En efecte,

$$\begin{aligned} d(b, a) &= |b - a| \\ &= |-(a - b)| \\ &= |-1| \cdot |a - b| \\ &= |a - b| \\ &= d(a, b) \end{aligned}$$

3. $d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b)$, qualssevol que siguin $a, b, c \in \mathbb{R}$

En efecte,

$$\begin{aligned} d(a, b) &= |a - b| \\ &= |a - c + c - b| \\ &\leq |a - c| + |c - b| \\ &= d(a, c) + d(c, b) \end{aligned}$$

1.3.4.2 Entorns

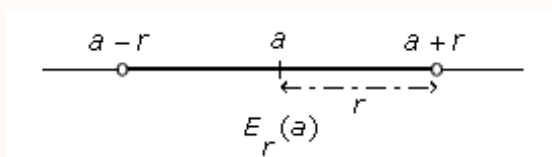
Si a és un punt de la recta real (és a dir, qualsevol nombre real), i $r > 0$, s'anomena **entorn de centre a i radi r** al conjunt de punts la distància del qual a a és menor que r . Si designem aquest conjunt per $E_r(a)$, aleshores

$$\begin{aligned} E_r(a) &= \{x \in \mathbb{R} : d(x, a) < r\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < r\} \end{aligned}$$

És immediat comprovar que es compleix

$$E_r(a) = (a - r, a + r)$$

D'això darrer es dedueix que la representació gràfica de l'entorn $E_r(a)$ és com segueix:



Si de l'entorn $E_r(a)$ es treu el punt a , el conjunt que resulta s'anomena **entorn reduït de centre a i radi r** i es denota per $E_r^*(a)$. Així, tenim

$$E_r^*(a) = E_r(a) - \{a\}$$

Per exemple, l'entorn de centre 2 i radi $1/2$ serà el conjunt

$$\begin{aligned} E_{1/2}(2) &= \{x \in \mathbb{R} : \left|x - \frac{1}{2}\right| < 2\} \\ &= \left(2 - \frac{1}{2}, 2 + \frac{1}{2}\right) \\ &= \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right) \end{aligned}$$

1.3.5 Intervals i semirectes

Recorda que hem utilitzat la paraula interval com a sinònim de segment sobre la recta en definir un nombre real com a intersecció d'una successió d'interval·ls encaixats. Amb la noció d'ordre ja introduïda en $\mathbb{R}$, podem precisar encara més aquest concepte.

Si a i b són dos nombres reals amb $a \leq b$, aleshores el **interval obert** d'extremes a i b és el subconjunt de nombres reals que designem per (a, b) o bé per $]a, b[$ i que es defineix per

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$



Si afegim els extrems al interval obert, s'obté el **interval tancat**, designat per $[a, b]$, i que es defineix per

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$



Si només afegim un dels extrems a l'interval obert, s'obtenen els **interval·ls semio-berts**:

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$$



$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$$

En tots els casos, a és l'extrem inferior de l'interval, b és el extrem superior i $b - a$ és la longitud de l'interval.

De la mateixa manera, si $a \in \mathbb{R}$, aleshores els subconjunts següents:

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$$

$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$$



s'anomenen **semirectes obertes** d'extrem a . Si hi afegim l'extrem, obtenim

$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$$

$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$$



les **semirectes tancades**. El símbol ∞ se anomena **infinit** i no correspon amb cap nombre real; en aquest context, en escriure $+\infty$ volem indicar una quantitat indeterminada positiva tan gran com es vulgui, mentre que $-\infty$ indica una quantitat indeterminada negativa tan petita com es vulgui.

1.3.6 Conjunts fitats

Sigui A un subconjunt de $\mathbb{R}$. Diem que $k \in \mathbb{R}$ és una **cota superior** de A si es compleix

$$x \leq k$$

per a tot $x \in A$; diem que $k \in \mathbb{R}$ és una **cota inferior** de A si es compleix

$$k \leq x$$

per a tot $x \in A$. Per exemple, en $\mathbb{R}^+$, qualsevol nombre negatiu és cota inferior, i en $\mathbb{R}^-$, qualsevol nombre positiu és cota superior. Diem que un subconjunt A de $\mathbb{R}$

està **fitat superiorment** (resp. **inferiorment**) si A té alguna cota superior (resp. inferior); diem que A està **fitat** quan ho està superior i inferiorment. Per exemple, qualsevol interval tancat $[a, b]$ és un conjunt fitat, ja que, b es cota superior i a és cota inferior; la semirecta $(-\infty, a)$ és un conjunt que està fitat superiorment però no ho està inferiorment.

Si A és un subconjunt de $\mathbb{R}$ que està fitat superiorment (resp. inferiorment), s'anomena **suprem** (resp. **ínfim**) de A , denotat per $\sup A$ (resp. $\inf A$), a la menor (resp. major) de totes les cotes superiors (resp. inferiors); si el suprem (resp. ínfim) de A és un element de A , aleshores el suprem (resp. ínfim) s'anomena **màxim** (resp. **mínim**) de A i se designa per $\max A$ (resp. $\min A$).

Una propietat fonamental de $\mathbb{R}$ és la següent: Tot subconjunt no buit fitat superiorment (resp. inferiorment) té suprem (resp. ínfim).

1.4 Potències enteres de nombres reals

En aquesta secció donarem les propietats de les potències de nombres reals amb exponent natural i veurem també com s'estén el concepte formal de potència d'exponent natural al d'exponent enter. Encara que no ho demostrarem, cal saber que les propietats donades per les potències d'exponent natural s'estenen sense dificultat a les de potències amb exponent enter.

1.4.1 Potències d'exponent natural

Si a és un nombre real i n és un nombre natural, s'anomena **potència n -èsima** de a , i la designem per a^n , al resultat de multiplicar a per si mateix n vegades, és a dir,

$$a^n = \overbrace{a \cdot \dots \cdot a}^{n \text{ vegades}}$$

En l'expressió a^n , el nombre a s'anomena **base**, i n , **exponent**.

Per exemple,

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^3 = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8}$$

1.4.1.1 Propietats

1. **Producte de potències:** el producte de potències de la mateixa base és una altra potència de la mateixa base i d'exponent la suma dels exponents, és a dir,

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

En efecte,

$$\begin{aligned} a^n \cdot a^m &= \overbrace{(a \cdot \dots \cdot a)}^{n \text{ vegades}} \cdot \overbrace{(a \cdot \dots \cdot a)}^{m \text{ vegades}} \\ &= \overbrace{a \cdot \dots \cdot a}^{n+m \text{ vegades}} \\ &= a^{n+m} \end{aligned}$$

Per exemple,

$$2^3 \cdot 2^2 = 2^{3+2} = 2^5$$

2. **Quocient de potències:** el quocient de potències de la mateixa base és una altra potència de la mateixa base i d'exponent la diferència dels exponents, és a dir,

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

sempre que $a \neq 0$ i $n > m$.

En efecte, suposant que $a \neq 0$ i $n > m$, tenim

$$\begin{aligned} \frac{a^n}{a^m} &= \frac{\overbrace{a \cdot \dots \cdot a}^{n \text{ vegades}}}{\overbrace{a \cdot \dots \cdot a}^{m \text{ vegades}}} \\ &= \frac{\overbrace{a \cdot \dots \cdot a}^{n-1 \text{ vegades}}}{\overbrace{a \cdot \dots \cdot a}^{m-1 \text{ vegades}}} \\ &\quad \vdots \\ &= \overbrace{a \cdot \dots \cdot a}^{n-m \text{ vegades}} \\ &= a^{n-m} \end{aligned}$$

Per exemple,

$$\begin{aligned} \frac{3^7 \cdot 3^2}{3^5} &= \frac{3^{7+2}}{3^5} \\ &= \frac{3^9}{3^5} \\ &= 3^4 \end{aligned}$$

En particular, si $m = n$, aleshores

$$\frac{a^n}{a^n} = 1$$

però, per altra banda, tenint present la propietat anterior, tenim

$$\frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0$$

Per tant, ha de ser

$$a^0 = 1$$

sempre que $a \neq 0$.

3. **Potència d'una potència:** la potència d'una potència és una altra potència de la mateixa base i d'exponent el producte dels exponents, és a dir,

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

En efecte,

$$\begin{aligned}(a^n)^m &= \overbrace{a^n \cdot \dots \cdot a^n}^{m \text{ vegades}} \\ &= a^{\overbrace{n + \dots + n}^{m \text{ vegades}}} \\ &= a^{n \cdot m}\end{aligned}$$

Per exemple,

$$\begin{aligned}\left(\frac{2^3 \cdot 2^4}{2^5}\right)^3 &= \left(\frac{2^7}{2^5}\right)^3 \\ &= (2^2)^3 \\ &= 2^6\end{aligned}$$

4. **Potència d'un producte:** la potència n -èsima d'un producte és el producte de les potències n -èsimes dels factors, és a dir,

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

En efecte,

$$\begin{aligned}(a \cdot b)^n &= \overbrace{(a \cdot b) \cdot \dots \cdot (a \cdot b)}^{n \text{ vegades}} \\ &= \overbrace{(a \cdot \dots \cdot a)}^{n \text{ vegades}} \cdot \overbrace{(b \cdot \dots \cdot b)}^{n \text{ vegades}} \\ &= a^n \cdot b^n\end{aligned}$$

En particular, tenim

$$(-a)^n = [(-1) \cdot a]^n = (-1)^n \cdot a^n = \begin{cases} a^n & \text{si } n \text{ és par} \\ -a^n & \text{si } n \text{ és senar} \end{cases}$$

Per exemple,

$$\begin{aligned}[(-2)^3 \cdot 3^2]^4 &= [(-2)^3]^4 \cdot (3^2)^4 \\ &= (-2)^{12} \cdot 3^8 \\ &= 2^{12} \cdot 3^8\end{aligned}$$

5. **Potència d'un quocient:** la potència n -èsima d'un quocient és el quocient de les potències n -èsimes del numerador i del denominador, és a dir,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

sempre que $b \neq 0$.

En efecte,

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{b}\right)^n &= \overbrace{\frac{a}{b} \cdot \dots \cdot \frac{a}{b}}^{n \text{ vegades}} \\ &= \frac{\overbrace{(a \cdot \dots \cdot a)}^{n \text{ vegades}}}{\overbrace{(b \cdot \dots \cdot b)}^{n \text{ vegades}}} \\ &= \frac{a^n}{b^n} \end{aligned}$$

Per exemple,

$$\begin{aligned} \left(\frac{2^3 \cdot (-3)^5}{(-2)^2 \cdot 3^2}\right)^4 &= \frac{[2^3 \cdot (-3)^5]^4}{[(-2)^2 \cdot 3^2]^4} \\ &= \frac{(2^3)^4 \cdot [(-3)^5]^4}{[(-2)^2]^4 \cdot (3^2)^4} \\ &= \frac{2^{12} \cdot (-3)^{20}}{(-2)^8 \cdot 3^8} \\ &= \frac{2^{12} \cdot 3^{20}}{2^8 \cdot 3^8} \\ &= 2^4 \cdot 3^{12} \end{aligned}$$

1.4.2 Potències d'exponent enter

Per estendre el concepte formal de potència d'exponent natural al de exponent enter i negatiu, hem d'observar el fet següent:

$$a^{-n} = a^{0-n} = \frac{a^0}{a^n} = \frac{1}{a^n}$$

on n és un nombre natural i a és un nombre real diferent de zero. Aquest fet justifica la següent definició: si n és un nombre natural i a és un nombre real diferent de zero, s'anomena **potència d'exponent** $-n$ al nombre designat per a^{-n} que es defineix per

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Com a conseqüència d'aquesta definició tenim que, si n i m són nombres naturals, aleshores

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

fins i tot quan m sigui major que n .

No és difícil demostrar que les propietats de les potències de exponent natural són també vàlides per les potències de exponent enter.

Per exemple,

$$\begin{aligned}
 \frac{\left[\left(\frac{2}{3}\right)^4 : \left(\frac{2}{3}\right)^3\right]^{-1}}{\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}} &= \frac{\left[\left(\frac{2}{3}\right)^4\right]^{-1} : \left[\left(\frac{2}{3}\right)^3\right]^{-1}}{\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}} \\
 &= \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{-4} : \left(\frac{2}{3}\right)^{-3}}{\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}} \\
 &= \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{-4-(-3)}}{\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}} \\
 &= \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}}{\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}} \\
 &= \left(\frac{2}{3}\right)^{-1-(-2)} \\
 &= \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

Veurem en un altre apartat que, una vegada introduït el concepte d'arrel n -èsima, podrem estendre encara més el concepte de potència, ampliant el camp de validesa de les propietats ja estudiades al de les potències d'exponent racional.

1.4.3 Notació científica

Si la calculadora té la tecla x^y podràs calcular potències directament. Per exemple, per calcular 3^5 has de teclejar

$$3 \quad x^y \quad 5 \quad = \quad \text{i obtindràs} \quad 243$$

Tanmateix, quan els resultats de les potències són nombres en valor absolut molt grans o molt petits les calculadores mostren els resultats en notació científica. Per exemple, en calcular la potència 100^{10}

$$100 \quad x^y \quad 10 \quad = \quad \text{obtindràs} \quad 1 \quad 20$$

que significa

$$1 \times 10^{20}$$

Un nombre en **notació científica** es representa com un nombre comprès entre 1 i 9 multiplicat per una potència de 10 amb exponent enter. En el camp de les ciències experimentals és molt habitual expressar quantitats en notació científica. Per exemple, el nombre de Avogadro

$$6.02 \times 10^{23}$$

o la massa del protó en grams

$$1.9 \times 10^{-24}$$

són dos nombres en notació científica que representen valors aproximats dels valors reals de les magnituds mesurades en cada cas. Observa que la potència de 10 ens dona ràpidament una idea de l'ordre de magnitud del nombre i el nombre de xifres amb què s'escriu el nombre correspon amb el grau de precisió que es vulgui donar a la mesura. En general, utilitzarem aquesta notació per facilitar la lectura i el maneig de nombres molt grans o molt petits en valor absolut.

Si es vol introduir un nombre en notació científica en una calculadora, farem servir la tecla EXP per introduir l'exponent de la potència. Per exemple, 1.9×10^{-24} s'introdueix teclejant

1.9 EXP 24 +/- i apareixerà 1.9^{-24}

1.5 Arrels de nombres reals

En la secció anterior hem après a calcular potències n -èsimes de nombres reals i ara ens plantegem el problema invers: donat un nombre real a volem trobar un altre, x , tal que la seva potència n -èsima sigui igual a a , és a dir, volem resoldre l'equació

$$x^n = a$$

En aquesta secció veurem que aquesta equació té sempre solució si a és no negatiu; les seves solucions s'obtenen a partir del càlcul de l'arrel n -èsima de a que es designa pel radical $\sqrt[n]{a}$. Veurem també que el problema invers queda resolt si limitem l'atenció a les potències amb base un nombre real positiu x , verificant-se aleshores

$$\sqrt[n]{a} = x \iff a = x^n$$

En aquest cas, el càlcul invers de la potenciació s'anomena radicació.

$$\sqrt[n]{a} = x \xRightarrow{\text{Potenciació}} a = x^n$$

$$\sqrt[n]{a} = x \xleftarrow{\text{Radicació}} a = x^n$$

1.5.1 Arrels quadrades

La diagonal d'un quadrat el costat del qual mesura una unitat de longitud és un nombre real positiu que satisfà l'equació

$$x^2 = 2$$

Sabem que aquest nombre és irracional i, per tant, només podrem escriure'l de forma aproximada perquè la seva expressió decimal té infinites xifres decimals no periòdiques. Tot i que sigui impossible conèixer-lo de forma exacta, sabem que hi ha mètodes per trobar el seu valor amb el grau d'aproximació que es vulgui (mitjançant calculadora o per aproximacions successives de nombres racionals o bé per l'algorisme clàssic d'extracció d'arrels quadrades). Tanmateix, podem expressar-lo en forma exacta mitjançant el símbol del **radical** $\sqrt{}$ per $\sqrt{2}$. L'expressió $\sqrt{2}$

s'anomena **arrel quadrada** de 2. En escriure $\sqrt{2}$ ens referim al nombre en la seva forma exacta, és a dir, al nombre que elevat al quadrat dona 2, és a dir,

$$(\sqrt{2})^2 = 2$$

Ara bé, l'equació $x^2 = 2$ té dues solucions: l'arrel quadrada positiva, $\sqrt{2}$, i l'arrel quadrada negativa, $-\sqrt{2}$, ja que, es compleix

$$\begin{aligned} (-\sqrt{2})^2 &= (-\sqrt{2}) \cdot (-\sqrt{2}) \\ &= (\sqrt{2})^2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Observem que les equacions com, per exemple, $x^2 = -1$ no tenen solució perquè el quadrat d'un nombre real mai és negatiu. Per tant, les expressions $\sqrt{-1}$ i $-\sqrt{-1}$ no tenen sentit ja que no representen cap nombre real.

En general, les equacions de la forma

$$x^2 = a$$

on a és un nombre real positiu, tenen dues solucions: $\sqrt{a}$ i $-\sqrt{a}$. Escrivim

$$x^2 = a \implies x = \pm\sqrt{a}$$

Exemples

1. $\sqrt{16} = 4$ i $-\sqrt{16} = -4$, ja que $4^2 = 16$. Per tant, les solucions de l'equació $x^2 = 16$ són $x = \pm 4$
2. Si $\sqrt{a} = 13$, aleshores $a = 13^2 = 169$
3. Si $-\sqrt{a} = -1.1$, aleshores $a = (1.1)^2 = 1.21$
4. Si $\sqrt{2x} = 4$, aleshores $2x = 4^2 = 16$ i, per tant, $x = 8$
5. $(\sqrt{3})^2 = 3$ i $(\sqrt{5})^3 = (\sqrt{5})^2 \sqrt{5} = 5\sqrt{5}$
6. $(3\sqrt{7})^2 = 3^2 (\sqrt{7})^2 = 9 \cdot 7 = 63$
7. Si $\sqrt{2x-1} = 5$, aleshores $2x-1 = 5^2 = 25$ i, per tant, $2x = 26$ i, en conseqüència, $x = 13$

1.5.2 Arrels cúbiques

L'aresta d'un cub el volum del qual és de tres unitats cúbiques és un nombre real positiu x que satisfà l'equació

$$x^3 = 3$$

Es pot demostrar que també és un nombre irracional i, per tant, el seu valor numèric només podrà calcular-se de forma aproximada. Tanmateix, igual que abans, podem expressar-lo de forma exacta mitjançant el símbol del radical $\sqrt[3]{}$ per $\sqrt[3]{3}$. Aquesta

expressió s'anomena **arrel cúbica** de 3, i amb ella ens referim al nombre que elevat al cub dona 3, és a dir,

$$\left(\sqrt[3]{3}\right)^3 = 3$$

Ara, les equacions com, per exemple,

$$x^3 = -8$$

sí que tenen solució i, en aquest cas s'escriu com

$$x = \sqrt[3]{-8} = -2$$

ja que

$$(-2)^3 = -8$$

En general, l'equació

$$x^3 = a$$

on a és qualsevol nombre real, té una única solució que expressem com

$$x = \sqrt[3]{a}$$

Exemples:

1. $\sqrt[3]{-64} = -4$, ja que $(-4)^3 = -64$
2. Si $\sqrt[3]{2x} = 4$, aleshores $2x = 4^3 = 64$ i, per tant, $x = 32$
3. $\left(\sqrt[3]{5}\right)^3 = 5$ i $\left(\sqrt[3]{3}\right)^4 = \left(\sqrt[3]{3}\right)^3 \sqrt[3]{3} = 3\sqrt[3]{3}$
4. $\left(2\sqrt[3]{5}\right)^3 = 2^3 \left(\sqrt[3]{5}\right)^3 = 8 \cdot 5 = 40$

1.5.3 Arrels enèsimes

En general, podem trobar-nos amb equacions de la forma

$$x^n = a$$

on n és un nombre natural major que 1 i $a \in \mathbb{R}$. Si n és par i a és positiu, l'equació admet dues solucions que s'expressen en forma exacta mitjançant els radicals $\sqrt[n]{a}$ i $-\sqrt[n]{a}$. Al radical $\sqrt[n]{a}$ s'anomena **arrel n -èsima positiva** de a , i a $-\sqrt[n]{a}$, **arrel n -èsima negativa** de a ; n s'anomena **índex** de l'arrel i a s'anomena **radicand**. Amb aquestes expressions ens referim als nombres reals la potència n -èsima dels quals és igual a a

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \left(-\sqrt[n]{a}\right)^n = a$$

Com hauràs observat tot d'una, els nombres reals negatius no tenen arrels d'índex par. Si n és senar i a és qualsevol nombre real, l'equació admet una sola solució que s'expressa per $\sqrt[n]{a}$; $\sqrt[n]{a}$ serà un nombre real negatiu si a és negatiu, ja que com que és n senar i es verifica que

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$$

aleshores $(\sqrt[n]{a})^n$ és negatiu i d'aquí, per les regles dels signes, deduïm que $\sqrt[n]{a}$ ha de ser també negatiu.

De la definició d'arrel n -èsima es dedueix en seguida la següent propietat

$$\sqrt[n]{a} = x \implies x^n = a$$

En efecte, si $\sqrt[n]{a} = x$, aleshores

$$x^n = (\sqrt[n]{a})^n = a$$

El recíproc d'aquesta propietat és fals, ja que, per exemple,

$$2^2 = (-2)^2 = 4$$

i, per tant, podríem escriure $\sqrt{4} = 2$ i $\sqrt{4} = -2$, cosa que no és possible ja que $-2 \neq 2$. Aquesta contradicció es deu al fet que en efectuar potències d'exponent par, per les regles dels signes, els nombres reals positius i negatius es confonden. Tanmateix, si limitem l'atenció a les potències amb base un nombre real positiu, aleshores es compleix el recíproc

$$\sqrt[n]{a} = x \iff x^n = a$$

En altres paraules, dir que a és la potència n -èsima d'un nombre real positiu x equival a dir que x és l'arrel n -èsima de a . Hem definit així un procés de càlcul invers al de la potenciació amb exponents naturals. Aquest procediment s'anomena **radicació** i consisteix a extreure l'arrel n -èsima d'un nombre positiu. El resultat d'efectuar aquest procés s'anomena arrel n -èsima d'aquest nombre.

Exemples:

1. $\sqrt{16} = 4$, ja que $4^2 = 16$, però també $-\sqrt{16} = -4$, ja que $(-4)^2 = 16$
2. $\sqrt[3]{27} = 3$, ja que $3^3 = 27$
3. $\sqrt[5]{-32} = -2$ ja que $(-2)^5 = -32$
4. $\sqrt{-16}$ no és un nombre real, ja que segons les regles dels signes en la multiplicació dels nombres reals, no hi ha cap nombre real el quadrat del qual sigui negatiu
5. $\sqrt[3]{8a^6b^3} = 2a^2b$, ja que $(2a^2b)^3 = 8a^6b^3$
6. $\sqrt{\frac{25a^2}{b^4}} = \frac{5a}{b^2}$, ja que $\left(\frac{5a}{b^2}\right)^2 = \frac{25a^2}{b^4}$

1.5.4 Càlcul d'arrels

El càlcul d'arrels és immediat si es disposa de calculadora. El càlcul sense calculadora serà senzill si l'arrel és exacta, ja que n'hi haurà prou amb efectuar la descomposició factorial del nombre i, després aplicar la definició d'arrel. Si l'arrel no és exacta, sempre podrà aproximar-se per tempteig fins a un cert grau mitjançant l'ús de les operacions elementals. Tanmateix, el mètode per tempteig és llarg i pesat. En lloc seu, es fan servir algorismes de càlcul, com el que es coneix per extreure l'arrel quadrada d'un nombre, o també mètodes iteratius d'aproximació; en realitat, les calculadores científiques tenen implementat un d'aquests procediments iteratius perquè de forma automàtica calculi l'arrel de qualsevol índex. No tractarem de moment aquests darrers enfocaments de càlcul d'arrels.

1.5.4.1 Algorisme per extreure arrels quadrades

Si es disposa d'una calculadora amb la tecla $\sqrt{\quad}$ el resultat és immediat. Si no es disposa de calculadora, en els exemples que segueixen s'explica com s'extreu l'arrel quadrada d'un nombre pel algorisme ordinari.

Exemple 1.1

Arrel quadrada de 73984

Separem el nombre en blocs de dues xifres començant per les unitats i es busca un nombre (en aquest cas és 2) el quadrat del qual sigui menor o igual que el primer bloc (en aquest cas és 7). Ara es fa la resta indicada, resultant 3.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{7'39'84} & 2 \\ \underline{4} & \\ 3 & \end{array}$$

D'aquesta manera hem obtingut la primera xifra de l'arrel.

Ara es baixa el bloc següent (en aquest cas és 39) i es duplica el nombre trobat en el pas anterior (en aquest cas és $2 \cdot 2 = 4$). Aleshores es busca la xifra (en aquest cas és 7) que, col·locada després del doble del nombre trobat en el pas anterior formi un nombre que multiplicat per aquesta xifra resulti un nombre menor o igual que el nombre que resulta després d'haver baixat el següent bloc (en aquest cas 339). Ara es fa la resta indicada, resultant 10.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{7'39'84} & 27 \\ \underline{4} & \\ 339 & 47 \times 7 = 329 \\ \underline{329} & \\ 10 & \end{array}$$

D'aquesta manera hem obtingut la següent xifra de l'arrel.

Es repeteix de nou aquest procés fins que no es puguin baixar més blocs. Si l'última resta efectuada té com resultat 0, l'arrel quadrada és exacta. En cas contrari, el valor de l'arrel serà un nombre decimal. En el nostre cas, obtenim que l'arrel quadrada és exacta i el seu valor és 272 com s'indica a continuació

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{7'39'84} & 272 \\ \underline{4} & 47 \times 7 = 329 \\ 339 & 542 \times 2 = 1084 \\ \underline{329} & \\ 1084 & \\ \underline{1084} & \\ 0 & \end{array}$$

Podem comprovar el resultat mitjançant la calculadora, teclejant

$$73984 \quad \sqrt{\quad} = \quad \text{i obtindràs} \quad 272$$

Exemple 1.2

Arrel quadrada de 123,45 amb quatre xifres decimals

Separem el nombre en blocs de dues xifres començant per les unitats (des de la coma) i es busca un nombre (en aquest cas és 1) el quadrat del qual sigui menor o igual que el primer bloc (en aquest cas és 1). Ara s'efectua la resta indicada, resultant 0.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{1'23,45} & 1 \\ \underline{1} & \\ 0 & \end{array}$$

D'aquesta manera hem obtingut la primera xifra de l'arrel.

Ara es baixa el bloc següent (en aquest cas és 23) i es duplica el nombre trobat en el pas anterior (en aquest cas és $2 \cdot 1 = 2$). Aleshores es busca la xifra (en aquest cas és 1) que, col·locada després del doble del nombre trobat en el pas anterior formi un nombre que multiplicat per aquesta xifra resulti un nombre menor o igual que el nombre que resulta després d'haver baixat el següent bloc (en aquest cas 23). Ara es fa la resta indicada, resultant 2.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{1'23,45} & 11 \\ \underline{1} & \\ 023 & 21 \times 1 = 21 \\ \underline{21} & \\ 2 & \end{array}$$

D'aquesta manera hem obtingut la següent xifra de l'arrel.

En aquest cas, en baixar el bloc següent, ens trobem abans amb la coma. Això vol dir que en el valor de l'arrel caldrà col·locar també la coma. Aleshores, a partir de l'última xifra decimal del nombre caldrà afegir zeros fins a aconseguir que el nombre de blocs de dues xifres a partir de la coma sigui el nombre de xifres decimals amb el que volem trobar l'arrel. En aquest cas hi haurà que afegir 6 zeros. A partir d'aquí, repetirem de nou el procés fins que no es puguin baixar més blocs.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{1'23,45'00'00'00} & 11'1108 \\ \underline{1} & 21 \times 1 = 21 \\ 023 & \underline{221 \times 1 = 221} \\ \underline{21} & 2221 \times 1 = 2221 \\ 245 & \underline{22201 \times 1 = 22201} \\ \underline{221} & 222208 \times 8 = 1777664 \\ 2400 & \\ \underline{2221} & \\ 1790000 & \\ \underline{1777664} & \\ 123336 & \end{array}$$

Observem que hi ha un pas en què no hi ha cap xifra que, col·locada després del doble del nombre trobat en el pas anterior (en aquest cas és 2222) formi un nombre que sigui menor o igual que el nombre que resulta després d'haver baixat

el següent bloc (en aquest cas és 17900). Aleshores es baixarà el següent bloc i es col·locarà 0 com la següent xifra decimal de l'arrel.

Podem comprovar el resultat mitjançant la calculadora, teclejant

$$123.45 \quad \sqrt{} \quad = \quad \text{i obtindràs} \quad 11.11080555$$

la seva aproximació per defecte amb quatre xifres decimals coincideix amb el nostre resultat.

1.5.4.2 Càlcul d'arrels amb calculadora

Si la calculadora té la tecla amb la funció $x^{1/y}$, per calcular $\sqrt[3]{3796416}$ has de teclejar

$$3796416 \quad x^{1/y} \quad 3 \quad = \quad \text{i obtindràs} \quad 156$$

De la mateixa manera, per calcular $\sqrt[5]{217.4}$ has de teclejar

$$217.4 \quad x^{1/y} \quad 5 \quad = \quad \text{i obtindràs} \quad 2.933944593$$

Si no té la tecla $x^{1/y}$ però sí té la tecla per la potència x^y , també podem calcular les arrels anteriors de la següent manera

$$3796416 \quad x^y \quad 3 \quad 1/x \quad = \quad 156$$

$$217.4 \quad x^y \quad 5 \quad 1/x \quad = \quad 2.933944593$$

1.5.4.3 Càlcul d'arrels exactes per descomposició

Per exemple, per calcular $\sqrt[3]{3796416}$ per descomposició, primer descomponem el radicand en factors primers

3796416	2
1898208	2
949104	2
474552	2
237276	2
118638	2
59319	3
19773	3
6591	3
2197	13
169	13
13	13
1	

resultant

$$3796416 = 2^6 \cdot 3^3 \cdot 13^3$$

Ara bé, per les propietats de les potències, podem escriure també

$$\begin{aligned} 3796416 &= (2^2 \cdot 3 \cdot 13)^3 \\ &= 156^3 \end{aligned}$$

Per tant, tenim

$$\sqrt[3]{3796416} = \sqrt[3]{156^3} = 156$$

De la mateixa manera, per calcular $\sqrt{0.0064}$, primer observem que

$$0.0064 = 64 \cdot 10^{-4} = 2^6 \cdot 10^{-4} = (2^3 \cdot 10^{-2})^2$$

i, per tant,

$$\sqrt{0.0064} = 2^3 \cdot 10^{-2} = 0.08$$

1.5.4.4 Càlcul d'arrels per tempteig

Per calcular per tempteig una arrel com, per exemple, $\sqrt[3]{5.23}$, primer observem que

$$1 < \sqrt[3]{5.23} < 2$$

pues

$$1^3 = 1 < 5.23 < 8 = 2^3$$

D'aquesta manera, sabem que

$$\sqrt[3]{5.23} = 1. \dots$$

Ara, trobaremos la xifra de les dècimes també per tempteig. Observa els càlculs següents:

$$1.5^3 = 3.375 < 5.23$$

$$1.6^3 = 4.096 < 5.23$$

$$1.7^3 = 4.913 < 5.23$$

$$1.8^3 = 5.832 > 5.23$$

A partir d'aquí, és clar que

$$1.7 < \sqrt[3]{5.23} < 1.8$$

i, per tant, sabem que

$$\sqrt[3]{5.23} = 1.7 \dots$$

De la mateixa manera es trobaran les altres xifres decimals. Així, per les centesimes tenim

$$1.75^3 = 5.359375 > 5.23$$

$$1.74^3 = 5.268024 > 5.23$$

$$1.73^3 = 5.177717 < 5.23$$

i, per tant, obtenim que

$$\sqrt[3]{5.23} = 1.73 \dots$$

1.6 Càlcul amb radicals

En el càlcul amb arrels o amb expressions que les contenen es poden aplicar les propietats usals de les operacions amb nombres reals i certes propietats que veurem en aquest apartat. Al càlcul fet d'aquesta manera, sense utilitzar valors aproximats dels nombres irracionals que apareixen (és a dir, expressant-los en forma exacta, com a radicals), s'anomena habitualment **càlcul amb radicals**.

Les propietats de les operacions amb radicals són:

1. Producte

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

2. Potència

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

3. Quocient

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

4. Radicació

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$$

A més, pel càlcul amb radicals, serà convenient conèixer les següents tècniques:

1. Obtenció de radicals semblants

$$\sqrt[mn]{a^m} = \sqrt[n]{a}$$

2. Simplificació de radicals

$$\sqrt[n]{a^{pm+q} \cdot b} = a^p \cdot \sqrt[n]{a^q \cdot b}$$

3. Suma i resta de radicals

4. Racionalització de denominadors

1.6.1 Propietats de les operacions amb arrels

Per provar les propietats següents utilitzarem les propietats de les potències d'exponent natural, la definició d'arrel n -èsima segons la qual $\sqrt[n]{a} = b$ si $b^n = a$ i la propietat fonamental

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$$

sempre que l'arrel tingui sentit.

1.6.1.1 Arrel d'un producte

Aquesta propietat s'expressa dient que l'arrel d'un producte és igual al producte de les arrels. En termes més formals: per tot $a, b \in \mathbb{R}$ i per tot $n \in \mathbb{N}$ es compleix

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

sempre que les tres arrels tinguin sentit.

En efecte,

$$\begin{aligned} \left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\right)^n &= \left(\sqrt[n]{a}\right)^n \cdot \left(\sqrt[n]{b}\right)^n \\ &= a \cdot b \end{aligned}$$

Per la propietat associativa de la multiplicació, aquesta propietat pot estendre's a més de dos factors. Per exemple, per tres factors, tenim

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{a \cdot b \cdot c} &= \sqrt[n]{a \cdot (b \cdot c)} \\ &= \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b \cdot c} \\ &= \sqrt[n]{a} \cdot (\sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c}) \\ &= \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c}\end{aligned}$$

Exemples:

1.

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{32a^4} \cdot \sqrt[4]{2a^2} \cdot \sqrt[4]{4a^2} &= \sqrt[4]{32a^4 \cdot 2a^2 \cdot 4a^2} \\ &= \sqrt[4]{256a^8} \\ &= \sqrt[4]{2^8a^8} \\ &= \sqrt[4]{(2a)^8} \\ &= (2a)^2 \\ &= 4a^2\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}(2\sqrt{5} - \sqrt{3})^2 &= (2\sqrt{5})^2 - 2 \cdot 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 \\ &= 4\sqrt{5^2} - 4\sqrt{15} + \sqrt{3^2} \\ &= 20 - 4\sqrt{15} + 3 \\ &= 23 - 4\sqrt{15}\end{aligned}$$

1.6.1.2 Potència d'una arrel

De la propietat del producte d'arrels s'obté de forma immediata la propietat de la potència d'una arrel que s'expressa dient que la potència d'una arrel és l'arrel de la potència, és a dir,

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

sempre que les dues arrels tinguin sentit.

En efecte,

$$\begin{aligned}\left(\sqrt[n]{a}\right)^m &= \overbrace{\sqrt[n]{a} \cdot \dots \cdot \sqrt[n]{a}}^{m \text{ factors}} \\ &= \sqrt[n]{\overbrace{a \cdot \dots \cdot a}^{m \text{ factors}}} \\ &= \sqrt[n]{a^m}\end{aligned}$$

Exemples:

1.

$$\begin{aligned}
 \left(\sqrt[4]{729}\right)^2 &= \left(\sqrt[4]{3^6}\right)^2 \\
 &= \sqrt[4]{(3^6)^2} \\
 &= \sqrt[4]{3^{12}} \\
 &= 3^3 = 27
 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
 \left(\sqrt[3]{9a^2b}\right)^2 \left(\sqrt[3]{3ab^2}\right)^2 &= \sqrt[3]{(9a^2b)^2} \sqrt[3]{(3ab^2)^2} \\
 &= \sqrt[3]{81a^4b^2} \sqrt[3]{9a^2b^4} \\
 &= \sqrt[3]{(81a^4b^2)(9a^2b^4)} \\
 &= \sqrt[3]{729a^6b^6} \\
 &= \sqrt[3]{(3ab)^6} \\
 &= (3ab)^2 = 9a^2b^2
 \end{aligned}$$

1.6.1.3 Arrel d'un quocient

Aquesta propietat s'expressa dient que l'arrel d'un quocient és igual al quocient de les arrels. En terme més formals: per tot $a, b \in \mathbb{R}$ amb $b \neq 0$ i per tot $n \in \mathbb{N}$ es compleix

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

sempre que les tres arrels tinguin sentit.

En efecte,

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n &= \frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n} \\
 &= \frac{a}{b}
 \end{aligned}$$

Exemples:

1.

$$\begin{aligned}
 \frac{\sqrt[4]{8x^2y}}{\sqrt[4]{2xy^2}} &= \sqrt[4]{\frac{8x^2y}{2xy^2}} \\
 &= \sqrt[4]{\frac{4x}{y}}
 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt[3]{3a}\sqrt[3]{9a^4}}{\sqrt[3]{3a^2}} &= \frac{\sqrt[3]{(3a)(9a^4)}}{\sqrt[3]{3a^2}} \\
&= \frac{\sqrt[3]{27a^5}}{\sqrt[3]{3a^2}} \\
&= \sqrt[3]{\frac{27a^5}{3a^2}} \\
&= \sqrt[3]{9a^3} \\
&= \sqrt[3]{9}\sqrt[3]{a^3} \\
&= a\sqrt[3]{9}
\end{aligned}$$

1.6.1.4 Arrel d'una arrel

Aquesta propietat s'expressa afirmant que l'arrel d'una arrel és una altra arrel que té com a índex el producte dels índexs de les arrels, és a dir,

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$$

sempre que les tres arrels tinguin sentit.

En efecte,

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}\right)^{nm} &= \left[\left(\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}\right)^n\right]^m \\
&= \left(\sqrt[m]{a}\right)^m \\
&= a
\end{aligned}$$

Exemples:

1.

$$\frac{\sqrt[3]{\sqrt{ab}}}{\sqrt{\sqrt[3]{ab}}} = \frac{\sqrt[6]{ab}}{\sqrt[6]{ab}} = 1$$

2.

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt[4]{\sqrt[3]{729}}\right)^3 &= \left(\sqrt[12]{729}\right)^3 \\
&= \left(\sqrt[12]{3^6}\right)^3 \\
&= \sqrt[12]{(3^6)^3} \\
&= \sqrt[12]{3^{18}} \\
&= \sqrt[12]{3^{12} \cdot 3^6} \\
&= \sqrt[12]{3^{12}} \sqrt[12]{3^6} \\
&= 3 \sqrt[12]{3^6} \\
&= 3\sqrt{3}
\end{aligned}$$

1.6.2 Radicals equivalents

Observa que es compleix

$$3 = \sqrt{9} = \sqrt[3]{27} = \sqrt[4]{81}$$

és a dir, el nombre 3 està representat per diferents radicals. Es diu aleshores que aquests radicals són equivalents. Dos radicals s'anomenen **equivalents** quan tenen les mateixes arrels.

Per obtenir un radical equivalent a un de donat tenim la següent propietat

$$\sqrt[mn]{a^m} = \sqrt[n]{a}$$

En efecte,

$$\begin{aligned} \left(\sqrt[mn]{a^m} \right)^n &= \sqrt[mn]{(a^m)^n} \\ &= \sqrt[mn]{a^{mn}} \\ &= a \end{aligned}$$

Amb aquesta propietat, veiem que

$$\sqrt[3]{2^2} = \sqrt[6]{2^4} = \sqrt[9]{2^6} = \sqrt[12]{2^8} = \sqrt[15]{2^{10}}$$

i, en general, aquesta propietat permetrà simplificar radicals, reduir-los a índex comú i comparar-los.

Exemples:

- **Simplificació de radicals:**

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{a^{12}} \sqrt[4]{b^{24}} &= \sqrt[4]{a^{12}} \cdot \sqrt[4]{\sqrt[4]{b^{24}}} \\ &= \sqrt[3]{a^3} \cdot \sqrt[16]{b^{24}} \\ &= a\sqrt{b^3} \\ &= a\sqrt{b^2}\sqrt{b} \\ &= ab\sqrt{b} \end{aligned}$$

- **Reducció de radicals a índex comú:** tota multiplicació i divisió amb radicals de diferents índexs pot transformar-se de manera que tots els radicals tinguin el mateix índex. Una vegada feta aquesta transformació, efectuarem les operacions segons les propietats de les arrels.

1.

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt[6]{2/3}}{\sqrt[3]{3/2}} &= \frac{\sqrt[6]{2/3}}{\sqrt[6]{(3/2)^2}} \\
&= \frac{\sqrt[6]{2/3}}{\sqrt[6]{9/4}} \\
&= \sqrt[6]{\frac{2/3}{9/4}} \\
&= \sqrt[6]{\frac{8}{27}} \\
&= \sqrt[6]{\frac{2^3}{3^3}} \\
&= \sqrt[6]{\left(\frac{2}{3}\right)^3} \\
&= \sqrt{\frac{2}{3}}
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{ab}\sqrt{a\sqrt{b}}}{\sqrt{a}\sqrt[3]{b}} &= \frac{\sqrt{ab}\left(\sqrt{a}\sqrt{\sqrt{b}}\right)}{\sqrt{a}\sqrt[3]{b}} \\
&= \frac{\sqrt{ab}\sqrt{a}\sqrt[4]{b}}{\sqrt{a}\sqrt[3]{b}} \\
&= \frac{\sqrt[12]{(ab)^6}\sqrt[12]{a^6}\sqrt[12]{b^3}}{\sqrt[12]{a^6}\sqrt[12]{b^2}} \\
&= \frac{\sqrt[12]{a^{12}b^9}}{\sqrt[12]{a^6b^2}} \\
&= \sqrt[12]{\frac{a^{12}b^9}{a^6b^2}} \\
&= \sqrt[12]{a^6b^7} \\
&= \sqrt[12]{a^6}\sqrt[12]{b^7} \\
&= \sqrt{a}\sqrt[12]{b^7}
\end{aligned}$$

- **Comparació de radicals:** Ordenar de menor a major els següents radicals

$$\sqrt[4]{5}, \sqrt[6]{3^4}, \sqrt[8]{7^5}$$

reduint-los a índex comú i sabent que $mcm(4, 6, 8) = 24$, obtenim

$$\sqrt[24]{5^6}, \sqrt[24]{(3^4)^4}, \sqrt[24]{(7^5)^3}$$

és a dir,

$$\sqrt[24]{5^6}, \sqrt[24]{3^{16}}, \sqrt[24]{7^{15}}$$

Per tant,

$$\sqrt[4]{5} = \sqrt[24]{5^6} < \sqrt[6]{3^4} = \sqrt[24]{3^{16}} < \sqrt[8]{7^5} = \sqrt[24]{7^{15}}$$

doncs, una vegada reduïts els radicals a índex comú, estem en condicions de comparar-los i ordenar-los: és major el radical que té radicand més gran.

1.6.3 Introducció i extracció de factors en una arrel

La formulació d'aquesta propietat ve donada per

$$\sqrt[n]{a^n \cdot b} = a \sqrt[n]{b}$$

sempre que les arrels tinguin sentit. Llegint d'esquerra a dreta, es fa la **extracció** d'un factor de l'arrel i, de dreta a esquerra, es realitza la **introducció** d'un factor en l'arrel. En efecte,

$$\begin{aligned} \left(a \sqrt[n]{b}\right)^n &= a^n \left(\sqrt[n]{b}\right)^n \\ &= a^n \cdot b \end{aligned}$$

Podem donar una formulació més general d'aquesta propietat escrivint que

$$\sqrt[n]{a^{pn+q} \cdot b} = a^p \cdot \sqrt[n]{a^q \cdot b}$$

En efecte,

$$\begin{aligned} \left(a^p \cdot \sqrt[n]{a^q \cdot b}\right)^n &= a^{pn} \cdot \left(\sqrt[n]{a^q \cdot b}\right)^n \\ &= a^{pn} \cdot (a^q \cdot b) \\ &= a^{pn+q} \cdot b \end{aligned}$$

Exemples:

- Extracció:

1.

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{a^7} &= \sqrt[3]{a^{2 \cdot 3 + 1}} \\ &= a^2 \sqrt[3]{a} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{a^6 b^8 c^{12}} &= \sqrt[4]{a^{1 \cdot 4 + 2}} \sqrt[4]{b^{2 \cdot 4}} \sqrt[4]{c^{3 \cdot 4}} \\ &= a \sqrt[4]{a^2} b^2 c^3 \\ &= ab^2 c^3 \sqrt[4]{a} \end{aligned}$$

- Introducció:

1.

$$\begin{aligned} 2 \cdot \sqrt[5]{3} \cdot 6 \cdot \sqrt[7]{5} &= 2 \cdot \sqrt[35]{3^7} \cdot 6 \cdot \sqrt[35]{5^5} \\ &= \sqrt[35]{2^{35}} \cdot \sqrt[35]{3^7} \cdot \sqrt[35]{6^{35}} \cdot \sqrt[35]{5^5} \\ &= \sqrt[35]{2^{35} \cdot 3^7 \cdot 6^{35} \cdot 5^5} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}a^3b\sqrt{\frac{b^5}{a^4}} &= \sqrt{\frac{(a^3b)^2 b^5}{2^2 a^4}} \\
&= \sqrt{\frac{a^6 b^7}{4a^4}} \\
&= \sqrt{\frac{a^2 b^7}{4}}
\end{aligned}$$

1.6.4 Suma d'arrels

És important assenyalar que l'arrel d'una suma no és la suma de les arrels

$$\sqrt[n]{a+b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$$

Per provar aquest fet, donem l'exemple següent

$$\sqrt{9} = \sqrt{2+7} \neq \sqrt{2} + \sqrt{7}$$

ja que

$$\begin{aligned}
(\sqrt{2} + \sqrt{7})^2 &= (\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2}\sqrt{7} + (\sqrt{7})^2 \\
&= 9 + 2\sqrt{14} \neq 9
\end{aligned}$$

En general, quan hi hagi una suma d'arrels només podrem agrupar els radicals semblants, utilitzant la propietat distributiva de la multiplicació respecte de la suma

$$b\sqrt[n]{a} + c\sqrt[n]{a} = (b+c)\sqrt[n]{a}$$

Exemples:

1.

$$\begin{aligned}
\sqrt{45} - 2\sqrt[3]{81} - 3\sqrt{180} + \sqrt[3]{375} - \sqrt{80} &= \sqrt{5 \cdot 3^2} - 2\sqrt[3]{3^{3+1}} - 3\sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5} + \sqrt[3]{5^3 \cdot 3} - \sqrt{2^2 \cdot 2 \cdot 5} \\
&= 3\sqrt{5} - 2 \cdot 3\sqrt[3]{3} - 3 \cdot 2 \cdot 3\sqrt{5} + 5\sqrt[3]{3} - 2^2\sqrt{5} \\
&= (3 - 18 - 4)\sqrt{5} + (5 - 6)\sqrt[3]{3} \\
&= -19\sqrt{5} - \sqrt[3]{3}
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
5\sqrt[3]{a^2b} - 3\sqrt[3]{a^2b} + 7\sqrt[3]{a^2b} &= (5 - 3 + 7)\sqrt[3]{a^2b} \\
&= 9\sqrt[3]{a^2b}
\end{aligned}$$

1.6.5 Racionalització de denominadors

La fracció

$$\frac{3\sqrt{2} + 1}{5\sqrt{2} + \sqrt{3}}$$

en tenir denominador irracional, es considera poc adequada si volem efectuar la divisió indicada. Amb l'objectiu d'evitar errors en els càlculs ja que caldria usar aproximacions racionals tant en el numerador com en el denominador, i intentar treballar tant com sigui possible amb valors exactes, es recomana en aquests casos fer abans la racionalització del denominador. La **racionalització de denominadors** és una tècnica que consisteix a transformar la fracció dada, de denominador irracional, en una altra fracció equivalent però amb denominador racional. La tècnica general consistirà a trobar una expressió que en multiplicar-la pel numerador i el denominador de la fracció s'aconsegueixi que en el denominador de la nova fracció equivalent no aparegui cap arrel.

Estudiarem dos casos:

Cas 1: si el denominador conté una sola arrel, la fracció és del tipus

$$\frac{a}{c\sqrt[n]{b^m}}$$

on m és menor que n . La racionalització s'aconsegueix multiplicant numerador i denominador per

$$\sqrt[n]{b^{n-m}}$$

En efecte,

$$\frac{a}{c\sqrt[n]{b^m}} = \frac{a}{c\sqrt[n]{b^m}} \cdot \frac{\sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^{n-m}}} = \frac{a\sqrt[n]{b^{n-m}}}{c\sqrt[n]{b^n}} = \frac{a\sqrt[n]{b^{n-m}}}{cb}$$

Si fos m major que n , es podria extreure fora del radical una certa potència de b i dins quedaria una potència de b de exponent més petit que n i a partir d'aquí es procediria igual que abans.

Exemples:

1.

$$\begin{aligned} \frac{5}{\sqrt[3]{16}} &= \frac{5}{\sqrt[3]{2^4}} \\ &= \frac{5}{2\sqrt[3]{2}} \\ &= \frac{5}{2\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}} \\ &= \frac{5\sqrt[3]{4}}{2\sqrt[3]{2^3}} \\ &= \frac{5\sqrt[3]{4}}{4} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \frac{3}{4\sqrt{5}} &= \frac{3}{4\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{3\sqrt{5}}{4\sqrt{5^2}} \\ &= \frac{3\sqrt{5}}{20} \end{aligned}$$

Cas 2: Si el denominador conté una suma o diferència d'arrels quadrades, la fracció és del tipus

$$\frac{a}{b\sqrt{c} \pm d\sqrt{e}}$$

La racionalització s'aconsegueix multiplicant numerador i denominador per l'expressió conjugada del denominador $b\sqrt{c} \mp d\sqrt{e}$

En efecte, tenint present que

$$\begin{aligned}(b\sqrt{c} + d\sqrt{e})(b\sqrt{c} - d\sqrt{e}) &= (b\sqrt{c})^2 - (d\sqrt{e})^2 \\ &= b^2(\sqrt{c})^2 - d^2(\sqrt{e})^2 \\ &= b^2c - d^2e\end{aligned}$$

aleshores tenim

$$\begin{aligned}\frac{a}{b\sqrt{c} + d\sqrt{e}} &= \frac{a}{b\sqrt{c} + d\sqrt{e}} \cdot \frac{b\sqrt{c} - d\sqrt{e}}{b\sqrt{c} - d\sqrt{e}} \\ &= \frac{a(b\sqrt{c} - d\sqrt{e})}{b^2c - d^2e} \\ &= \frac{ab\sqrt{c} - ad\sqrt{e}}{b^2c - d^2e}\end{aligned}$$

i de forma anàloga es fa l'altre cas.

Exemples:

1.

$$\begin{aligned}\frac{5}{5 - \sqrt{5}} &= \frac{5}{5 - \sqrt{5}} \cdot \frac{5 + \sqrt{5}}{5 + \sqrt{5}} \\ &= \frac{5(5 + \sqrt{5})}{5^2 - (\sqrt{5})^2} \\ &= \frac{5(5 + \sqrt{5})}{20} \\ &= \frac{5 + \sqrt{5}}{4}\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\frac{3\sqrt{2} + 1}{5\sqrt{2} + \sqrt{3}} &= \frac{3\sqrt{2} + 1}{5\sqrt{2} + \sqrt{3}} \cdot \frac{5\sqrt{2} - \sqrt{3}}{5\sqrt{2} - \sqrt{3}} \\ &= \frac{(3\sqrt{2} + 1)(5\sqrt{2} - \sqrt{3})}{(5\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2} \\ &= \frac{15(\sqrt{2})^2 - 3\sqrt{2}\sqrt{3} + 5\sqrt{2} - \sqrt{3}}{5^2(\sqrt{2})^2 - 3} \\ &= \frac{30 - 3\sqrt{6} + 5\sqrt{2} - \sqrt{3}}{47}\end{aligned}$$

1.6.6 Potències d'exponent racional

En prendre el conveni de definir a^{-n} per

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (1.6.1)$$

amb $a > 0$ i $n \in \mathbb{N}$, es va poder estendre el càlcul de potències d'exponent natural al d'exponent enter. Amb la finalitat d'ampliar encara més el concepte formal de potència, ara prenem el conveni de definir $a^{m/n}$ per

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$$

amb $n, m \in \mathbb{N}$ i $a \geq 0$, i d'acord amb (1.6.1), convenim també definir $a^{-m/n}$ per

$$a^{-m/n} = \frac{1}{a^{m/n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$$

amb $n, m \in \mathbb{N}$ i $a > 0$. D'aquesta manera, podem estendre el càlcul de potències al d'exponent racional, ja que qualsevol nombre racional pot escriure's com m/n , on $m \in \mathbb{Z}$ i $n \in \mathbb{N}$. A més, aquest conveni és coherent amb la teoria ja coneguda, és a dir, que totes les propietats que coneixem per les potències d'exponent enter continuen sent vàlides per les potències d'exponent racional.

Exemples:

1. $32^{3/5} = 8$, ja que $\sqrt[5]{32^3} = \sqrt[5]{(2^5)^3} = \sqrt[5]{2^{15}} = 2^3 = 8$.
2. $81^{-1/4} = 1/3$, ja que $\sqrt[4]{81^{-1}} = \sqrt[4]{1/81} = \sqrt[4]{1/3^4} = 1/\sqrt[4]{3^4} = 1/3$.

1.6.6.1 Propietats de les potències d'exponent racional

Aquestes propietats són importants perquè quan hàgim d'operar amb expressions en les que apareguin exponents racionals, podrem usar-les directament sense necessitat de transformar-les en radicals.

Tanmateix, el següent exemple mostra dues maneres de calcular una expressió amb exponents racionals: una, consisteix a utilitzar les propietats de les potències d'exponent racional, i l'altra, consisteix a transformar primer l'expressió en una altra equivalent amb radicals i després utilitzar les propietats dels radicals.

$$\begin{aligned} \frac{3^{1/3} \cdot 3^{1/2}}{3^{2/5}} &= \frac{3^{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}}{3^{\frac{2}{5}}} = 3^{\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{2}{5}} = 3^{\frac{13}{30}} \\ &= \frac{3^{1/3} \cdot 3^{1/2}}{3^{2/5}} = \frac{\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt[5]{3^2}} \\ &= \frac{\sqrt[6]{3^2} \cdot \sqrt[6]{3^3}}{\sqrt[5]{3^2}} \\ &= \frac{\sqrt[6]{3^5}}{\sqrt[5]{3^2}} \\ &= \frac{\sqrt[30]{3^{25}}}{\sqrt[30]{3^{12}}} \\ &= \sqrt[30]{3^{13}} \end{aligned}$$

Producte de potències: Per tot $a > 0$, $m, r \in \mathbb{Z}$ i $n, s \in \mathbb{N}$, es compleix

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{r}{s}}$$

En efecte,

$$\begin{aligned} a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{r}{s}} &= \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[s]{a^r} \\ &= \sqrt[ns]{a^{ms}} \cdot \sqrt[ns]{a^{nr}} \\ &= \sqrt[ns]{a^{ms} \cdot a^{nr}} \\ &= \sqrt[ns]{a^{ms+nr}} \\ &= a^{\frac{ms+nr}{ns}} \\ &= a^{\frac{m}{n} + \frac{r}{s}} \end{aligned}$$

Exemples:

1.

$$\begin{aligned} 3^{1/2} \cdot 3^{1/3} \cdot 3^{1/6} &= (3^{1/2} \cdot 3^{1/3}) \cdot 3^{1/6} \\ &= 3^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{6}} \\ &= 3^{(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) + \frac{1}{6}} \\ &= 3^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}} \\ &= 3^1 = 3 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} a^{1/2} \cdot b \cdot a^3 \cdot b^{-1/3} &= (a^{1/2} \cdot b) \cdot (a^3 \cdot b^{-1/3}) \\ &= (a^{1/2} \cdot b) \cdot (b^{-1/3} \cdot a^3) \\ &= a^{1/2} \cdot (b \cdot b^{-1/3}) \cdot a^3 \\ &= a^{1/2} \cdot (b^{1-\frac{1}{3}} \cdot a^3) \\ &= a^{1/2} \cdot (a^3 \cdot b^{2/3}) \\ &= (a^{1/2} \cdot a^3) \cdot b^{2/3} \\ &= a^{\frac{1}{2}+3} \cdot b^{2/3} \\ &= a^{7/2} \cdot b^{2/3} \end{aligned}$$

Quocient de potències: Per tot $a > 0$, $m, r \in \mathbb{Z}$ i $n, s \in \mathbb{N}$, es compleix

$$\frac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{r}{s}}} = a^{\frac{m}{n} - \frac{r}{s}}$$

En efecte,

$$\begin{aligned}
 \frac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{r}{s}}} &= \frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[s]{a^r}} \\
 &= \frac{\sqrt[n \cdot s]{a^{ms}}}{\sqrt[n \cdot s]{a^{nr}}} \\
 &= \sqrt[n \cdot s]{\frac{a^{ms}}{a^{nr}}} \\
 &= \sqrt[n \cdot s]{a^{ms-nr}} \\
 &= a^{\frac{ms-nr}{ns}} \\
 &= a^{\frac{m}{n} - \frac{r}{s}}
 \end{aligned}$$

Exemples:

1.

$$\begin{aligned}
 \frac{5^3 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot 5^{3/4}}{5^4 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3} &= \frac{5^3 \cdot 5^{-2} \cdot 5^{3/4}}{5^4 \cdot 5^{-3}} \\
 &= \frac{(5^3 \cdot 5^{-2}) \cdot 5^{3/4}}{5} \\
 &= \frac{5 \cdot 5^{3/4}}{5} \\
 &= 5^{3/4}
 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
 \frac{a^2 b^{-1} a^{3/2} b^4}{a^{-1/2} b^{-2} a^{1/3}} &= \frac{(a^2 b^{-1}) (a^{3/2} b^4)}{a^{-1/2} (b^{-2} a^{1/3})} \\
 &= \frac{(a^2 b^{-1}) (b^4 a^{3/2})}{a^{-1/2} (a^{1/3} b^{-2})} \\
 &= \frac{a^2 (b^{-1} b^4) a^{3/2}}{(a^{-1/2} a^{1/3}) b^{-2}} \\
 &= \frac{a^2 (b^3 a^{3/2})}{a^{-1/6} b^{-2}} \\
 &= \frac{a^2 (a^{3/2} b^3)}{a^{-1/6} b^{-2}} \\
 &= \frac{(a^2 a^{3/2}) b^3}{a^{-1/6} b^{-2}} \\
 &= \frac{a^{7/2} b^3}{a^{-1/6} b^{-2}} \\
 &= \frac{a^{7/2}}{a^{-1/6}} \cdot \frac{b^3}{b^{-2}} \\
 &= a^{22/6} \cdot b^5 \\
 &= a^{11/3} \cdot b^5
 \end{aligned}$$

Potència d'una potència: Per tot $a > 0$, $m, r \in \mathbb{Z}$ i $n, s \in \mathbb{N}$, es compleix

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{m}{n} \cdot \frac{r}{s}}$$

En efecte,

$$\begin{aligned} \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{r}{s}} &= \left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{\frac{r}{s}} \\ &= \sqrt[s]{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^r} \\ &= \sqrt[s]{\sqrt[n]{(a^m)^r}} \\ &= \sqrt[n \cdot s]{a^{mr}} \\ &= a^{\frac{mr}{ns}} \\ &= a^{\frac{m}{n} \cdot \frac{r}{s}} \end{aligned}$$

Exemples:

1.

$$\begin{aligned} \left(2^{1/2}\right)^{1/3} \cdot \left(2^4\right)^{1/5} &= 2^{1/6} \cdot 2^{4/5} \\ &= 2^{29/30} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \frac{\left(a^{1/2} \cdot \frac{a^{1/3}}{a^{2/5}}\right)^{1/4}}{a^{-2/3}} &= \frac{\left(a^{1/2} \cdot a^{-1/15}\right)^{1/4}}{a^{-2/3}} \\ &= \frac{a^{1/8} \cdot a^{-1/60}}{a^{-2/3}} \\ &= \frac{a^{13/120}}{a^{-2/3}} \\ &= \frac{a^{13/120} \cdot a^{8/60}}{1} \\ &= a^{31/40} \end{aligned}$$

Potència d'un producte: Per tot $a, b > 0$, $m \in \mathbb{Z}$ i $n \in \mathbb{N}$, es compleix

$$(a \cdot b)^{m/n} = a^{m/n} \cdot b^{m/n}$$

En efecte,

$$\begin{aligned} (a \cdot b)^{m/n} &= \sqrt[n]{(a \cdot b)^m} \\ &= \sqrt[n]{a^m \cdot b^m} \\ &= \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{b^m} \\ &= a^{m/n} \cdot b^{m/n} \end{aligned}$$

Exemples:

1.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{3}{4}\right)^{3/2} \cdot 2^{3/2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{3/2} &= \left[\left(\frac{3}{4}\right)^{3/2} \cdot 2^{3/2}\right] \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{3/2} \\
&= \left(\frac{3}{4} \cdot 2\right)^{3/2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{3/2} \\
&= \left(\frac{3}{2}\right)^{3/2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{3/2} \\
&= \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3}\right)^{3/2} \\
&= 1^{3/2} = \sqrt{1^3} = 1
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
(a^3 \cdot b^{-4})^{5/6} &= (a^3)^{5/6} \cdot (b^{-4})^{5/6} \\
&= a^{5/2} \cdot b^{-10/3}
\end{aligned}$$

Potència d'un quocient: Per tot $a, b > 0$, $m \in \mathbb{Z}$ i $n \in \mathbb{N}$, es compleix

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{m/n} = \frac{a^{m/n}}{b^{m/n}}$$

En efecte,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a}{b}\right)^{m/n} &= \sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^m} \\
&= \sqrt[n]{\frac{a^m}{b^m}} \\
&= \frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[n]{b^m}} \\
&= \frac{a^{m/n}}{b^{m/n}}
\end{aligned}$$

Exemples:

1.

$$\begin{aligned}
\frac{(16 \cdot 9 \cdot 25)^{1/3}}{(8 \cdot 27 \cdot 5)^{1/3}} &= \left(\frac{16 \cdot 9 \cdot 25}{8 \cdot 27 \cdot 5}\right)^{1/3} \\
&= \left(\frac{10}{3}\right)^{1/3}
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a^2b}{b^{1/2}a}\right)^3 \cdot \left(\frac{a^{-1/3}b^5}{a^2b^3}\right)^{1/2} &= \frac{(a^2b)^3}{(b^{1/2}a)^3} \cdot \frac{(a^{-1/3}b^5)^{1/2}}{(a^2b^3)^{1/2}} \\
&= \frac{a^6b^3}{b^{3/2}a^3} \cdot \frac{a^{-1/6}b^{5/2}}{a^2b^{3/2}} \\
&= \frac{a^{35/6}b^{11/2}}{a^4b^3} \\
&= a^{11/6} \cdot b^{5/2}
\end{aligned}$$

2 Pràctica

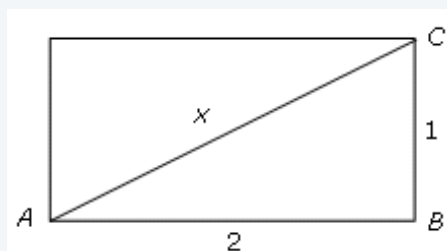
2.1 El conjunt dels nombres reals

Exercici 2.1

- (1) Calcula la diagonal del rectangle les dimensions del qual són 2 cm i 1 cm, i
- (2) determina si el nombre que has obtingut és racional o irracional.

Solució

- (1) Si designem per x el valor de la diagonal, com que és rectangle el triangle ABC



podem aplicar el teorema de Pitàgores. D'aquesta manera, tenim

$$x^2 = 2^2 + 1^2 = 5$$

Per tant, $x = \sqrt{5}$, és a dir, la diagonal del rectangle és un segment de longitud $\sqrt{5}$ cm.

- (2) Demostrarem per reducció a l'absurd que el nombre $\sqrt{5}$ es irracional. En altres paraules, suposant el contrari, és a dir, que $\sqrt{5}$ és racional, deduirem una contradicció. En efecte, si $\sqrt{5}$ és un nombre racional, aleshores podrem expressar-lo com una fracció

$$\sqrt{5} = \frac{n}{m} \tag{2.1.1}$$

on $n, m \in \mathbb{Z}$. No és restrictiu suposar que a més la fracció és irreductible, ja que, si no ho fos, la reduiríem a una fracció irreductible equivalent. Per tant, els nombres enters n i m són primers entre si. A més, m no pot ser 1 ja que, si ho fos, $\sqrt{5}$ seria un nombre enter i això no és possible ja que, en la figura 1 hem situat $\sqrt{5}$ sobre la recta mitjançant regla, escaire i compàs i hem comprovat que $\sqrt{5}$ és major que 2 i menor que 3.

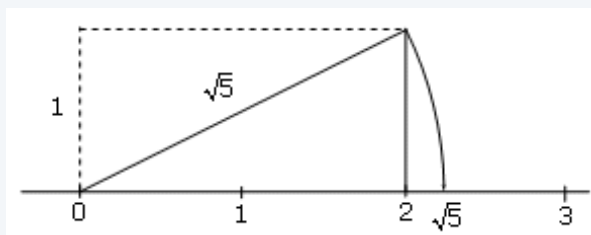


Figura 1

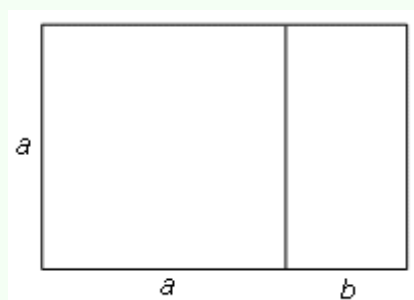
Ara bé, es compleix (2.1.1) si

$$\left(\frac{n}{m}\right)^2 = \frac{n^2}{m^2} = 5$$

però això no és possible ja que els nombres enters n^2 i m^2 , perquè són quadrats, tenen descomposicions en factors primers en què tots els factors estan elevats al quadrat i, a més, en haver suposat que n i m són primers entre si, no tenen cap factor en comú. Per tant, la fracció $\frac{n^2}{m^2}$ també és irreductible i no es pot simplificar i ser igual a 5.

Exercici 2.2

Un rectangle s'anomena auri quan té la propietat que si li traiem un quadrat, el rectangle que queda és semblant al primer.

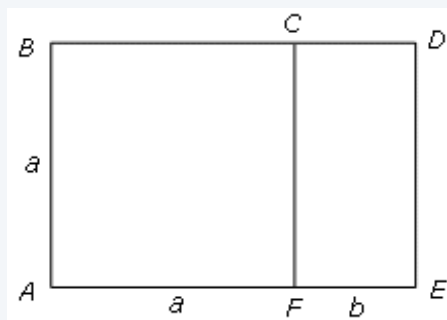


El quocient entre el costat major i el costat menor d'un rectangle auri s'anomena el nombre auri i es designa per Φ . (1) Calcula el nombre auri. (2) Prova que Φ és un nombre irracional.

Solució

(1) Com que són els rectangles $ABDE$ i $CDEF$ semblants, els seus costats seran proporcionals. Per tant, podem escriure

$$\Phi = \frac{\overline{AE}}{\overline{CF}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$$



és a dir,

$$\Phi = \frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

De la proporció

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

obtenim

$$1 + \frac{b}{a} = \frac{a}{b}$$

o, el que és el mateix,

$$1 + \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{a}{b}$$

Ara bé, sabem que $\Phi = \frac{a}{b}$ i, per tant, podem escriure

$$1 + \frac{1}{\Phi} = \Phi$$

és a dir,

$$\frac{1}{\Phi} = \frac{\Phi - 1}{1}$$

d'on

$$\Phi(\Phi - 1) = 1$$

$$\Phi^2 - \Phi = 1$$

$$\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$$

Resolent aquesta equació de segon grau, obtenim les dues solucions següents

$$\frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Tenint present que Φ designa un quocient entre longituds de segments, Φ ha de ser un nombre positiu. Per tant, el nombre auri ve donat per

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

(2) Demostrarem per reducció a l'absurd que Φ és un nombre irracional. Primer, observem que

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5}$$

d'on s'obté

$$\frac{\Phi - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{5} \quad (2.1.2)$$

Si fos Φ racional, com que és $\frac{1}{2}$ un nombre racional, aleshores, per (2.1.2), $\sqrt{5}$ seria un nombre racional, però això no és possible, segons hem vist en l'exercici 1. D'aquesta manera, deduïm que Φ és un nombre irracional.

Exercici 2.3

(1) Amb regla, escaire i compàs, representa sobre la recta següents nombres: a) $3(1 - \sqrt{2})$, b) $2(3 - \sqrt{2})$, c) $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$. (2) Prova que els tres nombres anteriors són irracionals.

Solució

(1) Per resoldre aquesta qüestió, primer tracem una recta horitzontal. Després situem l'origen i, a partir d'ell, situem la unitat.

a) Primer, construïm sobre la recta un segment de longitud $\sqrt{2}$. Per això, amb l'ajuda de l'escaire dibuixem un triangle rectangle isòsceles de catets iguals a 1. Pel teorema de Pitàgores, la seva hipotenusa serà $\sqrt{2}$. Amb l'ajuda del compàs, situem $\sqrt{2}$ sobre la recta. Hem construït així un segment de longitud $\sqrt{2}$, indicat en vermell en la figura 2

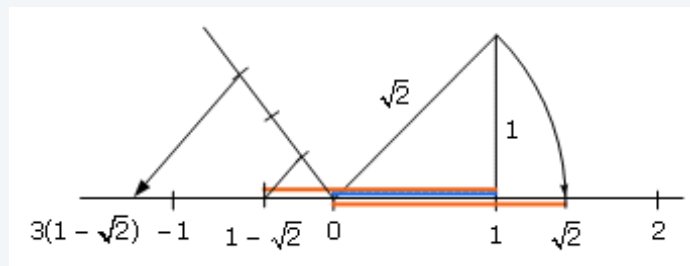


Figura 2

Ara situarem $1 - \sqrt{2}$ sobre la recta. Per això, amb l'ajuda de la regla, tracem un segment de longitud $\sqrt{2}$ a partir de 1 cap a l'esquerra; per veure com s'ha fet, mira la figura 2. Finalment, fem tres parts iguals sobre una recta qualsevol que passa per l'origen i, unim amb una recta el punt $1 - \sqrt{2}$ amb l'extrem de la primera part. Ara, amb l'ajuda de la regla i l'escaire, tracem una recta paral·lela des de l'extrem de la tercera part, pel teorema de Thales^a, el punt determinat per aquesta paral·lela sobre la recta serà $3(1 - \sqrt{2})$; per veure com es fa això mira de nou la figura 2.

b) Procedirem de la mateixa manera per situar sobre la recta el nombre $2(3 - \sqrt{2})$. Com a resum, adjuntem la figura 3, on es poden veure els passos que s'han fet per situar $2(3 - \sqrt{2})$.

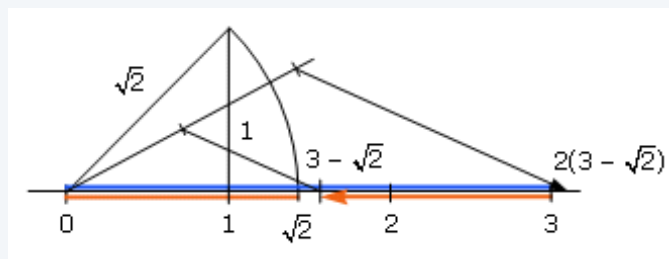


Figura 3

c) De nou, cal aplicar el mètode explicat a l'apartat a). Com resum, adjuntem la figura 4, on es poden veure els passos que s'han fet per situar $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$.

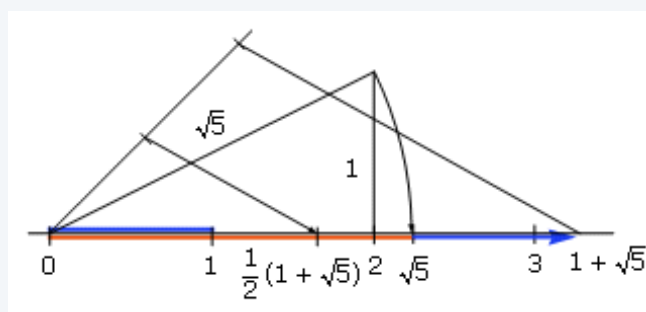


Figura 4

(2) Per provar que els tres nombres anteriors són irracionals utilitzarem el mètode de demostració per reducció a l'absurd. Segons aquest mètode, es suposa el contrari i per raonaments correctes hem de deduir una contradicció. En aquest cas, es conclou que la hipòtesi que havíem negado és vertadera.

a) Sabem que $\sqrt{2}$ és un nombre irracional. Suposem que $3(1 - \sqrt{2})$ és un nombre racional r , aleshores

$$\begin{aligned} r &= 3(1 - \sqrt{2}) \\ \frac{r}{3} &= 1 - \sqrt{2} \\ \sqrt{2} &= 1 - \frac{r}{3} \end{aligned}$$

però $1 - \frac{r}{3}$ és un nombre racional, cosa que és absurda amb el fet que $\sqrt{2}$ és un nombre irracional.

b) Procedirem de la mateixa manera, n'hi ha prou amb suposar que

$$\begin{aligned} r &= 2(3 - \sqrt{2}) \\ \frac{r}{2} &= 3 - \sqrt{2} \\ \sqrt{2} &= 3 - \frac{r}{2} \end{aligned}$$

i, com $3 - \frac{r}{2}$ és un nombre racional, s'arriba a una contradicció, ja que, $\sqrt{2}$ és un nombre irracional.

c) Ens adonem que $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ és el nombre auri. En l'exercici 2, hem vist que aquest nombre és irracional.

^aRecorda que el teorema de Thales diu que els segments determinats sobre dues rectes concurrents tallades per diverses rectes paral·leles són proporcionals.

Exercici 2.4

Utilitzant una calculadora que no té la tecla per calcular arrels, com trobaries una expressió decimal del nombre $\sqrt[3]{2}$ amb quatre xifres exactes?.

Solució

Sabem que $x = \sqrt[3]{2}$ si $x^3 = 2$. D'aquesta manera, hem de trobar nombres tals que el seu cub sigui 2. Per tempteig, mitjançant una calculadora, obtenim els següents resultats per $\sqrt[3]{2}$:

	Grau d'aprox.	$\sqrt[3]{2}$ és major que	$\sqrt[3]{2}$ és menor que	Observacions
(1)	Unitats	1	2	$1^3 = 1$ i $2^3 = 8$
(2)	Dècimes	1.2	1.3	$1.2^3 = 1.728$ i $1.3^3 = 2.197$
(3)	Centèsimes	1.25	1.26	$1.25^3 = 1.953125$ i $1.26^3 = 2.000376$
(4)	Mil · lèsimes	1.259	1.260	$1.259^3 = 1.995616979$ i $1.260^3 = 2.000376$
(5)	Deumil · lèsimes	1.2599	1.2600	$1.2599^3 = 1.999899758$ i $1.26^3 = 2.000376$
(6)	Centmil · lèsimes	1.25992	1.25993	$1.25992^3 = 1.999995000$ i $1.25993^3 = 2.000005000$

De (6) obtenim que 1.259 és el valor aproximat de $\sqrt[3]{2}$ amb 4 xifres exactes.

Exercici 2.5

Classifica els següents nombres en naturals, enters, racionals, irracionals, reals i no reals.

$$\sqrt{81}, \sqrt[3]{81}, -\frac{1}{2}\sqrt{63.999...}, 0.363636..., 7.3, \\ \frac{13}{7}, \sqrt{-25}, -\sqrt{25}, 0.363663666..., \sqrt[3]{-25}$$

Solució

Resumim els resultats mitjançant la taula següent:

Nombre	N	Z	Q	I	R	Observacions
$\sqrt{81}$	Sí	Sí	Sí	No	Sí	$\sqrt{81} = 9$
$\sqrt[3]{81}$	No	No	No	Sí	Sí	Nombre decimal no periòdic
$-\frac{1}{2}\sqrt{63.999...}$	No	Sí	Sí	No	Sí	$-\frac{1}{2}\sqrt{63.999...} = -\frac{1}{2}\sqrt{64} = -\frac{1}{2} \cdot 8 = -4$
0.363636...	No	No	Sí	No	Sí	Nombre decimal periòdic
7.3	No	No	Sí	No	Sí	Nombre decimal exacte
$\frac{13}{7}$	No	No	Sí	No	Sí	Nombre decimal periòdic
$\sqrt{-25}$	No	No	No	No	No	No hi ha cap nombre real el quadrat del qual sigui negatiu
$-\sqrt{25}$	No	Sí	Sí	No	Sí	$-\sqrt{25} = -5$
0.363663666...	No	No	No	Sí	Sí	Nombre decimal no periòdic
$\sqrt[3]{-25}$	No	No	No	Sí	Sí	Nombre decimal negatiu no periòdic

Exercici 2.6

Considera la successió d'interval·ls encaixats definida per

$$\left[\left(1 + \frac{1}{1}\right)^1, \left(1 + \frac{1}{1}\right)^2\right], \left[\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2, \left(1 + \frac{1}{2}\right)^3\right], \dots$$

és a dir, els interval·ls són de la forma

$$\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}\right]$$

on $n = 1, 2, 3, \dots$. Comprova que aquesta successió defineix el nombre irracional anomenat **nombre e** , prenent $n = 1, 10, 50, 100, 500, 1000, 10000, 100000$ i 1000000 . Escribeu les xifres exactes del valor aproximat del nombre e que pots obtenir a partir dels valors indicats per n .

Solució

Mitjançant una calculadora científica pots calcular de forma aproximada el nombre e .

$$e = 2.718281828$$

Ara calculemos els interval·ls encaixats per $n = 1, 10, 50, 100, 500, 1000, 10000, 100000$ i 1000000 .

n	$\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}\right]$
1	$[2, 4]$
10	$[2.59374246, 2.853116706]$
50	$[2.691588029, 2.74541979]$
100	$[2.704813829, 2.731861968]$
500	$[2.715568521, 2.720999658]$
1000	$[2.716923932, 2.719640856]$
10000	$[2.718145927, 2.718417741]$
100000	$[2.718268237, 2.71829542]$
1000000	$[2.718280469, 2.718283188]$

Per tant,

$$e = 2.71828\dots$$

Exercici 2.7

Escribeu les aproximacions decimals per defecte i per excés fins a l'ordre 5 de $\sqrt{3}$ i de $1 + \sqrt[3]{2}$. Amb quantes xifres exactes pots escriure els valors aproximats d'aquests nombres?

Solució

Amb una calculadora obtenim

$$\sqrt{3} = 1.732050808 \quad \text{i} \quad 1 + \sqrt[3]{2} = 2.25992105$$

Aleshores les aproximacions decimals de $\sqrt{3}$ fins a l'ordre indicat, són

Ordre	Aprox. per defecte	Aprox. per excés
1	1	2
2	1.7	1.8
3	1.73	1.74
4	1.732	1.733
5	1.7320	1.7321

i a partir d'aquests resultats, podem escriure el seu valor aproximat amb 4 xifres exactes

$$\sqrt{3} = 1.732\dots$$

Per $1 + \sqrt[3]{2}$ tenim

Ordre	Aprox. per defecte	Aprox. per excés
1	2	3
2	2.2	2.3
3	2.25	2.26
4	2.259	2.260
5	2.2599	2.2600

i a partir d'aquí, podem escriure el seu valor aproximat amb 2 xifres exactes

$$1 + \sqrt[3]{2} = 2.2\dots$$

Exercici 2.8

Situa sobre la recta real el nombre π .

Solució

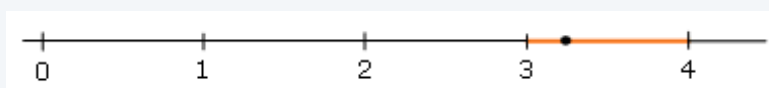
Per representar el nombre irracional π de forma aproximada sobre la recta real ho farem mitjançant aproximacions decimals, ja que no és possible fer-ho amb regla i compàs. Amb l'ajuda d'una calculadora, podem obtenir el següent valor aproximat

$$\pi = 3.141592654$$

Aleshores, prenent aproximacions decimals per defecte i per excés de π , tenim

Ordre	Aprox. per defecte	Aprox. per excés
1	3	4
2	3.1	3.2
3	3.14	3.15
4	3.141	3.142
...	...	...

Ara podem situar π sobre la recta real de la següent manera:



augmentant l'interval $[3, 4]$ de manera que puguem visualitzar l'ordre aproximació de les dècimes, tenim



augmentant l'interval $[3.1, 3.2]$ de manera que puguem veure l'ordre d'aproximació de les centèsimes, tenim



augmentant ara l'interval $[3.14, 3.15]$ de manera que puguem veure l'ordre d'aproximació de les mil·lèsimes, tenim



i així successivament, aquest procés pot continuar fins a aconseguir situar-lo amb l'aproximació del grau que ens interressi.

Exercici 2.9

Escriu tres nombres racionals i altres tres irracionals, compresos entre 4 i 5, utilitzant fraccions i arrels. Justifica que els nombres que escriguis compleixen la condició imposada.

Solució

Com a nombres racionals escollim, per exemple,

$$\frac{4+5}{2} = \frac{9}{2} = 4.5$$

que és el punt mitjà del segment $[4, 5]$,

$$\frac{4 + \frac{9}{2}}{2} = \frac{\frac{8+9}{2}}{2} = \frac{17}{4} = 4.25$$

que és el punt mitjà del segment $[4, \frac{9}{2}]$, i

$$\frac{\frac{9}{2} + 5}{2} = \frac{\frac{19}{2}}{2} = \frac{19}{4} = 4.75$$

que és el punt mitjà del segment $[\frac{9}{2}, 5]$.

Com que $4^2 = 16$ i $5^2 = 25$, com nombres irracionals escollim, per exemple,

$$\sqrt{17} = 4.123105626$$

$$\sqrt{18} = 4.242640687$$

i

$$\sqrt{19} = 4.358898944$$

2.2 Les operacions en el conjunt dels nombres reals

Exercici 2.10

De dos nombres reals a i b es coneix que $a = 7.325\dots$ i $b = 24.46\dots$. Dedueix entre què valors es trobaran $a + b$ i $a \cdot b$, i amb quantes xifres exactes podran donar-se en els resultats.

Solució

Per simplificar l'escriptura utilitzarem la notació $a \leq b \leq c$ per indicar que el nombre real b està comprès entre els nombres a i c . Així, segons les dades, les aproximacions per defecte i per excés de a i b són

$$7.325 \leq a \leq 7.326 \quad \text{i} \quad 24.46 \leq b \leq 24.47$$

Després,

$$7.325 + 24.46 = 31.785 \leq a + b \leq 31.796 = 7.326 + 24.47$$

i

$$7.325 \cdot 24.46 = 179.1695 \leq a \cdot b \leq 179.26722 = 7.326 \cdot 24.47$$

A la vista d'aquestes desigualtats, és clar que les úniques xifres exactes per la suma són

$$a + b = 31.7\dots$$

i pel producte,

$$a \cdot b = 179.\dots$$

Observa que només podem assegurar l'exactitud de les xifres de la suma $a + b$ fins a les dècimes, és a dir, fins a l'ordre anterior al que correspon l'última xifra exacta del sumand de menor precisió (24.46..., que és exacte fins a les centèsimes). Mentre que, en el producte $a \cdot b$ només podem garantir tres xifres significatives, és a dir, una xifra menys que el nombre de xifres significatives del factor que menys té (tots dos tenen quatre xifres significatives).

Exercici 2.11

Utilitzant que $\sqrt{17} = 4.1231046\dots$ i $\pi = 3.1415926\dots$, calcula amb aproximació fins a les mil · lèsimes, els nombres reals següents: (1) $\sqrt{17} + \pi$, (2) $\sqrt{17} - \pi$, (3) $\sqrt{17} \cdot \pi$, i (4) $\sqrt{17}/\pi$.

Solució

(1) Per obtenir $\sqrt{17} + \pi$ amb aproximació fins a les mil · lèsimes, s'han de prendre $\sqrt{17}$ i π amb aproximació fins a les deu mil · lèsimes. Aleshores,

$$\sqrt{17} + \pi = 4.1231\dots + 3.1415\dots = 7.2646\dots = 7.264\dots$$

(2) De la mateixa manera, per obtenir $\sqrt{17} - \pi$ amb aproximació fins a les mil · lèsimes, s'han de prendre $\sqrt{17}$ i π amb aproximació fins a les deu mil · lèsimes. Aleshores,

$$\sqrt{17} - \pi = 4.1231... - 3.1415... = 0.981\overset{?}{6}... = 0.981...$$

(3) En trobar-se $\sqrt{17} \cdot \pi$ entre 12 i 20, ja que $4 \leq \sqrt{17} \leq 5$ i $3 \leq \pi \leq 4$, per obtenir aquest producte amb aproximació fins a les mil · lèsimes, necessitem assegurar que cinc (dues xifres enteres i tres xifres decimals) de les seves xifres siguin significatives i, per tant, hem de prendre cada factor amb sis xifres significatives. Aleshores,

$$\sqrt{17} \cdot \pi = (4.12310...) \cdot (3.14159...) = 12.953\overset{?}{08973}... = 12.953...$$

(4) Com que $3 \leq \pi \leq 4$, aleshores $\frac{1}{4} = 0.25 \leq \frac{1}{\pi} \leq 0.333... = \frac{1}{3}$; per tant, $\sqrt{17}/\pi$ es troba entre 1 i $\frac{5}{3} = 1.666...$. Per obtenir aquest quocient amb aproximació fins a les mil · lèsimes, necessitem assegurar que quatre (una xifra sencera i tres xifres decimals) de les seves xifres siguin significatives i, per tant, hem de prendre el numerador i el denominador amb cinc xifres significatives. Aleshores,

$$\frac{\sqrt{17}}{\pi} = \frac{4.1231...}{3.1415...} = 1.312\overset{?}{4622} = 1.312...$$

Exercici 2.12

Sabent que $a = -1.427...$ i $b = 7.3902$, troba $a + b$, $a - b$, $a \cdot b$ i $\frac{a}{b}$, determinant la precisió de cada resultat.

Solució

Segons les dades, les aproximacions per defecte i per excés de a i b són

$$-1.428 \leq a \leq -1.427 \quad \text{i} \quad 7.3902 \leq b \leq 7.3903$$

Després,

$$-1.428 + 7.3902 = 5.9622 \leq a + b \leq 5.9633 = -1.427 + 7.3903$$

$$-1.428 - 7.3903 = -8.8183 \leq a - b \leq -8.8172 = -1.427 - 7.3902$$

ja que $-7.3903 \leq -b \leq -7.3902$, i, per tant, obtenim que

$$a + b = 5.96... \quad \text{i} \quad a - b = -8.81...$$

és a dir, només podem assegurar l'exactitud de les xifres de la suma $a + b$ i la resta $a - b$ fins a les centèsimes, ja que el sumand de menor precisió és exacte fins a les mil · lèsimes.

D'altra banda, tenim que

$$(-1.428) \cdot 7.3903 = -10.5533484 \leq a \cdot b \leq -10.5458154 = (-1.427) \cdot 7.3902$$

i

$$(-1.428) \cdot 0.13532 = -0.19323696 \leq \frac{a}{b} \leq -0.19308737 = (-1.427) \cdot 0.13531$$

ja que

$$\frac{1}{7.3903} = 0.135312504 \leq \frac{1}{b} \leq 0.135314335 = \frac{1}{7.3902}$$

és a dir,

$$\frac{1}{b} = 0.13531...$$

i, per tant, obtenim que

$$a \cdot b = -10.5... \quad i \quad \frac{a}{b} = -0.193...$$

és a dir, només podem garantir tres xifres significatives en el producte, és a dir, una xifra menys que el nombre de xifres significatives del factor -1.427 que menys té; en el quocient passa el mateix.

Exercici 2.13

Resol les següents qüestions: (1) calcula l'àrea d'un cercle de 3 cm de radi i expressa el resultat amb tres decimals exactes; (2) calcula l'àrea d'un triangle equilàter de 10 cm de costat i expressa el resultat amb dos decimals exactes.

Solució

(1) Sabem que l'àrea d'un cercle de radi r ve donada per la fórmula

$$A = \pi r^2$$

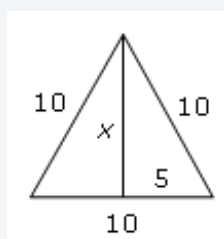
Com que $r = 3$, tenim que

$$A = 9\pi$$

Com que $27 \leq 9\pi \leq 36$, si volem expressar el resultat amb aproximació fins a les mil·lèsimes, necessitem assegurar que cinc (dues xifres enteres i tres xifres decimals) de les seves xifres siguin significatives i, per tant, hem de prendre π amb sis xifres significatives. Com que $\pi = 3.14159...$, aleshores

$$A = 9 \cdot (3.14159...) = 28.274 \overbrace{31}^? ... = 28.274...$$

(2) Si designem per x l'altura d'aquest triangle,



pel teorema de Pitàgores, tenim

$$10^2 = 5^2 + x^2$$

és a dir,

$$x^2 = 75$$

i, per tant, $x = \sqrt{75}$. Per tant, l'àrea del triangle serà

$$A = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \sqrt{75} = 5\sqrt{75}$$

Com que $40 \leq 5\sqrt{75} \leq 45$, si volem expressar el resultat amb aproximació fins a les centèsimes, necessitem garantir que quatre (dues xifres enteres i dos de decimals) de les seves xifres siguin significatives i, per tant, hem de prendre $\sqrt{75}$ amb cinc xifres significatives. Com que $\sqrt{75} = 8.6602\dots$, aleshores

$$A = 5 \cdot (8.6602\dots) = 43.301\dots = 43.30\dots$$

Exercici 2.14

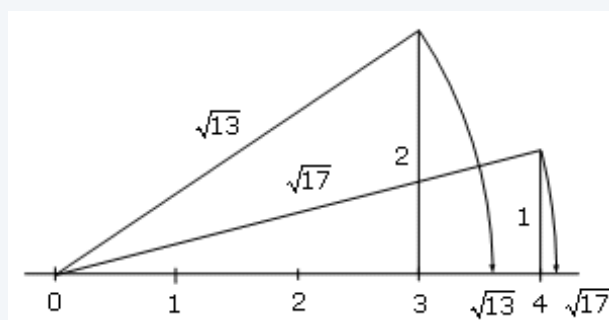
Considerem els nombres reals $\sqrt{13}$ i $\sqrt{17}$. Es demana: (1) la seva representació sobre la recta real i (2) utilitzant procediments geomètrics, representa també els següents nombres reals: (a) $\sqrt{13} - \sqrt{17}$, (b) $\sqrt{13} \cdot \sqrt{17}/3$, i (c) $\sqrt{17}/\sqrt{13}$.

Solució

(1) Observa primer que es compleixen les següents relacions

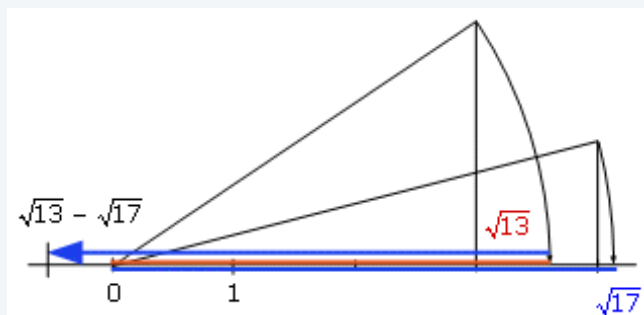
$$13 = 3^2 + 2^2 \quad \text{i} \quad 17 = 4^2 + 1^2$$

Ara, pel teorema de Pitàgores, podem construir segments de longitud $\sqrt{13}$ i $\sqrt{17}$, utilitzant regla, escaire i compàs. La següent figura mostra la construcció dels dos segments.



(2) Per resoldre les qüestions d'aquest apartat utilitzarem la construccions geomètriques corresponents a les operacions amb segments.

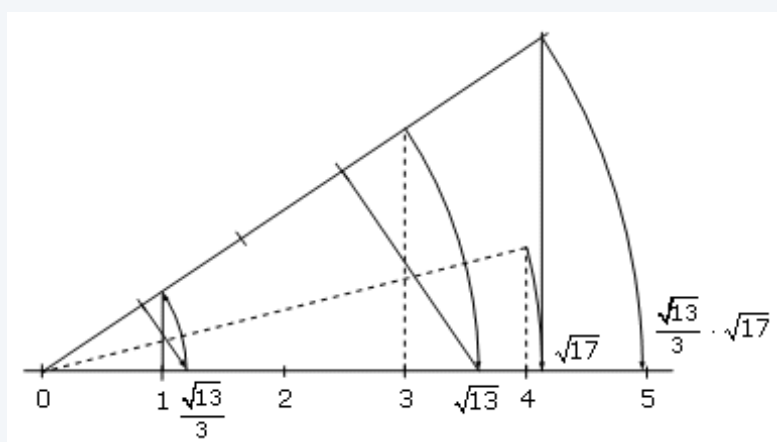
(a) Per representar $\sqrt{13} - \sqrt{17}$ sobre la recta real, fem la construcció que s'indica a la figura següent.



(b) Per obtenir

$$\frac{\sqrt{13} \cdot \sqrt{17}}{3} = \frac{\sqrt{13}}{3} \cdot \sqrt{17}$$

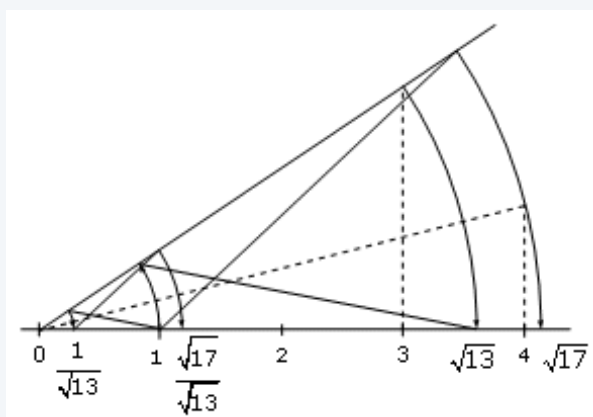
fem la construcció que es mostra en la figura següent.



(c) Per representar

$$\frac{\sqrt{17}}{\sqrt{13}} = \sqrt{17} \cdot \frac{1}{\sqrt{13}}$$

fem la construcció que s'indica a la figura següent.



Exercici 2.15

Raona amb exemples les qüestions següents: (1) la suma de dos nombres irracionals, és sempre un nombre irracional?; (2) el producte de dos nombres irracionals,

és sempre un nombre irracional? i (3) com és la suma d'un nombre racional amb un irracional? i el producte?

Solució

(1) La suma de dos nombres irracionals no és sempre un nombre irracional, ja que $\sqrt{2}$ i $-\sqrt{2}$ són dos nombres irracionals i la seva suma $\sqrt{2} + (-\sqrt{2}) = 0$ no és un nombre irracional.

(2) El producte de dos nombres irracionals no és sempre un nombre irracional, ja que $\sqrt{2}$ és un nombre irracional i el producte $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = (\sqrt{2})^2 = 2$ és un nombre racional.

(3) La suma d'un nombre racional r amb un irracional s és sempre un irracional, ja que, altrament, $r + s$ seria un nombre racional r' i, com a conseqüència, $s = r' - r$ seria també racional, cosa que no és possible per hipòtesi. De manera similar, el producte d'un nombre racional no nul r per un irracional s és sempre un irracional, ja que, altrament, $r \cdot s$ seria un nombre racional r' i, com a conseqüència, $s = \frac{r'}{r}$ seria també racional, cosa que tampoc és possible per hipòtesi.

Exercici 2.16

Observa el raonament següent i indica on és l'error: suposem que $a \neq 0$ i que $a = b$. Aleshores, multiplicant ambdós costats de la igualtat per b , obtenim $ab = b^2$. Sumant a ambdós membres de la igualtat $-a^2$, obtenim $ab - a^2 = b^2 - a^2$. Ara, traient factor comú a , a l'esquerra, i substituint $b^2 - a^2$ per $(b + a)(b - a)$, a la dreta, obtenim

$$a(b - a) = (b + a)(b - a)$$

Dividint ambdós membres de la igualtat per $b - a$, tenim

$$a = b + a$$

però $a = b$, per tant $a = 2a$. Finalment, en dividir ambdós costats de la igualtat per a , deduïm que $1 = 2$.

Solució

En passar de

$$a(b - a) = (b + a)(b - a)$$

a

$$a = b + a$$

es comet l'error de dividir per $b - a = 0$, ja que, $a = b$, cosa que no és possible.

Exercici 2.17

Resol les equacions següents, indicant les propietats que utilitzes en cada pas de la resolució: (1) $3(5 - 2x) + 4x - 3 = 6 - (4 - 2x)$; (2) $(x - 1)(x^2 - 5) = 0$; i (3) $x^2 + 16 = 0$.

Solució

(1)

$$\begin{aligned}
3(5 - 2x) + 4x - 3 &= 6 - (4 - 2x) \\
15 - 6x + 4x - 3 &= 6 - 4 + 2x \\
12 - 2x &= 2 + 2x \\
-2x - 2x &= -12 + 2 \\
-4x &= -10 \\
4x &= 10 \\
2x &= 5 \\
x &= \frac{5}{2}
\end{aligned}$$

(2)

$$(x - 1)(x^2 - 5) = 0$$

Per tractar-se d'un producte de dos factors que és igual a zero, els nombres reals que satisfan l'equació anterior han de complir que

$$x + 1 = 0 \quad \text{o} \quad x^2 - 5 = 0$$

De l'equació $x + 1 = 0$, es dedueix $x = -1$, i de l'altra equació, $x^2 - 5 = 0$, equivalent a $x^2 = 5$, es dedueixen dos valors per x , $\sqrt{5}$ i $-\sqrt{5}$; això és així perquè

$$(\sqrt{5})^2 = 5 \quad \text{i} \quad (-\sqrt{5})^2 = (\sqrt{5})^2 = 5$$

Per tant, les solucions de l'equació són -1 , $\sqrt{5}$ i $-\sqrt{5}$.

(3) L'equació $x^2 + 16 = 0$ és equivalent a $x^2 = -16$, però no hi ha cap nombre real que el quadrat del qual sigui negatiu. Per tant, l'equació no té solució en $\mathbb{R}$.

Exercici 2.18

Si x, y són nombres reals qualssevol, provar que es compleix la següent identitat

$$x^3 \pm y^3 = (x \pm y)(x^2 \mp xy + y^2)$$

Solució

Provarem que es compleix

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

i deixem com a exercici l'altra identitat. Tenim que

$$\begin{aligned}
(x - y)(x^2 + xy + y^2) &= x(x^2 + xy + y^2) - y(x^2 + xy + y^2) \\
&= x^3 + x^2y + xy^2 - yx^2 - xy^2 - y^3 \\
&= x^3 - y^3
\end{aligned}$$

Exercici 2.19

Prova que l'equació de segon grau $ax^2 + bx + c = 0$ té com solucions

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Solució

En efecte, puixò que $a \neq 0$ i suposant que $b^2 - 4ac \geq 0$, tenim

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= 0 \\ 4a \cdot (ax^2 + bx + c) &= 4a \cdot 0 \\ 4a^2x^2 + 4abx + 4ac &= 0 \\ 4a^2x^2 + 4abx + 4ac + b^2 &= b^2 \\ 4a^2x^2 + 4abx + 4ac + b^2 - 4ac &= b^2 - 4ac \\ 4a^2x^2 + 4abx + b^2 &= b^2 - 4ac \\ (2ax + b)^2 &= b^2 - 4ac \\ 2ax + b &= \pm \sqrt{b^2 - 4ac} \\ 2ax + b - b &= \pm \sqrt{b^2 - 4ac} - b \\ 2ax &= -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac} \\ x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \end{aligned}$$

2.3 L'ordre en el conjunt dels nombres reals

Exercici 2.20

Si a, b són dos nombres reals positius, provar que es compleix

$$a^2 < b^2 \implies a < b$$

Si a, b no són positius, és certa la implicació anterior?

Solució

Evidentment, es compleix

$$\begin{aligned} a^2 &< & b^2 \\ 0 &< & b^2 - a^2 \\ 0 &< & (a + b)(a - b) \end{aligned}$$

Com que per hipòtesi $a, b \in \mathbb{R}^+$, es compleix $a + b \in \mathbb{R}^+$ i, per tant, de l'última desigualtat, es dedueix $a - b \in \mathbb{R}^+$, és a dir, $a < b$.

Si a, b no són positius, la implicació no és certa, ja que, per exemple,

$$(-2)^2 = 4 < 9 = (-3)^2$$

i no és cert que -2 sigui menor que -3 .

Exercici 2.21

Si a, b són dos nombres reals positius, provar que es compleix

$$\sqrt{a \cdot b} \leq \frac{a + b}{2}$$

En què casos es dona la igualtat?

Solució

Observa que si $a > 0$, $b > 0$ i $a \neq b$, aleshores $\sqrt{a} > 0$, $\sqrt{b} > 0$ i $\sqrt{a} \neq \sqrt{b}$. Aleshores, es compleix

$$\begin{aligned} (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 &> 0 \\ (\sqrt{a})^2 - 2\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} + (\sqrt{b})^2 &> 0 \\ a - 2\sqrt{a \cdot b} + b &> 0 \\ a + b &> 2\sqrt{a \cdot b} \\ \frac{a + b}{2} &> \sqrt{a \cdot b} \end{aligned}$$

Per tant, la desigualtat estricta es compleix quan $a \neq b$. Si $a = b > 0$, aleshores la desigualtat es converteix en una igualtat, ja que, els dos membres són iguals aa .

Per altra banda, suposem $a > 0$, $b > 0$ i que es compleix

$$\begin{aligned} \sqrt{a \cdot b} &= \frac{a + b}{2} \\ ab &= \frac{(a + b)^2}{4} \\ 4ab &= (a + b)^2 \\ 4ab &= a^2 + 2ab + b^2 \\ 0 &= a^2 - 2ab + b^2 \\ 0 &= (a - b)^2 \end{aligned}$$

d'on es dedueix que $a = b$. Per tant, la igualtat es compleix quan $a = b$.

Exercici 2.22

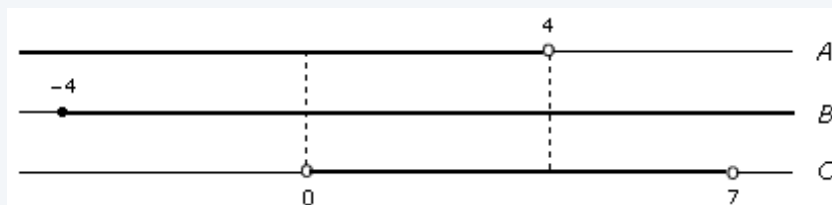
Sigui $A = \{x \in \mathbb{R} : x < 4\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : x \geq -4\}$ i $C = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 7\}$. (a) Expressa els conjunts donats en forma de intervals o semirectes; (b) expressa $A \cap B \cap C$ en forma d'entorn de algun punt.

Solució

(a) És clar que

$$\begin{aligned} A &= (-\infty, 4) \\ B &= [-4, +\infty) \\ C &= (0, 7) \end{aligned}$$

(b) Primer calcularem $A \cap B \cap C$. Per això, observa la figura següent:



És clar a partir d'ella que

$$A \cap B \cap C = (0, 4)$$

El punt mitjà d'aquest interval és 2 i la distància d'aquest a un qualsevol dels extrems és també 2. Per tant,

$$A \cap B \cap C = E_2(2)$$

Exercici 2.23

Calcula el suprem, ínfim, màxim i mínim (si existeixen) dels següents conjunts:

- a) $A = (-\infty, 3) \cup [10, 11)$
- b) $B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4x + 3 < 0\}$
- c) $C = \{x \in \mathbb{R} : |x - 1| \leq 3\}$
- d) $D = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$

Solució

a) És clar que el conjunt

$$A = (-\infty, 3) \cup [10, 11)$$

no està fitat inferiorment i que els punts del conjunt $[10, +\infty)$ són cotes superiors de A . Per això no existeix $\inf A$ i $\sup A = 11$. A més, A no admet màxim ni mínim.

b) Primer, expressarem

$$B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4x + 3 < 0\}$$

mitjançant intervals o semirectes. Per això, hem de resoldre la següent inequació de segon

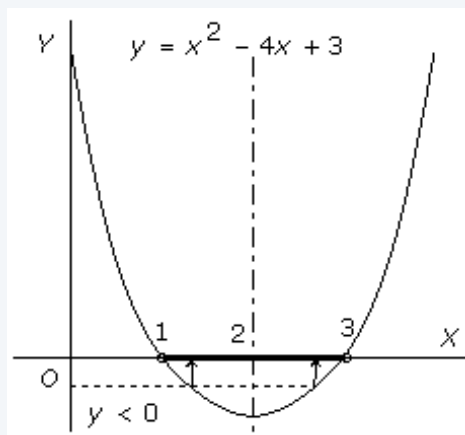
$$x^2 - 4x + 3 < 0$$

Un mètode per resoldre aquest tipus d'inequacions és representar de manera aproximada la paràbola $y = x^2 - 4x + 3$ i esbrinar després per a quins valors de

x és $y < 0$. Busquem els punts de tall de la paràbola amb l'eix OX , resolent l'equació

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

les solucions de les quals són $x = 1$ o $x = 3$. Per la simetria de la paràbola i pel fet que $a = 1 > 0$, en $x = 2$ la paràbola tindrà un mínim com es mostra a la figura següent.



A partir de la gràfica, és clar que $y < 0$ quan $1 < x < 3$. Per tant,

$$B = (1, 3)$$

A partir d'aquí, és clar que $\sup B = 3$, $\inf B = 1$ i que B no admet màxim ni mínim.

c) Observa, en primer lloc, que

$$\begin{aligned} |x - 1| &\leq 3 \\ -3 &\leq x - 1 \leq 3 \\ -2 &\leq x \leq 4 \end{aligned}$$

Després,

$$\begin{aligned} C &= \{x \in \mathbb{R} : |x - 1| \leq 3\} \\ &= [-2, 4] \end{aligned}$$

D'aquí, es dedueix de forma immediata que $\sup C = \max C = 4$ i $\inf C = \min C = -2$.

d) Ara tenim que

$$D = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$$

Observa que

$$\frac{1}{n} > 0$$

per a tot $n \in \mathbb{N}$. Per tant, 0 és una cota inferior de D . Observa també que

$$\frac{1}{n} \leq 1$$

per a tot $n \in \mathbb{N}$. Per tant, 1 és una cota superior de D . A partir d'aquests dos fets, és evident que $\sup D = \max D = 1$, $\inf D = 0$ i D no admet mínim.

Exercici 2.24

Escriu les expressions següents sense far uso del valor absolut:

- a) $|x - 3|$
- b) $|x - 1| + |x + 3|$
- c) $|1 - |x||$
- d) $|x - y| - |y|$

Solució

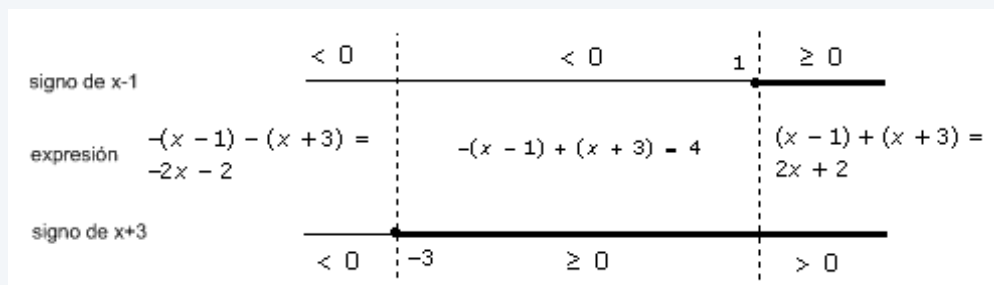
Per resoldre aquestes qüestions hem de recordar la definició de valor absolut:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

a) L'expressió $|x - 3|$ dependrà del signe de $x - 3$; si $x \geq 3$, aleshores $x - 3 \geq 0$, i si $x < 3$, aleshores $x - 3 < 0$. Per tant,

$$|x - 3| = \begin{cases} x - 3 & \text{si } x \geq 3 \\ -(x - 3) = 3 - x & \text{si } x < 3 \end{cases}$$

b) L'expressió $|x - 1| + |x + 3|$ dependrà dels signes de $x - 1$ i $x + 3$. Observa la següent figura:



A partir d'ella, és clar que es compleix

$$|x - 1| + |x + 3| = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x \geq 1 \\ 4 & \text{si } -3 \leq x < 1 \\ -2x - 2 & \text{si } x < -3 \end{cases}$$

c) L'expressió $|1 - |x||$ dependrà, primer, del signe de x . Així, tenim

$$|1 - |x|| = \begin{cases} |1 - x| & \text{si } x \geq 0 \\ |1 - (-x)| = |1 + x| & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Aleshores, si $x \geq 0$, tenim

$$|1 - x| = \begin{cases} 1 - x & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ -(1 - x) = x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

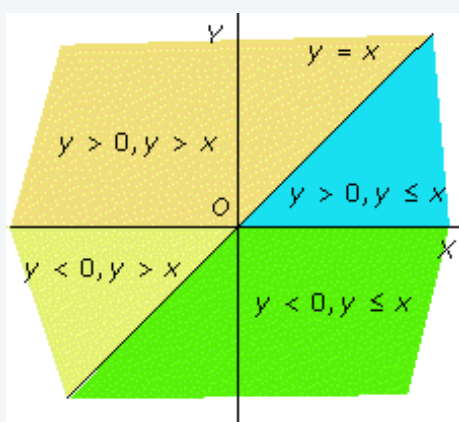
i si $x < 0$, tenim

$$|1+x| = \begin{cases} 1+x & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ -(1+x) = -1-x & \text{si } x < -1 \end{cases}$$

En resum, hem obtingut que

$$|1-|x|| = \begin{cases} x-1 & \text{si } x > 1 \\ 1-x & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 1+x & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ -1-x & \text{si } x < -1 \end{cases}$$

d) L'expressió $|x-y|-|y|$ dependrà dels signes de $x-y$ i y . Observa les regions del pla assenyalades a la figura següent:



A partir d'elles, és clar que es compleix

$$|x-y|-|y| = \begin{cases} -(x-y)-y = -x & \text{si } y > 0, y > x \\ x-y-y = x-2y & \text{si } y > 0, y \leq x \\ -(x-y)-(-y) = -x+2y & \text{si } y < 0, y > x \\ x-y-(-y) = x & \text{si } y < 0, y \leq x \end{cases}$$

Exercici 2.25

Resol les següents equacions:

a) $|x+1| = |2x-3|$

b) $|x+1| + |x-1| = 4$

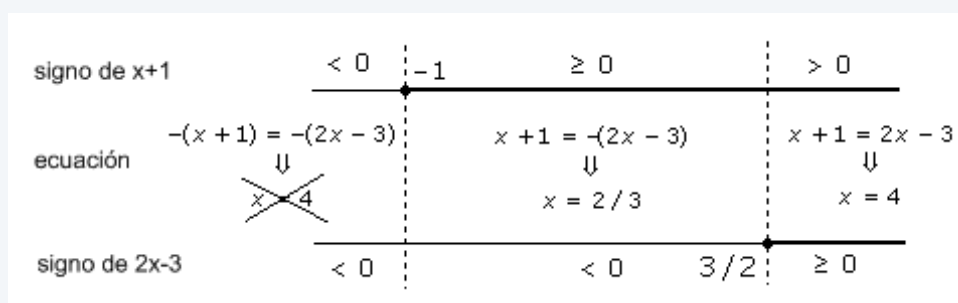
c) $|x^2-x| + |x| = 9$

Solució

Per resoldre aquestes equacions, primer examinarem els signes de les expressions amb valor absolut per saber quan l'expressió canvia de signe o queda igual. Segon, resoldrem les equacions que resulten en cada regió i, tercer, descartarem les solucions que no pertanyen a les regions corresponents.

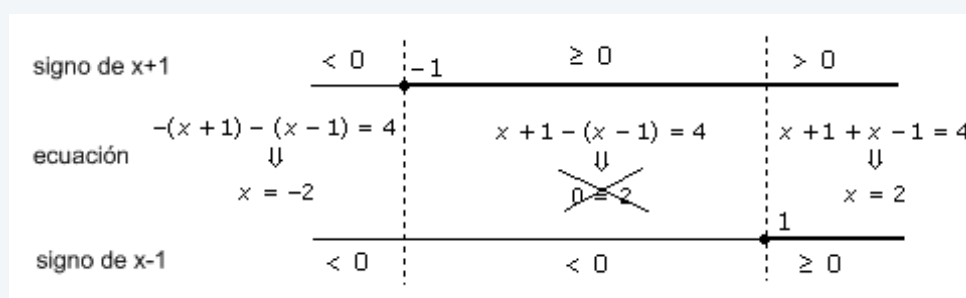
a) Per resoldre l'equació $|x+1| = |2x-3|$ cal examinar els signes de les expres-

sions $x + 1$ i $2x - 3$. Per això, observa la següent figura:



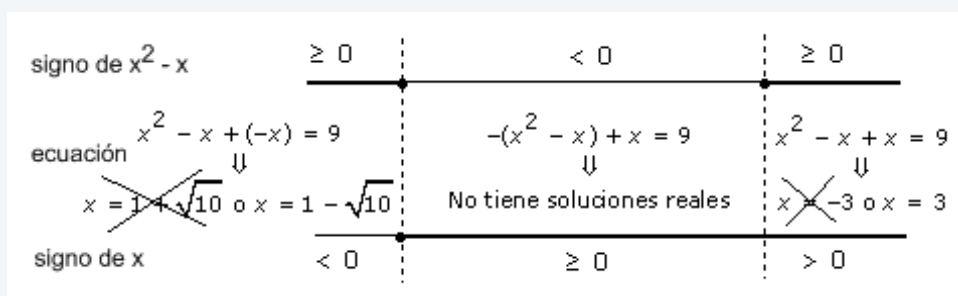
D'ella es desprèn que les solucions són $x = 2/3$ o $x = 4$.

b) De la mateixa manera resoldrem l'equació $|x + 1| + |x - 1| = 4$. Observa la següent figura per veure els signes de les expressions $x + 1$ i $x - 1$:



A partir d'ella, és clar que les solucions són $x = -2$ o $x = 2$.

c) Anàlogament, per resoldre l'equació $|x^2 - x| + |x| = 9$ hem de analitzar els signes de les expressions $x^2 - x$ i x . Per això, observa la següent figura:



A partir d'ella, és clar que les solucions són $x = 1 - \sqrt{10}$ o $x = 3$.

Exercici 2.26

Resol les inequacions següents, expressent les solucions en forma de intervals o semirectes:

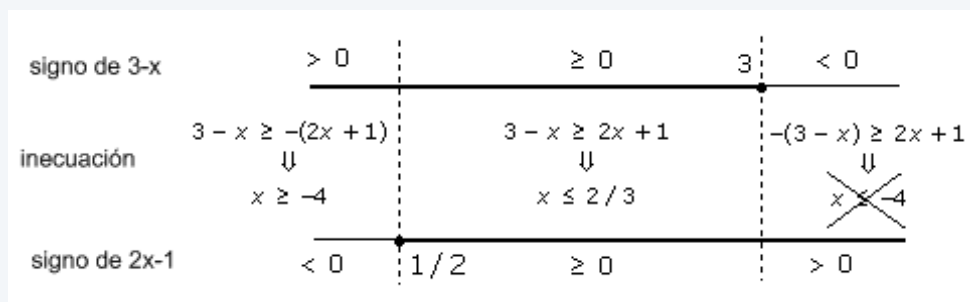
- $|3 - x| \geq |2x + 1|$
- $|x - 1| + |x + 2| > 3$
- $2 < |4 - x^2| \leq 12$
- $\left| \frac{x-1}{x+1} \right| < 2$

$$e) \left| 4 - \frac{1}{x^2} \right| < 1$$

Solució

Per resoldre aquestes inequacions utilitzarem la mateixa tècnica usada en el exercici 24, és a dir, primer examinarem els signes de les expressions amb valor absolut per saber quan l'expressió canvia de signe o queda igual. Segon, resoldrem les inequacions que resulten en cada regió i, tercer, descartarem les solucions que no pertanyen a les regions corresponents.

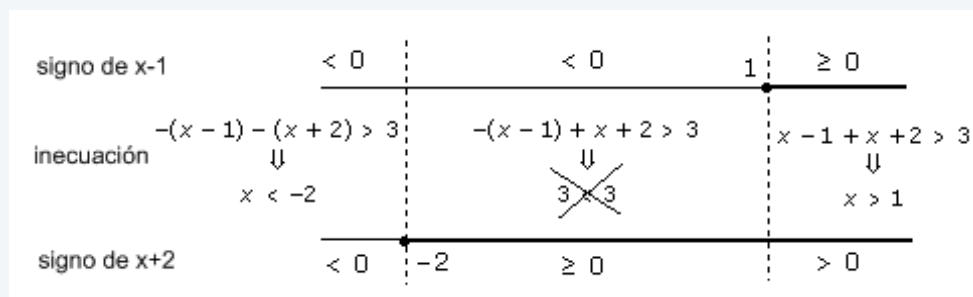
a) Per resoldre la inequació $|3 - x| \geq |2x + 1|$, observa la figura següent:



A partir de ella, és clar que les solucions són $-4 \leq x \leq 2/3$, és a dir, els punts de l'interval tancat

$$[-4, 2/3]$$

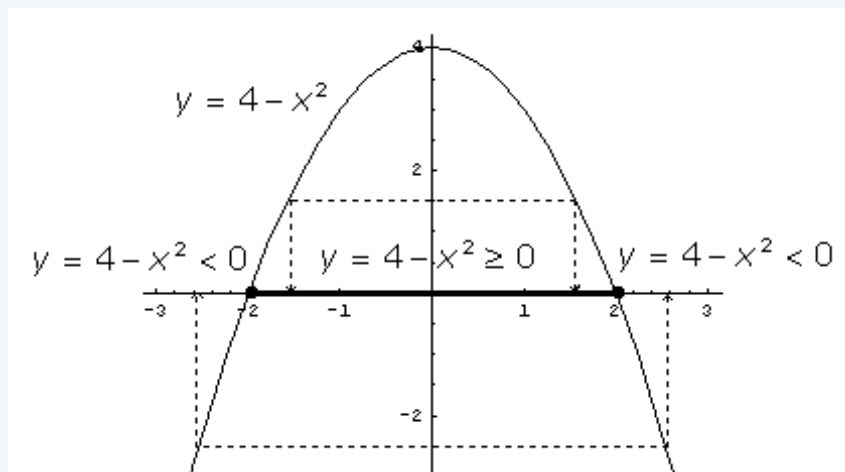
b) Per resoldre la inequació $|x - 1| + |x + 2| > 3$, observa la figura següent:



A partir d'ella, és clar que les solucions són $x < -2$ o $x > 1$, és a dir, els punts de la següent unió de semirectes obertes

$$(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$$

c) Per resoldre la inequació $2 < |4 - x^2| \leq 12$, observa la figura següent:



En ella hem representat la paràbola $y = 4 - x^2$ per poder esbrinar el signe de l'expressió $4 - x^2$. Veiem que si $-2 \leq x \leq 2$, aleshores $4 - x^2 \geq 0$, i en el cas contrari, $4 - x^2 < 0$. Hi ha, doncs, dos casos: (1) $-2 \leq x \leq 2$ i (2) $x < -2$ o $x > 2$.

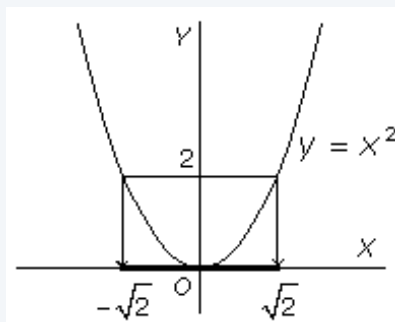
(1) Suposem que $-2 \leq x \leq 2$, aleshores en aquesta regió la inequació s'escriu com

$$\begin{aligned} 2 &< 4 - x^2 \leq 12 \\ -2 &< -x^2 \leq 8 \\ 2 &> x^2 \geq -8 \end{aligned}$$

d'on resulta $x^2 < 2$, ja que, $x^2 \geq -8$ es compleix per tot $x \in \mathbb{R}$. Per tant, les solucions són

$$-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$$

com es pot deduir de la següent figura



Observa que les solucions que hem obtingudes són dins de la regió considerada.

(2) Suposem ara que $x < -2$ o $x > 2$, aleshores en aquesta regió la inequació s'escriu com

$$\begin{aligned} 2 &< -(4 - x^2) \leq 12 \\ 2 &< -4 + x^2 \leq 12 \\ 6 &< x^2 \leq 16 \end{aligned}$$

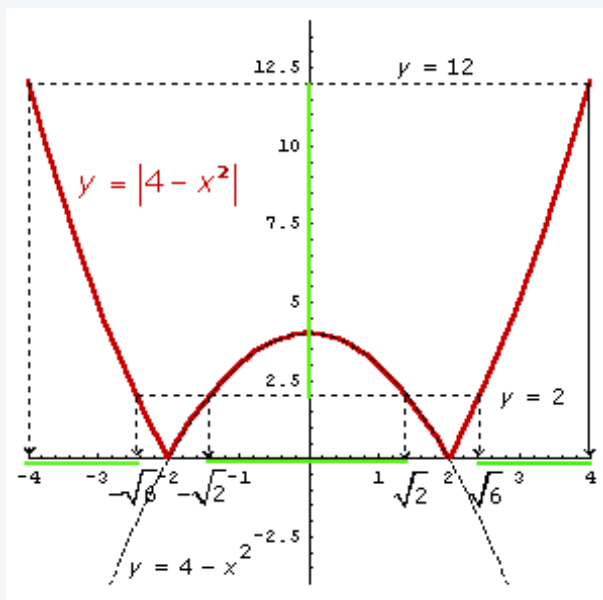
d'on resulten les inequacions $x^2 \leq 16$ i $x^2 > 6$. De la primera, obtenim $-4 \leq x \leq 4$, i de la segona, $x < -\sqrt{6}$ o $x > \sqrt{6}$. Igual que abans, aquests resultats es poden deduir de la representació gràfica de la paràbola $y = x^2$. De les solucions obtingudes només les que indiquem a continuació

$$-4 \leq x < -\sqrt{6} \quad \text{i} \quad \sqrt{6} < x \leq 4$$

estan en la regió considerada. En resum, les solucions de la inequació $2 < |4 - x^2| \leq 12$ són tots els nombres reals pertanyents a la següent unió d'interval

$$[-4, -\sqrt{6}) \cup (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{6}, 4]$$

En la figura següent s'assenyala un altre mètode per resoldre aquest tipus d'inequacions, basat en la representació gràfica de la corba $y = |4 - x^2|$ a partir de la paràbola $y = 4 - x^2$.



Observa com s'obtenen les mateixes solucions.

(d) Per resoldre la inequació

$$\left| \frac{x-1}{x+1} \right| < 2$$

primer efectuam les següents transformacions

$$\begin{aligned} \frac{|x-1|}{|x+1|} &< 2 \\ |x-1| &< 2|x+1| \end{aligned}$$

en el supòsit de que $x \neq -1$. Observa ara la següent figura:

signo de $x+1$	< 0	≥ 0	> 0
inecuación	$-(x-1) < -2(x+1)$ $\Downarrow$ $x < -3$	$-(x-1) < 2(x+1)$ $\Downarrow$ $x > -1/3$	$x-1 < 2(x+1)$ $\Downarrow$ $x > -3$
signo de $x-1$	< 0	< 0	≥ 0

A partir de ella, obtenim que les solucions de la inequació són $x < -3$ o $x > -1/3$, ja que, en la regió $x \geq 1$ la inequació es compleix trivialment (perquè $x \geq 1 > -3$), és a dir, els punts de la següent unió de semirectes

$$(-\infty, -3) \cup (-1/3, +\infty)$$

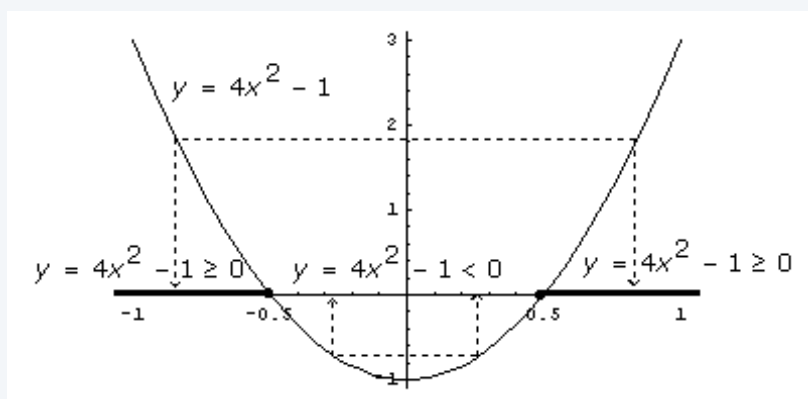
e) Per resoldre la inequació

$$\left| 4 - \frac{1}{x^2} \right| < 1$$

primer efectuamos les següents transformacions

$$\begin{aligned} \left| \frac{4x^2 - 1}{x^2} \right| &< 1 \\ \frac{|4x^2 - 1|}{|x^2|} &< 1 \\ \frac{|4x^2 - 1|}{x^2} &< 1 \\ |4x^2 - 1| &< x^2 \end{aligned}$$

en el supòsit de que $x \neq 0$. En la següent figura hem dibuixat la paràbola $y = 4x^2 - 1$ per poder esbrinar el signe de l'expressió $4x^2 - 1$.



Observa que per $x \leq -1/2$ o $x \geq 1/2$ es compleix $4x^2 - 1 \geq 0$, i en el cas contrari es compleix $4x^2 - 1 < 0$. Hi ha, doncs, dos casos: (1) $x \leq -1/2$ o $x \geq 1/2$ i (2) $-1/2 < x < 1/2$.

(1) Suposem que $x \leq -1/2$ o $x \geq 1/2$, aleshores en aquesta regió la inequació s'escriu així

$$\begin{aligned} 4x^2 - 1 &< x^2 \\ 3x^2 &< 1 \\ x^2 &< \frac{1}{3} \end{aligned}$$

les solucions de les quals són

$$-1/\sqrt{3} < x < 1/\sqrt{3}$$

com es pot deduir en seguida a partir de la gràfica de la paràbola $y = x^2$. Per tant, les solucions que estan dins de la regió considerada són

$$-1/\sqrt{3} < x \leq -1/2 \quad \text{o} \quad 1/2 \leq x < 1/\sqrt{3} \quad (2.3.1)$$

(2) Suposem ara que $-1/2 < x < 1/2$, aleshores en aquesta regió la inequació s'escriu així

$$\begin{array}{rcl} -(4x^2 - 1) & < & x^2 \\ -4x^2 + 1 & < & x^2 \\ 1 & < & 5x^2 \\ \frac{1}{5} & < & x^2 \end{array}$$

les solucions de les quals són

$$x < -1/\sqrt{5} \text{ o } x > 1/\sqrt{5}$$

com es pot deduir en seguida a partir de la gràfica de la paràbola $y = x^2$. De les solucions obtingudes, només estan dins de la regió considerada les que indiquem a continuació

$$1/\sqrt{5} < x < 1/2 \quad \text{o} \quad -1/2 < x < -1/\sqrt{5} \quad (2.3.2)$$

En resum, ajuntant les solucions (2.3.1) i (2.3.2), obtenim que les solucions de la inequació dada són tots els nombres reals de la següent unió d'interval oberts

$$\left(-1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{5}\right) \cup \left(1/\sqrt{5}, 1/\sqrt{3}\right)$$

2.4 Potències enteres de nombres reals

Exercici 2.27

Calcular:

a)

$$\left[\left(-\frac{1}{3} \right)^5 \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^2 \cdot \left(-\frac{1}{3} \right)^3 \right] : \left[\left(-\frac{1}{3} \right)^4 \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^5 \right]$$

b)

$$\frac{(0.25)^3 \cdot \left(-\frac{1}{4} \right)^2}{\left(-\frac{1}{2} \right)^3 \cdot (0.5)^2}$$

c)

$$\frac{5^3 \cdot \left(\frac{1}{25} \right)^2 \cdot 5^7}{5^4 \cdot \left(\frac{1}{5} \right)^2}$$

d)

$$\frac{\left(\frac{1}{3} \right)^7 \cdot \left(-\frac{1}{4} \right)^2 \cdot \left(\frac{1}{9} \right)^4}{\left[\left(\frac{1}{9} \right)^2 \right]^3 \cdot \frac{1}{27}}$$

Solució

a)

$$\begin{aligned} \left[\left(-\frac{1}{3} \right)^5 \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^2 \cdot \left(-\frac{1}{3} \right)^3 \right] : \left[\left(-\frac{1}{3} \right)^4 \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^5 \right] &= \frac{\left[-\left(\frac{1}{3} \right)^5 \right] \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^2 \cdot \left[-\left(\frac{1}{3} \right)^3 \right]}{\left(\frac{1}{3} \right)^4 \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^5} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{3} \right)^{10}}{\left(\frac{1}{3} \right)^9} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
 \frac{(0.25)^3 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^2}{\left(-\frac{1}{2}\right)^3 \cdot (0.5)^2} &= \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2}{\left[-\left(\frac{1}{2}\right)^3\right] \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2} \\
 &= \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^5}{-\left(\frac{1}{2}\right)^5} \\
 &= -\frac{\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^5}{\left(\frac{1}{2}\right)^5} \\
 &= -\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{\left(\frac{1}{2}\right)^5} \\
 &= -\left(\frac{1}{2}\right)^5 \\
 &= -\frac{1}{2^5} \\
 &= -\frac{1}{32}
 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
 \frac{5^3 \cdot \left(\frac{1}{25}\right)^2 \cdot 5^7}{5^4 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2} &= \frac{5^{10} \cdot \left[\left(\frac{1}{5}\right)^2\right]^2}{5^4 \cdot \frac{1}{5^2}} \\
 &= \frac{5^{10} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^4}{\frac{5^4}{5^2}} \\
 &= \frac{5^{10} \cdot \frac{1}{5^4}}{5^2} \\
 &= \frac{\frac{5^{10}}{5^4}}{5^2} \\
 &= \frac{5^6}{5^2} \\
 &= 5^4 \\
 &= 625
 \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^7 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^4}{\left[\left(\frac{1}{9}\right)^2\right]^3 \cdot \frac{1}{27}} &= \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^7 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left[\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]^4}{\left(\frac{1}{9}\right)^6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3} \\
&= \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^7 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^8}{\left[\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]^6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3} \\
&= \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{15} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^{12} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3} \\
&= \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{15} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^{15}} \\
&= \left(\frac{1}{4}\right)^2 \\
&= \frac{1}{16}
\end{aligned}$$

Exercici 2.28

Calcular:

a)

$$\frac{(a^2 \cdot b \cdot c)^3 \cdot (a \cdot b^2 \cdot c^3)^4}{\left(\frac{a^2 \cdot b}{b^2 \cdot c}\right)^2 \cdot \left(\frac{a \cdot b}{c}\right)^3}$$

b)

$$\frac{\left[\left(\frac{1}{a^2 \cdot b}\right)^2\right]^3 \cdot \left(\frac{a^3 \cdot b \cdot c}{b^3}\right)^2}{\left(\frac{a \cdot b \cdot c}{b^3}\right)^2 \div \left(\frac{b \cdot c}{a^2}\right)^2}$$

Solució

a)

$$\begin{aligned}
\frac{(a^2 \cdot b \cdot c)^3 \cdot (a \cdot b^2 \cdot c^3)^4}{\left(\frac{a^2 \cdot b}{b^2 \cdot c}\right)^2 \cdot \left(\frac{a \cdot b}{c}\right)^3} &= \frac{(a^2)^3 \cdot b^3 \cdot c^3 \cdot a^4 \cdot (b^2)^4 \cdot (c^3)^4}{\frac{(a^2 \cdot b)^2}{(b^2 \cdot c)^2} \cdot \frac{(a \cdot b)^3}{c^3}} \\
&= \frac{a^6 \cdot b^3 \cdot c^3 \cdot a^4 \cdot b^8 \cdot c^{12}}{\frac{(a^2)^2 \cdot b^2}{b^4 \cdot c^2} \cdot \frac{a^3 \cdot b^3}{c^3}} \\
&= \frac{a^{10} \cdot b^{11} \cdot c^{15}}{\frac{a^4 \cdot b^2 \cdot a^3 \cdot b^3}{b^4 \cdot c^2 \cdot c^3}} \\
&= \frac{a^{10} \cdot b^{11} \cdot c^{15}}{\frac{a^7 \cdot b^5}{b^4 \cdot c^5}} \\
&= \frac{a^{10} \cdot b^{11} \cdot c^{15}}{1} : \frac{a^7 \cdot b}{c^5} \\
&= \frac{a^{10} \cdot b^{11} \cdot c^{15} \cdot c^5}{a^7 \cdot b} \\
&= a^3 \cdot b^{10} \cdot c^{20}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\frac{\left[\left(\frac{1}{a^2 \cdot b}\right)^2\right]^3 \cdot \left(\frac{a^3 \cdot b \cdot c}{b^3}\right)^2}{\left(\frac{a \cdot b \cdot c}{b^3}\right)^2 : \left(\frac{b \cdot c}{a^2}\right)^2} &= \frac{\left(\frac{1}{a^2 \cdot b}\right)^6 \cdot \frac{(a^3 \cdot b \cdot c)^2}{(b^3)^2}}{\frac{(a \cdot b \cdot c)^2}{(b^3)^2} : \frac{(b \cdot c)^2}{(a^2)^2}} \\
&= \frac{\frac{1}{(a^2 \cdot b)^6} \cdot \frac{a^6 \cdot b^2 \cdot c^2}{b^6}}{\frac{a^2 \cdot b^2 \cdot c^2}{b^6} : \frac{b^2 \cdot c^2}{a^4}} \\
&= \frac{\frac{1}{a^{12} \cdot b^6} \cdot \frac{a^6 \cdot b^2 \cdot c^2}{b^6}}{\frac{a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 \cdot a^4}{b^6 \cdot b^2 \cdot c^2}} \\
&= \frac{\frac{a^6 \cdot b^2 \cdot c^2}{a^{12} \cdot b^6 \cdot b^6}}{\frac{a^6 \cdot b^2 \cdot c^2}{b^8 \cdot c^2}} \\
&= \frac{a^6 \cdot b^2 \cdot c^2 \cdot b^8 \cdot c^2}{a^{12} \cdot b^{12} \cdot a^6 \cdot b^2 \cdot c^2} \\
&= \frac{a^6 \cdot b^{10} \cdot c^4}{a^{18} \cdot b^{14} \cdot c^2} \\
&= \frac{c^2}{a^{12} \cdot b^4}
\end{aligned}$$

Exercici 2.29

Demostrar que si a i b són dos nombres qualssevol no nuls, aleshores

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

Solució

En efecte,

$$\begin{aligned}\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} &= \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n} \\ &= \frac{1}{\frac{a^n}{b^n}} \\ &= \frac{b^n}{a^n} \\ &= \left(\frac{b}{a}\right)^n\end{aligned}$$

Exercici 2.30

Calcular

a)

$$\frac{(0.1)^{-7} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{-5}}{\left(\frac{1}{100}\right)^2 \cdot [(-0.001)^{-3}]^2}$$

b)

$$\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^5 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2}{\left(\frac{1}{9}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{1}{27}\right)^{-3}}$$

Solució

a)

$$\begin{aligned}\frac{(0.1)^{-7} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{-5}}{\left(\frac{1}{100}\right)^2 \cdot [(-0.001)^{-3}]^2} &= \frac{\left(\frac{1}{10}\right)^{-7} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{-5}}{\left[\left(\frac{1}{10}\right)^2\right]^2 \cdot \left(-\frac{1}{1000}\right)^{-6}} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{10}\right)^{-12}}{\left(\frac{1}{10}\right)^4 \cdot \left[-\left(\frac{1}{10}\right)^3\right]^{-6}} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{10}\right)^{-12}}{\left(\frac{1}{10}\right)^4 \cdot (-1)^{-6} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{-18}} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{10}\right)^{-12}}{\left(\frac{1}{10}\right)^{-14}} \\ &= \left(\frac{1}{10}\right)^2 \\ &= \frac{1}{100}\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
 \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^5 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2}{\left(\frac{1}{9}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{1}{27}\right)^{-3}} &= \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2}{\left(\frac{1}{9}\right)^{-2} \cdot \left[\left(\frac{1}{3}\right)^3\right]^{-3}} \\
 &= \frac{\left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^2}{\left(\frac{1}{9}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-9}} \\
 &= \left(\frac{1}{3}\right)^{10} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^4 \\
 &= \left(\frac{1}{3}\right)^{10} \cdot \left[\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]^4 \\
 &= \left(\frac{1}{3}\right)^{10} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^8 \\
 &= \left(\frac{1}{3}\right)^{18}
 \end{aligned}$$

Exercici 2.31

Calcular:

a)

$$\frac{(a^{-3}b^4)^{-1}c^2}{(5^{-3}a^{-1}b^2) \cdot (5^2a^3b^{-4})^2 \cdot a^{-5}}$$

b)

$$\left[\left(\frac{2a}{bc^2}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{(2ab^2)^3}{(2a^2) \cdot (2b^2)}\right)^{-2} \right] : \left(\frac{b^2a}{2c^{-2}}\right)^{-3}$$

Solució

a)

$$\begin{aligned}
 \frac{(a^{-3}b^4)^{-1}c^2}{(5^{-3}a^{-1}b^2) \cdot (5^2a^3b^{-4})^2 \cdot a^{-5}} &= \frac{a^3b^{-4}c^2}{(5^{-3}a^{-6}b^2) \cdot (5^4a^6b^{-8})} \\
 &= \frac{a^3b^{-4}c^2}{5a^0b^{-6}} \\
 &= \frac{a^3b^2c^2}{5}
 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
& \left[\left(\frac{2a}{bc^2} \right)^{-3} \cdot \left(\frac{(2ab^2)^3}{(2a^2) \cdot (2b^2)} \right)^{-2} \right] : \left(\frac{b^2a}{2c^{-2}} \right)^{-3} = \left(\frac{(2a)}{(bc^2)} \right)^{-3} \\
& = \left(\frac{2^{-3}a^{-3}}{b^{-3}(c^2)^{-3}} \cdot \frac{(2ab^2)^{-6}}{(2a^2)^{-2} \cdot (2b^2)^{-2}} \right) : \frac{(b^2)^{-3}a^{-3}}{2^{-3}(c^{-2})^{-3}} \\
& = \left(\frac{2^{-3}a^{-3}}{b^{-3}c^{-6}} \cdot \frac{2^{-6}a^{-6}(b^2)^{-6}}{2^{-2}(a^2)^{-2} \cdot 2^{-2}(b^2)^{-2}} \right) : \frac{b^{-6}a^{-3}}{2^{-3}c^6} \\
& = \left(\frac{2^{-3}a^{-3}}{b^{-3}c^{-6}} \cdot \frac{2^{-6}a^{-6}b^{-12}}{2^{-2}a^{-4} \cdot 2^{-2}b^{-4}} \right) : \frac{b^{-6}a^{-3}}{2^{-3}c^6} \\
& = \frac{(2^{-3}a^{-3}) \cdot (2^{-6}a^{-6}b^{-12})}{(b^{-3}c^{-6}) \cdot 2^{-4}a^{-4}b^{-4}} : \frac{b^{-6}a^{-3}}{2^{-3}c^6} \\
& = \frac{2^{-9}a^{-9}b^{-12}}{2^{-4}a^{-4}b^{-7}c^{-6}} : \frac{b^{-6}a^{-3}}{2^{-3}c^6} \\
& = \frac{(2^{-9}a^{-9}b^{-12}) \cdot (2^{-3}c^6)}{(2^{-4}a^{-4}b^{-7}c^{-6}) \cdot (b^{-6}a^{-3})} \\
& = \frac{2^{-12}a^{-9}b^{-12}c^6}{2^{-4}a^{-7}b^{-13}c^{-6}} \\
& = 2^{-8}a^{-2}bc^{12} \\
& = \frac{bc^{12}}{2^8a^2}
\end{aligned}$$

Exercici 2.32

El ésser viu més petit és un virus que pesa de l'ordre de 10^{-21} Kg i el més gran és la ballena que pesa aproximadament 1.38×10^5 Kg. Quants virus serien necessaris per aconseguir el pes d'una balena?

Solució

El nombre de virusserà

$$\frac{1.38 \times 10^5}{10^{-21}} = 1.38 \times 10^{26}$$

Exercici 2.33

El volum estimat de tots els oceans de la Terra és de 1285600000 Km^3 i el volum de aigua dulce estimat és de 350000000 Km^3 . Quina és la proporció?

Solució

Expressando en notació científica ambdues magnitudes, obtenim

$$1285600000 \text{ Km}^3 = 1.2856 \times 10^9 \text{ Km}^3 \simeq 1.3 \times 10^9 \text{ Km}^3$$

i

$$350000000 \text{ Km}^3 = 3.5 \times 10^7 \text{ Km}^3$$

Aleshores, la proporció es

$$\frac{3.5 \times 10^7}{1.3 \times 10^9} \simeq 2.7 \times 10^{-2}$$

és a dir, de l'ordre del 2.7 %.

Exercici 2.34Sabent que $A = 9 \times 10^{-2}$, $B = 8 \times 10^{-3}$, $C = 3 \times 10^{-4}$ i $D = 5 \times 10^5$, calcula

$$(AB)^3 (CD)^4$$

i expressa-ho en notació científica.

Solució

Primer calculem

$$\begin{aligned} AB &= (9 \times 10^{-2}) \cdot (8 \times 10^{-3}) \\ &= 72 \times 10^{-5} \\ &= 7.2 \times 10^{-4} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} CD &= (3 \times 10^{-4}) \cdot (5 \times 10^5) \\ &= 15 \times 10 \\ &= 1.5 \times 10^2 \end{aligned}$$

Aleshores, tenim

$$\begin{aligned} (AB)^3 (CD)^4 &= (7.2 \times 10^{-4})^3 \cdot (1.5 \times 10^2)^4 \\ &= (373.248 \times 10^{-12}) \cdot (5.0625 \times 10^8) \\ &= 1889.568 \times 10^{-4} \\ &= 1.889568 \times 10^{-1} \\ &\simeq 1.89 \times 10^{-1} \end{aligned}$$

2.5 Arrels de nombres reals

Exercici 2.35

Resol les següents equacions:

- a) $x^2 = 49$
- b) $x^4 = 16$
- c) $x^3 - 27 = 0$
- d) $x^3 + 125 = 0$
- e) $x^2 + 25 = 0$
- f) $x^5 + 32 = 0$

Solució

- a) És clar que les solucions de l'equació $x^2 = 49$ són $x_1 = \sqrt{49} = 7$ i $x_2 = -\sqrt{49} = -7$.
- b) Com que $16 = 2^4 = (-2)^4$, aleshores les solucions de l'equació $x^4 = 16$ són ± 2 .
- c) Com que $27 = 3^3$, aleshores l'equació $x^3 = 27$ té com solució $x = 3$.
- d) Com que $-125 = (-5)^3$, aleshores l'equació $x^3 = -125$ té com solució $x = -5$.
- e) L'equació $x^2 = -25$ no té solució, ja que un nombre real al quadrat sempre és no negatiu.
- f) Com que $-32 = (-2)^5$, aleshores l'equació $x^5 = -32$ té com solució $x = -2$.

Exercici 2.36

Calcula x perquè siguin certes les següents igualtats:

- a) $\sqrt[3]{x} = a^2bc^4$
- b) $\sqrt[4]{5ax} = 5a^3c$
- c) $\sqrt{x} = 7 + a$

Solució

- a) Si a^2bc^4 és l'arrel cúbica de x , aleshores

$$\begin{aligned} x &= (a^2bc^4)^3 \\ &= (a^2)^3b^3(c^4)^3 \\ &= a^6b^3c^{12} \end{aligned}$$

Després

$$\sqrt[3]{a^6b^3c^{12}} = a^2bc^4$$

b) Si $5a^3c$ és l'arrel quarta de $5ax$, aleshores

$$\begin{aligned} 5ax &= (5a^3c)^4 \\ &= 5^4(a^3)^4c^4 \\ &= 5^4a^{12}c^4 \\ x &= \frac{5^4a^{12}c^4}{5a} \\ &= 5^3a^{11}c^4 \end{aligned}$$

Després

$$\sqrt[4]{5a \cdot 5^3a^{11}c^4} = 5a^3c$$

c) Si $7 + a$ és l'arrel quadrada de x , aleshores

$$\begin{aligned} x &= (7 + a)^2 \\ &= 49 + 14a + a^2 \end{aligned}$$

Després

$$\sqrt{49 + 14a + a^2} = 7 + a$$

Exercici 2.37

Calcula: (a) $(-\sqrt{25})^2$ (b) $(\sqrt{-25})^2$ (c) $-(\sqrt{25})^2$ (d) $(-\sqrt[3]{-27})^3$ (e) $(\sqrt[3]{-27})^3$ (f) $(-\sqrt[3]{27})^2$.

Solució

- (a) Com que $\sqrt{25} = 5$, aleshores $(-\sqrt{25})^2 = (-5)^2 = 25$.
 (b) Sabem que $\sqrt{-25}$ no és un nombre real i, per tant, $(\sqrt{-25})^2$ no té sentit.
 (c) És evident que $-(\sqrt{25})^2 = -5^2 = -25$.
 (d) Com que $(-3)^3 = -27$, aleshores $\sqrt[3]{-27} = -3$ i, per tant, $(-\sqrt[3]{-27})^3 = [-(-3)]^3 = 3^3 = 27$.
 (e) És evident que $(\sqrt[3]{-27})^3 = (-3)^3 = -27$.
 (f) Com que $3^3 = 27$, és evident que $(-\sqrt[3]{27})^2 = (-3)^2 = 9$.

Exercici 2.38

Calcula i simplifica: (a) $(3\sqrt{7})^2$ (b) $(2 + \sqrt{3})^2$ (c) $(\sqrt{2} \cdot \sqrt{5})^2$ (d) $(2\sqrt[3]{3})^4$ (e) $(\sqrt{3} - 2\sqrt{2})(\sqrt{3} + 2\sqrt{2})$ (f) $(9 - 5\sqrt{2}) + (6 + 7\sqrt{2})$.

Solució

(a) És clar que per les propietats de les operacions en $\mathbb{R}$ i la definició d'arrel, tenim

$$\begin{aligned}(3\sqrt{7})^2 &= 3\sqrt{7} \cdot 3\sqrt{7} \\ &= 9(\sqrt{7})^2 \\ &= 9 \cdot 7 \\ &= 63\end{aligned}$$

(b) És clar que per les propietats de les operacions en $\mathbb{R}$ i la definició d'arrel, tenim

$$\begin{aligned}(2 + \sqrt{3})^2 &= 4 + 4\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 \\ &= 4 + 4\sqrt{3} + 3 \\ &= 7 + 4\sqrt{3}\end{aligned}$$

(c) És clar que per la propietat de la potència d'un producte i la definició d'arrel, tenim

$$\begin{aligned}(\sqrt{2} \cdot \sqrt{5})^2 &= (\sqrt{2})^2 \cdot (\sqrt{5})^2 \\ &= 2 \cdot 5 \\ &= 10\end{aligned}$$

(d) És clar que per la propietat de la potència d'un producte i la definició d'arrel, tenim

$$\begin{aligned}(2\sqrt[3]{3})^4 &= 2^4 \cdot (\sqrt[3]{3})^4 \\ &= 16 \cdot (\sqrt[3]{3})^3 \cdot (\sqrt[3]{3}) \\ &= 16 \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{3} \\ &= 48\sqrt[3]{3}\end{aligned}$$

(e) És clar que per les propietats de les operacions en $\mathbb{R}$ i la definició d'arrel, tenim

$$\begin{aligned}(\sqrt{3} - 2\sqrt{2})(\sqrt{3} + 2\sqrt{2}) &= (\sqrt{3})^2 - (2\sqrt{2})^2 \\ &= 3 - 4 \cdot (\sqrt{2})^2 \\ &= 3 - 4 \cdot 2 \\ &= -5\end{aligned}$$

(f) És clar que per les propietats de les operacions en $\mathbb{R}$ i la definició d'arrel, tenim

$$\begin{aligned}(9 - 5\sqrt{2}) + (6 + 7\sqrt{2}) &= 54 + 63\sqrt{2} - 30\sqrt{2} - 35(\sqrt{2})^2 \\ &= 54 + (63 - 30)\sqrt{2} - 70 \\ &= -16 - 33\sqrt{2}\end{aligned}$$

Exercici 2.39

Resol les equacions següents:

a) $\sqrt{2x-1} = 5$

b) $(2x-5)^2 - 25 = 0$

c) $\left(2\sqrt[3]{2x-1}\right)^3 = 4$

d) $\sqrt[4]{x-1} = 1$

Solució

a) És clar que si 5 és l'arrel quadrada de $2x-1$, aleshores

$$2x-1 = 25$$

$$2x = 26$$

$$x = 13$$

b) Perquè $(2x-5)^2$ sigui 25 s'ha de complir que $2x-5 = \pm\sqrt{25} = \pm 5$. Si $2x-5 = 5$, aleshores $x = 5$, i, si $2x-5 = -5$, aleshores $x = 0$.

c) Per la propietat de la potència d'un producte i la definició d'arrel, tenim

$$\left(2\sqrt[3]{2x-1}\right)^3 = 4$$

$$2^3 \cdot \left(\sqrt[3]{2x-1}\right)^3 = 4$$

$$8(2x-1) = 4$$

$$16x-8 = 4$$

$$16x = 12$$

$$x = \frac{3}{4}$$

d) Si $\sqrt[4]{x-1} = 1$, aleshores

$$x-1 = 1^4$$

$$x-1 = 1$$

$$x = 2$$

Exercici 2.40

Calcula les següents arrels, descomponent els radicands en factors:

a) $\sqrt{0.0144}$

b) $\sqrt[4]{81}$

c) $\sqrt[5]{-\frac{1}{3125}}$

d) $\sqrt[6]{117649}$

Solució

a) Primer, observa

$$\begin{aligned} 0.0144 &= 144 \cdot 10^{-4} \\ &= 12^2 \cdot 10^{-4} \\ &= (12 \cdot 10^{-2})^2 \end{aligned}$$

Per tant,

$$\sqrt{0.0144} = 12 \cdot 10^{-2} = 0.12$$

b) Com que $81 = 3^4$, es compleix

$$\sqrt[4]{81} = 3$$

c) Com que $-3125 = (-5)^5$, aleshores

$$-\frac{1}{3125} = \left(-\frac{1}{5}\right)^5$$

i, per tant,

$$\sqrt[5]{-\frac{1}{3125}} = -\frac{1}{5}$$

d) Com $117649 = 7^6$, tenim

$$\sqrt[6]{117649} = 7$$

Exercici 2.41

Es pren un quadrat i es fan les següents transformacions: Es dobla el costat i a continuació es allarga una unitat cada costat. L'àrea final val 16 m^2 . Quina era la longitud inicial del costat del quadrat?

Solució

Si la longitud original del costat del quadrat és x , aleshores la longitud del quadrat una vegada feta la primera transformació és $2x$ i, després d'haver fet la segona és $2x + 1$. Per tant, s'ha de complir que

$$(2x + 1)^2 = 16$$

El quadrat de $2x + 1$ serà 16 si

$$2x + 1 = \pm\sqrt{16} = \pm 4$$

Si $2x + 1 = 4$, aleshores $x = 3/2$, i si $2x + 1 = -4$, aleshores $x = -5/2$. Com que la longitud del costat s'expressa com un nombre real positiu, ha de ser $x = 1.5 \text{ m}^2$.

Exercici 2.42

Si augmentem el costat d'un cub en dos unitats s'obté un altre cub de volum 27 unitats cúbiques. Quina aresta tenia el cub original?

Solució

Si l'aresta del cub original és x , aleshores l'aresta del segon cub es $x + 2$ i, per tant, s'ha de complir que

$$(x + 2)^3 = 27$$

El cub de $x + 2$ serà 27 si

$$x + 2 = \sqrt[3]{27} = 3$$

Per tant, $x = 1$, és a dir, la longitud de l'aresta és 1.

Exercici 2.43

Es considera la funció $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ definida per $f(x) = x^2$. (a) Calcula les imatges dels nombres següents: 5, -7, 3.5, 0.05 i -0.05. (b) Calcula les antiimatges de els nombres següents: 0.0169, 0.000225 i 53.29.

Solució

(a) La imatge d'un nombre x per f és el nombre y tal que

$$\begin{aligned} y &= f(x) \\ &= x^2 \end{aligned}$$

Les imatges demanades són

$$\begin{aligned} f(5) &= 5^2 = 25 \\ f(-7) &= (-7)^2 = 49 \\ f(3.5) &= f\left(\frac{7}{2}\right) = \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{49}{4} \\ f(0.05) &= f(5 \times 10^{-2}) = (5 \times 10^{-2})^2 = 25 \times 10^{-4} = 0.0025 \\ f(-0.05) &= f(-5 \times 10^{-2}) = (-5 \times 10^{-2})^2 = 25 \times 10^{-4} = 0.0025 \end{aligned}$$

(b) Les antiimatges d'un nombre y per f són els nombres x tals que

$$\begin{aligned} f(x) &= y \\ x^2 &= y \\ x &= \pm\sqrt{y} \end{aligned}$$

Per tant, les antiimatges de 0.0169 són

$$\begin{aligned} x &= \pm\sqrt{0.0169} \\ &= \pm 0.13 \end{aligned}$$

Les antiimatges de 0.000225 són

$$\begin{aligned} x &= \pm\sqrt{0.000225} \\ &= \pm 0.015 \end{aligned}$$

y les de 53.29,

$$\begin{aligned}x &= \pm\sqrt{53.29} \\ &= \pm 7.3\end{aligned}$$

2.6 Càlcul amb radicals

Exercici 2.44

Completa les següents igualtats

$$\sqrt[4]{4a^2b^6} = \sqrt{\quad} = \sqrt[6]{\quad} = \sqrt[8]{\quad}$$

Solució

Sabent que la propietat segons la qual

$$\sqrt[n]{x} = \sqrt[m \cdot n]{x^m}$$

converteix un radical $\sqrt[n]{x}$ en un altre de semblant $\sqrt[m \cdot n]{x^m}$ d'índex $m \cdot n$. Tenim

$$\sqrt[4]{4a^2b^6} = \sqrt[2 \cdot 2]{(2^2 \cdot a \cdot b^3)^2} = \sqrt{4ab^3}$$

$$\sqrt[4]{4a^2b^6} = \sqrt{4ab^3} = \sqrt[3 \cdot 2]{(4ab^3)^3} = \sqrt[6]{4^3a^3b^9} = \sqrt[6]{64a^3b^9}$$

$$\sqrt[4]{4a^2b^6} = \sqrt[2 \cdot 4]{(4a^2b^6)^2} = \sqrt[8]{4^2a^4b^{12}} = \sqrt[8]{16a^4b^{12}}$$

Exercici 2.45

Converteix en una sola arrel les expressions següents:

a) $2ab^2 \cdot \sqrt{2ab}$

b) $6a \cdot \sqrt{b}$

c) $\frac{a}{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{16a}{3}}$

Solució

Per convertir cadascuna d'aquestes expressions en una arrel hem d'introduir dins del radical tot el que està fora d'aquest. Per això, utilitzarem la següent propietat

$$x^m \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x^{m \cdot n} \cdot y}$$

a)

$$\begin{aligned}
 2ab^2 \cdot \sqrt{2ab} &= \sqrt{(2ab^2)^2 \cdot (2ab)} \\
 &= \sqrt{(4a^2b^4) \cdot (2ab)} \\
 &= \sqrt{8a^3b^5}
 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
 6a \cdot \sqrt{b} &= \sqrt{(6a)^2 \cdot b} \\
 &= \sqrt{36a^2b}
 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
 \frac{a}{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{16a}{3}} &= \sqrt[3]{\left(\frac{a}{2}\right)^3 \cdot \frac{16a}{3}} \\
 &= \sqrt[3]{\frac{a^3}{8} \cdot \frac{16a}{3}} \\
 &= \sqrt[3]{\frac{2a^4}{3}}
 \end{aligned}$$

Exercici 2.46

Simplifica les següents arrels:

a) $\sqrt[5]{16a^9b^8c^{26}}$

b) $\sqrt[3]{2648a^{173}b^{40}}$

c) $\sqrt[4]{\frac{32a^8}{81b^5}}$

d) $\sqrt{4a^2 + 8ab + 4b^2}$

e) $\sqrt{(a^2 - b^2)(a + b)}$

Solució

Per simplificar aquestes expressions hem d'extreure fora del radical tot el que puguem. Per això, utilitzarem la següent propietat

$$\sqrt[n]{x^{m \cdot n + p} \cdot y} = x^m \cdot \sqrt[n]{x^p \cdot y}$$

a)

$$\begin{aligned}
 \sqrt[5]{16a^9b^8c^{26}} &= \sqrt[5]{16a^{5+4}b^{5+3}c^{5 \cdot 5 + 1}} \\
 &= abc^5 \cdot \sqrt[5]{16a^4b^3c}
 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{2648a^{173}b^{40}} &= \sqrt[3]{2^3 \cdot 331a^{57 \cdot 3+2}b^{13 \cdot 3+1}} \\ &= 2a^{57}b^{13} \cdot \sqrt[3]{331a^2b}\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{\frac{32a^8}{81b^5}} &= \frac{\sqrt[4]{2^{4+1}a^{2 \cdot 4}}}{\sqrt[4]{3^4b^{4+1}}} \\ &= \frac{2a^2 \cdot \sqrt[4]{2}}{3b \cdot \sqrt[4]{b}} \\ &= \frac{2a^2}{3b} \sqrt[4]{\frac{2}{b}}\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}\sqrt{4a^2 + 8ab + 4b^2} &= \sqrt{(2a + 2b)^2} \\ &= 2a + 2b\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}\sqrt{(a^2 - b^2)(a + b)} &= \sqrt{(a - b)(a + b)(a + b)} \\ &= \sqrt{(a - b)(a + b)^2} \\ &= (a + b)\sqrt{a - b}\end{aligned}$$

Exercici 2.47

Converteix les expressions següents en una sola arrel

a) $\frac{\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{2b}}$

b) $\frac{3 \cdot \sqrt[3]{2a^2bc^2} \cdot \sqrt[3]{6a^4b^2}}{2a \cdot \sqrt[3]{ab^4c}}$

c) $\frac{(\sqrt[7]{a^6})^2 \cdot (\sqrt[7]{a})^5}{a^2 \cdot (\sqrt[7]{a})^2}$

d) $a \cdot \left(\sqrt[3]{a \cdot \sqrt[4]{a^3}} \right)^5$

Solució

a)

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{2b}} &= \frac{\sqrt[3]{3a}}{\sqrt[3]{2b}} \\ &= \sqrt[3]{\frac{3a}{2b}}\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\frac{3 \cdot \sqrt[3]{2a^2bc^2} \cdot \sqrt[3]{6a^4b^2}}{2a \cdot \sqrt[3]{ab^4c}} &= \frac{3 \cdot \sqrt[3]{(2a^2bc^2) \cdot (6a^4b^2)}}{2a \cdot \sqrt[3]{ab^4c}} \\
&= \frac{3 \cdot \sqrt[3]{12a^6b^3c^2}}{2a \cdot \sqrt[3]{ab^4c}} \\
&= \frac{3}{2a} \cdot \sqrt[3]{\frac{12a^6b^3c^2}{ab^4c}} \\
&= \frac{3}{2a} \cdot \sqrt[3]{\frac{12a^5c}{b}} \\
&= \sqrt[3]{\left(\frac{3}{2a}\right)^3 \cdot \frac{12a^5c}{b}} \\
&= \sqrt[3]{\frac{27}{8a^3} \cdot \frac{12a^5c}{b}} \\
&= \sqrt[3]{\frac{81a^2c}{2b}}
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
\frac{(\sqrt[7]{a^6})^2 \cdot (\sqrt[7]{a})^5}{a^2 \cdot (\sqrt[7]{a})^2} &= \frac{\sqrt[7]{a^{12}} \cdot \sqrt[7]{a^5}}{a^2 \cdot \sqrt[7]{a^2}} \\
&= \frac{\sqrt[7]{a^{12} \cdot a^5}}{a^2 \cdot \sqrt[7]{a^2}} \\
&= \frac{\sqrt[7]{a^{17}}}{\sqrt[7]{a^{14} \cdot a^2}} \\
&= \sqrt[7]{\frac{a^{17}}{a^{16}}} \\
&= \sqrt[7]{a}
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
a \cdot \left(\sqrt[3]{a \cdot \sqrt[4]{a^3}}\right)^5 &= a \cdot \sqrt[3]{\left(a \cdot \sqrt[4]{a^3}\right)^5} \\
&= a \cdot \sqrt[3]{a^5 \cdot \left(\sqrt[4]{a^3}\right)^5} \\
&= a \cdot \sqrt[3]{a^5 \cdot \sqrt[4]{a^{15}}} \\
&= a \cdot \sqrt[3]{\sqrt[4]{a^{20}} \cdot a^{15}} \\
&= a \cdot \sqrt[12]{a^{35}} \\
&= \sqrt[12]{a^{12} \cdot a^{35}} \\
&= \sqrt[12]{a^{47}}
\end{aligned}$$

Exercici 2.48

Converteix en una sola arrel les expressions següents:

a) $\sqrt[3]{4a^2} \cdot \sqrt[6]{2a} \cdot \sqrt[4]{4a}$

b) $\frac{\sqrt[4]{5a^3} \cdot \sqrt[6]{5a}}{\sqrt[3]{5a^2} \cdot \sqrt{a}}$

c) $\frac{a \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[6]{a^5} \cdot \sqrt[5]{a^4}}$

d) $\sqrt{a \cdot \sqrt[3]{a^2}} \cdot \sqrt[3]{a \cdot \sqrt{a^3}} \cdot \sqrt[3]{a \cdot \sqrt[4]{a^3}} \cdot \sqrt[3]{a^2 \sqrt{\sqrt{a}}}$

Solució

a)

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{4a^2} \cdot \sqrt[6]{2a} \cdot \sqrt[4]{4a} &= \sqrt[12]{(4a^2)^4} \cdot \sqrt[12]{(2a)^2} \cdot \sqrt[12]{(4a)^3} \\ &= \sqrt[12]{2^8 a^8} \cdot \sqrt[12]{2^2 a^2} \cdot \sqrt[12]{2^6 a^3} \\ &= \sqrt[12]{(2^8 a^8) \cdot (2^2 a^2) \cdot (2^6 a^3)} \\ &= \sqrt[12]{2^{16} a^{13}}\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt[4]{5a^3} \cdot \sqrt[6]{5a}}{\sqrt[3]{5a^2} \cdot \sqrt{a}} &= \frac{\sqrt[12]{(5a^3)^3} \cdot \sqrt[12]{(5a)^2}}{\sqrt[12]{(5a^2)^4} \cdot \sqrt[12]{a^6}} \\ &= \frac{\sqrt[12]{5^3 a^9} \cdot \sqrt[12]{5^2 a^2}}{\sqrt[12]{5^4 a^8} \cdot \sqrt[12]{a^6}} \\ &= \frac{\sqrt[12]{5^5 a^{11}}}{\sqrt[12]{5^4 a^{14}}} \\ &= \sqrt[12]{\frac{5^5 a^{11}}{5^4 a^{14}}} \\ &= \sqrt[12]{\frac{5}{a^3}}\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
\frac{a \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[6]{a^5} \cdot \sqrt[5]{a^4}} &= \frac{a \cdot \sqrt[30]{a^{15}} \cdot \sqrt[30]{a^{20}}}{\sqrt[30]{a^{25}} \cdot \sqrt[30]{a^{24}}} \\
&= \frac{a \cdot \sqrt[30]{a^{35}}}{\sqrt[30]{a^{49}}} \\
&= a \cdot \sqrt[30]{\frac{a^{35}}{a^{49}}} \\
&= a \cdot \sqrt[30]{\frac{1}{a^{14}}} \\
&= \sqrt[30]{\frac{a^{30}}{a^{14}}} \\
&= \sqrt[30]{a^{16}} \\
&= \sqrt[15]{a^8}
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
&\sqrt{a \cdot \sqrt[3]{a^2}} \cdot \sqrt[3]{a \cdot \sqrt{a^3}} \cdot \sqrt[3]{a \cdot \sqrt[4]{a^3}} \cdot \sqrt[3]{a^2 \sqrt{\sqrt{a}}} = \\
&= \sqrt{\sqrt[3]{a^3 \cdot a^2}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{a^2 \cdot a^3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt[4]{a^4 \cdot a^3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{a^4 \sqrt{a}}} = \\
&= \sqrt{\sqrt[3]{a^5}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{a^5}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt[4]{a^7}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{a^8 \cdot a}}} \\
&= \sqrt[6]{a^5} \cdot \sqrt[6]{a^5} \cdot \sqrt[12]{a^7} \cdot \sqrt[12]{a^9} \\
&= \sqrt[12]{a^{10}} \cdot \sqrt[12]{a^{10}} \cdot \sqrt[12]{a^7} \cdot \sqrt[12]{a^9} \\
&= \sqrt[12]{a^{10} \cdot a^{10} \cdot a^7 \cdot a^9} \\
&= \sqrt[12]{a^{36}} \\
&= a^3
\end{aligned}$$

Exercici 2.49

Simplifica les següents expressions

a) $2\sqrt{75} - 3\sqrt{27} + \sqrt{48}$

b) $\sqrt[3]{250} - 2\sqrt[3]{54} + 3\sqrt[3]{16}$

c) $\sqrt{27a^5} + \sqrt{1875a^5} - \sqrt{48a^5}$

d) $\sqrt[3]{\frac{81}{8}} - \sqrt[3]{\frac{375}{64}} + \sqrt[3]{\frac{81}{125}}$

e) $3\sqrt{12} - 2\sqrt{45} + \sqrt{75} + 2\sqrt{20}$

Solució

a)

$$\begin{aligned}
 2\sqrt{75} - 3\sqrt{27} + \sqrt{48} &= 2\sqrt{5^2 \cdot 3} - 3\sqrt{3^{2+1}} + \sqrt{2^{2 \cdot 2} \cdot 3} \\
 &= 2 \cdot 5\sqrt{3} - 3 \cdot 3\sqrt{3} + 2^2\sqrt{3} \\
 &= 10\sqrt{3} - 9\sqrt{3} + 4\sqrt{3} \\
 &= (10 - 9 + 4)\sqrt{3} \\
 &= 5\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
 \sqrt[3]{250} - 2\sqrt[3]{54} + 3\sqrt[3]{16} &= \sqrt[3]{5^3 \cdot 2} - 2\sqrt[3]{3^3 \cdot 2} + 3\sqrt[3]{2^{3+1}} \\
 &= 5\sqrt[3]{2} - 2 \cdot 3\sqrt[3]{2} + 3 \cdot 2\sqrt[3]{2} \\
 &= (5 - 6 + 6)\sqrt[3]{2} \\
 &= 5\sqrt[3]{2}
 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
 \sqrt{27a^5} + \sqrt{1875a^5} - \sqrt{48a^5} &= \sqrt{3^{2+1} \cdot a^{2 \cdot 2+1}} + \sqrt{5^{2 \cdot 2} \cdot 3 \cdot a^{2 \cdot 2+1}} - \sqrt{2^{2 \cdot 2} \cdot 3 \cdot a^{2 \cdot 2+1}} \\
 &= 3 \cdot a^2\sqrt{3a} + 5^2 \cdot a^2\sqrt{3a} - 2^2 \cdot a^2\sqrt{3a} \\
 &= (3a^2 + 25a^2 - 4a^2)\sqrt{3a} \\
 &= 24a^2\sqrt{3a}
 \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
 \sqrt[3]{\frac{81}{8}} - \sqrt[3]{\frac{375}{64}} + \sqrt[3]{\frac{81}{125}} &= \frac{\sqrt[3]{3^{3+1}}}{\sqrt[3]{2^3}} - \frac{\sqrt[3]{5^3 \cdot 3}}{\sqrt[3]{2^{2 \cdot 3}}} + \frac{\sqrt[3]{3^{3+1}}}{\sqrt[3]{5^3}} \\
 &= \frac{3\sqrt[3]{3}}{2} - \frac{5\sqrt[3]{3}}{2^2} + \frac{3\sqrt[3]{3}}{5} \\
 &= \left(\frac{3}{2} - \frac{5}{4} + \frac{3}{5}\right)\sqrt[3]{3} \\
 &= \frac{17}{20} \cdot \sqrt[3]{3}
 \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}
 3\sqrt{12} - 2\sqrt{45} + \sqrt{75} + 2\sqrt{20} &= 3\sqrt{2^2 \cdot 3} - 2\sqrt{3^2 \cdot 5} + \sqrt{5^2 \cdot 3} + 2\sqrt{2^2 \cdot 5} \\
 &= 3 \cdot 2\sqrt{3} - 2 \cdot 3\sqrt{5} + 5\sqrt{3} + 2 \cdot 2\sqrt{5} \\
 &= (6 + 5)\sqrt{3} + (4 - 6)\sqrt{5} \\
 &= 11\sqrt{3} - 2\sqrt{5}
 \end{aligned}$$

Exercici 2.50

Desarrolla i simplifica les següents expressions:

a) $(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})(\sqrt{2} + \sqrt{3}) - (2 - \sqrt{6})^2$

b) $(2 + \sqrt{5})(3 - 2\sqrt{5}) - (\sqrt{5} + 2)^2 - (\sqrt{5} - 3)(\sqrt{5} + 3)$

Solució

a)

$$\begin{aligned} (3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})(\sqrt{2} + \sqrt{3}) - (2 - \sqrt{6})^2 &= 3(\sqrt{2})^2 + 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} - 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} - 2(\sqrt{3})^2 - \\ &\quad - \left[2^2 - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{6} + (\sqrt{6})^2 \right] \\ &= 6 + 3\sqrt{6} - 2\sqrt{6} - 6 - 4 + 4\sqrt{6} - 6 \\ &= -10 + 5\sqrt{6} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} (2 + \sqrt{5})(3 - 2\sqrt{5}) - (\sqrt{5} + 2)^2 - (\sqrt{5} - 3)(\sqrt{5} + 3) &= 6 - 4\sqrt{5} + 3\sqrt{5} - 2(\sqrt{5})^2 - \\ &\quad - \left[(\sqrt{5})^2 + 4\sqrt{5} + 4 \right] - \left[(\sqrt{5})^2 - 9 \right] \\ &= 6 - 4\sqrt{5} + 3\sqrt{5} - 10 - 5 - 4\sqrt{5} - 4 - 5 + 9 \\ &= -9 - 5\sqrt{5} \end{aligned}$$

Exercici 2.51

Racionaliza les següents expressions:

a) $\frac{1}{2\sqrt{7a}}$

b) $\frac{1}{\sqrt[3]{4a^2}}$

c) $\frac{2a}{\sqrt[3]{81a^2}}$

d) $\frac{6ab}{\sqrt[4]{288a^2b^5}}$

e) $\frac{a^2 - b^2}{\sqrt{a+b}}$

Solució

a)

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2\sqrt{7a}} &= \frac{1}{2\sqrt{7a}} \cdot \frac{\sqrt{7a}}{\sqrt{7a}} \\
 &= \frac{\sqrt{7a}}{2(\sqrt{7a})^2} \\
 &= \frac{\sqrt{7a}}{2 \cdot (7a)} \\
 &= \frac{\sqrt{7a}}{14a}
 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\sqrt[3]{4a^2}} &= \frac{1}{\sqrt[3]{(2a)^2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2a}}{\sqrt[3]{2a}} \\
 &= \frac{\sqrt[3]{2a}}{\sqrt[3]{(2a)^3}} \\
 &= \frac{\sqrt[3]{2a}}{2a}
 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
 \frac{2a}{\sqrt[3]{81a^2}} &= \frac{2a}{\sqrt[3]{(9a)^2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{9a}}{\sqrt[3]{9a}} \\
 &= \frac{2a \cdot \sqrt[3]{9a}}{\sqrt[3]{(9a)^3}} \\
 &= \frac{2a \cdot \sqrt[3]{9a}}{9a} \\
 &= \frac{2 \cdot \sqrt[3]{9a}}{9}
 \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
 \frac{6ab}{\sqrt[4]{288a^2b^5}} &= \frac{6ab}{\sqrt[4]{2^{4+1} \cdot 3^2 \cdot a^2 \cdot b^{4+1}}} \\
 &= \frac{6ab}{2b\sqrt[4]{2 \cdot 3^2 \cdot a^2 \cdot b}} \\
 &= \frac{3a}{\sqrt[4]{2 \cdot 3^2 \cdot a^2 \cdot b}} \cdot \frac{\sqrt[4]{2^3 \cdot 3^2 \cdot a^2 \cdot b^3}}{\sqrt[4]{2^3 \cdot 3^2 \cdot a^2 \cdot b^3}} \\
 &= \frac{3a \cdot \sqrt[4]{2^3 \cdot 3^2 \cdot a^2 \cdot b^3}}{\sqrt[4]{2^4 \cdot 3^4 \cdot a^4 \cdot b^4}} \\
 &= \frac{3a \cdot \sqrt[4]{72a^2b^3}}{2 \cdot 3 \cdot a \cdot b} \\
 &= \frac{\sqrt[4]{72a^2b^3}}{2b}
 \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}
 \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{a+b}} &= \frac{a^2 - b^2}{\sqrt{a+b}} \cdot \frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a+b}} \\
 &= \frac{(a^2 - b^2)\sqrt{a+b}}{(\sqrt{a+b})^2} \\
 &= \frac{(a+b)(a-b)\sqrt{a+b}}{a+b} \\
 &= (a-b)\sqrt{a+b}
 \end{aligned}$$

Exercici 2.52

Racionaliza les següents expressions:

a) $\frac{2\sqrt{3}}{7-\sqrt{3}}$

b) $\frac{3\sqrt{7}}{2\sqrt{7}+3\sqrt{2}}$

c) $\frac{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{7\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$

Solució

a)

$$\begin{aligned}
 \frac{2\sqrt{3}}{7-\sqrt{3}} &= \frac{2\sqrt{3}}{7-\sqrt{3}} \cdot \frac{7+\sqrt{3}}{7+\sqrt{3}} \\
 &= \frac{14\sqrt{3} + 2(\sqrt{3})^2}{7^2 - (\sqrt{3})^2} \\
 &= \frac{14\sqrt{3} + 6}{49 - 3} \\
 &= \frac{14\sqrt{3} + 6}{46} \\
 &= \frac{7\sqrt{3} + 3}{23}
 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
 \frac{3\sqrt{7}}{2\sqrt{7}+3\sqrt{2}} &= \frac{3\sqrt{7}}{2\sqrt{7}+3\sqrt{2}} \cdot \frac{2\sqrt{7}-3\sqrt{2}}{2\sqrt{7}-3\sqrt{2}} \\
 &= \frac{6(\sqrt{7})^2 - 9\sqrt{14}}{(2\sqrt{7})^2 - (3\sqrt{2})^2} \\
 &= \frac{42 - 9\sqrt{14}}{28 - 18} \\
 &= \frac{42 - 9\sqrt{14}}{10}
 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
 \frac{3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}}{7\sqrt{2} - 2\sqrt{3}} &= \frac{3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}}{7\sqrt{2} - 2\sqrt{3}} \cdot \frac{7\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{7\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} \\
 &= \frac{21\sqrt{6} + 6(\sqrt{3})^2 - 14(\sqrt{2})^2 - 4\sqrt{6}}{(7\sqrt{2})^2 - (2\sqrt{3})^2} \\
 &= \frac{17\sqrt{6} + 18 - 28}{98 - 12} \\
 &= \frac{17\sqrt{6} - 10}{86}
 \end{aligned}$$

Exercici 2.53

Converteix les expressions següents en potències:

a) $\sqrt[3]{a^2}$

b) $\sqrt[6]{a^{-7}}$

c) $1/\sqrt[4]{a^9}$

Solució

Sabent que

$$\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$$

tenim: a)

$$\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}}$$

b)

$$\begin{aligned}
 \sqrt[6]{a^{-7}} &= a^{\frac{-7}{6}} \\
 &= a^{-\frac{7}{6}}
 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\sqrt[4]{a^9}} &= \frac{1}{a^{\frac{9}{4}}} \\
 &= a^{-\frac{9}{4}}
 \end{aligned}$$

Exercici 2.54

Converteix les expressions següents en forma de radical:

a) $a^{4/5}$

b) $1/a^{-1/2}$

c) $a^{-5/4}$

Solució

Sabent que

$$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$$

tenim: a)

$$a^{\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{a^4}$$

b)

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^{-\frac{1}{2}}} &= a^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{a} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} a^{-\frac{5}{4}} &= a^{\frac{-5}{4}} \\ &= \sqrt[4]{a^{-5}} \end{aligned}$$

Exercici 2.55

Calcula el valor de les expressions següents:

a) $16^{0.25}$

b) $0.008^{1/3}$

c) $\sqrt[11]{\frac{9}{27^{-3}}}$

d) $\sqrt{\frac{81^{-1}}{3^{-2}}}$

Solució

a)

$$\begin{aligned} 16^{0.25} &= 16^{\frac{1}{4}} \\ &= \sqrt[4]{2^4} \\ &= 2 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 0.008^{1/3} &= (8 \cdot 10^{-3})^{\frac{1}{3}} \\ &= \sqrt[3]{2^3 \cdot 10^{-3}} \\ &= \sqrt[3]{(2 \cdot 10^{-1})^3} \\ &= 2 \cdot 10^{-1} \\ &= 0.2 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
 \sqrt[11]{\frac{9}{27^{-3}}} &= \sqrt[11]{\frac{3^2}{(3^3)^{-3}}} \\
 &= \sqrt[11]{\frac{3^2}{3^{-9}}} \\
 &= \sqrt[11]{3^{11}} \\
 &= 3
 \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
 \sqrt{\frac{81^{-1}}{3^{-2}}} &= \sqrt{\frac{(3^4)^{-1}}{3^{-2}}} \\
 &= \sqrt{\frac{3^{-4}}{3^{-2}}} \\
 &= \sqrt{3^{-2}} \\
 &= \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2} \\
 &= \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

Exercici 2.56

Converteix en una sola potència de a les expressions següents:

a) $a^3 \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt[5]{a^3}$

b) $\frac{\sqrt[7]{a^3}}{\sqrt[5]{a^2}}$

c) $\sqrt[5]{a^3 \cdot \sqrt[5]{a}}$

d) $\sqrt{a^2 \cdot \sqrt[4]{a \cdot \sqrt[5]{a}}}$

Solució

Sabent que

$$\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$$

i tenint presents les propietats de les potències, tenim:

a)

$$\begin{aligned}
 a^3 \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt[5]{a^3} &= a^3 \cdot a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{3}{5}} \\
 &= a^{3+\frac{1}{2}+\frac{3}{5}} \\
 &= a^{\frac{41}{10}}
 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
 \frac{\sqrt[7]{a^3}}{\sqrt[5]{a^2}} &= \frac{a^{\frac{3}{7}}}{a^{\frac{2}{5}}} \\
 &= a^{\frac{3}{7} - \frac{2}{5}} \\
 &= a^{\frac{1}{35}}
 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
 \sqrt[5]{a^3 \cdot \sqrt[5]{a}} &= \sqrt[5]{a^3 \cdot a^{\frac{1}{5}}} \\
 &= \sqrt[5]{a^{3 + \frac{1}{5}}} \\
 &= \sqrt[5]{a^{\frac{16}{5}}} \\
 &= a^{\frac{16/5}{5}} \\
 &= a^{\frac{16}{25}}
 \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
 \sqrt{a^2 \cdot \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[5]{a}} &= \sqrt{a^2 \cdot \sqrt[4]{a} \cdot a^{\frac{1}{5}}} \\
 &= \sqrt{a^2 \cdot \sqrt[4]{a^{\frac{6}{5}}}} \\
 &= \sqrt{a^2 \cdot a^{\frac{6/5}{4}}} \\
 &= \sqrt{a^2 \cdot a^{\frac{3}{10}}} \\
 &= \sqrt{a^{2 + \frac{3}{10}}} \\
 &= \sqrt{a^{\frac{23}{10}}} \\
 &= a^{\frac{23/10}{2}} \\
 &= a^{\frac{23}{20}}
 \end{aligned}$$

Exercici 2.57Expressa en forma $a^m \cdot b^n$ les expressions següents:

a) $\sqrt[3]{a^2 \cdot \sqrt{b^5} \cdot \sqrt[4]{b^3}}$

b) $\frac{\sqrt[5]{a^2 \cdot \sqrt[3]{b^{-8} \cdot a^{-4}}}}{\sqrt[4]{a^{-2} \cdot b^3 \cdot \sqrt[3]{a^5 \cdot b^4}}}$

Solució

a)

$$\begin{aligned}
 \sqrt[3]{a^2 \cdot \sqrt{b^5}} \cdot \sqrt[4]{b^3} &= \sqrt[3]{a^2 \cdot b^{\frac{5}{2}}} \cdot b^{\frac{3}{4}} \\
 &= \left(a^2 \cdot b^{\frac{5}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{3}{4}} \\
 &= \left(a^{\frac{2}{3}} \cdot b^{\frac{5}{6}}\right) \cdot b^{\frac{3}{4}} \\
 &= a^{\frac{2}{3}} \cdot b^{\frac{5}{6} + \frac{3}{4}} \\
 &= a^{\frac{2}{3}} \cdot b^{\frac{19}{12}}
 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
 \frac{\sqrt[5]{a^2 \cdot \sqrt[3]{b^{-8} \cdot a^{-4}}}}{\sqrt[4]{a^{-2} \cdot b^3 \cdot \sqrt[3]{a^5 \cdot b^4}}} &= \frac{\sqrt[5]{a^2 \cdot (b^{-8} \cdot a^{-4})^{\frac{1}{3}}}}{\sqrt[4]{a^{-2} \cdot b^3 \cdot (a^5 \cdot b^4)^{\frac{1}{3}}}} \\
 &= \frac{\sqrt[5]{a^2 \cdot b^{-\frac{8}{3}} \cdot a^{-\frac{4}{3}}}}{\sqrt[4]{a^{-2} \cdot b^3 \cdot a^{\frac{5}{3}} \cdot b^{\frac{4}{3}}}} \\
 &= \frac{\sqrt[5]{a^{2-\frac{4}{3}} \cdot b^{-\frac{8}{3}}}}{\sqrt[4]{a^{-2+\frac{5}{3}} \cdot b^{3+\frac{4}{3}}}} \\
 &= \frac{\sqrt[5]{a^{\frac{2}{3}} \cdot b^{-\frac{8}{3}}}}{\sqrt[4]{a^{-\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{13}{3}}}} \\
 &= \frac{\left(a^{\frac{2}{3}} \cdot b^{-\frac{8}{3}}\right)^{\frac{1}{5}}}{\left(a^{-\frac{1}{3}} \cdot b^{\frac{13}{3}}\right)^{\frac{1}{4}}} \\
 &= \frac{a^{\frac{2}{15}} \cdot b^{-\frac{8}{15}}}{a^{-\frac{1}{20}} \cdot b^{\frac{13}{12}}} \\
 &= a^{\frac{1}{15} + \frac{1}{20}} \cdot b^{-\frac{8}{15} - \frac{13}{12}} \\
 &= a^{\frac{7}{60}} \cdot b^{-\frac{97}{60}}
 \end{aligned}$$

Exercici 2.58

Demostra les igualtats següents:

$$\text{a) } \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}} = \frac{2}{3+\sqrt{5}}$$

$$\text{b) } \sqrt{1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}} + \sqrt{1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

Solució

a) Sabent que $\sqrt{a} = b$ si $b^2 = a$, aleshores calculem

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{3 + \sqrt{5}} \right)^2 &= \frac{4}{(3 + \sqrt{5})^2} \\ &= \frac{4}{(3 + \sqrt{5})^2} \cdot \frac{3 - \sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}} \\ &= \frac{4(3 - \sqrt{5})}{(3 + \sqrt{5}) [3^2 - (\sqrt{5})^2]} \\ &= \frac{4(3 - \sqrt{5})}{4(3 + \sqrt{5})} \\ &= \frac{3 - \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}} \end{aligned}$$

Aquest resultat prova que

$$\sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}}} = \frac{2}{3 + \sqrt{5}}$$

b) Suposem que

$$A = \sqrt{1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}} + \sqrt{1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}}$$

aleshores

$$\begin{aligned} A^2 &= \left(\sqrt{1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}} \right)^2 + 2\sqrt{1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}} \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}} + \left(\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}} \right)^2 \\ &= 1 + \frac{1}{2}\sqrt{3} + 2\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\sqrt{3} \right)^2} + 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ &= 2 + 2\sqrt{1 - \frac{3}{4}} \\ &= 2 + 2\sqrt{\frac{1}{4}} \\ &= 2 + 1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

Després, $A = \sqrt{3}$, és a dir, es compleix

$$\sqrt{1 + \frac{1}{2}\sqrt{3}} + \sqrt{1 - \frac{1}{2}\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

Exercici 2.59

Demostra que $\sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}}$ és un nombre enter.

Solució

Suposem que

$$A = \sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}}$$

aleshores

$$\begin{aligned} A^2 &= \left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}\right)^2 + 2\sqrt{7+4\sqrt{3}} \cdot \sqrt{7-4\sqrt{3}} + \left(\sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)^2 \\ &= 7+4\sqrt{3} + 2\sqrt{49 - (4\sqrt{3})^2} + 7-4\sqrt{3} \\ &= 14 + 2\sqrt{49-48} \\ &= 14 + 2 \\ &= 16 \end{aligned}$$

Després, $A = 4$, és a dir,

$$\sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}} = 4$$

Exercici 2.60

Racionalitza el denominador de les expressions següents:

a) $\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{5}}$

b) $\frac{2}{\sqrt[3]{10}-\sqrt[3]{4}}$

Solució

a)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}} &= \frac{1}{(\sqrt{2} + \sqrt{3}) - \sqrt{5}} \cdot \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{3}) + \sqrt{5}}{(\sqrt{2} + \sqrt{3}) + \sqrt{5}} \\
&= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}}{(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 - (\sqrt{5})^2} \\
&= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}}{(\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 - (\sqrt{5})^2} \\
&= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}}{2 + 2\sqrt{6} + 3 - 5} \\
&= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}}{2\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} \\
&= \frac{\sqrt{12} + \sqrt{18} + \sqrt{30}}{2(\sqrt{6})^2} \\
&= \frac{\sqrt{2^2 \cdot 3} + \sqrt{3^2 \cdot 2} + \sqrt{30}}{12} \\
&= \frac{2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} + \sqrt{30}}{12}
\end{aligned}$$

b) Tenint en compte la següent identitat

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 - xy + y^2)$$

tenim

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\sqrt[3]{10} - \sqrt[3]{4}} &= \frac{2}{\sqrt[3]{10} - \sqrt[3]{4}} \cdot \frac{(\sqrt[3]{10})^2 - \sqrt[3]{10} \cdot \sqrt[3]{4} + (\sqrt[3]{4})^2}{(\sqrt[3]{10})^2 - \sqrt[3]{10} \cdot \sqrt[3]{4} + (\sqrt[3]{4})^2} \\
&= \frac{2 \cdot \sqrt[3]{100} - 2 \cdot \sqrt[3]{40} + 2 \cdot \sqrt[3]{16}}{(\sqrt[3]{10})^3 - (\sqrt[3]{4})^3} \\
&= \frac{2 \cdot \sqrt[3]{100} - 2 \cdot \sqrt[3]{2^3 \cdot 5} + 2 \cdot \sqrt[3]{2^{3+1}}}{10 - 4} \\
&= \frac{2 \cdot \sqrt[3]{100} - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt[3]{5} + 2 \cdot 2 \cdot \sqrt[3]{2}}{6} \\
&= \frac{\sqrt[3]{100} - 2 \cdot \sqrt[3]{5} + 2 \cdot \sqrt[3]{2}}{3}
\end{aligned}$$

Exercici 2.61

Simplifica les sumes següents:

$$a) \sqrt{108} + \frac{6}{\sqrt{27}} + \frac{8}{\sqrt{32}} - \frac{5}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}$$

$$\text{b) } \frac{3-\sqrt{2}}{3+\sqrt{5}} + \frac{2\sqrt{2}-1}{3-\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$$

Solució

a) Primer, racionalitzarem els denominadors de les fraccions. Així tenim,

$$\begin{aligned} \frac{6}{\sqrt{27}} &= \frac{6}{\sqrt{3^{2+1}}} \\ &= \frac{6}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{8}{\sqrt{32}} &= \frac{8}{\sqrt{2^{2+2+1}}} \\ &= \frac{8}{2^2\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{2} \\ &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{5}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}} &= \frac{5}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}} \cdot \frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2\sqrt{3}+\sqrt{2}} \\ &= \frac{10\sqrt{3}+5\sqrt{2}}{(2\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2} \\ &= \frac{10\sqrt{3}+5\sqrt{2}}{4 \cdot 3 - 2} \\ &= \frac{10\sqrt{3}+5\sqrt{2}}{10} \\ &= \frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Per tant, tenim

$$\begin{aligned} \sqrt{108} + \frac{6}{\sqrt{27}} + \frac{8}{\sqrt{32}} - \frac{5}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}} &= \sqrt{108} + \frac{2\sqrt{3}}{3} + \sqrt{2} - \frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{6\sqrt{2^2 \cdot 3^{2+1}} + 4\sqrt{3} + 6\sqrt{2} - 6\sqrt{3} - 3\sqrt{2}}{6} \\ &= \frac{36\sqrt{3} + 4\sqrt{3} + 6\sqrt{2} - 6\sqrt{3} - 3\sqrt{2}}{6} \\ &= \frac{(36+4-6)\sqrt{3} + (6-3)\sqrt{2}}{6} \\ &= \frac{34\sqrt{3} + 3\sqrt{2}}{6} \end{aligned}$$

b) De la mateixa manera que abans, primer, racionalitzarem els denominadors de les fraccions. Així tenim,

$$\begin{aligned}\frac{3 - \sqrt{2}}{3 + \sqrt{5}} &= \frac{3 - \sqrt{2}}{3 + \sqrt{5}} \cdot \frac{3 - \sqrt{5}}{3 - \sqrt{5}} \\ &= \frac{9 - 3\sqrt{5} - 3\sqrt{2} + \sqrt{10}}{3^2 - (\sqrt{5})^2} \\ &= \frac{9 - 3\sqrt{5} - 3\sqrt{2} + \sqrt{10}}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{2\sqrt{2} - 1}{3 - \sqrt{5}} &= \frac{2\sqrt{2} - 1}{3 - \sqrt{5}} \cdot \frac{3 + \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}} \\ &= \frac{6\sqrt{2} + 2\sqrt{10} - 3 - \sqrt{5}}{3^2 - (\sqrt{5})^2} \\ &= \frac{6\sqrt{2} + 2\sqrt{10} - 3 - \sqrt{5}}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} &= \frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{5} + \sqrt{2}}{\sqrt{5} + \sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{5} + \sqrt{2}}{(\sqrt{5})^2 - (\sqrt{2})^2} \\ &= \frac{\sqrt{5} + \sqrt{2}}{3}\end{aligned}$$

Per tant, tenim

$$\begin{aligned}\frac{3 - \sqrt{2}}{3 + \sqrt{5}} + \frac{2\sqrt{2} - 1}{3 - \sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} &= \frac{9 - 3\sqrt{5} - 3\sqrt{2} + \sqrt{10}}{4} + \frac{6\sqrt{2} + 2\sqrt{10} - 3 - \sqrt{5}}{4} + \frac{\sqrt{5} + \sqrt{2}}{3} \\ &= \frac{6 - 4\sqrt{5} + 3\sqrt{2} + 3\sqrt{10}}{4} + \frac{\sqrt{5} + \sqrt{2}}{3} \\ &= \frac{18 - 12\sqrt{5} + 9\sqrt{2} + 9\sqrt{10} + 4\sqrt{5} + 4\sqrt{2}}{12} \\ &= \frac{18 - 8\sqrt{5} + 13\sqrt{2} + 9\sqrt{10}}{12}\end{aligned}$$

3 Exercicis proposats

Exercici 3.1

Expressa la relació de pertinença als conjunts $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$ dels nombres següents:

- | | | |
|-------------------|----------------------|------------------|
| a) $2/5$ | b) $\sqrt{6}$ | c) $2.87333...$ |
| d) $0.4142434...$ | e) $3.1415926535...$ | f) -7.832 |
| g) $5.272727...$ | h) $5.000...$ | i) $\sqrt[5]{3}$ |

Indicació:

- | | | |
|-----------------|-----------------|-----------------|
| a) $\mathbb{Q}$ | b) $\mathbb{R}$ | c) $\mathbb{Q}$ |
| d) $\mathbb{R}$ | e) $\mathbb{R}$ | f) $\mathbb{Q}$ |
| g) $\mathbb{Q}$ | h) $\mathbb{N}$ | i) $\mathbb{R}$ |

Exercici 3.2

Dels nombres reals següents, després d'efectuar les operacions indicades, indica quins són racionals i quins no:

- | | | |
|--------------------|------------------|---------------------|
| a) $\sqrt[3]{-27}$ | b) $(1/5)^{1/2}$ | c) $\sqrt{100}$ |
| d) $(\sqrt{3})^0$ | e) 7^{-1} | f) $(-64)^{1/3}$ |
| g) $(1/3)^{-1/2}$ | h) $(1/2)^{-1}$ | i) $\sqrt[4]{1/81}$ |

Indicació:

- | | | |
|---------------------------------|-----------------------------------|-------------------------|
| a) $-3 \in \mathbb{Q}$ | b) $1/\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$ | c) $10 \in \mathbb{Q}$ |
| d) $1 \in \mathbb{Q}$ | e) $1/7 \in \mathbb{Q}$ | f) $-4 \in \mathbb{Q}$ |
| g) $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ | h) $2 \in \mathbb{Q}$ | i) $1/3 \in \mathbb{Q}$ |

Exercici 3.3

Ordena de menor a major els nombres reals següents:

$$-3/5 \quad 1.348125... \quad -1.8222... \quad -\sqrt{2} \quad |-5/3| \quad \frac{2}{5}$$

Indicació:

$$-1.8222... < -\sqrt{2} < -3/5 < 2/5 < 1.348125... < |-5/3|$$

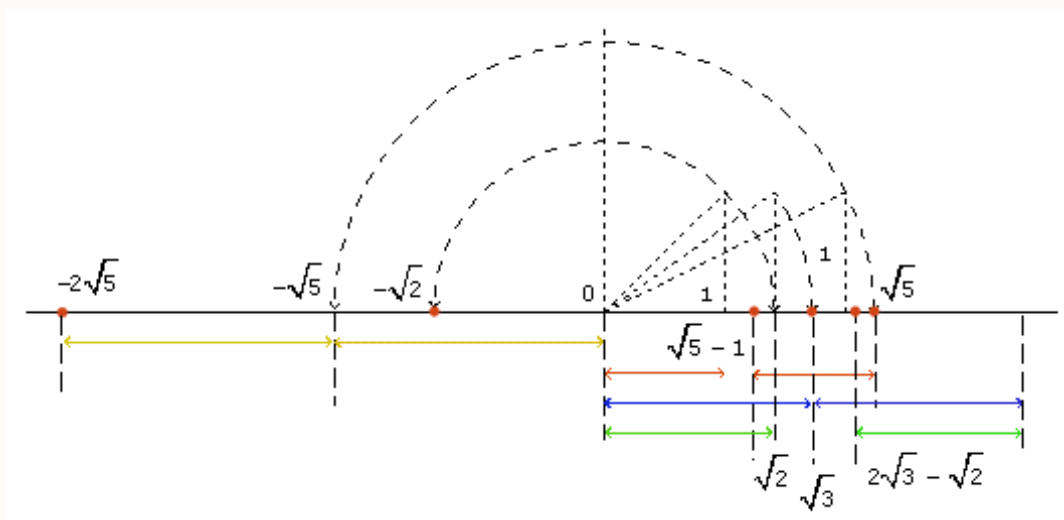
Exercici 3.4

Representa en la recta real els punts següents

$$-\sqrt{2} \quad \sqrt{5} \quad -2\sqrt{5} \quad \sqrt{5} - 1 \quad \sqrt{3} \quad 2\sqrt{3} - \sqrt{2}$$

i, després, ordena'ls de menor a major.

Indicació: $-2\sqrt{5} < -\sqrt{2} < \sqrt{5} - 1 < \sqrt{3} < 2\sqrt{3} - \sqrt{2} < \sqrt{5}$

**Exercici 3.5**

Forma les dues successions d'aproximacions successives per defecte i per excés corresponents als nombres següents: (a) 7.28, (b) 15.343434... i (c) $-2.357357357...$

Indicació: (a)

defecte:	7	7.2	7.28	7.280	...
excés:	8	7.3	7.29	7.281	...

(b)

defecte:	15	15.3	15.34	15.343	...
excés:	16	15.4	15.35	15.344	...

(c)

defecte:	-3	-2.4	-2.36	-2.358	...
excés:	-2	-2.3	-2.35	-2.357	...

Exercici 3.6

Troba una successió d'interval·ls encaixats que determini cadascun dels nombres reals següents: (a) 2.757575... (b) 3.2484848... i (c) π .

Indicació: (a)

$[2, 3] \supset [2.7, 2.8] \supset [2.75, 2.76] \supset [2.757, 2.758] \supset \dots$

(b)

$[3, 4] \supset [3.2, 3.3] \supset [3.24, 3.25] \supset [3.248, 3.249] \supset \dots$

(c)

$$[3, 4] \supset [3.1, 3.2] \supset [3.14, 3.15] \supset [3.141, 3.142] \supset \dots$$

Exercici 3.7

Escriu dues successions d'interval·ls encaixats que defineixin el nombre 2.

Indicació:

$$[1, 2] \supset [1.9, 2.0] \supset [1.99, 2.00] \supset [1.999, 2.000] \supset \dots$$

$$[2, 3] \supset [2.0, 2.1] \supset [2.00, 2.01] \supset [2.000, 2.001] \supset \dots$$

Exercici 3.8

Troba tres nombres reals que estiguin compresos entre 1.342178... i 1.342179...

Indicació: Per exemple: 1.3421781, 1.3421782 i 1.3421783**Exercici 3.9**

Calcula el valor de la diagonal d'un rectangle de costats 1 i $\sqrt{2}$ i determina si és racional o irracional.

Indicació: $\sqrt{3}$, que és un nombre irracional**Exercici 3.10**

A un rectangle d'altura 1 i base el nombre auri $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ se li treu un quadrat de costat 1, i en resulta un altre rectangle. Troba les longituds dels costats d'aquest rectangle i prova que és semblant al rectangle donat.

Indicació: Les dimensions del rectangle són $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ i 1. A més,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} &= \frac{2}{\sqrt{5}-1} \\ &= \frac{2(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} \\ &= \frac{\sqrt{5}+1}{2} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}{1} \end{aligned}$$

Exercici 3.11

Suposant que $x = y$, en quin pas de la següent deducció es comet l'error?

- (1) $x^2 = xy$
- (2) $x^2 - y^2 = xy - y^2$
- (3) $(x + y)(x - y) = y(x - y)$
- (4) $x + y = y$
- (5) $2y = y$
- (6) $2 = 1$

Indicació: En passar de (3) a (4) no es pot simplificar per $x - y$ ja que $x - y = 0$

Exercici 3.12

En una batalla han participat 4000 homes. Dels supervivents, el $56.\widehat{56}$ % no fuma i el $56.\widehat{756}$ % no beu. Quants homes han mort?

Indicació: El nombre d'homes que han mort en la batalla és 337

Exercici 3.13

Troba tots els nombres reals x tals que: (a) $x^2 > 3x + 4$ i (b) $1 < x^2 < 4$.

Indicació: (a) $(-\infty, -1) \cup (4, +\infty)$ i (b) $(-2, -1) \cup (1, 2)$

Exercici 3.14

Resol les inequacions següents:

- a) $|x + 1| < 2$
- b) $|2x - 1| < |x - 1|$
- c) $|x + 2| + |x - 2| \leq 12$
- d) $||x + 1| - |x - 1|| < 1$

Indicació: (a) $(-3, 1)$, (b) $(0, 2/3)$, (c) $[-6, 6]$ i (d) $(-1/2, 1/2)$

Exercici 3.15

Troba el suprem i l'ínfim dels subconjunts de nombres reals següents, indicant si són màxim o mínim respectivament.

- a) $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x^2 \leq 2\}$
- b) $B = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$
- c) $C = \{x \in \mathbb{R} : 0 < (x - 2)^2 \leq 3\}$
- d) $D = \left\{\frac{1}{3^m} : m \in \mathbb{Z}\right\}$

Indicació:

conjunt	sup	inf	max	min
A	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$
B	1	0	1	No existeix
C	$2 + \sqrt{3}$	$2 - \sqrt{3}$	$2 + \sqrt{3}$	$2 - \sqrt{3}$
D	No existeix	0	No existeix	No existeix

Exercici 3.16

Expressa en forma d'interval·ls els conjunts següents:

- a) $A = \{x \in \mathbb{R} : |x^2 - 2| \leq 1\}$
 b) $B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 3x + 3 < 1\}$
 c) $C = \{x \in \mathbb{R} : (x^2 - x - 1)/(x - 1) > 1\}$
 d) $D = \{x \in \mathbb{R} : |x - 1| |x + 2| = 3\}$

Indicació:

$$\begin{aligned}
 A &= [-\sqrt{3}, -1] \cup [1, \sqrt{3}] \\
 B &= (-2, -1) \\
 C &= (0, 1) \cup (2, +\infty) \\
 D &= \left\{ \frac{-1-\sqrt{21}}{2}, \frac{-1+\sqrt{21}}{2} \right\}
 \end{aligned}$$

Exercici 3.17Escriu el conjunt de punts que són a distància menor que $1/2$ de 5.**Indicació:** $\{x \in \mathbb{R} : d(x, 5) < 1/2\} = (9/2, 11/2)$ **Exercici 3.18**

Expressa en forma d'entorns els interval·ls següents

$$a) \quad (-1, 5) \quad b) \quad (0, 3) \quad c) \quad (8, 12)$$

Indicació:

$$a) \quad E_3(2) \quad b) \quad E_{3/2}(3/2) \quad c) \quad E_2(10)$$

Exercici 3.19Escriu en notació científica els nombres següents: (a) 30^4 , (b) $(30000)^{-3}$ (c) $(0.025)^2$ i (d) $(4.56^2)^3$ **Indicació:** (a) 8.1×10^5 , (b) 3.7×10^{-14} , (c) 6.25×10^{-4} i (d) 8.99×10^3 **Exercici 3.20**Troba en cada cas el valor de x

$$\begin{aligned}
 a) \quad \sqrt{x} &= 3 & b) \quad \sqrt[3]{x+1} &= 3 & c) \quad \sqrt[4]{5x-4} &= 2 \\
 d) \quad \sqrt[3]{x} + 3 &= 1 & e) \quad 3x^3 + 1 &= 25 & f) \quad 1 + \sqrt[3]{2x} &= 7
 \end{aligned}$$

Indicació:

$$\begin{array}{lll} a) & 9 & b) \quad 26 \quad c) \quad 4 \\ d) & -8 & e) \quad 2 \quad f) \quad 108 \end{array}$$

Exercici 3.21

Converteix en una sola arrel les expressions següents:

$$\begin{array}{lll} a) & \sqrt[4]{2a^2b} \cdot \sqrt[4]{4ab^2} & b) \quad 5a^2 \cdot \sqrt[4]{3a^3b^2} \quad c) \quad \frac{3 \cdot \sqrt[3]{2a^2bc^2} \cdot \sqrt[3]{6a^4b^2}}{2a \cdot \sqrt[3]{ab^4c}} \\ d) & \frac{(\sqrt[7]{a^6})^2 \cdot (\sqrt[7]{a})^5}{a^2 \cdot (\sqrt[7]{a})^2} & e) \quad a \cdot \left(\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^3}} \right)^5 \quad f) \quad \sqrt[3]{4a^2} \cdot \sqrt[6]{2a} \cdot \sqrt[4]{4a} \\ g) & \frac{\sqrt[4]{5a^3} \cdot \sqrt[6]{5a}}{\sqrt[3]{5a^2} \cdot \sqrt{a}} & h) \quad \sqrt{a^2 \cdot \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[5]{a}} \quad i) \quad \frac{\sqrt[5]{a^2 \cdot \sqrt[3]{b^{-8} \cdot a^{-4}}}}{\sqrt[4]{a^{-2} \cdot b^3 \cdot \sqrt[3]{a^5 \cdot b^4}}} \end{array}$$

Indicació:

$$\begin{array}{lll} a) & \sqrt[4]{8a^3b^3} & b) \quad \sqrt[4]{1875a^{11}b^2} \quad c) \quad \sqrt[3]{\frac{81a^2c}{2b}} \\ d) & \sqrt[7]{a} & e) \quad \sqrt[4]{a^9} \quad f) \quad \sqrt[12]{65536a^{13}} \\ g) & \sqrt[12]{\frac{5}{a^3}} & h) \quad \sqrt[20]{a^{23}} \quad i) \quad \sqrt[60]{\frac{a^{13}}{b^{97}}} \end{array}$$

Exercici 3.22

Simplifica les arrels següents:

$$\begin{array}{lll} a) & \sqrt[3]{2592 \cdot a^{11} \cdot b^{23} \cdot c^{102}} & b) \quad \sqrt[3]{\frac{864a^7b^2}{625a^9c^{112}}} \quad c) \quad \frac{\sqrt[5]{81a^4b^3}}{\sqrt[5]{27a^3b^4}} \\ d) & \sqrt[4]{4a^3x^2} \cdot \sqrt[4]{72ax^2} \cdot \sqrt[4]{18a^2x} & e) \quad \sqrt[4]{125 \cdot \sqrt{625 \cdot \sqrt[5]{25}}} \quad f) \quad \sqrt[3]{\frac{\sqrt[3]{25} \cdot \sqrt[5]{5}}{\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[4]{125}}} \end{array}$$

Indicació:

$$\begin{array}{lll} a) & 6a^3b^7c^{34} \sqrt[3]{12a^2b^2} & b) \quad \frac{6a^2}{5d^3c^{37}} \sqrt[3]{\frac{4ab^2}{5c}} \quad c) \quad \sqrt[5]{\frac{3a}{b}} \\ d) & 6ax \cdot \sqrt[4]{4a^2x} & e) \quad 5 \sqrt[10]{125} \quad f) \quad \sqrt[180]{1/5^{13}} \end{array}$$

Exercici 3.23

Simplifica les expressions següents:

$$\begin{array}{l} a) \quad \sqrt{343} + \sqrt{48} + \sqrt{\frac{28}{81}} + \sqrt{\frac{300}{121}} \\ b) \quad \sqrt{125} - 3\sqrt{80} - 4\sqrt{45} + 10\sqrt{180} \\ c) \quad \sqrt[3]{\frac{81}{8}} - \sqrt[3]{\frac{375}{64}} + \sqrt[3]{\frac{81}{125}} \\ d) \quad (3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}) \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{3}) - (2 - \sqrt{6})^2 \\ e) \quad (3 + \sqrt{5})^2 - 3(2\sqrt{5} - 3)^2 \end{array}$$

Indicació:

- a) $\frac{65}{9}\sqrt{7} + \frac{54}{11}\sqrt{3}$
 b) $65\sqrt{5}$
 c) $\frac{17}{20}\sqrt[3]{3}$
 d) $5\sqrt{6} - 10$
 e) $42\sqrt{5} - 73$

Exercici 3.24

Racionalitza el denominador de les expressions següents:

- a) $\frac{14\sqrt{5}}{\sqrt[3]{7}}$ b) $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{18}}$ c) $\frac{5\sqrt{3}+\sqrt{12}}{14\sqrt{3}}$
 d) $\frac{6\sqrt{5}}{\sqrt[4]{3}}$ e) $\frac{1}{\sqrt[3]{8a^2}}$ f) $\frac{6ab}{\sqrt[4]{288a^2b^5}}$
 g) $\frac{a}{\sqrt{2a+1}}$ h) $\frac{a^2-b^2}{\sqrt{a+b}}$ i) $\frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}$

Indicació:

- a) $2\sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{49}$ b) $\frac{1}{\sqrt[3]{a}}$ c) $\frac{1}{2}$
 d) $2\sqrt{5} \cdot \sqrt[4]{27}$ e) $\frac{\sqrt[3]{a}}{2a}$ f) $\frac{\sqrt[4]{72a^2b^3}}{2b}$
 g) $\frac{a\sqrt{2a+1}}{2a+1}$ h) $(a-b)\sqrt{a+b}$ i) $\frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x}$

Exercici 3.25

Racionalitza el denominador de les expressions següents:

- a) $\frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$
 b) $\frac{\sqrt{2}}{3 - \sqrt{2}}$
 c) $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$
 d) $\frac{(3\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)}{\sqrt{2} - 1}$
 e) $\frac{3 + 4\sqrt{3}}{\sqrt{6} + \sqrt{2} - \sqrt{5}}$
 f) $\frac{1}{\sqrt{3 - \sqrt{3}}}$

Indicació:

- a) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$
- b) $\frac{3\sqrt{2}+2}{7}$
- c) $5 + 2\sqrt{6}$
- d) $7\sqrt{2} + 9$
- e) $\sqrt{6} + \sqrt{2} + \sqrt{5}$
- f) $\frac{1}{6}(3 + \sqrt{3})\sqrt{3 - \sqrt{3}}$

Exercici 3.26

Opera i simplifica en les expressions següents:

a)

$$\frac{5 - \sqrt{5}}{5 + \sqrt{5}} - \frac{5 + \sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}} + \frac{5}{\sqrt{5}}$$

b)

$$\frac{1 + \sqrt{15}}{(\sqrt{5} - \sqrt{3})^2} + \frac{1 - \sqrt{15}}{(\sqrt{5} + \sqrt{3})^2}$$

c)

$$\frac{2 + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - 1} - \frac{\sqrt{3} - 1}{2 + \sqrt{2}} - 2$$

Indicació:

- a) 0
- b) 19
- c) $\sqrt{6}$

Exercici 3.27

Simplifica les expressions següents:

a)

$$\sqrt{a + b + \sqrt{2ab}} \cdot \sqrt{a + b - \sqrt{2ab}}$$

b)

$$\sqrt{1 - 2\sqrt{x} + x}$$

c)

$$\sqrt{192(x + 1)^4(x - 9)^2}$$

d)

$$\sqrt{\frac{a - b}{(a + b)^2}} \cdot \sqrt{\frac{a + b}{a^2 - b^2}}$$

e)

$$\sqrt{4a^2 + 12ab + 9b^2}$$

Indicació:

- a) $\sqrt{a^2 + b^2}$
- b) $1 - \sqrt{x}$
- c) $8\sqrt{3} \cdot (x + 1)^2 \cdot (x - 9)$
- d) $\frac{1}{a+b}$
- e) $2a + 3b$

Exercici 3.28

Calcula les expressions següents:

- a) $16^{0.25}$
- b) $4^{-3/2}$
- c) $\sqrt[11]{\frac{9}{27^{-3}}}$
- d) $(\sqrt{27} \cdot 27^{-5/3})^{1/3}$
- e) $0.0064^{1/2}$
- f) $2\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}}$
- g) $[(a^{-4})^{1/3} \cdot (a^2)^{2/3}] : (a^{-3})^{1/3}$
- h) $\left[(a^{1/4})^3\right]^{-4/3}$
- i) $(a^{-4})^{1/3} \cdot (a^2)^{2/3} \cdot a^{-3}$

Indicació:

- a) 2
- b) 1/8
- c) 3
- d) $3^{-7/6}$
- e) 2/25
- f) $\sqrt[16]{2}$
- g) a
- h) 1/a
- i) $1/a^3$

4 Tests interactius

4.1 Test 1: conjunts numèrics, ordre i intervals

Instruccions. Marca una sola resposta per pregunta. En acabar, prem el botó **Corregir**. El camp **Nota** mostrarà el resultat.

Corregir Netejar **Nota:**

1. Quina de les següents igualtats és vertadera?

- (a) $\mathbb{N} \cup \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$
- (b) $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z} = \mathbb{Q}$
- (c) $\mathbb{I} \cap \mathbb{Q} = \emptyset$
- (d) $\mathbb{R} \cap \mathbb{Q} = \mathbb{I}$

Correcció:

on $\mathbb{I}$ denota el conjunt dels nombres irracionals.

2. Quina de les següents afirmacions és vertadera?

- (a) $x \in \mathbb{Q}, y \notin \mathbb{Q} \implies x + y \notin \mathbb{Q}$
- (b) $x \notin \mathbb{Q}, y \notin \mathbb{Q} \implies x + y \notin \mathbb{Q}$
- (c) $x \in \mathbb{Q}, y \notin \mathbb{Q} \implies x \cdot y \notin \mathbb{Q}$
- (d) $x \notin \mathbb{Q}, y \notin \mathbb{Q} \implies x \cdot y \notin \mathbb{Q}$

Correcció:

3. Quin dels següents nombres és irracional?

- (a) 3.1415
- (b) 1.41421356...
- (c) 2.1333...

(d) 0.777...

Correcció:

4. Quantes aproximacions successives de nombres racionals són necessàries per determinar un nombre irracional?
- (a) Basta amb dos, una per defecte i una altra per excés, suficientment precises
 - (b) Tantes com xifres decimals del nombre irracional es vulguin conèixer
 - (c) Infinites
 - (d) Moltes però sempre en un nombre determinat

Correcció:

5. Quina de les següents afirmacions és falsa?

- (a) $a < b, c < d \implies a + c < b + d$
- (b) $a < b, c > d \implies a - c < b - d$
- (c) $a < b, c > 0 \implies ac < bc$
- (d) $a < b, c < 0 \implies ac < bc$

Correcció:

6. Si $A = \left\{ \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}$, aleshores quina de les següents afirmacions és falsa?

- (a) $\sup A = 1$
- (b) $\max A = \frac{1}{2}$
- (c) $\inf A = -1$
- (d) $\min A = -1$

Correcció:

7. Si $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - x < 0\}$, aleshores

- (a) $A = (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$
- (b) $A = [0, 1]$
- (c) $A = \mathbb{R} - [0, 1]$
- (d) $A = (0, 1)$

Correcció:

8. Si $A = \{x \in \mathbb{R} : |x - 1| < 2\}$ i $B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4x + 3 \geq 0\}$, aleshores

- (a) $A \cap B = (-\infty, 1]$
- (b) $A \cap B = [-1, 1]$
- (c) $A \cup B = \mathbb{R}$
- (d) $A \cup B = [1, 3]$

Correcció:

9. Quina de les següents igualtats és vertadera?

- (a) $(-4, 2) = E_1(-1)$
- (b) $(-\infty, 3] \cap (0, 2] = [0, 2]$
- (c) $E_2(0) \cup (2, +\infty) = (-2, +\infty)$
- (d) $(3, 15) = E_6(9)$

Correcció:

10. Quin dels següents fets és cert?

- (a) L'equació $(x^2 - 5)(16x^2 - 9) = 0$ admet quatre solucions en $\mathbb{Q}$
- (b) 300 és una aproximació per defecte de 367.19528 amb 3 xifres significatives
- (c) 1.99 és una aproximació per arrodoniment fins a les centèsimes de 1.98146
- (d) Si a i b són nombres positius i $a^2 < b^2$, aleshores $a < b$

Correcció:

4.2 Test 2: radicals i potències

Instruccions. Marca una sola resposta per pregunta. En acabar, prem el botó **Corregir**. El camp **Nota** mostrarà el resultat.

Corregir Netejar **Nota:**

1. Quina de les següents afirmacions és vertadera?

- (a) L'arrel n -èsima d'un nombre negatiu sempre existeix
- (b) L'arrel $\sqrt{x^2}$ té per valor $|x|$

- (c) L'equació $x^4 = -3^4$ té per solució -3
- (d) $\sqrt{a^2 + b^2} = a + b$, qualssevol que siguin els nombres reals a i b

Correcció:

2. Quina de les següents afirmacions és falsa?

- (a) $2^{-3/5} = 1/\sqrt[5]{2^3}$
- (b) $\sqrt[3]{2^5}/2 = 2^{2/3}$
- (c) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} = 2^{7/8}$
- (d) $3 \cdot 32^{4/5} = 16$

Correcció:

3. En convertir en una sola arrel l'expressió

$$\frac{\sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt{a}}{a \cdot \sqrt[6]{a}}$$

s'obté:

- (a) $\sqrt{a}$
- (b) $\sqrt[12]{a^5}$
- (c) $\sqrt[3]{a}$
- (d) Cap de les anteriors

Correcció:

4. En simplificar l'expressió

$$\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{81} + \sqrt[3]{250} + \sqrt[3]{\frac{3}{8}}$$

s'obté:

- (a) $\frac{9}{2} \cdot \sqrt[3]{5}$
- (b) $7 \cdot \sqrt[3]{3}$
- (c) $7 \cdot \sqrt[3]{2} - \frac{5}{2} \sqrt[3]{3}$
- (d) Cap de les anteriors

Correcció:

5. En calcular el valor de l'expressió

$$(3 - \sqrt{6}) \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{2}) - (2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})^2 + 3\sqrt{6}$$

s'obté:

- (a) $-30 + \sqrt{3} + 15\sqrt{6}$
- (b) $-14\sqrt{6}$
- (c) -45
- (d) Cap de les anteriors

Correcció:

6. En convertir en una sola potència de a l'expressió

$$\sqrt[4]{\frac{a^2 \cdot \sqrt{a}}{\sqrt[4]{a} \cdot (\sqrt[3]{a})^7}}$$

s'obté:

- (a) 1
- (b) $a^{-1/12}$
- (c) $a^{-1/48}$
- (d) a

Correcció:

7. Quina de les següents afirmacions és falsa?

- (a) $\sqrt[5]{4} \leq \sqrt[10]{17} \leq \sqrt[6]{6}$
- (b) $\sqrt[3]{4} = \sqrt[6]{16} = \sqrt[9]{64}$
- (c) $\frac{2}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{2} = \frac{2}{\sqrt[6]{4}}$
- (d) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}} \leq \frac{1}{\sqrt[4]{3}} \leq \frac{1}{\sqrt[6]{5}}$

Correcció:

8. En racionalitzar l'expressió

$$\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt[3]{16}}$$

s'obté:

- (a) $\frac{3}{4}\sqrt[3]{12}$
- (b) $\frac{3}{4}\sqrt[6]{432}$

(c) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{6}$

(d) $\frac{3}{4}\sqrt{12}$

Correcció:

9. En racionalitzar l'expressió

$$\frac{4\sqrt{2}}{5\sqrt{3} - 2\sqrt{2}}$$

s'obté:

(a) $\frac{36\sqrt{6}}{83}$

(b) $\frac{36\sqrt{6}}{67}$

(c) $\frac{16+20\sqrt{6}}{67}$

(d) Cap de les anteriors

Correcció:

10. En simplificar l'expressió

$$\sqrt{a \cdot \sqrt[3]{a^2}} \cdot \sqrt[3]{a \cdot \sqrt{a^3}} \cdot \sqrt[3]{a \cdot \sqrt[4]{a^3}} \cdot \sqrt[3]{a^2 \cdot \sqrt{a \cdot \sqrt{a}}}$$

s'obté

(a) $a^3 \cdot \sqrt[6]{a}$

(b) $a^2 \cdot \sqrt[3]{a}$

(c) $\sqrt[6]{a}$

(d) Cap de les anteriors

Correcció:

4.3 Test 3: síntesi de la unitat

Instruccions. Marca una sola resposta per pregunta. En acabar, prem el botó **Corregir**. El camp **Nota** mostrarà el resultat.Corregir Netejar **Nota:**

1. Quin conjunt numèric conté exactament els nombres que es poden escriure com a quocient de dos enters, amb denominador no nul?

(a) $\mathbb{N}$

- (b) $\mathbb{Z}$
- (c) $\mathbb{Q}$
- (d) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Correcció:

2. Quina afirmació descriu correctament els nombres irracionals?

- (a) Són decimals finits.
- (b) Són decimals periòdics.
- (c) No es poden representar sobre la recta real.
- (d) No es poden expressar com a fracció de dos enters.

Correcció:

3. Si $A = (-2, 5]$ i $B = [1, 7)$, quin és $A \cap B$?

- (a) $(-2, 7)$
- (b) $[1, 5]$
- (c) $(1, 5)$
- (d) $[-2, 7]$

Correcció:

4. Quin és el conjunt solució de $|x - 3| < 2$?

- (a) $(1, 5)$
- (b) $(-5, -1)$
- (c) $(3, 5)$
- (d) $(-2, 2)$

Correcció:

5. Quina desigualtat és sempre certa si $0 < a < b$?

- (a) $a^2 > b^2$
- (b) $-a < -b$
- (c) $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$
- (d) $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

Correcció:

6. Quin és el suprem de l'interval $(2, 7)$?

- (a) 2
- (b) 7
- (c) No existeix perquè 7 no pertany a l'interval.
- (d) $\frac{9}{2}$

Correcció:

7. Quin és el resultat de simplificar $\sqrt{50} - \sqrt{8}$?

- (a) $\sqrt{42}$
- (b) $3\sqrt{2}$
- (c) $5\sqrt{2}$
- (d) $7\sqrt{2}$

Correcció:

8. Quina expressió és equivalent a $a^{3/2}$, si $a > 0$?

- (a) $\sqrt{a^3}$
- (b) $\sqrt[3]{a^2}$
- (c) $a\sqrt[3]{a}$
- (d) $\frac{1}{\sqrt{a^3}}$

Correcció:

9. En racionalitzar $\frac{1}{\sqrt{3}}$, s'obté:

- (a) $\sqrt{3}$
- (b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
- (c) $\frac{1}{3}$
- (d) $3\sqrt{3}$

Correcció:

10. Quin valor té $\sqrt[3]{27}$?

- (a) 2
- (b) 3
- (c) 4
- (d) 9

Correcció:

11. Si $10^{-2} = 0.01$, quin ordre de magnitud expressa aquesta potència?

- (a) Centenes.
- (b) Desenes.
- (c) Centèsimes.
- (d) Mil·lèsimes.

Correcció:

12. Quina afirmació resumeix millor la recta real?

- (a) Només conté nombres racionals.
- (b) Té buits corresponents als irracionals.
- (c) Cada punt correspon a un únic nombre real i cada nombre real a un punt.
- (d) Només serveix per representar enters.

Correcció: