

Nombres racionals

Miquel Àngel Perelló

13 de juny de 2026

Índex

Introducció	v
1 Teoria	1
1.1 Introducció	1
1.1.1 Interpretació geomètrica dels nombres racionals	2
1.2 Necessitat d'ampliar el conjunt dels nombres enters	3
1.3 Construcció del conjunt dels nombres racionals	6
1.3.1 Fraccions equivalents	6
1.3.2 La relació d'equivalència	7
1.3.3 Definició del conjunt dels nombres racionals	8
1.3.4 Els enters com a nombres racionals	9
1.3.5 Representants i fracció irreductible	10
1.3.6 Simplificació i denominador comú	12
1.4 El cos dels nombres racionals	14
1.4.1 Addició de nombres racionals	14
1.4.2 Propietats de l'addició	16
1.4.3 Multiplicació de nombres racionals	17
1.4.4 Propietats de la multiplicació	19
1.4.5 $\mathbb{Q}$ com a cos commutatiu	22
1.5 El cos ordenat dels nombres racionals	22
1.5.1 Definició de l'ordre	22
1.5.2 Propietats de l'ordre	24
1.5.3 Compatibilitat de l'ordre amb les operacions	26
1.5.4 Densitat dels nombres racionals	29
1.5.5 Valor absolut	30
1.6 Expressió decimal dels nombres racionals	32
1.6.1 Decimals finits	32
1.6.2 Decimals periòdics	34
1.6.3 Fracció generatriu d'un decimal finit	36
1.6.4 Fracció generatriu d'un decimal periòdic	36

1.7	Representació gràfica dels nombres racionals	38
1.8	Potències de nombres racionals	40
1.8.1	Propietats de les potències	41
1.9	Arrels de nombres racionals	44
1.9.1	Propietats de les arrels	46
1.10	Raons i proporcions aritmètiques	49
1.10.1	Raons	49
1.10.2	Proporcions	49
1.10.3	Propietats de les proporcions	51
1.10.4	Tercera proporcional, quarta proporcional i mitjana proporcional	54
1.10.5	Proporcionalitat directa i inversa	57
1.10.6	Problemes d'aplicació	59
1.11	Proporcionalitat geomètrica	67
1.11.1	Proporcionalitat de segments	67
1.11.2	Segments proporcionals en figures geomètriques	69
1.11.3	El teorema de Tales	70
1.11.4	Escales, ampliacions i reduccions	71
1.11.5	Observació sobre les raons geomètriques	72
1.12	Funcions de proporcionalitat	72
1.12.1	Funció de proporcionalitat directa	73
1.12.2	Funció de proporcionalitat inversa	74
1.12.3	Comparació entre proporcionalitat directa i inversa	75
2	Pràctica	76
2.1	Construcció i representació dels nombres racionals	76
2.2	Operacions amb nombres racionals	80
2.3	Ordre, densitat i valor absolut	81
2.4	Expressions decimals, potències i arrels	82
2.4.1	Operacions combinades amb fraccions, potències i arrels	85
2.5	Raons, proporcions i proporcionalitat aritmètica	88
2.6	Aplicacions a problemes de la vida real	92
2.7	Proporcionalitat geomètrica i funcions de proporcionalitat	97
3	Exercicis proposats	101
3.1	Construcció i representació dels nombres racionals	101
3.2	Operacions amb nombres racionals	102
3.3	Ordre, densitat i valor absolut	103
3.4	Expressions decimals, potències i arrels	104
3.5	Operacions combinades amb fraccions, potències i arrels	106
3.6	Raons, proporcions i proporcionalitat aritmètica	107

3.7	Aplicacions a problemes de la vida real	109
3.8	Proporcionalitat geomètrica i funcions de proporcionalitat	111
4	Tests interactius	114
4.1	Test 1: Fonaments dels nombres racionals	114
4.2	Test 2: Operacions, potències, arrels i proporcions	117
4.3	Test 3: Proporcionalitat i aplicacions	120
4.4	Test 4: Prova de síntesi	123

Prefaci

Aquests apunts formen la unitat d'**aprendes** dedicada als **nombres racionals**. Aquesta parteix de la construcció prèvia dels nombres naturals i dels nombres enters, desenvolupada a la unitat [Nombres naturals i enters](#), i continua el procés d'ampliació dels conjunts numèrics amb l'objectiu de donar resposta a la divisió entre enters.

La intenció no és només aprendre a operar amb fraccions, sinó entendre què és un nombre racional, per què diferents fraccions poden representar el mateix nombre i com les operacions i l'ordre es defineixen de manera coherent a partir dels nombres enters. Per això, els nombres racionals es presenten com a classes d'equivalència de parelles d'enters, i aquesta construcció es relaciona després amb el càlcul ordinari amb fraccions, les expressions decimals i les proporcions.

El text està dividit en quatre blocs: teoria, pràctica, exercicis proposats i tests interactius d'autoavaluació. El nivell és adequat per a estudiants de batxillerat amb interès en una fonamentació rigorosa i per a professorat que vulgui disposar d'un material de suport per a la seva docència.

Introducció

En la unitat [Nombres naturals i enters](#) es va veure que els nombres enters amplien els nombres naturals i permeten resoldre de manera general equacions de la forma

$$a + x = b.$$

Tanmateix, els enters encara no són suficients per resoldre de manera general equacions de la forma

$$ax = b,$$

quan $a \neq 0$. Per exemple, l'equació $2x = 1$ no té solució en $\mathbb{Z}$. Per donar sentit a aquestes divisions cal construir un nou conjunt numèric: el conjunt dels nombres racionals.

Els nombres racionals formalitzen els quocients entre enters. La idea intuïtiva és representar el resultat de dividir un enter a per un enter no nul b mitjançant una fracció

$$\frac{a}{b},$$

però aquesta representació no és única: per exemple, $1/2$, $2/4$ i $(-3)/(-6)$ representen el mateix nombre. Per aquest motiu, la construcció rigorosa de $\mathbb{Q}$ exigeix identificar les fraccions equivalents mitjançant una relació d'equivalència.

Aquesta unitat estudia la inclusió

$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

com una ampliació algebraica i d'ordre. El pas de $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Q}$ permet dividir per qualsevol nombre no nul i dona lloc a una estructura més rica: el cos ordenat dels nombres racionals.

Els objectius principals són:

- comprendre la necessitat quotidiana dels nombres racionals en repartiments, mesures, preus, escales i proporcions;
- interpretar geomètricament els nombres racionals com a raons de segments i com a punts de la recta numèrica;
- comprendre la necessitat d'ampliar $\mathbb{Z}$ per resoldre divisions entre enters i equacions de la forma $ax = b$, amb $a \neq 0$;
- definir les fraccions equivalents i construir $\mathbb{Q}$ com un conjunt quocient de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$;
- interpretar cada racional com una classe d'equivalència de fraccions;

- definir correctament la suma, el producte, l'oposat i l'invers dels nombres racionals;
- justificar que $\mathbb{Q}$ és un cos commutatiu i un cos ordenat;
- estudiar la densitat dels nombres racionals i la seva representació a la recta numèrica;
- relacionar els nombres racionals amb les fraccions, les expressions decimals i les proporcions;
- aplicar la teoria al càlcul, a la proporcionalitat aritmètica i geomètrica, i a situacions de la vida quotidiana.

1 Teoria

1.1 Introducció

Els nombres enters permeten comptar quantitats positives i negatives, expressar guanys i pèrdues, temperatures per sobre i per sota de zero, o desplaçaments en sentits oposats. Ara bé, en moltes situacions quotidianes els enters no són suficients.

Per exemple, si volem repartir 3 barres de pa entre 6 persones de manera que totes rebin la mateixa quantitat i no sobri res, no podem donar un nombre enter de barres a cada persona. Cal dividir la unitat en parts iguals. En aquest cas, cada persona rep mitja barra. De manera semblant, si repartim 5 litres d'aigua entre 4 recipients iguals, cada recipient rep una quantitat que no és un nombre enter de litres.

Aquestes situacions apareixen constantment: en repartiments, mesures, preus, descomptes, escales, proporcions, receptes, interessos bancaris o càlculs geomètrics. Per això necessitem nombres que expressin parts d'una unitat o quocients entre quantitats enteres.

La manera habitual de representar aquestes quantitats és mitjançant fraccions:

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{5}{4}, \quad \frac{15}{6}.$$

Així, quan diem que 3 barres es reparteixen entre 6 persones, la quantitat que correspon a cadascuna es representa per

$$\frac{3}{6}.$$

Aquesta fracció representa el mateix nombre que

$$\frac{1}{2},$$

perquè repartir 3 barres entre 6 persones és equivalent a donar mitja barra a cadascuna.

La mateixa idea apareix en geometria. Si volem dividir un segment en parts iguals, o comparar dues longituds que no són múltiples enters l'una de l'altra, també necessitem expressar raons entre quantitats. Aquestes raons es poden representar amb fraccions i, més endavant, donen lloc a la proporcionalitat geomètrica.

Aquesta observació mostra una dificultat important: una mateixa quantitat pot tenir moltes representacions fraccionàries diferents. Per exemple,

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{2}{4}, \quad \frac{3}{6}, \quad \frac{-1}{-2}$$

representen el mateix nombre. Per tant, si volem construir rigorosament els nombres racionals, no n'hi ha prou amb introduir fraccions: cal identificar quines fraccions representen la mateixa quantitat.

En aquesta unitat construirem el conjunt dels nombres racionals a partir dels nombres enters. Ho farem definint una relació d'equivalència entre fraccions i considerant com a nombre racional cadascuna de les classes d'equivalència obtingudes. Després estudiarem les operacions, l'ordre, l'expressió decimal i diverses aplicacions dels nombres racionals.

1.1.1 Interpretació geomètrica dels nombres racionals

La necessitat dels nombres racionals també apareix de manera natural en geometria. Si fixem un segment com a unitat, volem dividir-lo en parts iguals i considerar una d'aquestes parts, dues, tres, o més. Així, si un segment unitat es divideix en b parts iguals, cadascuna d'aquestes parts representa la fracció

$$\frac{1}{b}.$$

Si en prenem a parts, obtenim la quantitat representada per la fracció

$$\frac{a}{b}.$$

Aquesta interpretació permet entendre els nombres racionals com a punts sobre una recta numèrica. Fixem una recta orientada i un segment unitat que té com origen un punt 0 i com extrem un punt 1. Llavors, per representar el racional positiu $\frac{a}{b}$, dividim el segment unitat en b parts iguals i prenem a d'aquestes parts en el sentit positiu de la recta.

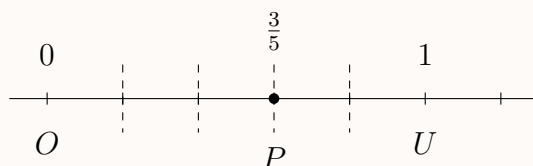


Figura 1.1: Representació geomètrica del nombre racional $\frac{3}{5}$.

En la figura anterior, el segment que va de 0 a 1 s'ha dividit en 5 parts iguals. El punt situat a 3 d'aquestes parts de l'origen representa el nombre racional $\frac{3}{5}$.

Si el racional és negatiu, fem el mateix procés però en el sentit oposat. Així, el nombre

$$-\frac{a}{b}$$

es representa a l'esquerra de 0, a una distància de $\frac{a}{b}$ unitats.

Aquesta construcció geomètrica mostra que una fracció no és només una expressió algebraica. També pot interpretar-se com una raó entre segments. Si P és el punt que representa $\frac{a}{b}$, aleshores, en el cas positiu, podem escriure

$$\frac{OP}{OU} = \frac{a}{b}.$$

A més, la proporcionalitat de segments explica per què fraccions diferents poden representar el mateix punt de la recta. Per exemple,

$$\frac{1}{2} \quad \text{i} \quad \frac{2}{4}$$

representen el mateix punt, perquè dividir la unitat en 2 parts i prendre'n 1 dona la mateixa longitud que dividir-la en 4 parts i prendre'n 2.

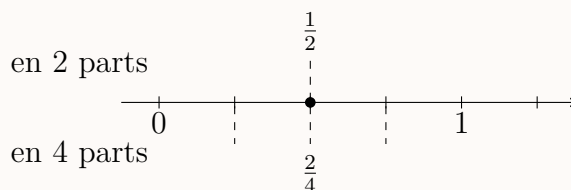


Figura 1.2: Les fraccions $\frac{1}{2}$ i $\frac{2}{4}$ representen el mateix punt de la recta.

En general, les fraccions

$$\frac{a}{b} \quad \text{i} \quad \frac{c}{d}$$

representen la mateixa raó geomètrica si i només si

$$ad = bc.$$

Aquesta és exactament la condició que farem servir per definir la relació d'equivalència entre fraccions.

Així, la construcció dels nombres racionals té una doble arrel: d'una banda, respon a la necessitat algebraica de dividir enters; de l'altra, formalitza la idea geomètrica de raó entre segments i permet situar aquests nombres sobre la recta numèrica.

1.2 Necessitat d'ampliar el conjunt dels nombres enters

A la unitat anterior es va veure que els nombres enters amplien els nombres naturals perquè permeten resoldre equacions de la forma

$$a + x = b$$

sense exigir que b sigui més gran que a . En efecte, en $\mathbb{Z}$ sempre podem escriure

$$x = b - a.$$

Ara bé, els enters encara no són suficients per resoldre totes les equacions senzilles. Considerem una equació de la forma

$$ax = b, \quad a, b \in \mathbb{Z}, \quad a \neq 0.$$

Aquesta equació no sempre té solució en $\mathbb{Z}$. Per exemple,

$$2x = 1$$

no té cap solució entera, perquè no existeix cap enter que multiplicat per 2 doni 1. Tanmateix, en els problemes de repartiment i mesura volem poder expressar aquesta solució: és el nombre que representa una meitat de la unitat.

En general, l'equació

$$ax = b, \quad a \neq 0,$$

té solució en $\mathbb{Z}$ si i només si a divideix b . Si a no divideix b , cal ampliar el conjunt dels nombres enters per poder representar el quocient de b entre a .

Així, la necessitat d'introduir els nombres racionals apareix des de dues perspectives complementàries. D'una banda, des d'un punt de vista geomètric, volem representar sobre una recta punts que no corresponen a nombres enters, però que s'obtenen dividint la unitat en un nombre enter de parts iguals i prenent-ne un nombre enter de parts. Aquests punts expressen raons entre segments i permeten interpretar fraccions com $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{5}$ o $\frac{7}{4}$ com a posicions sobre la recta numèrica.

D'altra banda, des d'un punt de vista algebraic, volem ampliar el conjunt dels nombres enters per poder resoldre equacions de la forma

$$ax = b, \quad a, b \in \mathbb{Z}, \quad a \neq 0,$$

també quan a no divideix b . En aquest cas, la solució s'expressa mitjançant el quocient

$$\frac{b}{a}.$$

Per tant, els nombres racionals responen alhora a una necessitat geomètrica i a una necessitat algebraica: permeten representar raons de segments sobre la recta i, al mateix temps, fan possible la divisió entre enters sempre que el divisor sigui no nul.

Exemple 1.1

Decidiu quines de les equacions següents tenen solució en $\mathbb{Z}$:

$$a) \quad 3x = 12, \quad b) \quad 4x = 10, \quad c) \quad -5x = 20, \quad d) \quad 6x = 7.$$

Solució

L'equació $3x = 12$ té solució en $\mathbb{Z}$, perquè 3 divideix 12. La solució és

$$x = 4.$$

L'equació $4x = 10$ no té solució en $\mathbb{Z}$, perquè 4 no divideix 10.

L'equació $-5x = 20$ té solució en $\mathbb{Z}$, perquè -5 divideix 20. La solució és

$$x = -4.$$

Finalment, l'equació $6x = 7$ no té solució en $\mathbb{Z}$, perquè 6 no divideix 7.

Per tant, les equacions $a)$ i $c)$ tenen solució entera, mentre que $b)$ i $d)$ exigeixen ampliar el conjunt dels nombres enters.

Exemple 1.2

Situeu sobre la recta numèrica els nombres racionals

$$-\frac{2}{5}, \quad \frac{3}{4}, \quad \frac{7}{3}.$$

Solució

Fixem una recta orientada, amb el 0 a l'origen i el 1 a una unitat de distància cap a la dreta.

Per situar

$$-\frac{2}{5},$$

dividim la unitat en 5 parts iguals i prenem 2 d'aquestes parts cap a l'esquerra de 0. Per tant, $-\frac{2}{5}$ queda entre -1 i 0 .

Per situar

$$\frac{3}{4},$$

dividim la unitat en 4 parts iguals i prenem 3 d'aquestes parts cap a la dreta de 0. Per tant, $\frac{3}{4}$ queda entre 0 i 1 .

Finalment, per situar

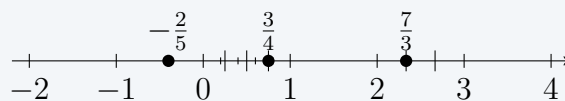
$$\frac{7}{3},$$

apliquem la divisió euclidiana de 7 entre 3:

$$7 = 3 \cdot 2 + 1, \quad 0 \leq 1 < 3.$$

Això vol dir que $\frac{7}{3}$ queda després de 2 unitats completes i a una tercera part de la unitat següent. Per tant, per representar-lo sobre la recta, avancem primer fins al punt 2, dividim el segment que va de 2 a 3 en 3 parts iguals i prenem 1 d'aquestes parts.

Així, el punt que representa $\frac{7}{3}$ queda entre 2 i 3.



Representació dels nombres racionals $-\frac{2}{5}$, $\frac{3}{4}$ i $\frac{7}{3}$ sobre la recta numèrica.

Aquest exemple mostra que els nombres racionals no només representen parts de la unitat situades entre 0 i 1. També poden ser negatius, com $-\frac{2}{5}$, o més grans que 1, com $\frac{7}{3}$. En tots els casos, però, es poden interpretar com a punts de la recta obtinguts a partir de divisions iguals de la unitat.

El pas de $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Q}$ és, doncs, anàleg al pas de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}$: ampliem el conjunt numèric per fer possible una operació que abans no sempre era possible. En passar de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}$, vam poder restar sense restriccions. En passar de $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Q}$, podrem dividir per qualsevol nombre no nul.

1.3 Construcció del conjunt dels nombres racionals

Intuïtivament, els nombres racionals són els punts de la recta que es poden obtenir dividint la unitat en un nombre enter de parts iguals i prenent-ne un nombre enter de parts. Equivalentment, són les quantitats que es poden expressar com una raó entre dos enters, amb denominador no nul. Així, la idea intuïtiva d'un nombre racional és la d'un quocient entre dos enters. Per representar aquest quocient escrivim una fracció

$$\frac{a}{b},$$

on

$$a \in \mathbb{Z}, \quad b \in \mathbb{Z}, \quad b \neq 0.$$

El nombre a s'anomena **numerador** i el nombre b s'anomena **denominador**.

Escrivem

$$\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Així, formalment, una fracció es pot entendre com un parell ordenat

$$(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*,$$

que escrivim en la forma

$$\frac{a}{b}.$$

El denominador no pot ser zero, perquè la divisió per zero no està definida.

Observació 1.1

Com hem vist a la subsecció 1.1.1, *Interpretació geomètrica dels nombres racionals*, cal distingir entre fracció i nombre racional. Una fracció és una expressió de la forma $\frac{a}{b}$, amb $b \neq 0$. Un nombre racional serà una classe de fraccions equivalents. Per tant, diferents fraccions poden representar el mateix nombre racional.

1.3.1 Fraccions equivalents

Dues fraccions

$$\frac{a}{b} \quad \text{i} \quad \frac{c}{d}, \quad b, d \neq 0,$$

són **equivalents** si compleixen

$$ad = bc.$$

En aquest cas escrivem

$$\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d}.$$

Aquesta definició recull la idea habitual de fraccions que representen la mateixa quantitat. Per exemple, $\frac{1}{2}$ i $\frac{3}{6}$ representen la mateixa part de la unitat, i això queda reflectit en la igualtat

$$1 \cdot 6 = 2 \cdot 3.$$

Exemple 1.3

Les fraccions $\frac{2}{3}$ i $\frac{8}{12}$ són equivalents, perquè

$$2 \cdot 12 = 24 \quad \text{i} \quad 3 \cdot 8 = 24.$$

Per tant,

$$\frac{2}{3} \sim \frac{8}{12}.$$

Exemple 1.4

Les fraccions $\frac{-4}{5}$ i $\frac{8}{-10}$ són equivalents, perquè

$$(-4) \cdot (-10) = 40 \quad \text{i} \quad 5 \cdot 8 = 40.$$

Per tant,

$$\frac{-4}{5} \sim \frac{8}{-10}.$$

1.3.2 La relació d'equivalència

La relació anterior permet agrupar totes les fraccions que representen la mateixa quantitat. Per poder fer-ho rigorosament, cal comprovar que és una relació d'equivalència.

Proposició 1.1

La relació $\sim$ definida sobre $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ per

$$\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d} \iff ad = bc$$

és una relació d'equivalència.

Demostració

Cal comprovar que la relació és reflexiva, simètrica i transitiva.

En primer lloc, és reflexiva. Per a qualsevol fracció $\frac{a}{b}$, amb $b \neq 0$, tenim

$$ab = ba.$$

Per tant,

$$\frac{a}{b} \sim \frac{a}{b}.$$

En segon lloc, és simètrica. Suposem que

$$\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d}.$$

Això vol dir que

$$ad = bc.$$

Per la commutativitat de la multiplicació en $\mathbb{Z}$, aquesta igualtat equival a

$$cb = da.$$

Per tant,

$$\frac{c}{d} \sim \frac{a}{b}.$$

Finalment, és transitiva. Suposem que

$$\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d} \quad \text{i} \quad \frac{c}{d} \sim \frac{e}{f}.$$

Això vol dir que

$$ad = bc \quad \text{i} \quad cf = de.$$

Multiplicant la primera igualtat per f , obtenim

$$adf = bcf.$$

Com que $cf = de$, podem substituir cf per de :

$$adf = bde.$$

Com que $d \neq 0$, podem cancel·lar d i obtenim

$$af = be.$$

Per tant,

$$\frac{a}{b} \sim \frac{e}{f}.$$

Així, la relació és transitiva.

1.3.3 Definició del conjunt dels nombres racionals

Com que $\sim$ és una relació d'equivalència, podem considerar les seves classes d'equivalència.

La classe d'equivalència de la fracció $\frac{a}{b}$ és el conjunt de totes les fraccions equivalents a $\frac{a}{b}$:

$$\left[\frac{a}{b} \right] = \left\{ \frac{x}{y} \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* : ay = bx \right\}.$$

Definició 1.1

El conjunt dels **nombres racionals** és el conjunt quocient

$$\mathbb{Q} = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*) / \sim.$$

És a dir, un nombre racional és una classe d'equivalència de fraccions.

Així, el nombre racional representat per $\frac{a}{b}$ és

$$\left[\frac{a}{b} \right].$$

Ara bé, per simplicitat, habitualment escriurem

$$\frac{a}{b}$$

per referir-nos al nombre racional representat per aquesta fracció. Aquest és un abús de notació habitual: identifiquem una fracció amb el nombre racional que representa.

Exemple 1.5

Les fraccions

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{2}{4}, \quad \frac{3}{6}, \quad \frac{-1}{-2}, \quad \frac{-2}{-4}$$

són equivalents i, per tant, representen el mateix nombre racional:

$$\left[\frac{1}{2} \right] = \left[\frac{2}{4} \right] = \left[\frac{3}{6} \right] = \left[\frac{-1}{-2} \right].$$

En la pràctica escrivim simplement

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{-1}{-2}.$$

1.3.4 Els enters com a nombres racionals

Els nombres enters es poden veure de manera natural com a nombres racionals. Per fer-ho rigorosament, definim l'aplicació

$$\iota : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$$

donada per

$$\iota(n) = \left[\frac{n}{1} \right].$$

Aquesta aplicació està ben definida, perquè $1 \in \mathbb{Z}^*$, i per tant $\frac{n}{1}$ és una fracció admissible per a tot $n \in \mathbb{Z}$.

A més, ι és injectiva. En efecte, si

$$\iota(n) = \iota(m),$$

aleshores

$$\left[\frac{n}{1} \right] = \left[\frac{m}{1} \right].$$

Per la definició de la relació d'equivalència entre fraccions, això vol dir que

$$n \cdot 1 = m \cdot 1,$$

i, per tant,

$$n = m.$$

Així, dos enters diferents determinen dos nombres racionals diferents.

Per aquest motiu, podem identificar cada enter n amb el racional

$$\left[\frac{n}{1} \right].$$

Aquesta identificació permet considerar $\mathbb{Z}$ com un subconjunt de $\mathbb{Q}$, i escriure simplement

$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}.$$

A partir d'ara, quan no hi hagi risc de confusió, escriurem n en lloc de $\left[\frac{n}{1} \right]$.

Aquesta inclusió és compatible amb les operacions, ja que

$$\iota(n + m) = \iota(n) + \iota(m)$$

i

$$\iota(nm) = \iota(n)\iota(m).$$

1.3.5 Representants i fracció irreductible

Com que un mateix nombre racional pot tenir molts representants, és útil escollir-ne un de especialment senzill.

Una fracció

$$\frac{a}{b}, \quad b > 0,$$

s'anomena **irreductible** si

$$\text{mcd}(a, b) = 1.$$

Això vol dir que el numerador i el denominador no tenen cap divisor comú positiu més gran que 1.

Proposició 1.2

Tot nombre racional es pot representar mitjançant una fracció irreductible amb denominador positiu.

Demostració

Considerem una fracció qualsevol

$$\frac{a}{b}, \quad b \neq 0.$$

Si $b < 0$, podem canviar el signe del numerador i del denominador:

$$\frac{a}{b} = \frac{-a}{-b}.$$

Així podem suposar que el denominador és positiu.

Sigui

$$g = \text{mcd}(a, b).$$

Aleshores podem escriure

$$a = ga', \quad b = gb',$$

amb

$$\text{mcd}(a', b') = 1.$$

Per tant,

$$\frac{a}{b} = \frac{ga'}{gb'} = \frac{a'}{b'}.$$

La fracció $\frac{a'}{b'}$ és irreductible i té denominador positiu.

Proposició 1.3

La fracció irreductible amb denominador positiu que representa un nombre racional és única.

Demostració

Suposem que

$$\frac{a}{b} \quad \text{i} \quad \frac{c}{d}$$

són dues fraccions irreductibles, amb

$$b > 0, \quad d > 0,$$

i que representen el mateix nombre racional. Aleshores són equivalents i, per tant,

$$ad = bc.$$

Com que $\text{mcd}(a, b) = 1$ i $b \mid ad$, pel lema d'Euclides deduïm que

$$b \mid d.$$

De manera anàloga, com que $\text{mcd}(c, d) = 1$ i $d \mid bc$, deduïm que

$$d \mid b.$$

Per tant, b i d es divideixen mútuament. Com que tots dos són positius, obtenim

$$b = d.$$

Substituint en la igualtat $ad = bc$, resulta

$$ab = bc.$$

Com que $b \neq 0$, podem cancel·lar b , i obtenim

$$a = c.$$

Així, les dues fraccions són iguals.

Per tant, cada nombre racional té un representant irreductible únic amb denominador positiu. Aquesta fracció és la forma més simple d'escriure el nombre racional.

Exemple 1.6

Reduïm a fracció irreductible:

$$\frac{180}{240}.$$

Com que

$$\text{mcd}(180, 240) = 60,$$

tenim

$$\frac{180}{240} = \frac{180 : 60}{240 : 60} = \frac{3}{4}.$$

Per tant, la fracció irreductible equivalent a $\frac{180}{240}$ és

$$\frac{3}{4}.$$

Exemple 1.7

Escrivim amb denominador positiu i en forma irreductible:

$$\frac{45}{-60}.$$

Primer passem el signe negatiu al numerador:

$$\frac{45}{-60} = -\frac{45}{60}.$$

Com que

$$\text{mcd}(45, 60) = 15,$$

obtenim

$$-\frac{45}{60} = -\frac{3}{4}.$$

Per tant,

$$\frac{45}{-60} = -\frac{3}{4}.$$

1.3.6 Simplificació i denominador comú

Si multipliquem el numerador i el denominador d'una fracció pel mateix enter no nul, obtenim una fracció equivalent:

$$\frac{a}{b} = \frac{ka}{kb}, \quad k \in \mathbb{Z}^*.$$

De la mateixa manera, si dividim el numerador i el denominador per un divisor comú, obtenim una fracció equivalent més simple. Aquest procés s'anomena **simplificació**.

També és habitual transformar diverses fraccions en fraccions equivalents amb un mateix denominador. Això serà útil per sumar, restar i comparar nombres racionals.

Exemple 1.8

Simplifiqueu la fracció

$$\frac{-84}{126}$$

fins a obtenir-ne la fracció irreductible.

Solució

Per simplificar una fracció, calculem primer el màxim comú divisor del numerador i del denominador, prescindint del signe:

$$\text{mcd}(84, 126) = 42.$$

Aleshores dividim numerador i denominador per 42:

$$\frac{-84}{126} = \frac{-84 : 42}{126 : 42} = \frac{-2}{3}.$$

Com que

$$\text{mcd}(2, 3) = 1,$$

la fracció

$$\frac{-2}{3}$$

és irreductible.

Per tant,

$$\frac{-84}{126} = \frac{-2}{3}.$$

Exemple 1.9

Transformem les fraccions

$$\frac{14}{20}, \quad \frac{7}{15}, \quad \frac{5}{30}$$

en fraccions equivalents amb el mateix denominador.

Solució

Calculem primer el mínim comú múltiple dels denominadors:

$$20 = 2^2 \cdot 5, \quad 15 = 3 \cdot 5, \quad 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5.$$

Per tant,

$$\text{mcm}(20, 15, 30) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60.$$

Ara hem de transformar cada fracció en una fracció equivalent amb denominador 60. Per fer-ho, mirem per quin factor cal multiplicar cada denominador. Aquest mateix factor s'ha de multiplicar també al numerador.

Com que

$$20 \cdot 3 = 60, \quad 15 \cdot 4 = 60, \quad 30 \cdot 2 = 60,$$

obtenim

$$\frac{14}{20} = \frac{14 \cdot 3}{20 \cdot 3} = \frac{42}{60},$$

$$\frac{7}{15} = \frac{7 \cdot 4}{15 \cdot 4} = \frac{28}{60},$$

i

$$\frac{5}{30} = \frac{5 \cdot 2}{30 \cdot 2} = \frac{10}{60}.$$

Així, les fraccions equivalents amb denominador comú són

$$\frac{42}{60}, \quad \frac{28}{60}, \quad \frac{10}{60}.$$

1.4 El cos dels nombres racionals

Un cop construït el conjunt dels nombres racionals com el conjunt quocient

$$\mathbb{Q} = (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*) / \sim,$$

cal definir-hi les operacions d'addició i de multiplicació.

Recordem que un nombre racional és una classe d'equivalència de fraccions. Per tant, quan escrivim

$$\left[\frac{a}{b} \right],$$

no ens referim només a la fracció $\frac{a}{b}$, sinó a tota la classe de fraccions equivalents a ella.

Això obliga a tenir una precaució fonamental: si definim una operació fent servir representants, hem de comprovar que el resultat no depèn dels representants triats. Aquesta és la idea de dir que una operació està ben definida.

1.4.1 Addició de nombres racionals

Siguin

$$x = \left[\frac{a}{b} \right], \quad y = \left[\frac{c}{d} \right]$$

dos nombres racionals, amb $a, c \in \mathbb{Z}$ i $b, d \in \mathbb{Z}^*$. Definim l'addició de x i y per

$$x + y = \left[\frac{a}{b} \right] + \left[\frac{c}{d} \right] = \left[\frac{ad + bc}{bd} \right].$$

El nombre racional $x + y$ s'anomena la suma de x i y .

Aquesta expressió té sentit perquè $b \neq 0$ i $d \neq 0$, i per tant

$$bd \neq 0.$$

Com que l'operació està definida entre classes d'equivalència, cal comprovar que la definició no depèn del representant escollit. Per això provarem la proposició següent.

Proposició 1.4

L'addició de nombres racionals està ben definida.

Demostració

Suposem que

$$\frac{a}{b} \sim \frac{a'}{b'} \quad \text{i} \quad \frac{c}{d} \sim \frac{c'}{d'}.$$

Això vol dir que

$$ab' = a'b \quad \text{i} \quad cd' = c'd.$$

Hem de veure que

$$\frac{ad + bc}{bd} \sim \frac{a'd' + b'c'}{b'd'}.$$

Per la definició de fraccions equivalents, cal provar que

$$(ad + bc)b'd' = (a'd' + b'c')bd.$$

Calculem el primer membre:

$$(ad + bc)b'd' = adb'd' + bcb'd'.$$

Com que $ab' = a'b$, tenim

$$adb'd' = a'bdd'.$$

I com que $cd' = c'd$, tenim

$$bcb'd' = bb'c'd.$$

Per tant,

$$(ad + bc)b'd' = a'bdd' + bb'c'd.$$

Ara bé,

$$(a'd' + b'c')bd = a'd'bd + b'c'bd = a'bdd' + bb'c'd.$$

Els dos membres són iguals. Així,

$$\frac{ad + bc}{bd} \sim \frac{a'd' + b'c'}{b'd'}.$$

Per tant, l'addició no depèn dels representants triats i està ben definida.

Un cop sabem que l'addició està ben definida, podem usar la notació habitual

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd},$$

entenent que aquesta expressió és una manera abreujada d'escriure l'addició de les classes

$$\left[\frac{a}{b} \right] \quad \text{i} \quad \left[\frac{c}{d} \right].$$

Exemple 1.10

Calculem

$$\left[\frac{2}{3}\right] + \left[\frac{5}{4}\right].$$

Per la definició d'addició,

$$\left[\frac{2}{3}\right] + \left[\frac{5}{4}\right] = \left[\frac{2 \cdot 4 + 3 \cdot 5}{3 \cdot 4}\right] = \left[\frac{8 + 15}{12}\right] = \left[\frac{23}{12}\right].$$

1.4.2 Propietats de l'addició

L'addició de nombres racionals té les mateixes propietats formals que l'addició d'enters.

Proposició 1.5

Per a tots $x, y, z \in \mathbb{Q}$, es compleixen les propietats següents:

1. Commutativitat de l'addició:

$$x + y = y + x.$$

2. Associativitat de l'addició:

$$(x + y) + z = x + (y + z).$$

3. Existència d'element neutre per a l'addició: existeix un element $0 \in \mathbb{Q}$ tal que

$$x + 0 = x.$$

4. Existència d'element oposat: per a tot $x \in \mathbb{Q}$, existeix un element $-x \in \mathbb{Q}$ tal que

$$x + (-x) = 0.$$

Demostració

Siguin

$$x = \left[\frac{a}{b}\right], \quad y = \left[\frac{c}{d}\right], \quad z = \left[\frac{e}{f}\right].$$

La commutativitat es dedueix directament de la definició:

$$x + y = \left[\frac{ad + bc}{bd}\right],$$

mentre que

$$y + x = \left[\frac{cb + da}{db}\right].$$

Com que en $\mathbb{Z}$ tenim

$$ad + bc = da + cb \quad \text{i} \quad bd = db,$$

obtenim

$$x + y = y + x.$$

L'associativitat es comprova de manera anàloga utilitzant l'associativitat i la distributivitat de l'addició i la multiplicació en $\mathbb{Z}$.

L'element neutre de l'addició és

$$0 = \left[\frac{0}{1} \right].$$

En efecte,

$$\left[\frac{a}{b} \right] + \left[\frac{0}{1} \right] = \left[\frac{a \cdot 1 + b \cdot 0}{b \cdot 1} \right] = \left[\frac{a}{b} \right].$$

Finalment, l'oposat de

$$x = \left[\frac{a}{b} \right]$$

és

$$-x = \left[\frac{-a}{b} \right].$$

En efecte,

$$\left[\frac{a}{b} \right] + \left[\frac{-a}{b} \right] = \left[\frac{ab + b(-a)}{b^2} \right] = \left[\frac{0}{b^2} \right] = \left[\frac{0}{1} \right].$$

Per tant,

$$x + (-x) = 0.$$

A partir de l'oposat, podem definir la resta de nombres racionals. Si $x, y \in \mathbb{Q}$, definim

$$x - y = x + (-y).$$

1.4.3 Multiplicació de nombres racionals

Siguin

$$x = \left[\frac{a}{b} \right], \quad y = \left[\frac{c}{d} \right]$$

dos nombres racionals, amb $a, c \in \mathbb{Z}$ i $b, d \in \mathbb{Z}^*$. Definim la multiplicació de x i y per

$$xy = \left[\frac{a}{b} \right] \cdot \left[\frac{c}{d} \right] = \left[\frac{ac}{bd} \right].$$

El nombre racional xy s'anomena el producte de x i y .

Aquesta expressió té sentit perquè $bd \neq 0$. Com que l'operació està definida entre classes d'equivalència, cal comprovar que la definició no depèn del representant escollit.

Proposició 1.6

La multiplicació de nombres racionals està ben definida.

Demostració

Suposem que

$$\frac{a}{b} \sim \frac{a'}{b'} \quad \text{i} \quad \frac{c}{d} \sim \frac{c'}{d'}.$$

Això vol dir que

$$ab' = a'b \quad \text{i} \quad cd' = c'd.$$

Hem de veure que

$$\frac{ac}{bd} \sim \frac{a'c'}{b'd'}.$$

Per la definició de fraccions equivalents, cal provar que

$$acb'd' = a'c'bd.$$

Ara bé,

$$acb'd' = (ab')(cd').$$

Com que

$$ab' = a'b \quad \text{i} \quad cd' = c'd,$$

tenim

$$(ab')(cd') = (a'b)(c'd) = a'c'bd.$$

Per tant,

$$acb'd' = a'c'bd.$$

Així,

$$\frac{ac}{bd} \sim \frac{a'c'}{b'd'}.$$

Per tant, la multiplicació no depèn dels representants triats i està ben definida.

Un cop sabem que la multiplicació està ben definida, podem usar la notació habitual

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd},$$

entenent que aquesta expressió és una manera abreujada d'escriure la multiplicació de les classes

$$\left[\frac{a}{b} \right] \quad \text{i} \quad \left[\frac{c}{d} \right].$$

Exemple 1.11

Calculem

$$\left[\frac{-3}{5} \right] \cdot \left[\frac{10}{9} \right].$$

Per la definició de multiplicació,

$$\left[\frac{-3}{5} \right] \cdot \left[\frac{10}{9} \right] = \left[\frac{(-3) \cdot 10}{5 \cdot 9} \right] = \left[\frac{-30}{45} \right] = \left[\frac{-2}{3} \right].$$

1.4.4 Propietats de la multiplicació

Proposició 1.7

Per a tots $x, y, z \in \mathbb{Q}$, es compleixen les propietats següents:

1. **Commutativitat de la multiplicació:**

$$xy = yx.$$

2. **Associativitat de la multiplicació:**

$$(xy)z = x(yz).$$

3. **Existència d'element neutre per a la multiplicació:** existeix un element $1 \in \mathbb{Q}$, diferent de 0, tal que

$$x \cdot 1 = x.$$

4. **Existència d'invers multiplicatiu:** si $x \neq 0$, existeix un element $x^{-1} \in \mathbb{Q}$ tal que

$$xx^{-1} = 1.$$

Demostració

Siguin

$$x = \left[\frac{a}{b} \right], \quad y = \left[\frac{c}{d} \right], \quad z = \left[\frac{e}{f} \right].$$

La commutativitat es dedueix de la commutativitat de la multiplicació en $\mathbb{Z}$:

$$xy = \left[\frac{ac}{bd} \right], \quad yx = \left[\frac{ca}{db} \right].$$

Com que

$$ac = ca \quad \text{i} \quad bd = db,$$

tenim

$$xy = yx.$$

L'associativitat es comprova igualment a partir de l'associativitat de la multiplicació en $\mathbb{Z}$.

L'element neutre de la multiplicació és

$$1 = \left[\frac{1}{1} \right].$$

En efecte,

$$\left[\frac{a}{b} \right] \cdot \left[\frac{1}{1} \right] = \left[\frac{a \cdot 1}{b \cdot 1} \right] = \left[\frac{a}{b} \right].$$

Finalment, suposem que

$$x = \left[\frac{a}{b} \right] \neq 0.$$

Això equival a dir que $a \neq 0$, perquè

$$\left[\frac{a}{b}\right] = \left[\frac{0}{1}\right]$$

si i només si

$$a \cdot 1 = 0 \cdot b,$$

és a dir, si i només si $a = 0$.

Aleshores podem definir

$$x^{-1} = \left[\frac{b}{a}\right],$$

ja que $a \neq 0$. Tenim

$$x \cdot x^{-1} = \left[\frac{a}{b}\right] \cdot \left[\frac{b}{a}\right] = \left[\frac{ab}{ba}\right] = \left[\frac{1}{1}\right].$$

Per tant,

$$xx^{-1} = 1.$$

Definició 1.2

Siguin $x, y \in \mathbb{Q}$, amb $y \neq 0$. Definim la divisió de x entre y per

$$\frac{x}{y} = x \cdot y^{-1}.$$

És a dir, dividir per un nombre racional no nul és el mateix que multiplicar pel seu invers multiplicatiu.

Si

$$x = \left[\frac{a}{b}\right] \quad \text{i} \quad y = \left[\frac{c}{d}\right],$$

amb $a, c \in \mathbb{Z}$, $b, d \in \mathbb{Z}^*$ i $y \neq 0$, aleshores $c \neq 0$. Per tant,

$$y^{-1} = \left[\frac{d}{c}\right].$$

Així,

$$\frac{x}{y} = \left[\frac{a}{b}\right] \cdot \left[\frac{d}{c}\right] = \left[\frac{ad}{bc}\right].$$

Un cop definida la divisió en $\mathbb{Q}$, podem usar la notació habitual

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}, \quad c \neq 0,$$

entenent que aquesta expressió és una manera abreujada d'escriure la divisió de les classes

$$\left[\frac{a}{b}\right] \quad \text{i} \quad \left[\frac{c}{d}\right].$$

Proposició 1.8 (Distributivitat de la multiplicació respecte de l'addició)

Per a tots $x, y, z \in \mathbb{Q}$, es compleix

$$x(y + z) = xy + xz.$$

Demostració

Siguin

$$x = \left[\frac{a}{b} \right], \quad y = \left[\frac{c}{d} \right], \quad z = \left[\frac{e}{f} \right].$$

Aleshores

$$y + z = \left[\frac{cf + de}{df} \right].$$

Per tant,

$$x(y + z) = \left[\frac{a}{b} \right] \cdot \left[\frac{cf + de}{df} \right] = \left[\frac{a(cf + de)}{bdf} \right].$$

D'altra banda,

$$xy = \left[\frac{ac}{bd} \right], \quad xz = \left[\frac{ae}{bf} \right].$$

Així,

$$xy + xz = \left[\frac{ac}{bd} \right] + \left[\frac{ae}{bf} \right] = \left[\frac{acbf + bdae}{b^2df} \right].$$

Simplificant l'expressió del numerador,

$$acbf + bdae = ab(cf + de).$$

Per tant,

$$xy + xz = \left[\frac{ab(cf + de)}{b^2df} \right].$$

Aquesta fracció és equivalent a

$$\frac{a(cf + de)}{bdf},$$

perquè s'ha obtingut multiplicant numerador i denominador per b . Així,

$$xy + xz = \left[\frac{a(cf + de)}{bdf} \right].$$

Per tant,

$$x(y + z) = xy + xz.$$

1.4.5 $\mathbb{Q}$ com a cos commutatiu

Les propietats anteriors mostren que el conjunt dels nombres racionals, amb l'addició i la multiplicació que hem definit, té una estructura algebraica molt important.

Proposició 1.9

El conjunt $\mathbb{Q}$, amb les operacions d'addició i multiplicació definides anteriorment, és un cos commutatiu.

Demostració

Hem vist que l'addició en $\mathbb{Q}$ és associativa i commutativa, té element neutre 0, i tot element té oposat.

També hem vist que la multiplicació en $\mathbb{Q}$ és associativa i commutativa, té element neutre 1, i tot element no nul té invers multiplicatiu.

Finalment, la multiplicació és distributiva respecte de l'addició:

$$x(y + z) = xy + xz.$$

Per tant, $\mathbb{Q}$ és un cos commutatiu.

1.5 El cos ordenat dels nombres racionals

Un cop hem definit les operacions d'addició i multiplicació en $\mathbb{Q}$, volem dotar aquest conjunt d'una relació d'ordre. Aquesta relació ha de ser coherent amb la interpretació geomètrica dels nombres racionals com a punts de la recta numèrica: si un nombre racional queda a l'esquerra d'un altre, direm que és menor.

Ara bé, com que els nombres racionals són classes d'equivalència de fraccions, cal definir l'ordre de manera que no depengui del representant escollit.

1.5.1 Definició de l'ordre

Recordem que tot nombre racional admet un representant amb denominador positiu. Per això, per definir l'ordre, prendrem sempre representants amb denominador positiu.

Definició 1.3

Siguin $x, y \in \mathbb{Q}$. Prenem representants

$$x = \left[\frac{a}{b} \right], \quad y = \left[\frac{c}{d} \right],$$

amb $a, c \in \mathbb{Z}$ i $b, d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Definim

$$x \leq y$$

si, i només si,

$$ad \leq bc.$$

És a dir,

$$\left[\frac{a}{b}\right] \leq \left[\frac{c}{d}\right] \iff ad \leq bc,$$

sempre que $b > 0$ i $d > 0$.

Proposició 1.10

La relació d'ordre anterior està ben definida.

Demostració

Hem de comprovar que la definició no depèn dels representants triats.

Suposem que

$$\frac{a}{b} \sim \frac{a'}{b'} \quad \text{i} \quad \frac{c}{d} \sim \frac{c'}{d'},$$

amb

$$b, d, b', d' > 0.$$

Això vol dir que

$$ab' = a'b \quad \text{i} \quad cd' = c'd.$$

Suposem ara que

$$ad \leq bc.$$

Com que $b'd' > 0$, podem multiplicar els dos membres de la desigualtat per $b'd'$ i obtenim

$$adb'd' \leq bcb'd'.$$

Ara bé,

$$adb'd' = (ab')dd' = a'bdd',$$

i també

$$bcb'd' = bb'(cd') = bb'c'd.$$

Per tant,

$$a'bdd' \leq bb'c'd.$$

Com que $bd > 0$, podem cancel·lar aquest factor positiu i obtenim

$$a'd' \leq b'c'.$$

Això prova que

$$\left[\frac{a'}{b'}\right] \leq \left[\frac{c'}{d'}\right].$$

El raonament invers és anàleg. Per tant, la relació d'ordre no depèn dels representants escollits i està ben definida.

Un cop sabem que l'ordre està ben definit, podem usar la notació habitual

$$\frac{a}{b} \leq \frac{c}{d} \iff ad \leq bc,$$

sempre que $b > 0$ i $d > 0$, entenent que aquesta expressió és una manera abreujada de comparar les classes

$$\left[\frac{a}{b}\right] \quad \text{i} \quad \left[\frac{c}{d}\right].$$

Observació 1.2

Si dues fraccions tenen el mateix denominador positiu, l'ordre es redueix a comparar els numeradors. En efecte, si $b > 0$, aleshores

$$\frac{a}{b} \leq \frac{c}{b} \iff ab \leq bc \iff a \leq c.$$

Exemple 1.12

Compareu els nombres racionals

$$-\frac{2}{5} \quad \text{i} \quad \frac{1}{3}.$$

Solució

Els denominadors són positius. Per tant, comparem els productes creuats:

$$(-2) \cdot 3 = -6 \quad \text{i} \quad 5 \cdot 1 = 5.$$

Com que

$$-6 < 5,$$

tenim

$$-\frac{2}{5} < \frac{1}{3}.$$

1.5.2 Propietats de l'ordre**Proposició 1.11**

La relació $\leq$ definida en $\mathbb{Q}$ és una relació d'ordre total. És a dir, per a tots $x, y, z \in \mathbb{Q}$, es compleixen les propietats següents:

1. **Reflexiva:**

$$x \leq x.$$

2. **Antisimètrica:** si $x \leq y$ i $y \leq x$, aleshores

$$x = y.$$

3. **Transitiva:** si $x \leq y$ i $y \leq z$, aleshores

$$x \leq z.$$

4. **Total:** per a tots $x, y \in \mathbb{Q}$, es compleix

$$x \leq y \quad \text{o bé} \quad y \leq x.$$

Demostració

Siguin

$$x = \left[\frac{a}{b} \right], \quad y = \left[\frac{c}{d} \right], \quad z = \left[\frac{e}{f} \right],$$

amb $b, d, f > 0$.

La propietat reflexiva és immediata, perquè

$$ab = ba,$$

i per tant

$$\frac{a}{b} \leq \frac{a}{b}.$$

Per provar l'antisimetria, suposem que

$$x \leq y \quad \text{i} \quad y \leq x.$$

Això vol dir que

$$ad \leq bc \quad \text{i} \quad cb \leq da.$$

Com que $cb = bc$ i $da = ad$, obtenim

$$ad = bc.$$

Per tant,

$$\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d},$$

i així

$$x = y.$$

Per provar la propietat transitiva, suposem que

$$x \leq y \quad \text{i} \quad y \leq z.$$

Aleshores

$$ad \leq bc \quad \text{i} \quad cf \leq de.$$

Multiplicant la primera desigualtat per $f > 0$, obtenim

$$adf \leq bcf.$$

Multiplicant la segona desigualtat per $b > 0$, obtenim

$$bcf \leq bde.$$

Per tant,

$$adf \leq bde.$$

Com que $d > 0$, podem cancel·lar d i obtenim

$$af \leq be.$$

Això vol dir que

$$x \leq z.$$

Finalment, de l'ordre total en $\mathbb{Z}$ es dedueix l'ordre total en $\mathbb{Q}$. En efecte, donats x i y , els enters ad i bc són comparables; per tant,

$$ad \leq bc \quad \text{o bé} \quad bc \leq ad.$$

Això equival a dir que

$$x \leq y \quad \text{o bé} \quad y \leq x.$$

Definim també l'ordre estricte. Si $x, y \in \mathbb{Q}$, escrivim

$$x < y$$

si, i només si,

$$x \leq y \quad \text{i} \quad x \neq y.$$

Equivalentment, si

$$x = \left[\frac{a}{b} \right], \quad y = \left[\frac{c}{d} \right],$$

amb $b, d > 0$, aleshores

$$x < y \quad \Longleftrightarrow \quad ad < bc.$$

1.5.3 Compatibilitat de l'ordre amb les operacions

Perquè $\mathbb{Q}$ sigui un cos ordenat, l'ordre ha de ser compatible amb l'addició i amb la multiplicació.

Proposició 1.12

L'ordre de $\mathbb{Q}$ és compatible amb l'addició. És a dir, si $x, y, z \in \mathbb{Q}$ i

$$x \leq y,$$

aleshores

$$x + z \leq y + z.$$

Demostració

Siguin

$$x = \left[\frac{a}{b} \right], \quad y = \left[\frac{c}{d} \right], \quad z = \left[\frac{e}{f} \right],$$

amb $b, d, f > 0$. Suposem que

$$x \leq y.$$

Això vol dir que

$$ad \leq bc.$$

Ara bé,

$$x + z = \left[\frac{af + be}{bf} \right],$$

i

$$y + z = \left[\frac{cf + de}{df} \right].$$

Per veure que $x + z \leq y + z$, hem de comprovar que

$$(af + be)df \leq (cf + de)bf.$$

Calculem:

$$(af + be)df = adf^2 + bdef,$$

i

$$(cf + de)bf = bcf^2 + bdef.$$

Com que $ad \leq bc$ i $f^2 > 0$, tenim

$$adf^2 \leq bcf^2.$$

Afegint $bdef$ als dos membres, obtenim

$$adf^2 + bdef \leq bcf^2 + bdef.$$

Per tant,

$$(af + be)df \leq (cf + de)bf,$$

i així

$$x + z \leq y + z.$$

Proposició 1.13

L'ordre de $\mathbb{Q}$ és compatible amb la multiplicació per nombres racionals no negatius. És a dir, si $x, y, z \in \mathbb{Q}$,

$$x \leq y \quad \text{i} \quad 0 \leq z,$$

aleshores

$$xz \leq yz.$$

Demostració

Siguin

$$x = \left[\frac{a}{b} \right], \quad y = \left[\frac{c}{d} \right], \quad z = \left[\frac{e}{f} \right],$$

amb $b, d, f > 0$. Suposem que

$$x \leq y \quad \text{i} \quad 0 \leq z.$$

Això vol dir que

$$ad \leq bc$$

i, com que

$$0 = \left[\frac{0}{1} \right],$$

també vol dir que

$$0 \cdot f \leq 1 \cdot e,$$

és a dir,

$$0 \leq e.$$

Ara bé,

$$xz = \left[\frac{ae}{bf} \right], \quad yz = \left[\frac{ce}{df} \right].$$

Per veure que $xz \leq yz$, hem de comprovar que

$$a e d f \leq c e b f.$$

Aquesta desigualtat és equivalent a

$$a d e f \leq b c e f.$$

Com que $ad \leq bc$, $e \geq 0$ i $f > 0$, podem multiplicar la desigualtat $ad \leq bc$ per $ef \geq 0$, i obtenim

$$a d e f \leq b c e f.$$

Per tant,

$$xz \leq yz.$$

Corol·lari 1.14

Si $x, y \in \mathbb{Q}$ i

$$0 \leq x \quad \text{i} \quad 0 \leq y,$$

aleshores

$$0 \leq xy.$$

Demostració

Apliquem la proposició anterior a la desigualtat

$$0 \leq x$$

multiplicant per y , que és no negatiu. Obtenim

$$0 \cdot y \leq xy.$$

Com que $0 \cdot y = 0$, resulta

$$0 \leq xy.$$

Proposició 1.15

El conjunt $\mathbb{Q}$, amb les operacions d'addició i multiplicació i amb l'ordre definit anteriorment, és un cos ordenat.

Demostració

Hem vist que $\mathbb{Q}$, amb l'addició i la multiplicació, és un cos commutatiu. També hem vist que $\leq$ és una relació d'ordre total en $\mathbb{Q}$, compatible amb l'addició i amb la multiplicació per nombres no negatius.

Per tant, $\mathbb{Q}$ és un cos ordenat.

1.5.4 Densitat dels nombres racionals

Una de les propietats més importants de l'ordre dels nombres racionals és que entre dos nombres racionals diferents sempre hi ha un altre nombre racional.

Proposició 1.16

El conjunt $\mathbb{Q}$ és dens. És a dir, si $x, y \in \mathbb{Q}$ i

$$x < y,$$

aleshores existeix $m \in \mathbb{Q}$ tal que

$$x < m < y.$$

Demostració

Prenem

$$m = \frac{x + y}{2}.$$

Com que $x, y \in \mathbb{Q}$, també tenim $m \in \mathbb{Q}$.

Com que

$$x < y,$$

si afegim x als dos membres, obtenim

$$x + x < x + y.$$

És a dir,

$$2x < x + y.$$

Multiplicant per $\frac{1}{2} > 0$, resulta

$$x < \frac{x + y}{2}.$$

Per tant,

$$x < m.$$

De la mateixa manera, com que

$$x < y,$$

si afegim y als dos membres, obtenim

$$x + y < y + y.$$

És a dir,

$$x + y < 2y.$$

Multiplicant per $\frac{1}{2} > 0$, resulta

$$\frac{x + y}{2} < y.$$

Per tant,

$$m < y.$$

Així,

$$x < m < y.$$

Exemple 1.13

Trobeu un nombre racional situat estrictament entre

$$\frac{1}{3} \quad \text{i} \quad \frac{1}{2}.$$

Solució

Podem prendre la mitjana aritmètica:

$$m = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}{2}.$$

Calculem:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2+3}{6} = \frac{5}{6}.$$

Per tant,

$$m = \frac{\frac{5}{6}}{2} = \frac{5}{12}.$$

Així,

$$\frac{1}{3} < \frac{5}{12} < \frac{1}{2}.$$

Observació 1.3

A més de ser dens, el conjunt dels nombres racionals té la propietat arquimediana. Això vol dir que, donat qualsevol nombre racional positiu x , sempre podem trobar un nombre natural n prou gran perquè

$$n > x.$$

Més generalment, si $x, y \in \mathbb{Q}$ i $x > 0$, existeix un nombre natural n tal que

$$nx > y.$$

Aquesta propietat expressa que els nombres naturals no queden acotats dins de $\mathbb{Q}$: avançant prou vegades una mateixa quantitat racional positiva, podem superar qualsevol nombre racional donat.

1.5.5 Valor absolut

L'ordre també permet definir el valor absolut d'un nombre racional.

Definició 1.4

Si $x \in \mathbb{Q}$, definim el valor absolut de x per

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0, \\ -x, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Geomètricament, $|x|$ representa la distància del punt x a l'origen de la recta numèrica.

Exemple 1.14

Tenim

$$\left|\frac{3}{5}\right| = \frac{3}{5}, \quad \left|-\frac{7}{4}\right| = \frac{7}{4}, \quad |0| = 0.$$

Proposició 1.17

Per a tots $x, y \in \mathbb{Q}$, es compleixen les propietats següents:

1. **No-negativitat:**

$$|x| \geq 0.$$

2. **Anul·lació:**

$$|x| = 0 \iff x = 0.$$

3. **Compatibilitat amb la multiplicació:**

$$|xy| = |x| |y|.$$

4. **Desigualtat triangular:**

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Demostració

La no-negativitat és conseqüència directa de la definició: si $x \geq 0$, aleshores $|x| = x \geq 0$; si $x < 0$, aleshores $-x > 0$, i per tant $|x| = -x > 0$.

També és clar que $|x| = 0$ si i només si $x = 0$.

La compatibilitat amb la multiplicació es comprova distingint els signes de x i y . Si tenen el mateix signe, $xy \geq 0$, i si tenen signe contrari, $xy < 0$. En tots els casos s'obté

$$|xy| = |x| |y|.$$

Finalment, per provar la desigualtat triangular, observem que sempre es compleix

$$-|x| \leq x \leq |x|$$

i

$$-|y| \leq y \leq |y|.$$

Sumant aquestes dues dobles desigualtats, obtenim

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|.$$

Això implica

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

1.6 Expressió decimal dels nombres racionals

Els nombres racionals també es poden expressar en forma decimal. Aquesta representació és molt útil en el càlcul pràctic, en les mesures, en els preus i en moltes aplicacions quotidianes.

Com que un nombre racional es pot representar per una fracció

$$\frac{a}{b}, \quad a \in \mathbb{Z}, \quad b \in \mathbb{Z}^*,$$

la seva expressió decimal s'obté dividint a entre b . Per simplificar l'estudi, suposarem habitualment que la fracció està escrita en forma irreductible i amb denominador positiu:

$$\frac{a}{b}, \quad b > 0, \quad \text{mcd}(a, b) = 1.$$

1.6.1 Decimals finits

Alguns nombres racionals tenen una expressió decimal finita. Per exemple,

$$\frac{3}{4} = 0,75, \quad \frac{7}{10} = 0,7, \quad \frac{21}{8} = 2,625.$$

Definició 1.5

Direm que un nombre racional té una expressió decimal finita si es pot escriure en la forma

$$\frac{m}{10^n},$$

amb $m \in \mathbb{Z}$ i $n \in \mathbb{N}$.

Aquesta definició reflecteix el fet que els decimals finits són precisament els nombres que es poden escriure amb denominador una potència de 10.

Proposició 1.18

Siguin $a, b \in \mathbb{Z}$, amb $b > 0$, i suposem que

$$\text{mcd}(a, b) = 1.$$

El nombre racional

$$\frac{a}{b}$$

té una expressió decimal finita si, i només si, el denominador b és de la forma

$$b = 2^r 5^s$$

per a certs $r, s \in \mathbb{N}$.

Demostració

Suposem primer que

$$b = 2^r 5^s.$$

Prenem un nombre natural n tal que

$$n \geq r \quad \text{i} \quad n \geq s.$$

Aleshores

$$10^n = 2^n 5^n$$

és múltiple de b . Per tant, existeix un nombre natural k tal que

$$bk = 10^n.$$

Així,

$$\frac{a}{b} = \frac{ak}{bk} = \frac{ak}{10^n}.$$

Per tant, $\frac{a}{b}$ té una expressió decimal finita.

Recíprocament, suposem que $\frac{a}{b}$ té una expressió decimal finita. Aleshores existeixen $m \in \mathbb{Z}$ i $n \in \mathbb{N}$ tals que

$$\frac{a}{b} = \frac{m}{10^n}.$$

Això implica

$$a10^n = bm.$$

Com que $\text{mcd}(a, b) = 1$, el denominador b ha de dividir 10^n . Però

$$10^n = 2^n 5^n.$$

Així, els únics factors primers que poden aparèixer en b són 2 i 5. Per tant,

$$b = 2^r 5^s$$

per a certs $r, s \in \mathbb{N}$.

Exemple 1.15

Estudieu si el nombre racional

$$\frac{7}{40}$$

té una expressió decimal finita.

Solució

La fracció ja és irreductible i

$$40 = 2^3 \cdot 5.$$

Per tant, el denominador només té com a factors primers el 2 i el 5. Així, $\frac{7}{40}$ té una expressió decimal finita.

Per trobar-la, escrivim el denominador com una potència de 10. Com que

$$40 \cdot 25 = 1000,$$

tenim

$$\frac{7}{40} = \frac{7 \cdot 25}{40 \cdot 25} = \frac{175}{1000} = 0,175.$$

Exemple 1.16

Estudieu si el nombre racional

$$\frac{5}{6}$$

té una expressió decimal finita.

Solució

La fracció $\frac{5}{6}$ és irreductible i

$$6 = 2 \cdot 3.$$

Com que el denominador té el factor primer 3, que no és ni 2 ni 5, el nombre racional $\frac{5}{6}$ no té una expressió decimal finita.

1.6.2 Decimals periòdics

Quan una fracció irreductible no té una expressió decimal finita, la seva expressió decimal no acaba. Per exemple, en fer la divisió de 1 entre 3, obtenim

$$\frac{1}{3} = 0,3333 \dots$$

La xifra 3 es repeteix indefinidament. Per indicar aquesta repetició, en lloc d'escriure $0,3333 \dots$, escriurem

$$0,\overline{3}.$$

Així,

$$\frac{1}{3} = 0,\overline{3}.$$

De la mateixa manera,

$$\frac{2}{11} = 0,181818 \dots = 0,\overline{18},$$

i

$$\frac{5}{6} = 0,8333 \dots = 0,8\overline{3}.$$

Definició 1.6

Un decimal periòdic és una expressió decimal en què, a partir d'una certa posició, es repeteix indefinidament un mateix bloc de xifres. Aquest bloc s'anomena període.

Si el període comença immediatament després de la coma decimal, diem que el decimal és periòdic pur. Per exemple,

$$0,\overline{27} = 0,272727\dots$$

és periòdic pur.

Si abans del període hi ha algunes xifres que no es repeteixen, diem que el decimal és periòdic mixt. Per exemple,

$$1,4\overline{6} = 1,46666\dots$$

és periòdic mixt.

Proposició 1.19

Tot nombre racional té una expressió decimal finita o periòdica.

Demostració

Considerem un nombre racional representat per una fracció

$$\frac{a}{b}, \quad b > 0.$$

En fer la divisió de a entre b , en cada pas apareix un residu. Per la divisió euclidiana, aquests residus només poden ser

$$0, 1, 2, \dots, b-1.$$

Per tant, només hi ha b residus possibles.

Si en algun moment apareix el residu 0, la divisió acaba i l'expressió decimal és finita.

Si el residu 0 no apareix, com que només hi ha un nombre finit de residus possibles, algun residu s'ha de repetir. A partir del moment en què un residu es repeteix, el procés de la divisió també es repeteix, i per tant les xifres decimals es repeteixen periòdicament.

Així, l'expressió decimal de qualsevol nombre racional és finita o periòdica.

Exemple 1.17

Calculem l'expressió decimal de

$$\frac{5}{6}.$$

Solució

Fem la divisió:

$$5 : 6 = 0,8333\dots$$

El residu que es repeteix dona lloc a la repetició indefinida de la xifra 3. Per tant,

$$\frac{5}{6} = 0,8\overline{3}.$$

1.6.3 Fracció generatriu d'un decimal finit

Fins ara hem partit d'una fracció i n'hem estudiat l'expressió decimal. Ara farem el procés invers: partirem d'una expressió decimal i buscarem una fracció que la representi.

Aquesta fracció s'anomena *fracció generatriu*, perquè és la fracció que genera aquell nombre decimal. És a dir, si en fem la divisió decimal, obtenim precisament l'expressió decimal donada.

En el cas dels decimals finits, trobar la fracció generatriu és senzill: només cal escriure el decimal amb denominador una potència de 10, segons el nombre de xifres decimals.

Exemple 1.18

Escriuiu 2,375 com a fracció irreductible.

Solució

Com que hi ha tres xifres decimals, escrivim

$$2,375 = \frac{2375}{1000}.$$

Ara simplifiquem:

$$\frac{2375}{1000} = \frac{95}{40} = \frac{19}{8}.$$

Per tant,

$$2,375 = \frac{19}{8}.$$

1.6.4 Fracció generatriu d'un decimal periòdic

Els decimals periòdics també representen nombres racionals. Per trobar-ne la fracció generatriu, fem servir una equació.

Exemple 1.19

Escriuiu

$$x = 0,\overline{27}$$

com a fracció.

Solució

Com que el període té dues xifres, multipliquem per 100:

$$100x = 27,\overline{27}.$$

Restem les dues igualtats:

$$100x - x = 27,\overline{27} - 0,\overline{27}.$$

Així,

$$99x = 27.$$

Per tant,

$$x = \frac{27}{99} = \frac{3}{11}.$$

Així,

$$0,\overline{27} = \frac{3}{11}.$$

Exemple 1.20

Escriuiu

$$x = 1,4\overline{6}$$

com a fracció.

Solució

En aquest cas hi ha una xifra no periòdica després de la coma i una xifra periòdica. Multipliquem primer per 10, per situar el període just després de la coma:

$$10x = 14,\overline{6}.$$

Ara multipliquem per 10 una altra vegada:

$$100x = 146,\overline{6}.$$

Restem:

$$100x - 10x = 146,\overline{6} - 14,\overline{6}.$$

Per tant,

$$90x = 132.$$

Així,

$$x = \frac{132}{90} = \frac{22}{15}.$$

Per tant,

$$1,4\overline{6} = \frac{22}{15}.$$

Proposició 1.20

Un nombre és racional si, i només si, la seva expressió decimal és finita o periòdica.

Demostració

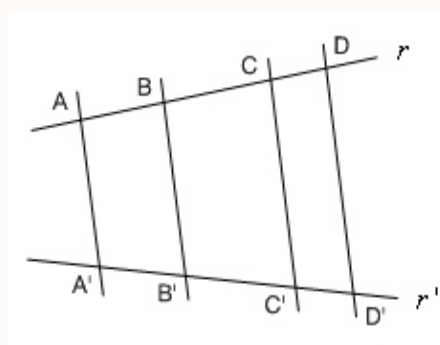
Hem vist que tot nombre racional té una expressió decimal finita o periòdica. Recíprocament, si un nombre té una expressió decimal finita, es pot escriure amb denominador una potència de 10, i per tant és racional.

Si un nombre té una expressió decimal periòdica, el procediment anterior permet obtenir una equació en què desapareix la part periòdica. Això dona una fracció generatriu. Per tant, també és racional.

Així, els nombres racionals són exactament els nombres amb expressió decimal finita o periòdica.

1.7 Representació gràfica dels nombres racionals

Recorda el **teorema de Tales**: els segments interceptats sobre dues rectes r i r' per un conjunt de paral·leles són proporcionals

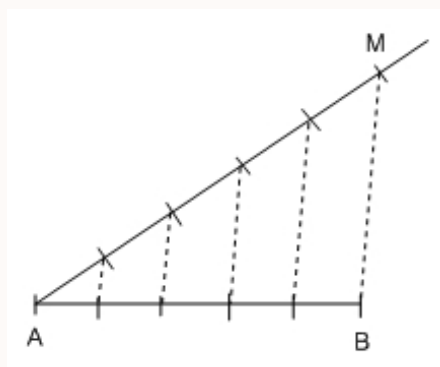


$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'}$$

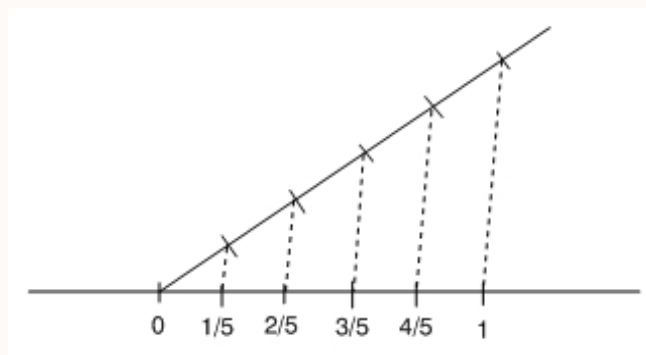
Una de les aplicacions d'aquest teorema és la divisió d'un segment en parts iguals: volem dividir el segment $\overline{AB}$ en cinc parts iguals



Per això tracem amb una regla una semirecta qualsevol amb origen en A . A partir d'aquest punt, mitjançant un compàs assenyallem cinc segments iguals. Unim el punt M amb el punt B . Ara mitjançant regla i escaire tracem paral·leles a la recta que uneix M i B pels altres punts marcats. El teorema de Tales assegura que els segments interceptats sobre el segment AB són iguals.



Aquesta construcció geomètrica permetrà representar sobre una recta tots els nombres racionals. En efecte, considerem una recta en què s'han representat els nombres enters 0 i 1. Mitjançant la construcció descrita anteriorment podem dividir la unitat, és a dir, el segment determinat pels punts representats per 0 i 1, en cinc parts iguals. Els punts així obtinguts es corresponen amb els nombres racionals representats per les fraccions $1/5, 2/5, 3/5$ i $4/5$.



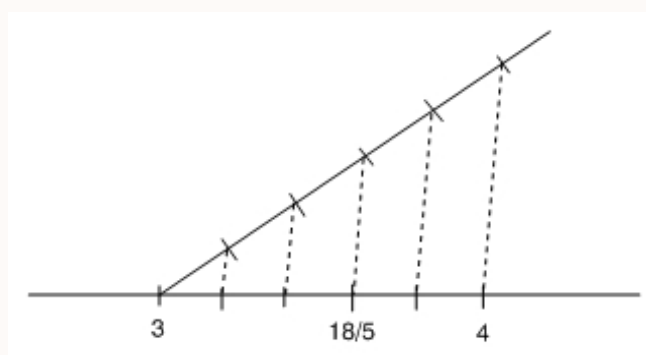
Si ara volguéssim representar el nombre racional representat per la fracció $18/5$, com en efectuar la divisió entera entre 18 i 5 s'obté

$$18 = 5 \cdot 3 + 3$$

aleshores podem descompondre la fracció de la manera següent:

$$\frac{18}{5} = 3 + \frac{3}{5}$$

és a dir, hem separat la part entera de la fracció. Podem ara representar el nombre racional considerat de la manera següent:



En general, si volem representar un nombre racional positiu escrit com una fracció

$$\frac{a}{b}, \quad a, b \in \mathbb{N}, \quad b \neq 0,$$

podem aplicar la divisió euclidiana de a entre b :

$$a = bq + r, \quad 0 \leq r < b.$$

Aleshores

$$\frac{a}{b} = \frac{bq + r}{b} = q + \frac{r}{b}.$$

Això vol dir que el punt que representa $\frac{a}{b}$ es troba entre els enters q i $q + 1$. Per ubicar-lo dins d'aquest segment unitat, dividim el segment en b parts iguals i en prenem r . Si $r = 0$, el nombre racional coincideix amb l'enter q .

Aquesta representació dels nombres racionals sobre una recta ajuda a visualitzar-ne l'ordenació. Si col·loquem la unitat a la dreta del punt origen 0, aleshores $\alpha < \beta$ significa que el punt de la recta corresponent al nombre racional α es troba a l'esquerra del punt corresponent a β .

Exemple 1.21

Representeu el nombre racional representat per la fracció $-31/6$ com un punt d'una recta.

Solució

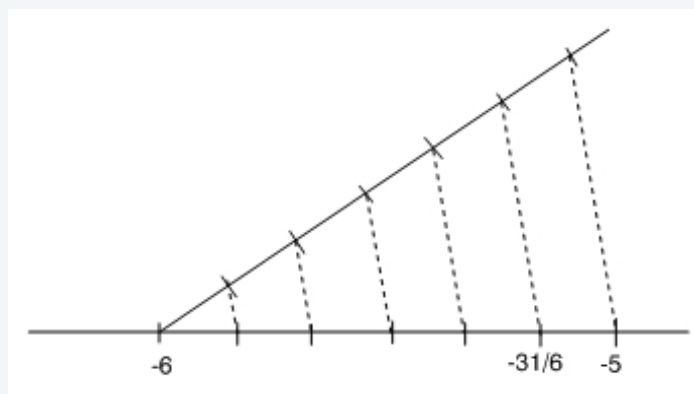
Com que

$$-31 = 6 \cdot (-6) + 5$$

aleshores podem descompondre la fracció de la manera següent:

$$-\frac{31}{6} = -6 + \frac{5}{6}$$

Per tant, el punt es trobarà en el segment unitat determinat pels enters -6 i -5 . Dividint aquest segment en sis parts iguals i prenent-ne després cinc obtenim el punt que representa el nombre racional considerat.



1.8 Potències de nombres racionals

De manera anàloga a com definim les potències de nombres enters, definirem ara les potències de base un nombre racional i exponent natural. Escrivim abreujadament la multiplicació repetida de fraccions iguals

$$\overbrace{\frac{a}{b} \cdot \dots \cdot \frac{a}{b}}^{n \text{ vegades}}$$

com

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n$$

que es defineix com la **potència** de **base** el nombre racional representat per la fracció a/b i **exponent** natural n , o simplement, potència n -ésima del nombre racional representat per a/b . Per exemple,

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^3$$

Evidentment, com

$$\frac{\overbrace{a \cdots a}^{n \text{ vegades}}}{\underbrace{b \cdots b}_{n \text{ vegades}}} = \frac{\overbrace{a \cdots a}^{n \text{ vegades}}}{\underbrace{b \cdots b}_{n \text{ vegades}}} = \frac{a^n}{b^n}$$

deduïm que

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Per tant, per elevar una fracció a un nombre natural s'eleva numerador i denominador a aquest nombre.

1.8.1 Propietats de les potències

Les potències de nombres racionals satisfan les mateixes propietats formals que les potències de nombres enters, sempre que les expressions que apareixen tinguin sentit. En particular, cal tenir cura quan la base és 0 i apareixen exponents negatius.

Proposició 1.21

Siguin $x, y \in \mathbb{Q}$ i siguin $m, n \in \mathbb{N}$. Es compleixen les propietats següents:

1. Producte de potències de la mateixa base:

$$x^m \cdot x^n = x^{m+n}.$$

2. Quocient de potències de la mateixa base: si $x \neq 0$ i $m \geq n$, aleshores

$$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}.$$

3. Potència d'una potència:

$$(x^m)^n = x^{mn}.$$

4. Potència d'un producte:

$$(xy)^n = x^n y^n.$$

5. Potència d'un quocient: si $y \neq 0$, aleshores

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}.$$

Demostració

La primera propietat es dedueix directament de la definició de potència. En efecte, x^m és el producte de m factors iguals a x , i x^n és el producte de n factors iguals a x . Per tant, el producte

$$x^m \cdot x^n$$

conté en total $m + n$ factors iguals a x , i això és precisament

$$x^{m+n}.$$

La propietat del quocient es dedueix de la propietat anterior i de l'existència d'invers multiplicatiu per als nombres racionals no nuls. Si $x \neq 0$ i $m \geq n$, podem escriure

$$x^m = x^{m-n+n} = x^{m-n} \cdot x^n.$$

Per tant,

$$\frac{x^m}{x^n} = \frac{x^{m-n} \cdot x^n}{x^n} = x^{m-n}.$$

La propietat de la potència d'una potència també es dedueix de la definició: l'expressió

$$(x^m)^n$$

és el producte de n factors iguals a x^m . Com que cadascun d'aquests factors conté m factors iguals a x , el resultat conté mn factors iguals a x . Per tant,

$$(x^m)^n = x^{mn}.$$

La propietat de la potència d'un producte es dedueix de l'associativitat i la commutativitat de la multiplicació en $\mathbb{Q}$:

$$(xy)^n = \underbrace{(xy)(xy) \cdots (xy)}_{n \text{ factors}} = \underbrace{xx \cdots x}_{n \text{ factors}} \underbrace{yy \cdots y}_{n \text{ factors}} = x^n y^n.$$

Finalment, si $y \neq 0$, tenim

$$\frac{x}{y} = xy^{-1}.$$

Aleshores, aplicant la propietat anterior,

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n = (xy^{-1})^n = x^n (y^{-1})^n = x^n (y^n)^{-1} = \frac{x^n}{y^n}.$$

Observació 1.4

Les propietats anteriors també es poden estendre als exponents enters. Si $x \in \mathbb{Q}$ i $x \neq 0$, definim, per a tot $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}.$$

Amb aquesta definició, per a $x \neq 0$, les propietats de les potències continuen essent vàlides per a exponents enters.

Observació 1.5

No hi ha cap propietat general que permeti distribuir una potència sobre una addició o una resta. En general,

$$(x + y)^n \neq x^n + y^n$$

i

$$(x - y)^n \neq x^n - y^n.$$

Per exemple,

$$(2 + 3)^2 = 5^2 = 25,$$

mentre que

$$2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13.$$

Per tant,

$$(2 + 3)^2 \neq 2^2 + 3^2.$$

Així, les propietats de les potències s'apliquen al producte, al quocient i a la potència d'una potència, però no a l'addició ni a la resta.

Exemple 1.22

Simplifiquem l'expressió

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2.$$

Com que és un producte de potències de la mateixa base,

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^{4+2} = \left(\frac{2}{3}\right)^6.$$

Exemple 1.23

Simplifiquem l'expressió

$$\left[\left(-\frac{5}{2}\right)^3\right]^2.$$

Com que és una potència d'una potència,

$$\left[\left(-\frac{5}{2}\right)^3\right]^2 = \left(-\frac{5}{2}\right)^{3 \cdot 2} = \left(-\frac{5}{2}\right)^6.$$

Exemple 1.24

Simplifiquem l'expressió

$$\left(\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5}\right)^3.$$

Per la propietat de la potència d'un producte,

$$\left(\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5}\right)^3 = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^3.$$

Exemple 1.25

Simplifiquem l'expressió

$$\left(\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}}\right)^2.$$

Per la propietat de la potència d'un quocient,

$$\left(\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}}\right)^2 = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{\left(\frac{5}{7}\right)^2}.$$

1.9 Arrels de nombres racionals

De manera anàloga al que passa amb els enters, podem estudiar arrels de nombres racionals. Ara bé, hi ha una diferència essencial respecte de les potències: mentre que tota potència d'un nombre racional és sempre un nombre racional, una arrel d'un nombre racional no sempre és racional.

Definició 1.7

Siguin $x \in \mathbb{Q}$ i $n \in \mathbb{N}$, amb $n \geq 2$. Direm que un nombre racional y és una arrel n -èsima de x si

$$y^n = x.$$

En aquest cas, escrivim

$$y = \sqrt[n]{x},$$

sempre que aquesta arrel estigui definida de manera única o que es prengui la branca indicada pel context.

Per exemple,

$$\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{2}{3},$$

ja que

$$\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}.$$

També tenim

$$\sqrt[5]{-\frac{32}{243}} = -\frac{2}{3},$$

perquè

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^5 = -\frac{32}{243}.$$

Quan l'índex n és senar, l'arrel n -èsima, si existeix en $\mathbb{Q}$, conserva el signe del radicand. En canvi, quan n és parell, només poden tenir arrel n -èsima en $\mathbb{Q}$ els racionals no negatius, i per convenció el símbol $\sqrt[n]{x}$ designa l'arrel no negativa.

Així,

$$\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3},$$

encara que també és cert que

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}.$$

Per això, les solucions de l'equació

$$y^2 = \frac{4}{9}$$

són

$$y = \frac{2}{3} \quad \text{i} \quad y = -\frac{2}{3},$$

però l'arrel quadrada $\sqrt{\frac{4}{9}}$ és, per convenció, la positiva.

Observació 1.6

Si l'índex és parell, cap nombre racional negatiu no té arrel dins de $\mathbb{Q}$. Per exemple, no existeix cap $y \in \mathbb{Q}$ tal que

$$y^2 = -\frac{4}{9},$$

perquè el quadrat de qualsevol nombre racional és sempre no negatiu.

També pot passar que el radicand sigui positiu i, tanmateix, l'arrel no sigui racional. El cas més important és $\sqrt{2}$.

Proposició 1.22

No existeix cap nombre racional x tal que

$$x^2 = 2.$$

En particular,

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}.$$

Demostració

Suposem, per reducció a l'absurd, que existeix un nombre racional x tal que $x^2 = 2$. Podem escriure x com una fracció irreductible

$$x = \frac{a}{b}, \quad a, b \in \mathbb{Z}, \quad b \neq 0, \quad \text{mcd}(a, b) = 1.$$

Aleshores

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2,$$

i, per tant,

$$a^2 = 2b^2.$$

Això implica que a^2 és parell, i per tant a és parell. Així, existeix $k \in \mathbb{Z}$ tal que $a = 2k$. Substituint,

$$(2k)^2 = 2b^2,$$

és a dir,

$$4k^2 = 2b^2.$$

Dividint per 2, obtenim

$$2k^2 = b^2.$$

Per tant, b^2 és parell, i això implica que b és parell.

Hem obtingut que a i b són parells, cosa que contradiu que $\frac{a}{b}$ fos irreductible.

Per tant, no existeix cap nombre racional x tal que $x^2 = 2$.

Aquest resultat no vol dir que $\sqrt{2}$ no tingui sentit com a nombre. Geomètricament, pel teorema de Pitàgores, la diagonal d'un quadrat de costat 1 té longitud

$$\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

Per tant, la geometria mostra la necessitat d'introduir nombres que no són racionals. Aquests nombres s'anomenen *irracionals* i s'estudiaran en la unitat dedicada als nombres reals.

1.9.1 Propietats de les arrels

Les propietats de les arrels s'han d'usar amb precaució. A diferència del que passa amb les potències, l'arrel d'un nombre racional no sempre és un nombre racional. Per exemple,

$$\sqrt{4} = 2 \in \mathbb{Q}, \quad \sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{3}{4} \in \mathbb{Q},$$

però

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}.$$

Per tant, quan treballem dins de $\mathbb{Q}$, només podem aplicar les propietats de les arrels quan totes les arrels que apareixen existeixen com a nombres racionals.

Proposició 1.23

Siguin $x, y \in \mathbb{Q}$ i sigui $n \in \mathbb{N}$, amb $n \geq 2$. Sempre que les arrels que apareixen estiguin definides en $\mathbb{Q}$, es compleixen les propietats següents:

1. Arrel d'un producte:

$$\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x} \sqrt[n]{y}.$$

2. Arrel d'un quocient: si $y \neq 0$, aleshores

$$\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}.$$

3. Arrel d'una potència: si n és senar, aleshores

$$\sqrt[n]{x^n} = x.$$

Si n és parell, aleshores

$$\sqrt[n]{x^n} = |x|.$$

4. Potència d'una arrel:

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x.$$

Demostració

Provem les propietats a partir de la definició d'arrel.

Per a la primera propietat, suposem que

$$a = \sqrt[n]{x} \quad \text{i} \quad b = \sqrt[n]{y}.$$

Això vol dir que

$$a^n = x \quad \text{i} \quad b^n = y.$$

Aleshores, per les propietats de les potències,

$$(ab)^n = a^n b^n = xy.$$

Per tant, ab és una arrel n -èsima de xy , i escrivim

$$\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x} \sqrt[n]{y}.$$

Per a la segona propietat, suposem que $y \neq 0$ i que

$$a = \sqrt[n]{x}, \quad b = \sqrt[n]{y}.$$

Com que $y \neq 0$, tenim $b \neq 0$. Aleshores

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} = \frac{x}{y}.$$

Per tant,

$$\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}.$$

La tercera propietat depèn de la paritat de n . Si n és senar, la funció

$$t \mapsto t^n$$

conserva el signe, i per tant l'arrel n -èsima de x^n és x :

$$\sqrt[n]{x^n} = x.$$

En canvi, si n és parell, tenim

$$x^n = (-x)^n.$$

Per convenció, l'arrel n -èsima parella és la no negativa. Per això,

$$\sqrt[n]{x^n} = |x|.$$

Finalment, la quarta propietat és conseqüència directa de la definició d'arrel. Si

$$a = \sqrt[n]{x},$$

aleshores

$$a^n = x,$$

i per tant

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x.$$

Observació 1.7

No hi ha cap propietat general que permeti distribuir una arrel sobre una addició o una resta. En general,

$$\sqrt[n]{x+y} \neq \sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{y}$$

i

$$\sqrt[n]{x-y} \neq \sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{y}.$$

Per exemple,

$$\sqrt{4+9} = \sqrt{13},$$

mentre que

$$\sqrt{4} + \sqrt{9} = 2 + 3 = 5.$$

Per tant,

$$\sqrt{4+9} \neq \sqrt{4} + \sqrt{9}.$$

Així, les propietats de les arrels s'apliquen al producte, al quocient i a les potències, però no a l'addició ni a la resta.

Exemple 1.26

Simplifiquem

$$\sqrt{\frac{25}{36}}.$$

Com que

$$25 = 5^2 \quad \text{i} \quad 36 = 6^2,$$

tenim

$$\sqrt{\frac{25}{36}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{36}} = \frac{5}{6}.$$

Exemple 1.27

Simplifiquem

$$\sqrt[3]{-\frac{8}{27}}.$$

Com que

$$-8 = (-2)^3 \quad \text{i} \quad 27 = 3^3,$$

tenim

$$\sqrt[3]{-\frac{8}{27}} = -\frac{2}{3}.$$

Exemple 1.28

Calculem

$$\sqrt{\left(-\frac{7}{5}\right)^2}.$$

Com que l'índex de l'arrel és parell, obtenim el valor absolut:

$$\sqrt{\left(-\frac{7}{5}\right)^2} = \left|-\frac{7}{5}\right| = \frac{7}{5}.$$

1.10 Raons i proporcions aritmètiques

Els nombres racionals apareixen de manera natural quan comparem quantitats. Sovint no ens interessa només saber quant val una magnitud, sinó comparar-la amb una altra. Aquesta comparació es fa mitjançant una raó.

1.10.1 Raons

Siguin $a, b \in \mathbb{Q}$, amb $b \neq 0$. Anomenem *raó* entre a i b el quocient

$$\frac{a}{b}.$$

La raó

$$\frac{a}{b}$$

mesura quantes vegades la quantitat b està continguda en la quantitat a , o bé quina relació quantitativa hi ha entre a i b .

Per exemple, si en una classe hi ha 12 alumnes que estudien francès i 20 alumnes en total, la raó entre els alumnes que estudien francès i el total d'alumnes és

$$\frac{12}{20}.$$

Aquesta raó és equivalent a

$$\frac{3}{5}.$$

Això vol dir que, de cada 5 alumnes, 3 estudien francès.

1.10.2 Proporcions

Definició 1.8

Una *proporció* és una igualtat entre dues raons. És a dir, una expressió de la forma

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

amb $b \neq 0$ i $d \neq 0$.

En una proporció

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

els nombres a i d s'anomenen *extrems*, i els nombres b i c s'anomenen *mitjans*.

La propietat fonamental de les proporcions és conseqüència directa de la igualtat de nombres racionals.

Proposició 1.24

Siguin $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$, amb $b \neq 0$ i $d \neq 0$. Aleshores

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

si, i només si,

$$ad = bc.$$

Demostració

Com que $b \neq 0$ i $d \neq 0$, podem multiplicar els dos membres de la igualtat

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

per bd . Obtenim

$$bd \cdot \frac{a}{b} = bd \cdot \frac{c}{d}.$$

Simplificant,

$$ad = bc.$$

Recíprocament, si

$$ad = bc,$$

aleshores, com que $bd \neq 0$, podem dividir els dos membres per bd , i obtenim

$$\frac{ad}{bd} = \frac{bc}{bd}.$$

Per tant,

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Exemple 1.29

Comproveu si són o no proporcions cadascuna de les igualtats següents:

$$(a) \quad \frac{6}{12} = \frac{4}{8} \quad (b) \quad \frac{12}{5} = \frac{23}{10} \quad (c) \quad \frac{4,6}{0,2} = \frac{6,9}{0,3}$$

Solució

(a) Com que

$$6 \cdot 8 = 12 \cdot 4$$

aleshores

$$\frac{6}{12} = \frac{4}{8}$$

constitueix una proporció.

(b) Com que

$$12 \cdot 10 \neq 5 \cdot 23$$

aleshores

$$\frac{12}{5} = \frac{23}{10}$$

no és una proporció.

(c) Com que

$$4,6 \cdot 0,3 = 0,2 \cdot 6,9$$

aleshores

$$\frac{4,6}{0,2} = \frac{6,9}{0,3}$$

constitueix una proporció.

Exemple 1.30

Completeu les proporcions següents:

$$(a) \quad \frac{15}{27} = \frac{10}{x} \quad (b) \quad \frac{x}{15} = \frac{10}{25} \quad (c) \quad \frac{0,75}{x} = \frac{3}{4}$$

Solució

(a) Si

$$\frac{15}{27} = \frac{10}{x} \implies x = \frac{27 \cdot 10}{15} = 18$$

Aleshores, la proporció és

$$\frac{15}{27} = \frac{10}{18}$$

(b) Si

$$\frac{x}{15} = \frac{10}{25} \implies x = \frac{15 \cdot 10}{25} = 6$$

Aleshores, la proporció és

$$\frac{6}{15} = \frac{10}{25}$$

(c) Si

$$\frac{0,75}{x} = \frac{3}{4} \implies x = \frac{0,75 \cdot 4}{3} = 1$$

Aleshores, la proporció és

$$\frac{0,75}{1} = \frac{3}{4}$$

1.10.3 Propietats de les proporcions

Les proporcions permeten transformar una igualtat entre raons en altres igualtats equivalents. Aquestes propietats són útils per comparar magnituds i per resoldre problemes de proporcionalitat.

En tota aquesta subsecció suposarem que les divisions que apareixen tenen sentit,

és a dir, que els denominadors corresponents són no nuls.

Proposició 1.25

Siguin $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$, amb $b \neq 0$ i $d \neq 0$, i suposem que

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Aleshores es compleixen les propietats següents:

1. **Inversió dels termes:** si $a \neq 0$ i $c \neq 0$, aleshores

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c}.$$

2. **Alternança dels termes:** si $c \neq 0$, aleshores

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}.$$

3. **Suma dels termes de cada raó:**

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}.$$

4. **Diferència dels termes de cada raó:**

$$\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}.$$

5. **Suma i diferència dels termes:** si $a \neq b$ i $c \neq d$, aleshores

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}.$$

Demostració

Com que

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

tenim

$$ad = bc.$$

Per provar la primera propietat, suposem que $a \neq 0$ i $c \neq 0$. De la igualtat

$$ad = bc$$

es dedueix

$$bc = ad,$$

i això equival a

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c}.$$

Per provar l'alternança, partim novament de

$$ad = bc.$$

Si $c \neq 0$, aquesta igualtat equival a

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d},$$

ja que el producte dels extrems i el producte dels mitjans coincideixen:

$$ad = cb.$$

Per provar la tercera propietat, afegim 1 als dos membres de la proporció inicial:

$$\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1.$$

Com que

$$1 = \frac{b}{b} \quad \text{i} \quad 1 = \frac{d}{d},$$

obtenim

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}.$$

De manera semblant, restant 1 als dos membres, obtenim

$$\frac{a}{b} - 1 = \frac{c}{d} - 1,$$

i per tant

$$\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}.$$

Finalment, si $a \neq b$ i $c \neq d$, de les dues propietats anteriors tenim

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

i

$$\frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}.$$

Dividint membre a membre aquestes dues igualtats, obtenim

$$\frac{\frac{a+b}{b}}{\frac{a-b}{b}} = \frac{\frac{c+d}{d}}{\frac{c-d}{d}}.$$

Simplificant,

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}.$$

Exemple 1.31

A partir de la proporció

$$\frac{6}{8} = \frac{9}{12},$$

obtenim, per inversió,

$$\frac{8}{6} = \frac{12}{9}.$$

També podem alternar els termes:

$$\frac{6}{9} = \frac{8}{12}.$$

I, sumant els termes de cada raó,

$$\frac{6+8}{8} = \frac{9+12}{12},$$

és a dir,

$$\frac{14}{8} = \frac{21}{12}.$$

1.10.4 Tercera proporcional, quarta proporcional i mitjana proporcional

Les proporcions permeten determinar termes desconeguts. Alguns casos particulars reben noms clàssics: tercera proporcional, quarta proporcional i mitjana proporcional.

Definició 1.9

Siguin $a, b \in \mathbb{Q}$, amb $a \neq 0$. Anomenem *tercera proporcional* de a i b un nombre $x \in \mathbb{Q}$ que compleix

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{x}.$$

En aquest cas, pel producte dels mitjans i dels extrems,

$$ax = b^2.$$

Com que $a \neq 0$, obtenim

$$x = \frac{b^2}{a}.$$

Exemple 1.32

Trobeu la tercera proporcional de 2 i 6.

Solució

Busquem $x \in \mathbb{Q}$ tal que

$$\frac{2}{6} = \frac{6}{x}.$$

Pel producte dels mitjans i dels extrems,

$$2x = 36.$$

Per tant,

$$x = 18.$$

Així, la tercera proporcional de 2 i 6 és 18.

Definició 1.10

Siguin $a, b, c \in \mathbb{Q}$, amb $a \neq 0$ i $b \neq 0$. Anomenem *quarta proporcional* de a , b i c un nombre $x \in \mathbb{Q}$ que compleix

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x}.$$

En aquest cas,

$$ax = bc,$$

i, com que $a \neq 0$,

$$x = \frac{bc}{a}.$$

Exemple 1.33

Trobeu la quarta proporcional de 3, 5 i 9.

Solució

Busquem $x \in \mathbb{Q}$ tal que

$$\frac{3}{5} = \frac{9}{x}.$$

Pel producte dels mitjans i dels extrems,

$$3x = 45.$$

Per tant,

$$x = 15.$$

Així, la quarta proporcional de 3, 5 i 9 és 15.

Definició 1.11

Siguin $a, b \in \mathbb{Q}$. Anomenem *mitjana proporcional* de a i b un nombre $x \in \mathbb{Q}$ que compleix

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b}.$$

En aquest cas,

$$x^2 = ab.$$

Per tant, quan existeix en $\mathbb{Q}$, la mitjana proporcional és un nombre racional x tal que

$$x = \sqrt{ab}$$

o bé $x = -\sqrt{ab}$, segons el context. Si treballem amb quantitats positives, normalment es pren la solució positiva:

$$x = \sqrt{ab}.$$

Observació 1.8

La mitjana proporcional no sempre existeix dins de $\mathbb{Q}$. Per exemple, entre 1 i 2, hauríem de tenir

$$x^2 = 2,$$

però no existeix cap nombre racional x tal que $x^2 = 2$. Per tant, la mitjana proporcional de 1 i 2 no és racional.

Exemple 1.34

Trobeu la mitjana proporcional positiva de 4 i 9.

Solució

Busquem $x \in \mathbb{Q}$, amb $x > 0$, tal que

$$\frac{4}{x} = \frac{x}{9}.$$

Pel producte dels mitjans i dels extrems,

$$x^2 = 36.$$

Com que $x > 0$, obtenim

$$x = 6.$$

Així, la mitjana proporcional positiva de 4 i 9 és 6.

Exemple 1.35

Un empleat que treballa per torns fa 10 hores seguides i descansa després 24. Quant ha de descansar si treballa 15 hores? Quant hi haurà treballat si ha descansat durant 12 hores?

Solució

L'empleat treballa a raó de

$$\frac{10}{24}$$

Si suposem que per 15 hores de treball seguides descansa x hores, aleshores l'empleat treballa a raó de

$$\frac{15}{x}$$

Naturalment les dues raons han de ser iguals i, per tant, tenim la següent proporció:

$$\frac{10}{24} = \frac{15}{x}$$

Aleshores,

$$10x = 24 \cdot 15 \quad \implies \quad x = \frac{360}{10} = 36$$

és a dir, l'empleat descansa 36 hores per 15 hores de treball seguides.

De la mateixa manera, tenim

$$\frac{10}{24} = \frac{x}{12} \quad \implies \quad x = \frac{10 \cdot 12}{24} = 5$$

Aleshores, si ha descansat durant 12 hores, l'empleat haurà treballat 5 hores seguides.

1.10.5 Proporcionalitat directa i inversa

Les proporcions permeten estudiar relacions entre magnituds. Dues de les relacions més importants són la proporcionalitat directa i la proporcionalitat inversa.

1.10.5.1 Proporcionalitat directa

Dues magnituds x i y són directament proporcionals si, quan una es multiplica per un nombre, l'altra també queda multiplicada pel mateix nombre.

Això vol dir que el quocient entre els valors corresponents és constant:

$$\frac{y}{x} = k, \quad x \neq 0.$$

El nombre k s'anomena *constant de proporcionalitat directa*.

Equivalentment, podem escriure

$$y = kx.$$

Exemple 1.36

Si 1 kg de pomes costa 2,40 euros, el preu y de x kg de pomes és

$$y = 2,40x.$$

Així, si comprem 3 kg, tenim

$$y = 2,40 \cdot 3 = 7,20.$$

Per tant, 3 kg de pomes costen 7,20 euros.

En una situació de proporcionalitat directa, si tenim dues parelles de valors corresponents

$$(x_1, y_1) \quad \text{i} \quad (x_2, y_2),$$

amb $x_1, x_2 \neq 0$, aleshores es compleix

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}.$$

Per tant,

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}.$$

1.10.5.2 Proporcionalitat inversa

Dues magnituds x i y són inversament proporcionals si, quan una es multiplica per un nombre no nul, l'altra queda dividida pel mateix nombre.

Això vol dir que el producte dels valors corresponents és constant:

$$xy = k.$$

El nombre k s'anomena *constant de proporcionalitat inversa*.

Equivalentment, si $x \neq 0$, podem escriure

$$y = \frac{k}{x}.$$

Exemple 1.37

Suposem que una feina es pot fer en 24 hores de treball. Si hi treballa una persona, necessita 24 hores. Si hi treballen 2 persones al mateix ritme, necessiten 12 hores. Si hi treballen 3 persones, necessiten 8 hores.

Si x és el nombre de persones i y és el nombre d'hores, tenim

$$xy = 24.$$

Per tant,

$$y = \frac{24}{x}.$$

Així, si hi treballen 6 persones,

$$y = \frac{24}{6} = 4.$$

Per tant, necessiten 4 hores.

En una situació de proporcionalitat inversa, si tenim dues parelles de valors corresponents

$$(x_1, y_1) \quad \text{i} \quad (x_2, y_2),$$

aleshores es compleix

$$x_1 y_1 = x_2 y_2.$$

Equivalentment,

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_2}{y_1}.$$

És a dir, les raons apareixen invertides.

1.10.5.3 Comparació entre proporcionalitat directa i inversa

La diferència entre els dos tipus de proporcionalitat es pot resumir així:

Tipus de proporcionalitat	Relació constant	Forma algebraica
Directa	$\frac{y}{x} = k$	$y = kx$
Inversa	$xy = k$	$y = \frac{k}{x}$

En la proporcionalitat directa, les dues magnituds creixen o decreixen en el mateix sentit. En canvi, en la proporcionalitat inversa, quan una magnitud creix, l'altra decreix de manera que el producte es manté constant.

1.10.6 Problemes d'aplicació

1.10.6.1 Regla de tres simple

Es coneixen amb el nombre de problemes de regla de tres simple, aquells en els que es coneixen tres quantitats referents a dues magnituds proporcionals, directament o inversament, i es necessita trobar el valor de la quarta proporcional. Segons que sigui la proporcionalitat directa o inversa, es distingeix entre la regla de tres simple directa i inversa. Els problemes de regla de tres simple es resoldran de la manera següent:

- (1) S'esbrinarà primer el tipus de proporcionalitat que existe entre les magnituds donades
- (2) Es formarà una proporció igualant la raó de les dos quantitats conegudes d'una de les magnituds amb la raó directa o inversa, segons sigui el cas descobert en (1), de les quantitats de la una altra, prenent com a desconeguda la quarta proporcional.

Exemple 1.38

Un cotxe consumeix 18 litres de gasolina per recórrer 240 km. Quants litres consumirà per recórrer 400 km, si el consum és proporcional a la distància recorreguda?

Solució

Les magnituds que intervenen són la distància recorreguda i els litres de gasolina consumits. Si el consum es manté constant, aquestes dues magnituds són directament proporcionals: com més quilòmetres es recorren, més gasolina es consumeix en la mateixa proporció.

Podem organitzar les dades en una taula:

Distància (km)	Gasolina (L)
240	18
400	x

Com que hi ha proporcionalitat directa, es compleix

$$\frac{240}{400} = \frac{18}{x}.$$

Per tant,

$$240x = 400 \cdot 18.$$

Així,

$$x = \frac{400 \cdot 18}{240} = 30.$$

Per tant, el cotxe consumirà

30 litres

per recórrer 400 km.

Exemple 1.39

Tres treballadors poden pintar una paret en 8 hores. Quant temps necessitaran 6 treballadors per pintar la mateixa paret, si tots treballen al mateix ritme?

Solució

Les magnituds que intervenen són el nombre de treballadors i el temps necessari per fer la feina. En aquest cas, les magnituds són inversament proporcionals: si augmenta el nombre de treballadors, disminueix el temps necessari en la mateixa proporció.

Podem escriure:

Treballadors	Temps (hores)
3	8
6	x

Com que la proporcionalitat és inversa, el producte entre el nombre de treballadors i el temps es manté constant:

$$3 \cdot 8 = 6 \cdot x.$$

Per tant,

$$24 = 6x.$$

Així,

$$x = 4.$$

Per tant, 6 treballadors necessitaran

4 hores

per pintar la mateixa paret.

Exemple 1.40

Per preparar una recepta per a 4 persones calen 300 g d'arròs. Quants grams d'arròs caldran per preparar la mateixa recepta per a 10 persones?

Solució

El nombre de persones i la quantitat d'arròs són magnituds directament proporcionals: si augmenta el nombre de persones, també augmenta la quantitat d'arròs en la mateixa proporció.

Organitzem les dades:

Persones	Arròs (g)
4	300
10	x

Com que hi ha proporcionalitat directa,

$$\frac{4}{10} = \frac{300}{x}.$$

Per tant,

$$4x = 10 \cdot 300.$$

D'aquí obtenim

$$x = \frac{10 \cdot 300}{4} = 750.$$

Per tant, per preparar la recepta per a 10 persones caldran

750 g d'arròs.

1.10.6.2 Regla de tres composta

S'anomenen problemes de regla de tres composta aquells en què el valor desconegut d'una de les magnituds depèn d'altres dues o més i és directament o inversament proporcional a cadascuna d'aquestes magnituds preses separatament, mentre les restants romanen fixes. Els problemes de regla de tres composta es resoldran de la manera següent: suposem que tenim les magnituds A, B, C i D de les quals coneixem el valor a de A corresponent als valors b, c i d de les altres tres magnituds, i volem conèixer un altre valor de A que anomenarem x corresponent als valors b', c' i d' de les altres tres magnituds. Ara col·loquem en dues files els valors de les magnituds (vegeu la taula següent) i comparem cada magnitud amb aquella en què està el valor desconegut x . Suposem per exemple que A és directament proporcional amb B i inversament proporcional amb les altres dues magnituds. Aleshores escrivim damunt de les columnes on es troben els valors de les magnituds B, C i D el símbol $\times$ quan la proporcionalitat és directa i $\div$ quan és inversa:

	$\times$	$\div$	$\div$
x	b'	c'	d'
a	b	c	d

Com que existeix proporcionalitat entre els valors de A amb cadascuna de les altres tres magnituds, s'ha de complir que la raó dels valors de A és igual al producte de

les raons directes o inverses de les altres magnituds (segons siguin directament o inversament proporcionals amb A):

$$\frac{x}{a} = \frac{b'}{b} \cdot \frac{c}{c'} \cdot \frac{d}{d'} = \frac{b' \cdot c \cdot d}{b \cdot c' \cdot d'}$$

Aïllant x en la proporció anterior, obtenim

$$x = a \cdot \frac{b' \cdot c \cdot d}{b \cdot c' \cdot d'}$$

Exemple 1.41

Un cotxe consumeix 18 litres de gasolina per recórrer 240 km. Quants litres consumirà per recórrer 400 km, si el consum és proporcional a la distància recorreguda?

Solució

Les magnituds que intervenen són la distància recorreguda i els litres de gasolina consumits. Si el consum es manté constant, aquestes dues magnituds són directament proporcionals: com més quilòmetres es recorren, més gasolina es consumeix en la mateixa proporció.

Podem organitzar les dades en una taula:

Distància (km)	Gasolina (L)
240	18
400	x

Com que hi ha proporcionalitat directa, es compleix

$$\frac{240}{400} = \frac{18}{x}.$$

Per tant,

$$240x = 400 \cdot 18.$$

Així,

$$x = \frac{400 \cdot 18}{240} = 30.$$

Per tant, el cotxe consumirà

30 litres

per recórrer 400 km.

Exemple 1.42

Tres treballadors poden pintar una paret en 8 hores. Quant temps necessitaran 6 treballadors per pintar la mateixa paret, si tots treballen al mateix ritme?

Solució

Les magnituds que intervenen són el nombre de treballadors i el temps necessari per fer la feina. En aquest cas, les magnituds són inversament proporcionals: si augmenta el nombre de treballadors, disminueix el temps necessari en la mateixa proporció.

Podem escriure:

Treballadors	Temps (hores)
3	8
6	x

Com que la proporcionalitat és inversa, el producte entre el nombre de treballadors i el temps es manté constant:

$$3 \cdot 8 = 6 \cdot x.$$

Per tant,

$$24 = 6x.$$

Així,

$$x = 4.$$

Per tant, 6 treballadors necessitaran

4 hores

per pintar la mateixa paret.

Exemple 1.43

Per preparar una recepta per a 4 persones calen 300 g d'arròs. Quants grams d'arròs caldran per preparar la mateixa recepta per a 10 persones?

Solució

El nombre de persones i la quantitat d'arròs són magnituds directament proporcionals: si augmenta el nombre de persones, també augmenta la quantitat d'arròs en la mateixa proporció.

Organitzem les dades:

Persones	Arròs (g)
4	300
10	x

Com que hi ha proporcionalitat directa,

$$\frac{4}{10} = \frac{300}{x}.$$

Per tant,

$$4x = 10 \cdot 300.$$

D'aquí obtenim

$$x = \frac{10 \cdot 300}{4} = 750.$$

Per tant, per preparar la recepta per a 10 persones caldran

750 g d'arròs.

1.10.6.3 Repartiments proporcionals

De la propietat (3) de les proporcions es dedueix que si les quantitats x, y, z són directament proporcionals a a, b, c aleshores es compleix

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{x+y+z}{a+b+c}$$

i si són inversament proporcionals a a, b, c aleshores es compleix

$$\frac{x}{\frac{1}{a}} = \frac{y}{\frac{1}{b}} = \frac{z}{\frac{1}{c}} = \frac{x+y+z}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$$

Aquests dos resultats proporcionen les regles següents de repartiment proporcional:

- (1) Per repartir una quantitat N en parts x, y, z **directament proporcionals** a a, b, c n'hi ha prou de considerar la proporcions següents:

$$\frac{x}{a} = \frac{N}{a+b+c} \quad \frac{y}{b} = \frac{N}{a+b+c} \quad \frac{z}{c} = \frac{N}{a+b+c}$$

ja que $N = x + y + z$, i trobar la quarta proporcional corresponent. Així, obtenim:

$$x = a \cdot \frac{N}{a+b+c} \quad y = b \cdot \frac{N}{a+b+c} \quad z = c \cdot \frac{N}{a+b+c}$$

- (2) Per repartir una quantitat N en parts x, y, z **inversament proporcionals** a a, b, c n'hi ha prou de considerar les proporcions següents

$$\frac{x}{\frac{1}{a}} = \frac{N}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} \quad \frac{y}{\frac{1}{b}} = \frac{N}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} \quad \frac{z}{\frac{1}{c}} = \frac{N}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$$

ja que $N = x + y + z$, i trobar la quarta proporcional corresponent. Així, obtenim:

$$x = \frac{1}{a} \cdot \frac{N}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} \quad y = \frac{1}{b} \cdot \frac{N}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} \quad z = \frac{1}{c} \cdot \frac{N}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$$

Aquestes regles de repartiment proporcional poden estendre's a qualsevol nombre de parts.

Exemple 1.44

Volem repartir 600 euros en tres parts directament proporcionals als nombres

2, 3, 5.

Calculeu les tres parts.

Solució

En aquest cas tenim

$$N = 600, \quad a = 2, \quad b = 3, \quad c = 5.$$

Com que

$$a + b + c = 2 + 3 + 5 = 10,$$

les tres parts són

$$x = 2 \cdot \frac{600}{10} = 120,$$

$$y = 3 \cdot \frac{600}{10} = 180,$$

i

$$z = 5 \cdot \frac{600}{10} = 300.$$

Per tant, el repartiment és

$$120 \text{ euros}, \quad 180 \text{ euros}, \quad 300 \text{ euros}.$$

Exemple 1.45

Una empresa reparteix una gratificació de 1200 euros entre tres treballadors de manera directament proporcional al nombre d'hores extres que han fet. El primer ha fet 4 hores, el segon 6 hores i el tercer 10 hores. Quant rep cadascun?

Solució

Les quantitats que cal repartir són directament proporcionals a

$$4, \quad 6, \quad 10.$$

Per tant,

$$N = 1200, \quad a = 4, \quad b = 6, \quad c = 10.$$

Com que

$$a + b + c = 4 + 6 + 10 = 20,$$

obtenim

$$x = 4 \cdot \frac{1200}{20} = 240,$$

$$y = 6 \cdot \frac{1200}{20} = 360,$$

i

$$z = 10 \cdot \frac{1200}{20} = 600.$$

Per tant, els tres treballadors reben, respectivament,

$$240 \text{ euros}, \quad 360 \text{ euros}, \quad 600 \text{ euros}.$$

Exemple 1.46

Volem repartir 780 euros en tres parts inversament proporcionals als nombres

$$2, \quad 3, \quad 6.$$

Calculeu les tres parts.

Solució

Com que el repartiment és inversament proporcional a

$$2, \quad 3, \quad 6,$$

hem de repartir 780 euros de manera directament proporcional a

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{6}.$$

La suma d'aquests inversos és

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = 1.$$

Per tant,

$$x = \frac{1}{2} \cdot \frac{780}{1} = 390,$$

$$y = \frac{1}{3} \cdot \frac{780}{1} = 260,$$

i

$$z = \frac{1}{6} \cdot \frac{780}{1} = 130.$$

Així, el repartiment és

$$390 \text{ euros}, \quad 260 \text{ euros}, \quad 130 \text{ euros}.$$

Exemple 1.47

Un premi de 900 euros es reparteix entre tres equips de manera inversament proporcional al nombre d'errors comesos. El primer equip ha comès 3 errors, el segon 4 errors i el tercer 6 errors. Quant rep cada equip?

Solució

El repartiment és inversament proporcional a

$$3, \quad 4, \quad 6.$$

Per tant, cal repartir 900 euros de manera directament proporcional a

$$\frac{1}{3}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{6}.$$

La suma dels inversos és

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{4}{12} + \frac{3}{12} + \frac{2}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}.$$

Així,

$$x = \frac{1}{3} \cdot \frac{900}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3} \cdot 1200 = 400,$$

$$y = \frac{1}{4} \cdot \frac{900}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{4} \cdot 1200 = 300,$$

i

$$z = \frac{1}{6} \cdot \frac{900}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{6} \cdot 1200 = 200.$$

Per tant, els tres equips reben, respectivament,

400 euros, 300 euros, 200 euros.

1.11 Proporcionalitat geomètrica

La proporcionalitat no només apareix en situacions aritmètiques, com ara preus, percentatges o repartiments. També és fonamental en geometria, especialment quan comparem longituds, figures semblants, escales o ampliacions i reduccions.

En geometria, la idea central és comparar magnituds del mateix tipus. Per exemple, podem comparar dues longituds, dues àrees o dos volums. En aquesta secció ens centrarem sobretot en la proporcionalitat entre longituds, és a dir, entre segments.

1.11.1 Proporcionalitat de segments

Un **segment** queda determinat per dos punts. Si A i B són dos punts, escriurem

$$\overline{AB}$$

per indicar el segment que uneix A i B , i escriurem

$$AB$$

per indicar-ne la longitud.

Per poder comparar dos segments, cal expressar-ne les longituds amb la mateixa unitat de mesura. Si dos segments tenen longituds AB i CD , la raó entre aquests dos segments és el quocient

$$\frac{AB}{CD}, \quad CD \neq 0.$$

Aquesta raó indica quantes vegades el segment $\overline{CD}$ està contingut en el segment $\overline{AB}$, o bé quina part representa $\overline{AB}$ respecte de $\overline{CD}$.

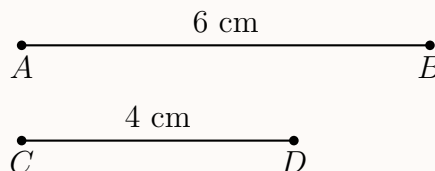


Figura 1.3: Comparació de dos segments. En aquest cas, $\frac{AB}{CD} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$.

Exemple 1.48

En la figura 1.3, el segment $\overline{AB}$ fa 6 cm i el segment $\overline{CD}$ fa 4 cm. La raó entre les seves longituds és

$$\frac{AB}{CD} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.$$

Això vol dir que el segment $\overline{AB}$ fa $\frac{3}{2}$ vegades el segment $\overline{CD}$.

Definició 1.12

Direm que quatre segments $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$ i $\overline{GH}$ són **proporcionals** si les raons entre les seves longituds són iguals, és a dir, si

$$\frac{AB}{CD} = \frac{EF}{GH}, \quad CD \neq 0, \quad GH \neq 0.$$

Aquesta igualtat és una proporció geomètrica. Com en qualsevol proporció, podem aplicar la propietat fonamental:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{EF}{GH} \iff AB \cdot GH = CD \cdot EF.$$

Exemple 1.49

Suposem que

$$AB = 8 \text{ cm}, \quad CD = 12 \text{ cm}, \quad EF = 10 \text{ cm}.$$

Volem trobar la longitud GH perquè els segments siguin proporcionals:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{EF}{GH}.$$

Substituïm les dades:

$$\frac{8}{12} = \frac{10}{GH}.$$

Aplicant la propietat fonamental de les proporcions,

$$8 \cdot GH = 12 \cdot 10.$$

Per tant,

$$GH = \frac{120}{8} = 15.$$

Així, cal que

$$GH = 15 \text{ cm}.$$

També podem expressar la proporcionalitat de segments mitjançant una constant de proporcionalitat. Si dos segments $\overline{AB}$ i $\overline{A'B'}$ compleixen

$$A'B' = k \cdot AB,$$

direm que k és el **factor d'escala** que transforma el segment $\overline{AB}$ en el segment $\overline{A'B'}$.

Si $k > 1$, el nou segment és més llarg que l'original. Si $0 < k < 1$, el nou segment és més curt. Si $k = 1$, els dos segments tenen la mateixa longitud.

Exemple 1.50

Si un segment fa 5 cm i l'ampliem amb factor d'escala

$$k = \frac{3}{2},$$

la nova longitud serà

$$\frac{3}{2} \cdot 5 = \frac{15}{2} = 7,5.$$

Per tant, el segment ampliat fa 7,5 cm.

1.11.2 Segments proporcionals en figures geomètriques

La proporcionalitat de segments és especialment important en l'estudi de figures semblants. Dues figures tenen la mateixa forma quan les longituds corresponents són proporcionals.

Per exemple, si dos triangles ABC i $A'B'C'$ tenen costats corresponents proporcionals, podem escriure

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC} = k.$$

El nombre k és el factor d'escala que transforma el triangle ABC en el triangle $A'B'C'$.

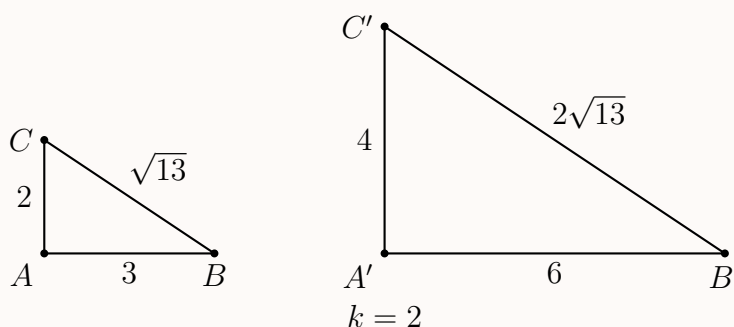


Figura 1.4: Dos triangles semblants. Les longituds del segon triangle són el doble de les longituds corresponents del primer.

Exemple 1.51

En la figura 1.4, els costats corresponents dels dos triangles compleixen

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{6}{3} = 2,$$

$$\frac{A'C'}{AC} = \frac{4}{2} = 2,$$

i també

$$\frac{B'C'}{BC} = \frac{2\sqrt{13}}{\sqrt{13}} = 2.$$

Per tant, els costats corresponents són proporcionals i el segon triangle és una ampliació del primer amb factor d'escala

$$k = 2.$$

1.11.3 El teorema de Tales

Un dels resultats fonamentals que relaciona geometria i proporcionalitat és el teorema de Tales. Aquest teorema permet obtenir proporcions entre segments quan diverses rectes paral·leles tallen dues rectes secants.

Proposició 1.26 (Teorema de Tales)

Si diverses rectes paral·leles tallen dues rectes secants, aleshores determinen sobre aquestes rectes segments proporcionals.

La figura 1.5 representa una situació típica del teorema de Tales. Les rectes verticals són paral·leles i tallen dues rectes secants que parteixen d'un mateix punt A . Els segments determinats sobre una secant són proporcionals als segments corresponents determinats sobre l'altra secant.

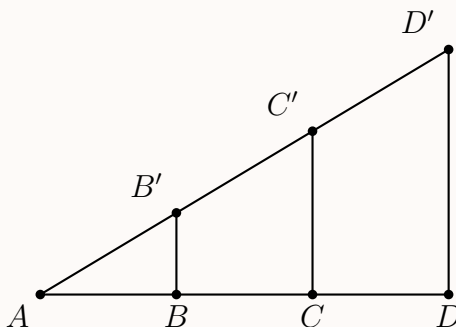


Figura 1.5: Situació del teorema de Tales: rectes paral·leles que tallen dues rectes secants i determinen segments proporcionals.

En aquesta situació es compleixen proporcions com ara

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AB'}{B'C'}$$

i també

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AB'}{AC'}.$$

Exemple 1.52

Suposem que tres rectes paral·leles tallen dues rectes secants i determinen els segments següents:

$$AB = 4 \text{ cm}, \quad BC = 6 \text{ cm}, \quad AB' = 10 \text{ cm}.$$

Volem trobar $B'C'$. Pel teorema de Tales,

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AB'}{B'C'}.$$

Substituïm les dades:

$$\frac{4}{6} = \frac{10}{B'C'}.$$

Aplicant la propietat fonamental de les proporcions,

$$4 \cdot B'C' = 6 \cdot 10.$$

Per tant,

$$B'C' = \frac{60}{4} = 15.$$

Així,

$$B'C' = 15 \text{ cm}.$$

1.11.4 Escales, ampliacions i reduccions

Una aplicació directa de la proporcionalitat geomètrica és l'ús d'escales en mapes, plànols i maquetes.

Una escala indica la raó entre una longitud representada i la longitud real corresponent. Per exemple, una escala

$$1 : 100$$

vol dir que 1 unitat en el dibuix representa 100 unitats en la realitat.

Si la longitud en el dibuix és d i la longitud real és r , aleshores

$$\frac{d}{r} = \frac{1}{100}.$$

Exemple 1.53

En un plànol a escala $1 : 200$, una habitació fa 4 cm de llarg. Quina és la longitud real de l'habitació?

L'escala $1 : 200$ vol dir que

$$1 \text{ cm en el plànol} = 200 \text{ cm en la realitat}.$$

Per tant,

$$4 \text{ cm en el plànol} = 4 \cdot 200 = 800 \text{ cm en la realitat.}$$

Com que

$$800 \text{ cm} = 8 \text{ m,}$$

la longitud real de l'habitació és

$$8 \text{ m.}$$

Exemple 1.54

Una maqueta està feta a escala 1 : 50. Si una paret real fa 12 m, quina longitud tindrà en la maqueta?

Primer expressem la longitud real en centímetres:

$$12 \text{ m} = 1200 \text{ cm.}$$

Com que l'escala és 1 : 50, la longitud en la maqueta serà

$$\frac{1200}{50} = 24.$$

Per tant, la paret farà

$$24 \text{ cm}$$

en la maqueta.

1.11.5 Observació sobre les raons geomètriques

En aquesta unitat treballem principalment amb raons racionals, perquè l'objectiu és estudiar els nombres racionals i les seves aplicacions. Ara bé, en geometria també apareixen raons que no són racionals.

Per exemple, en un quadrat de costat 1, la diagonal té longitud $\sqrt{2}$. La raó entre la diagonal i el costat és

$$\frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2},$$

que no és un nombre racional.

Això mostra que la geometria porta de manera natural més enllà dels nombres racionals. Aquest fet serà important quan s'estudiïn els nombres irracionals i, posteriorment, els nombres reals.

1.12 Funcions de proporcionalitat

A la secció anterior hem estudiat la proporcionalitat directa i la proporcionalitat inversa com a relacions entre magnituds. Ara les reinterpretarem com a funcions, és a dir, com a correspondències que assignen a cada valor admissible d'una variable x un únic valor d'una variable y .

Tot i que en aquesta unitat treballem amb nombres racionals, per visualitzar

aquestes funcions en el pla cartesià dibuixarem la recta o la corba corresponent. Els punts amb coordenades racionals en formen part.

1.12.1 Funció de proporcionalitat directa

Una funció de proporcionalitat directa és una funció de la forma

$$f(x) = kx,$$

on $k \in \mathbb{Q}$ és una constant.

La seva gràfica és una recta que passa per l'origen de coordenades.

Exemple 1.55

Considerem la funció

$$f(x) = 2x.$$

Aquesta és una funció de proporcionalitat directa amb constant de proporcionalitat $k = 2$.

Solució

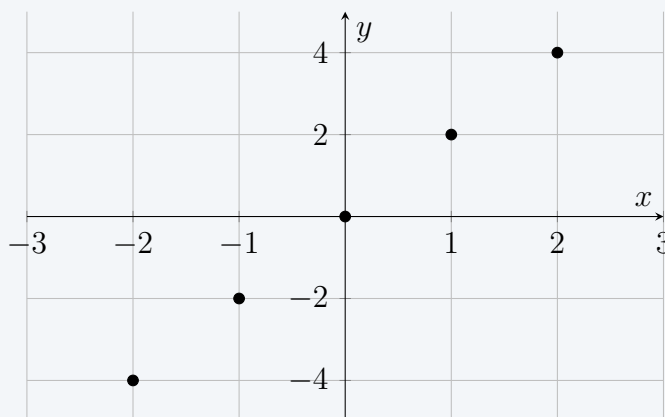
Calculem alguns valors:

x	-2	-1	0	1	2
$f(x) = 2x$	-4	-2	0	2	4

Representem ara alguns punts de coordenades racionals que satisfan la relació

$$y = 2x.$$

Observem que tots aquests punts queden alineats. Si treballéssim sobre $\mathbb{R}$, la seva representació gràfica seria una recta que passa per l'origen.



Punts de la funció de proporcionalitat directa $f(x) = 2x$.

Així, la funció $f(x) = 2x$ és una recta que passa per l'origen. Això és característic de totes les funcions de proporcionalitat directa.

1.12.2 Funció de proporcionalitat inversa

Una funció de proporcionalitat inversa és una funció de la forma

$$f(x) = \frac{k}{x},$$

on $k \in \mathbb{Q}$, $k \neq 0$, és una constant.

Aquesta funció no està definida en $x = 0$, i la seva gràfica és una hipèrbola.

Exemple 1.56

Considerem la funció

$$f(x) = \frac{6}{x}.$$

Aquesta és una funció de proporcionalitat inversa amb constant de proporcionalitat $k = 6$.

Solució

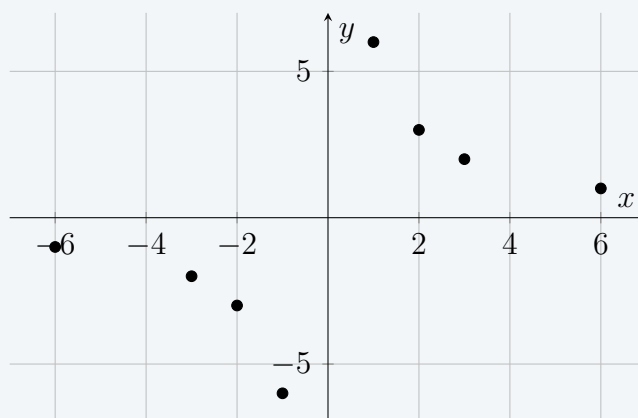
Calculem alguns valors:

x	-6	-3	-2	-1	1	2	3	6
$f(x) = \frac{6}{x}$	-1	-2	-3	-6	6	3	2	1

Representem ara alguns punts de coordenades racionals que satisfan la relació

$$y = \frac{6}{x}.$$

Observem que aquests punts no estan alineats i es distribueixen en dues branques. Si treballéssim sobre $\mathbb{R}$, la seva representació gràfica seria una hipèrbola.



Punts de la funció de proporcionalitat inversa $f(x) = \frac{6}{x}$.

Observació 1.9

Les funcions de proporcionalitat directa i inversa es poden distingir fàcilment per la seva expressió algebraica i per la seva gràfica:

- si

$$f(x) = kx,$$

la gràfica és una recta que passa per l'origen;

- si

$$f(x) = \frac{k}{x},$$

la gràfica és una hipèrbola i la funció no està definida en $x = 0$.

1.12.3 Comparació entre proporcionalitat directa i inversa

La diferència essencial entre els dos tipus de proporcionalitat és la magnitud que es manté constant.

En una proporcionalitat directa, el quocient és constant:

$$\frac{y}{x} = k.$$

Per això la relació es pot escriure com

$$y = kx.$$

En una proporcionalitat inversa, el producte és constant:

$$xy = k.$$

Per això la relació es pot escriure com

$$y = \frac{k}{x}.$$

Tipus de proporcionalitat	Relació constant	Funció associada
Directa	$\frac{y}{x} = k$	$y = kx$
Inversa	$xy = k$	$y = \frac{k}{x}$

Aquesta distinció és important perquè moltes situacions es resolen de manera diferent segons si les magnituds són directament proporcionals o inversament proporcionals. Abans d'aplicar una regla de tres, cal determinar quin tipus de proporcionalitat hi ha.

2 Pràctica

En aquest capítol es recullen exercicis resolts que permeten consolidar els conceptes principals de la teoria. Els primers exercicis treballen els nombres racionals des d'un punt de vista conceptual i procedimental. Els darrers exercicis mostren aplicacions dels nombres racionals a proporcions, escales, figures geomètriques i funcions de proporcionalitat.

2.1 Construcció i representació dels nombres racionals

Exercici 2.1 (Fraccions com a classes)

Decidiu si

$$\frac{6}{10}, \quad \frac{9}{15}, \quad \frac{-3}{-5}, \quad \frac{12}{25}$$

representen el mateix nombre racional.

Solució

Dues fraccions a/b i c/d , amb denominadors no nuls, representen el mateix nombre racional si

$$ad = bc.$$

Primer comparem $\frac{6}{10}$ i $\frac{9}{15}$:

$$6 \cdot 15 = 90 \quad \text{i} \quad 10 \cdot 9 = 90.$$

Per tant,

$$\frac{6}{10} = \frac{9}{15}.$$

Ara comparem $\frac{6}{10}$ i $\frac{-3}{-5}$:

$$6 \cdot (-5) = -30 \quad \text{i} \quad 10 \cdot (-3) = -30.$$

Per tant,

$$\frac{6}{10} = \frac{-3}{-5}.$$

Finalment, comparem $\frac{6}{10}$ i $\frac{12}{25}$:

$$6 \cdot 25 = 150 \quad \text{i} \quad 10 \cdot 12 = 120.$$

Com que $150 \neq 120$, tenim

$$\frac{6}{10} \neq \frac{12}{25}.$$

Així, les tres primeres fraccions representen el mateix nombre racional, però $\frac{12}{25}$ representa un nombre racional diferent.

Exercici 2.2 (Representants d'un nombre racional)

Escriuiu quatre representants diferents del nombre racional representat per

$$-\frac{3}{4}.$$

Solució

Per obtenir fraccions equivalents, multipliquem el numerador i el denominador pel mateix enter no nul.

Multiplicant per 2, 3, -1 i -5 , obtenim

$$-\frac{3}{4} = -\frac{6}{8} = -\frac{9}{12} = \frac{3}{-4} = \frac{15}{-20}.$$

Per tant, quatre representants diferents del mateix nombre racional són

$$-\frac{6}{8}, \quad -\frac{9}{12}, \quad \frac{3}{-4}, \quad \frac{15}{-20}.$$

Exercici 2.3 (Els enters com a racionals)

Escriuiu els enters -3 , 0 i 5 com a nombres racionals. Doneu-ne dos representants diferents en cada cas.

Solució

Cada enter $n \in \mathbb{Z}$ es pot identificar amb el racional representat per $\frac{n}{1}$.

Per tant,

$$-3 = \frac{-3}{1} = \frac{-6}{2},$$

$$0 = \frac{0}{1} = \frac{0}{7},$$

i

$$5 = \frac{5}{1} = \frac{15}{3}.$$

En tots els casos, el denominador ha de ser no nul.

Exercici 2.4 (Fracció irreductible)

Reduïu a fracció irreductible:

$$\frac{-84}{126}.$$

Solució

Calculem el màxim comú divisor de 84 i 126:

$$\text{mcd}(84, 126) = 42.$$

Dividim el numerador i el denominador per 42:

$$\frac{-84}{126} = \frac{-84 : 42}{126 : 42} = -\frac{2}{3}.$$

Per tant, la fracció irreductible equivalent és

$$-\frac{2}{3}.$$

Exercici 2.5 (Signe d'un racional)

Escriuiu amb denominador positiu i en forma irreductible:

$$\frac{45}{-60}.$$

Solució

Primer passem el signe negatiu al numerador:

$$\frac{45}{-60} = -\frac{45}{60}.$$

Ara simplifiquem. Com que

$$\text{mcd}(45, 60) = 15,$$

tindrem

$$-\frac{45}{60} = -\frac{45 : 15}{60 : 15} = -\frac{3}{4}.$$

Per tant,

$$\frac{45}{-60} = -\frac{3}{4}.$$

Exercici 2.6 (Ubicació sobre la recta numèrica amb el teorema de Tales)

Expliqueu com es poden situar sobre la recta numèrica els nombres

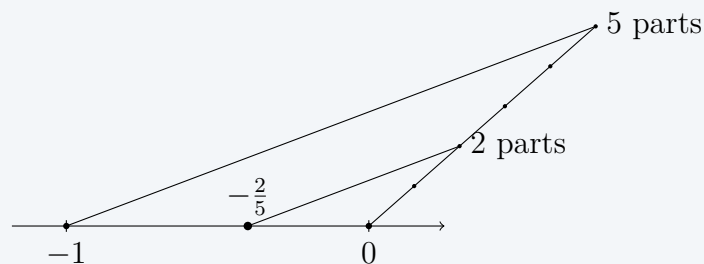
$$-\frac{2}{5} \quad \text{i} \quad \frac{7}{3}$$

fent servir el teorema de Tales.

Solució

El teorema de Tales permet dividir un segment en parts iguals mitjançant rectes paral·leles. Aquesta construcció és especialment adequada per representar fraccions sobre la recta numèrica.

Per situar $-\frac{2}{5}$, dividim el segment que va de 0 a -1 en cinc parts iguals. Com que el nombre és negatiu, ens desplacem cap a l'esquerra de l'origen i prenem la segona divisió.



Construcció de $-\frac{2}{5}$ dividint el segment $[0, -1]$ en cinc parts iguals mitjançant el teorema de Tales.

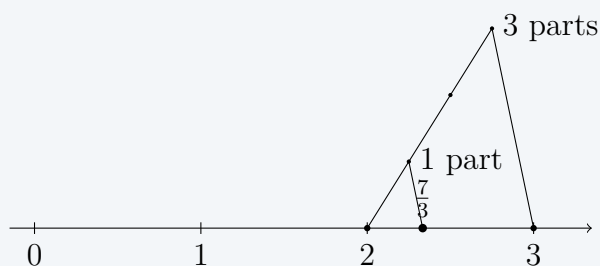
Per situar $\frac{7}{3}$, fem primer la divisió euclidiana

$$7 = 3 \cdot 2 + 1.$$

Així,

$$\frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3}.$$

Per tant, avancem fins al punt 2 i dividim el segment $[2, 3]$ en tres parts iguals mitjançant el teorema de Tales. La primera divisió correspon al punt $2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$.



Construcció de $\frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3}$ dividint el segment $[2, 3]$ en tres parts iguals mitjançant el teorema de Tales.

2.2 Operacions amb nombres racionals

Exercici 2.7 (Addició i subtracció)

Calculeu i simplifiqueu:

$$\frac{3}{4} - \frac{5}{6} + \frac{2}{9}.$$

Solució

El mínim comú múltiple de 4, 6 i 9 és 36. Per tant,

$$\frac{3}{4} - \frac{5}{6} + \frac{2}{9} = \frac{27}{36} - \frac{30}{36} + \frac{8}{36} = \frac{5}{36}.$$

Exercici 2.8 (Multiplicació i divisió)

Calculeu i simplifiqueu:

$$\left(-\frac{5}{8}\right) : \frac{15}{16}.$$

Solució

Dividir per un racional no nul és multiplicar pel seu invers:

$$\left(-\frac{5}{8}\right) : \frac{15}{16} = \left(-\frac{5}{8}\right) \cdot \frac{16}{15}.$$

Simplifiquem abans de multiplicar:

$$\left(-\frac{5}{8}\right) \cdot \frac{16}{15} = -\frac{5 \cdot 16}{8 \cdot 15} = -\frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 3} = -\frac{2}{3}.$$

Per tant,

$$\left(-\frac{5}{8}\right) : \frac{15}{16} = -\frac{2}{3}.$$

Exercici 2.9 (Invers multiplicatiu)

Trobeu l'invers multiplicatiu de

$$\alpha = -\frac{7}{12}$$

i comproveu que el producte és 1.

Solució

Com que $\alpha \neq 0$, el seu invers multiplicatiu és

$$\alpha^{-1} = -\frac{12}{7}.$$

En efecte,

$$\left(-\frac{7}{12}\right)\left(-\frac{12}{7}\right) = \frac{84}{84} = 1.$$

2.3 Ordre, densitat i valor absolut

Exercici 2.10 (Ordre en $\mathbb{Q}$)

Ordeneu de menor a major:

$$-\frac{3}{4}, \quad -\frac{5}{6}, \quad \frac{2}{3}, \quad \frac{7}{10}.$$

Solució

Entre els nombres negatius, és més petit el que té valor absolut més gran:

$$-\frac{5}{6} < -\frac{3}{4}.$$

Entre els nombres positius, comparem en creu:

$$\frac{2}{3} < \frac{7}{10} \iff 2 \cdot 10 < 3 \cdot 7.$$

Com que $20 < 21$, tenim

$$\frac{2}{3} < \frac{7}{10}.$$

Per tant,

$$-\frac{5}{6} < -\frac{3}{4} < \frac{2}{3} < \frac{7}{10}.$$

Exercici 2.11 (Densitat)

Trobeu tres nombres racionals diferents entre $\frac{1}{3}$ i $\frac{1}{2}$.

Solució

Escrivim els dos nombres amb denominador comú:

$$\frac{1}{3} = \frac{10}{30}, \quad \frac{1}{2} = \frac{15}{30}.$$

Aleshores tres nombres racionals entre aquests dos són

$$\frac{11}{30}, \quad \frac{12}{30} = \frac{2}{5}, \quad \frac{13}{30}.$$

Exercici 2.12 (Valor absolut)

Calculeu:

$$\left| -\frac{7}{5} \right|, \quad \left| \frac{3}{8} \right|, \quad \left| -\frac{11}{6} \right| - \left| \frac{5}{3} \right|.$$

Solució

El valor absolut d'un nombre racional és la seva distància a 0 sobre la recta numèrica. Per tant,

$$\left| -\frac{7}{5} \right| = \frac{7}{5} \quad \text{i} \quad \left| \frac{3}{8} \right| = \frac{3}{8}.$$

Finalment,

$$\left| -\frac{11}{6} \right| - \left| \frac{5}{3} \right| = \frac{11}{6} - \frac{5}{3} = \frac{11}{6} - \frac{10}{6} = \frac{1}{6}.$$

2.4 Expressions decimals, potències i arrels

Exercici 2.13 (Expressió decimal finita)

Decidiu si la fracció

$$\frac{21}{56}$$

té expressió decimal finita.

Solució

Primer reduïm la fracció a forma irreductible. Com que

$$\text{mcd}(21, 56) = 7,$$

tindrem

$$\frac{21}{56} = \frac{3}{8}.$$

Ara observem que

$$8 = 2^3.$$

El denominador irreductible només té el factor primer 2. Per tant, la fracció té expressió decimal finita.

De fet,

$$\frac{3}{8} = \frac{375}{1000} = 0,375.$$

Exercici 2.14 (Expressió decimal periòdica)

Decidiu si la fracció

$$\frac{7}{12}$$

té expressió decimal finita o periòdica.

Solució

La fracció $\frac{7}{12}$ ja és irreductible, perquè

$$\text{mcd}(7, 12) = 1.$$

El denominador és

$$12 = 2^2 \cdot 3.$$

Com que apareix el factor primer 3, que és diferent de 2 i de 5, la fracció no té expressió decimal finita.

Per tant, té expressió decimal periòdica. En efecte,

$$\frac{7}{12} = 0,58\overline{3}.$$

Exercici 2.15 (Fracció generatriu d'un decimal finit)

Calculeu la fracció generatriu de

$$3,075.$$

Solució

Com que hi ha tres xifres decimals, podem escriure

$$3,075 = \frac{3075}{1000}.$$

Simplifiquem la fracció. Com que

$$\text{mcd}(3075, 1000) = 25,$$

tindrem

$$\frac{3075}{1000} = \frac{123}{40}.$$

Per tant,

$$3,075 = \frac{123}{40}.$$

Exercici 2.16 (Fracció generatriu d'un decimal periòdic)

Calculeu la fracció generatriu de

$$2,1\overline{37}.$$

Solució

Sigui

$$x = 2,1\overline{37} = 2,1373737 \dots$$

Hi ha una xifra no periòdica i dues xifres periòdiques. Multipliquem per 10 i per 1000:

$$10x = 21,373737\dots, \quad 1000x = 2137,373737\dots$$

Restant,

$$1000x - 10x = 2137 - 21 = 2116.$$

Així,

$$990x = 2116, \quad x = \frac{2116}{990} = \frac{1058}{495}.$$

Exercici 2.17 (Potències de racionals)

Calculeu:

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^4 \quad \text{i} \quad \left(-\frac{2}{3}\right)^5.$$

Solució

Quan l'exponent és parell, el resultat és positiu:

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}.$$

Quan l'exponent és senar, el resultat conserva el signe negatiu:

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^5 = -\frac{2^5}{3^5} = -\frac{32}{243}.$$

Exercici 2.18 (Propietats de les potències)

Simplifiqueu l'expressió següent:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^4 : \left(\frac{3}{5}\right)^3.$$

Solució

Com que totes les potències tenen la mateixa base, podem sumar els exponents en la multiplicació i restar-los en la divisió:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^4 : \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \left(\frac{3}{5}\right)^{2+4-3} = \left(\frac{3}{5}\right)^3.$$

Per tant,

$$\left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{27}{125}.$$

Exercici 2.19 (Arrels de racionals)

Decidiu si les arrels següents són racionals:

$$\sqrt{\frac{49}{81}}, \quad \sqrt{\frac{2}{9}}.$$

Solució

En el primer cas,

$$\sqrt{\frac{49}{81}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{81}} = \frac{7}{9}.$$

Per tant, és un nombre racional.

En el segon cas,

$$\sqrt{\frac{2}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Com que $\sqrt{2}$ no és racional, tampoc no ho és $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

Per tant,

$$\sqrt{\frac{49}{81}} \in \mathbb{Q}, \quad \sqrt{\frac{2}{9}} \notin \mathbb{Q}.$$

2.4.1 Operacions combinades amb fraccions, potències i arrels

Un cop treballades les operacions bàsiques, les potències i les arrels, podem resoldre expressions on apareixen totes aquestes operacions combinades. Cal respectar l'ordre habitual de les operacions:

parèntesis $\longrightarrow$ potències i arrels
 $\longrightarrow$ multiplicacions i divisions $\longrightarrow$ addicions i subtraccions.

També cal tenir cura amb els signes i simplificar sempre que sigui possible.

Exercici 2.20 (Tres fraccions amb denominadors diferents)

Calculeu:

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{6} - \frac{1}{4}.$$

Solució

Busquem un denominador comú. Com que

$$\text{mcm}(3, 6, 4) = 12,$$

tindrem

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{6} - \frac{1}{4} = \frac{8}{12} + \frac{10}{12} - \frac{3}{12}.$$

Per tant,

$$\frac{8}{12} + \frac{10}{12} - \frac{3}{12} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}.$$

Exercici 2.21 (Parèntesis i multiplicació)

Calculeu:

$$\left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{6}{5} + \frac{1}{2}.$$

Solució

Primer resollem el parèntesi:

$$\frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{9}{12} - \frac{8}{12} = \frac{1}{12}.$$

Així,

$$\left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{6}{5} + \frac{1}{2} = \frac{1}{12} \cdot \frac{6}{5} + \frac{1}{2}.$$

Ara fem la multiplicació:

$$\frac{1}{12} \cdot \frac{6}{5} = \frac{6}{60} = \frac{1}{10}.$$

Finalment,

$$\frac{1}{10} + \frac{1}{2} = \frac{1}{10} + \frac{5}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

Exercici 2.22 (Parèntesis i divisió)

Calculeu:

$$\left(\frac{5}{6} - \frac{1}{3}\right) : \frac{2}{9} - \frac{3}{4}.$$

Solució

Primer resollem el parèntesi:

$$\frac{5}{6} - \frac{1}{3} = \frac{5}{6} - \frac{2}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Per tant,

$$\left(\frac{5}{6} - \frac{1}{3}\right) : \frac{2}{9} - \frac{3}{4} = \frac{1}{2} : \frac{2}{9} - \frac{3}{4}.$$

Dividir per una fracció és multiplicar pel seu invers:

$$\frac{1}{2} : \frac{2}{9} = \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{2} = \frac{9}{4}.$$

Ara restem:

$$\frac{9}{4} - \frac{3}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}.$$

Exercici 2.23 (Prioritat de les operacions)

Calculeu:

$$\frac{3}{5} - \frac{7}{10} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{4} : \frac{5}{8}.$$

Solució

Primer fem la multiplicació i la divisió:

$$\frac{7}{10} \cdot \frac{2}{3} = \frac{14}{30} = \frac{7}{15},$$

i

$$\frac{1}{4} : \frac{5}{8} = \frac{1}{4} \cdot \frac{8}{5} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}.$$

Per tant,

$$\frac{3}{5} - \frac{7}{10} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{4} : \frac{5}{8} = \frac{3}{5} - \frac{7}{15} + \frac{2}{5}.$$

Ara reduïm a denominador comú:

$$\frac{3}{5} - \frac{7}{15} + \frac{2}{5} = \frac{9}{15} - \frac{7}{15} + \frac{6}{15} = \frac{8}{15}.$$

Exercici 2.24 (Potències i parèntesis)

Calculeu:

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{5}{6} \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{10}\right).$$

Solució

Primer calculem la potència:

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}.$$

Ara resolem el parèntesi:

$$\frac{3}{5} - \frac{1}{10} = \frac{6}{10} - \frac{1}{10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}.$$

Per tant,

$$\frac{5}{6} \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{10}\right) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{12}.$$

Finalment,

$$\frac{4}{9} - \frac{5}{12} = \frac{16}{36} - \frac{15}{36} = \frac{1}{36}.$$

Exercici 2.25 (Potències, arrels i signes)

Calculeu:

$$\sqrt{\frac{25}{36}} + \sqrt[3]{-\frac{8}{27}} - \left(-\frac{1}{2}\right)^3.$$

Solució

Calculem cada terme per separat:

$$\sqrt{\frac{25}{36}} = \frac{5}{6},$$

ja que l'arrel quadrada principal és no negativa.

També tenim

$$\sqrt[3]{-\frac{8}{27}} = -\frac{2}{3},$$

perquè

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^3 = -\frac{8}{27}.$$

Finalment,

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8}.$$

Així,

$$\sqrt{\frac{25}{36}} + \sqrt[3]{-\frac{8}{27}} - \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{6} - \frac{2}{3} - \left(-\frac{1}{8}\right).$$

Per tant,

$$\frac{5}{6} - \frac{2}{3} + \frac{1}{8} = \frac{5}{6} - \frac{4}{6} + \frac{1}{8} = \frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \frac{4}{24} + \frac{3}{24} = \frac{7}{24}.$$

2.5 Raons, proporcions i proporcionalitat aritmètica

Exercici 2.26 (Raó entre dues quantitats)

En una classe hi ha 18 alumnes que estudien francès i 12 alumnes que estudien alemany. Calculeu la raó entre el nombre d'alumnes que estudien francès i el nombre d'alumnes que estudien alemany. Interpreteu-ne el resultat.

Solució

La raó demanada és

$$\frac{18}{12} = \frac{3}{2}.$$

Això vol dir que, per cada 2 alumnes que estudien alemany, n'hi ha 3 que estudien francès.

Exercici 2.27 (Proporcions)

Decidiu si l'expressió següent és una proporció:

$$\frac{8}{12} = \frac{10}{15}.$$

Solució

Comprovem el producte dels mitjans i el producte dels extrems:

$$12 \cdot 10 = 120 \quad \text{i} \quad 8 \cdot 15 = 120.$$

Com que coincideixen,

$$\frac{8}{12} = \frac{10}{15}$$

és una proporció.

Exercici 2.28 (Propietats de les proporcions)

A partir de la proporció

$$\frac{6}{8} = \frac{9}{12},$$

escriuiu la proporció inversa, la proporció alternada i la proporció que s'obté sumant els termes de cada raó.

Solució

La proporció inversa és

$$\frac{8}{6} = \frac{12}{9}.$$

La proporció alternada és

$$\frac{6}{9} = \frac{8}{12}.$$

Sumant els termes de cada raó, obtenim

$$\frac{6+8}{8} = \frac{9+12}{12},$$

és a dir,

$$\frac{14}{8} = \frac{21}{12}.$$

Exercici 2.29 (Tercera proporcional)

Trobeu la tercera proporcional de 2 i 6.

Solució

Busquem $x \in \mathbb{Q}$ tal que

$$\frac{2}{6} = \frac{6}{x}.$$

Pel producte dels mitjans i dels extrems,

$$2x = 36.$$

Per tant,

$$x = 18.$$

Així, la tercera proporcional de 2 i 6 és 18.

Exercici 2.30 (Quarta proporcional)

Trobeu la quarta proporcional de 3, 5 i 9.

Solució

Busquem $x \in \mathbb{Q}$ tal que

$$\frac{3}{5} = \frac{9}{x}.$$

Pel producte dels mitjans i dels extrems,

$$3x = 45.$$

Per tant,

$$x = 15.$$

Així, la quarta proporcional de 3, 5 i 9 és 15.

Exercici 2.31 (Mitjana proporcional)

Trobeu la mitjana proporcional positiva de 4 i 9.

Solució

Busquem $x \in \mathbb{Q}$, amb $x > 0$, tal que

$$\frac{4}{x} = \frac{x}{9}.$$

Pel producte dels mitjans i dels extrems,

$$x^2 = 36.$$

Com que $x > 0$, obtenim

$$x = 6.$$

Així, la mitjana proporcional positiva de 4 i 9 és 6.

Exercici 2.32 (Identificació d'una relació entre magnituds)

Observeu la taula següent, que relaciona dues magnituds x i y :

x	2	5	8	11
y	6	15	24	?

Decidiu quin tipus de relació hi ha entre les dues magnituds i calculeu el valor que falta.

Solució

No hem d'aplicar una regla mecànicament: primer cal decidir quina relació hi ha entre les magnituds.

Comprovem si el quocient y/x és constant:

$$\frac{6}{2} = 3, \quad \frac{15}{5} = 3, \quad \frac{24}{8} = 3.$$

Com que el quocient és constant, les dues magnituds són directament proporcionals.

Per tant,

$$\frac{y}{x} = 3,$$

i, quan $x = 11$, tenim

$$y = 3 \cdot 11 = 33.$$

El valor que falta és 33.

Exercici 2.33 (Identificació d'una relació entre magnituds)

Observeu la taula següent, que relaciona dues magnituds x i y :

x	2	3	6	9
y	18	12	6	?

Decidiu quin tipus de relació hi ha entre les dues magnituds i calculeu el valor que falta.

Solució

Primer comprovem si el quocient y/x és constant:

$$\frac{18}{2} = 9, \quad \frac{12}{3} = 4, \quad \frac{6}{6} = 1.$$

El quocient no és constant, de manera que no és una relació de proporcionalitat directa.

Ara comprovem el producte xy :

$$2 \cdot 18 = 36, \quad 3 \cdot 12 = 36, \quad 6 \cdot 6 = 36.$$

Com que el producte és constant, les dues magnituds són inversament proporcionals.

Per tant,

$$xy = 36.$$

Quan $x = 9$, tenim

$$9y = 36, \quad y = 4.$$

El valor que falta és 4.

2.6 Aplicacions a problemes de la vida real

Els nombres racionals i les relacions de proporcionalitat apareixen en moltes situacions quotidianes: consum, preus, percentatges, repartiments, mescles, escales i temps de treball. En aquests problemes, l'enunciat no sempre indica si la relació és directa o inversa. Per això, abans de calcular, cal identificar les magnituds que intervenen i raonar com varia una quan varia l'altra.

Exercici 2.34 (Recepta per a més racions)

Una recepta utilitza 250 g de farina per preparar 4 racions. Quanta farina caldrà per preparar 10 racions, mantenint la mateixa recepta?

Solució

Primer identifiquem les magnituds: nombre de racions i quantitat de farina. Si preparem més racions mantenint la mateixa recepta, cal més farina en la mateixa proporció. Per tant, són magnituds directament proporcionals.

Plantegem la proporció:

$$\frac{250}{4} = \frac{x}{10}.$$

Pel producte dels mitjans i dels extrems,

$$4x = 2500, \quad x = 625.$$

Calen 625 g de farina.

Exercici 2.35 (Mateixa feina amb més persones)

Tres treballadors poden acabar una feina en 8 hores. Quant temps necessitaran 6 treballadors per fer la mateixa feina, si tots treballen al mateix ritme?

Solució

Les magnituds són el nombre de treballadors i el temps necessari.

Com que la feina total és la mateixa, si hi treballen més persones, el temps disminueix. Per tant, les magnituds són inversament proporcionals.

En una relació inversa, el producte es manté constant:

$$3 \cdot 8 = 6 \cdot x.$$

Així,

$$24 = 6x, \quad x = 4.$$

Per tant, 6 treballadors necessitaran 4 hores.

Exercici 2.36 (Producció amb dues magnituds variables)

Cinc màquines produeixen 480 peces treballant 4 dies a raó de 6 hores diàries. Quantes peces produiran 8 màquines treballant 5 dies a raó de 7 hores diàries, si totes les màquines tenen el mateix rendiment?

Solució

La producció depèn de tres magnituds: nombre de màquines, nombre de dies i hores de treball per dia.

Si augmenta el nombre de màquines, augmenta la producció. Si augmenta el nombre de dies, també augmenta la producció. I si augmenten les hores diàries, també augmenta la producció. Per tant, la producció és directament proporcional a cadascuna d'aquestes magnituds.

Passem de 5 màquines a 8 màquines: el factor és

$$\frac{8}{5}.$$

Passem de 4 dies a 5 dies: el factor és

$$\frac{5}{4}.$$

Passem de 6 hores diàries a 7 hores diàries: el factor és

$$\frac{7}{6}.$$

Per tant,

$$x = 480 \cdot \frac{8}{5} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6}.$$

Simplificant,

$$x = 1120.$$

Així, produiran 1120 peces.

Exercici 2.37 (Percentatges)

Una jaqueta costa 80 euros i té un descompte del 15%. Quin és el preu final?

Solució

Calculem primer el descompte:

$$15\% \text{ de } 80 = \frac{15}{100} \cdot 80 = 12.$$

El descompte és de 12 euros. Per tant, el preu final és

$$80 - 12 = 68.$$

La jaqueta costa finalment 68 euros.

Exercici 2.38 (Increment percentual)

El preu d'un producte era de 50 euros i ha augmentat un 8%. Quin és el nou preu?

Solució

Calculem l'increment:

$$8\% \text{ de } 50 = \frac{8}{100} \cdot 50 = 4.$$

El preu augmenta 4 euros. Per tant, el nou preu és

$$50 + 4 = 54.$$

El nou preu és 54 euros.

Exercici 2.39 (Comparació de preus)

En un supermercat, un paquet de 750 g d'arròs costa 2,85 euros, i un paquet d'1,2 kg costa 4,20 euros. Quin paquet té millor preu per quilogram?

Solució

Per poder comparar els dos paquets, hem de calcular el preu d'una mateixa quantitat, per exemple el preu per quilogram.

El primer paquet té 750 g, és a dir,

$$750 \text{ g} = 0,75 \text{ kg}.$$

Per tant, el seu preu per quilogram és

$$\frac{2,85}{0,75} = 3,80.$$

Així, el primer paquet costa 3,80 euros per quilogram.

Per al segon paquet, tenim

$$\frac{4,20}{1,2} = 3,50.$$

Així, el segon paquet costa 3,50 euros per quilogram.

Com que

$$3,50 < 3,80,$$

el paquet d'1,2 kg té millor preu per quilogram.

Exercici 2.40 (Preparació d'una mescla)

Un producte concentrat s'ha de barrejar amb aigua en la raó

$$1 : 4,$$

és a dir, una part de producte concentrat per cada quatre parts d'aigua. Quina quantitat de producte concentrat i quina quantitat d'aigua calen per preparar 2,5 litres de mescla?

Solució

La raó 1 : 4 indica que, de cada 5 parts de mescla, 1 part és producte concentrat i 4 parts són aigua.

Per tant, la quantitat de producte concentrat és

$$\frac{1}{5} \cdot 2,5 = 0,5.$$

La quantitat d'aigua és

$$\frac{4}{5} \cdot 2,5 = 2.$$

Així, calen 0,5 litres de producte concentrat i 2 litres d'aigua.

Exercici 2.41 (Velocitat i temps)

Un cotxe fa un trajecte a una velocitat constant de 90 km/h i triga 2 hores. Quant temps trigaria a fer el mateix trajecte a 120 km/h, si manté aquesta nova velocitat constant?

Solució

Les magnituds són la velocitat i el temps. Com que el trajecte és el mateix, si augmenta la velocitat, disminueix el temps. Per tant, la relació és inversa.

Primer calculem la distància del trajecte:

$$90 \cdot 2 = 180.$$

Per tant, el trajecte fa 180 km.

Si la velocitat és de 120 km/h, el temps necessari és

$$\frac{180}{120} = \frac{3}{2} = 1,5.$$

Així, trigaria 1,5 hores, és a dir, 1 hora i 30 minuts.

Exercici 2.42 (Repartiment segons aportacions)

Tres persones han participat en un projecte durant 2, 3 i 5 hores, respectivament. Es vol repartir una gratificació total de 600 euros tenint en compte el temps de participació de cadascuna. Quina quantitat ha de rebre cada persona?

Solució

Cal interpretar el criteri de repartiment. Com que es vol tenir en compte el temps de participació, qui ha dedicat més hores ha de rebre una part més gran.

Per tant, el repartiment ha de ser proporcional a les hores dedicades. Si les parts són proporcionals a 2, 3 i 5, les podem escriure com

$$2k, \quad 3k, \quad 5k.$$

Com que la suma total és 600, tenim

$$2k + 3k + 5k = 600.$$

Per tant,

$$10k = 600, \quad k = 60.$$

Les tres parts són

$$2k = 120, \quad 3k = 180, \quad 5k = 300.$$

Per tant, el repartiment és

$$120 \text{ euros}, \quad 180 \text{ euros}, \quad 300 \text{ euros}.$$

Exercici 2.43 (Repartiment segons rapidesa)

Tres equips han fet la mateixa tasca en 2, 3 i 6 hores, respectivament. Es vol repartir una prima total de 780 euros segons la rapidesa amb què han acabat la tasca. Quina quantitat ha de rebre cada equip?

Solució

Aquí cal pensar el criteri de repartiment. Tots els equips han fet la mateixa tasca, però no han trigat el mateix temps. Ser més ràpid vol dir trigar menys temps. Per tant, la rapidesa és proporcional a l'invers del temps.

Així, el repartiment s'ha de fer proporcionalment a

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{6}.$$

La suma d'aquests inversos és

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = 1.$$

Per tant, les parts són

$$x = \frac{1}{2} \cdot 780 = 390,$$

$$y = \frac{1}{3} \cdot 780 = 260,$$

$$z = \frac{1}{6} \cdot 780 = 130.$$

Així, el repartiment és

$$390 \text{ euros}, \quad 260 \text{ euros}, \quad 130 \text{ euros}.$$

2.7 Proporcionalitat geomètrica i funcions de proporcionalitat

Exercici 2.44 (Escala)

En un plànol a escala 1 : 200, una habitació fa 4 cm de llarg. Quina és la longitud real de l'habitació?

Solució

L'escala 1 : 200 vol dir que

$$1 \text{ cm en el plànol} = 200 \text{ cm en la realitat.}$$

Per tant,

$$4 \text{ cm en el plànol} = 4 \cdot 200 = 800 \text{ cm en la realitat.}$$

Com que

$$800 \text{ cm} = 8 \text{ m,}$$

la longitud real de l'habitació és 8 m.

Exercici 2.45 (Proporcionalitat geomètrica)

Dos triangles semblants tenen costats corresponents de longituds 6 cm i 9 cm. Si un altre costat del primer triangle fa 10 cm, quant fa el costat corresponent del segon triangle?

Solució

Com que els triangles són semblants, els costats corresponents són proporcionals. El factor d'escala del primer triangle al segon és

$$k = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}.$$

Per tant, el costat corresponent al costat de 10 cm mesura

$$10 \cdot \frac{3}{2} = 15.$$

Així, el costat corresponent del segon triangle fa 15 cm.

Exercici 2.46 (Teorema de Tales)

Dues rectes secants són tallades per rectes paral·leles. En una de les secants es determinen dos segments de 4 cm i 6 cm. En l'altra secant, el segment corresponent al de 4 cm fa 10 cm. Quant fa el segment corresponent al de 6 cm?

Solució

Pel teorema de Tales, els segments corresponents són proporcionals. Si anomenem x el segment desconegut, tenim

$$\frac{4}{6} = \frac{10}{x}.$$

Pel producte dels mitjans i dels extrems,

$$4x = 60.$$

Per tant,

$$x = 15.$$

El segment desconegut fa 15 cm.

Exercici 2.47 (Funció de proporcionalitat directa)

El preu d'un quilogram de fruita és de 2,40 euros. Escriviu la funció que dona el preu total y en funció dels quilograms comprats x , i calculeu el preu de 3,5 kg.

Solució

El preu total és directament proporcional al nombre de quilograms comprats. La constant de proporcionalitat és

$$k = 2,40.$$

Per tant, la funció és

$$y = 2,40x.$$

Si comprem 3,5 kg, aleshores

$$y = 2,40 \cdot 3,5 = 8,40.$$

El preu de 3,5 kg és 8,40 euros.

Exercici 2.48 (Taula de valors d'una funció de proporcionalitat directa)

Considereu la funció

$$f(x) = 2x.$$

Calculeu $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$ i $f(2)$, i indiqueu els punts corresponents.

Solució

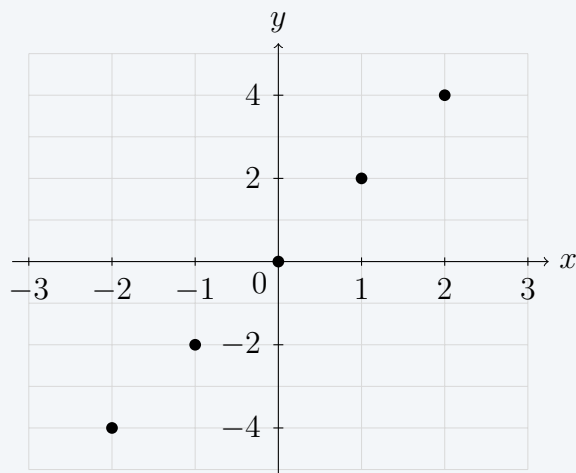
Calculem els valors demanats:

x	-2	-1	0	1	2
$f(x) = 2x$	-4	-2	0	2	4

Els punts corresponents són

$$(-2, -4), \quad (-1, -2), \quad (0, 0), \quad (1, 2), \quad (2, 4).$$

Representem aquests punts en el pla cartesià:



Punts de la funció de proporcionalitat directa $f(x) = 2x$.

Aquests punts estan alineats. Si es considerés la funció sobre $\mathbb{R}$, la gràfica seria una recta que passa per l'origen.

Exercici 2.49 (Funció de proporcionalitat inversa)

Una feina requereix 48 hores de treball total. Si hi treballen x persones al mateix ritme, el temps necessari és y . Escriviu la funció que relaciona x i y , i calculeu el temps necessari si hi treballen 6 persones.

Solució

Com que el nombre de persones i el temps són inversament proporcionals, el producte es manté constant:

$$xy = 48.$$

Per tant,

$$y = \frac{48}{x}.$$

Si hi treballen 6 persones, aleshores

$$y = \frac{48}{6} = 8.$$

Per tant, 6 persones necessitaran 8 hores.

Exercici 2.50 (Taula de valors d'una funció de proporcionalitat inversa)

Considereu la funció

$$f(x) = \frac{6}{x}.$$

Calculeu-ne alguns valors racionals i indiqueu els punts corresponents.

Solució

La funció no està definida en $x = 0$. Calculem alguns valors:

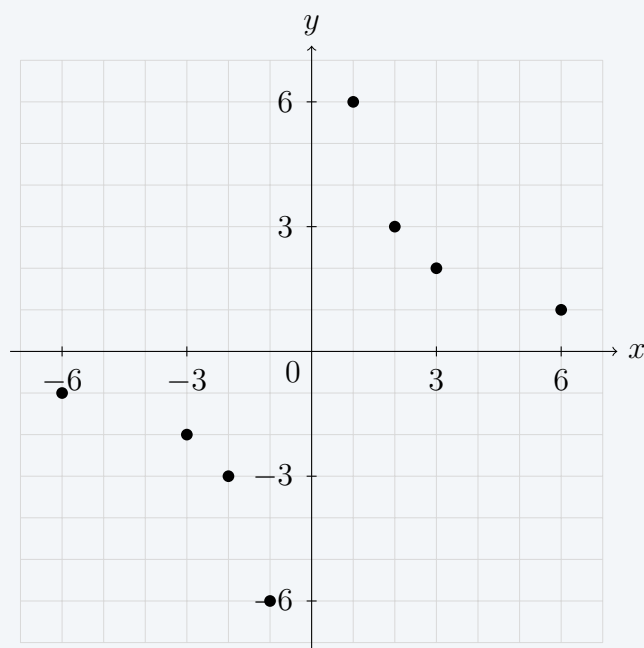
x	-6	-3	-2	-1	1	2	3	6
$f(x) = \frac{6}{x}$	-1	-2	-3	-6	6	3	2	1

Els punts corresponents són

$$(-6, -1), \quad (-3, -2), \quad (-2, -3), \quad (-1, -6),$$

$$(1, 6), \quad (2, 3), \quad (3, 2), \quad (6, 1).$$

Representem aquests punts en el pla cartesià:



Punts de la funció de proporcionalitat inversa $f(x) = \frac{6}{x}$.

Aquests punts no estan alineats. Si es considerés la funció sobre $\mathbb{R}$, la gràfica seria una hipèrbola.

3 Exercicis proposats

3.1 Construcció i representació dels nombres racionals

Exercici 3.1 (Fraccions equivalents)

Decideix quines de les fraccions següents representen el mateix nombre racional:

$$\frac{8}{12}, \quad \frac{10}{15}, \quad \frac{-4}{-6}, \quad \frac{14}{18}.$$

Indicació: Recorda que dues fraccions a/b i c/d , amb $b, d \neq 0$, representen el mateix nombre racional si i només si $ad = bc$. També pots reduir totes les fraccions a forma irreductible.

Exercici 3.2 (Classe d'equivalència)

Escriu cinc representants diferents del nombre racional representat per

$$\frac{5}{-8}.$$

Indicació: Primer escriu la fracció amb denominador positiu. Després multiplica numerador i denominador pel mateix enter no nul.

Exercici 3.3 (Els enters com a racionals)

Escriu els nombres enters següents com a nombres racionals i dona tres representants fraccionaris diferents de cadascun:

$$-4, \quad 0, \quad 7.$$

Indicació: Recorda que un enter n s'identifica amb el racional $\left[\frac{n}{1}\right]$. Multiplica numerador i denominador pel mateix enter no nul per obtenir representants diferents.

Exercici 3.4 (Fracció irreductible)

Redueix a forma irreductible les fraccions següents:

$$\frac{72}{120}, \quad \frac{-135}{180}, \quad \frac{154}{-210}.$$

Indicació: Calcula el màxim comú divisor del numerador i del denominador en cada cas. Escriu sempre el resultat final amb denominador positiu.

Exercici 3.5 (Signe d'un racional)

Escriu les fraccions següents en forma irreductible i amb denominador positiu:

$$\frac{-18}{-42}, \quad \frac{25}{-35}, \quad \frac{-44}{66}.$$

Indicació: Recorda que dos signes negatius es cancel·len. Si només hi ha un signe negatiu, el nombre racional és negatiu.

Exercici 3.6 (Representació amb el teorema de Tales)

Construeix sobre la recta numèrica, mitjançant el teorema de Tales, els punts corresponents a

$$\frac{3}{5} \quad \text{i} \quad -\frac{4}{7}.$$

Indicació: Per situar $\frac{3}{5}$, divideix el segment $[0, 1]$ en cinc parts iguals amb una semirecta auxiliar. Per situar $-\frac{4}{7}$, divideix el segment $[0, -1]$ en set parts iguals.

Exercici 3.7 (Racionals majors que la unitat)

Construeix sobre la recta numèrica, amb el teorema de Tales, els punts corresponents a

$$\frac{7}{3} \quad \text{i} \quad -\frac{9}{4}.$$

Indicació: Usa la divisió euclidiana:

$$7 = 3 \cdot 2 + 1, \quad 9 = 4 \cdot 2 + 1.$$

$$\text{Així, } \frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3} \text{ i } -\frac{9}{4} = -2 - \frac{1}{4}.$$

3.2 Operacions amb nombres racionals

Exercici 3.8 (Addició i subtracció)

Calcula i simplifica:

$$\frac{5}{6} - \frac{7}{9} + \frac{1}{12}.$$

Indicació: Busca el mínim comú múltiple dels denominadors 6, 9 i 12, expressa totes les fraccions amb aquest denominador i opera els numeradors.

Exercici 3.9 (Multiplicació de fraccions)

Calcula i simplifica:

$$\frac{-14}{15} \cdot \frac{25}{21}.$$

Indicació: Abans de multiplicar, mira si pots simplificar factors del numerador amb factors del denominador.

Exercici 3.10 (Divisió de racionals)

Calcula:

$$\frac{-9}{14} : \frac{27}{35}.$$

Indicació: Dividir per un racional no nul és multiplicar pel seu invers. Transforma la divisió en una multiplicació i simplifica.

Exercici 3.11 (Oposat i invers)

Troba l'oposat i l'invers dels nombres racionals següents:

$$-\frac{6}{11}, \quad \frac{13}{-7}, \quad \frac{9}{4}.$$

Indicació: L'oposat canvia el signe del nombre. L'invers d'una fracció no nul · la s'obté intercanviant numerador i denominador.

Exercici 3.12 (Operació amb inversos)

Calcula:

$$\left(\frac{5}{8}\right)^{-1} + \left(-\frac{3}{4}\right)^{-1}.$$

Indicació: Calcula primer cada invers. Després fes l'addició amb denominador comú.

3.3 Ordre, densitat i valor absolut

Exercici 3.13 (Ordre en $\mathbb{Q}$)

Ordena de menor a major:

$$-\frac{2}{3}, \quad -\frac{5}{8}, \quad \frac{3}{10}, \quad \frac{4}{7}.$$

Indicació: Separa primer els nombres negatius dels positius. Per comparar fraccions positives, pots usar productes creuats o expressar-les amb denominador comú.

Exercici 3.14 (Comparació de racionals)

Determina si són certes o falses les desigualtats següents:

$$\frac{7}{12} < \frac{5}{8}, \quad -\frac{4}{9} < -\frac{3}{7}, \quad \frac{-6}{15} > \frac{-3}{5}.$$

Indicació: En les fraccions positives pots comparar en creu. En les fraccions negatives, recorda que el nombre amb més valor absolut és el més petit.

Exercici 3.15 (Densitat dels racionals)

Troba quatre nombres racionals diferents entre

$$\frac{2}{5} \quad \text{i} \quad \frac{3}{5}.$$

Indicació: Escribeu les dues fraccions amb un denominador comú més gran. Per exemple, pots multiplicar els denominadors per 10 o per 20 per obtenir més numeradors intermedis.

Exercici 3.16 (Mitjana de dos racionals)

Comprova que

$$\frac{\frac{1}{4} + \frac{2}{3}}{2}$$

és un nombre racional situat entre $\frac{1}{4}$ i $\frac{2}{3}$.

Indicació: Calcula primer l'addició $\frac{1}{4} + \frac{2}{3}$, després divideix per 2. Finalment compara el resultat amb els dos nombres inicials.

Exercici 3.17 (Valor absolut)

Calcula:

$$\left| -\frac{7}{5} \right|, \quad \left| \frac{3}{8} - \frac{5}{6} \right|, \quad \left| -\frac{4}{9} + \frac{1}{3} \right|.$$

Indicació: Calcula primer el nombre que hi ha dins del valor absolut. Després escriu-ne la distància a 0.

3.4 Expressions decimals, potències i arrels

Exercici 3.18 (Decimals finits)

Decideix quines de les fraccions següents tenen expressió decimal finita:

$$\frac{7}{20}, \quad \frac{11}{24}, \quad \frac{9}{40}, \quad \frac{5}{18}.$$

Indicació: Redueix cada fracció a forma irreductible. Una fracció irreductible té expressió decimal finita si el seu denominador només té factors primers 2 i 5.

Exercici 3.19 (Fracció generatriu d'un decimal finit)

Calcula la fracció generatriu de

$$4,375.$$

Indicació: Escribe el decimal com una fracció amb denominador una potència de 10. Després simplifica.

Exercici 3.20 (Decimal periòdic pur)

Calcula la fracció generatriu de

$$0,\overline{27}.$$

Indicació: Anomena $x = 0,\overline{27}$. Multiplica per 100 i resta l'equació inicial per eliminar el període.

Exercici 3.21 (Decimal periòdic mixt)

Calcula la fracció generatriu de

$$3,4\overline{18}.$$

Indicació: Anomena $x = 3,4\overline{18}$. Com que hi ha una xifra no periòdica i dues xifres periòdiques, compara $10x$ i $1000x$.

Exercici 3.22 (Potències)

Calcula:

$$\left(-\frac{3}{5}\right)^2, \quad \left(-\frac{3}{5}\right)^3, \quad \left(\frac{2}{7}\right)^4.$$

Indicació: Eleva numerador i denominador a l'exponent corresponent. Recorda que una potència d'exponent parell d'un nombre negatiu és positiva, mentre que una potència d'exponent senar és negativa.

Exercici 3.23 (Propietats de les potències)

Simplifica, sempre que sigui possible:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2, \quad \frac{\left(-\frac{5}{7}\right)^6}{\left(-\frac{5}{7}\right)^2}, \quad \left[\left(\frac{3}{4}\right)^2\right]^3.$$

Indicació: Usa les propietats de les potències de la mateixa base i la potència d'una potència.

Exercici 3.24 (Arrels)

Decideix quins dels nombres següents són racionals:

$$\sqrt{\frac{25}{36}}, \quad \sqrt{\frac{3}{16}}, \quad \sqrt{\frac{121}{49}}, \quad \sqrt[3]{-\frac{64}{125}}.$$

Indicació: Una arrel quadrada d'una fracció és racional quan tant el numerador com el denominador són quadrats perfectes, després d'haver escrit la fracció en forma irreductible. En les arrels

cúbiques, fixa't si numerador i denominador són cubs perfectes.

3.5 Operacions combinades amb fraccions, potències i arrels

Exercici 3.25 (Prioritat de les operacions)

Calcula i simplifica:

$$\frac{3}{5} - \frac{7}{10} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{4} : \frac{5}{8}.$$

Indicació: Primer fes la multiplicació i la divisió. Després resol les addicions i subtraccions.

Exercici 3.26 (Parèntesis i divisió)

Calcula i simplifica:

$$\left(\frac{5}{6} - \frac{1}{3}\right) : \frac{2}{9} - \frac{3}{4}.$$

Indicació: Primer resol el parèntesi. Després transforma la divisió en una multiplicació per l'invers.

Exercici 3.27 (Potències i parèntesis)

Calcula:

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{5}{6} \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{10}\right).$$

Indicació: Primer calcula la potència i el parèntesi. Després fes la multiplicació i, finalment, la subtracció.

Exercici 3.28 (Potències, arrels i signes)

Calcula:

$$\sqrt{\frac{25}{36}} + \sqrt[3]{-\frac{8}{27}} - \left(-\frac{1}{2}\right)^3.$$

Indicació: Calcula cada terme per separat. Recorda que l'arrel quadrada principal és no negativa i que les arrels cúbiques poden ser negatives.

Exercici 3.29 (Operació combinada completa)

Calcula i simplifica:

$$\left(\frac{2}{3} - \frac{5}{4}\right)^2 + \sqrt{\frac{49}{81}} - \frac{3}{5} : \left(-\frac{9}{10}\right).$$

Indicació: Resol primer el parèntesi, la potència i l'arrel. Després transforma la divisió en una multiplicació per l'invers.

3.6 Raons, proporcions i proporcionalitat aritmètica

Exercici 3.30 (Raons)

En una classe hi ha 18 alumnes que fan esport regularment i 12 alumnes que no en fan. Calcula:

- a) la raó entre alumnes que fan esport i alumnes que no en fan;
- b) la raó entre alumnes que fan esport i el total d'alumnes;
- c) la raó entre alumnes que no fan esport i el total d'alumnes.

Indicació: Una raó és un quocient entre dues quantitats. Abans de calcular les raons amb el total, calcula quants alumnes hi ha en total.

Exercici 3.31 (Proporcions)

Determina si les igualtats següents són proporcions:

$$\frac{6}{10} = \frac{9}{15}, \quad \frac{8}{14} = \frac{12}{21}, \quad \frac{5}{9} = \frac{20}{36}.$$

Indicació: Comprova si el producte dels mitjans és igual al producte dels extrems.

Exercici 3.32 (Propietats de les proporcions)

A partir de la proporció

$$\frac{12}{18} = \frac{20}{30},$$

escriu tres proporcions equivalents usant propietats de les proporcions.

Indicació: Pots usar la inversió dels termes, l'alternança dels termes o la propietat de sumar els termes de cada raó.

Exercici 3.33 (Tercera proporcional)

Troba la tercera proporcional de 4 i 10.

Indicació: Busca x tal que

$$\frac{4}{10} = \frac{10}{x}.$$

Exercici 3.34 (Quarta proporcional)

Troba la quarta proporcional de 6, 15 i 14.

Indicació: Busca x tal que

$$\frac{6}{15} = \frac{14}{x}.$$

Exercici 3.35 (Mitjana proporcional)

Determina si existeix en $\mathbb{Q}$ la mitjana proporcional positiva de les parelles següents:

$$4 \text{ i } 25, \quad 2 \text{ i } 8, \quad 3 \text{ i } 12.$$

Indicació: Si x és la mitjana proporcional positiva de a i b , aleshores $x^2 = ab$. Mira si ab és un quadrat d'un nombre racional.

Exercici 3.36 (Relació entre magnituds)

Observa la taula següent:

x	2	4	6	8
y	5	10	15	20

Determina si les magnituds són directament proporcionals, inversament proporcionals o cap de les dues coses.

Indicació: No miris només si les dues magnituds augmenten. Comprova si el quocient y/x és constant o si el producte xy és constant.

Exercici 3.37 (Relació entre magnituds)

Observa la taula següent:

x	3	4	6	12
y	16	12	8	4

Determina si les magnituds són directament proporcionals, inversament proporcionals o cap de les dues coses.

Indicació: Calcula els productes xy i els quocients y/x . Decideix quina relació es manté constant.

Exercici 3.38 (Relació entre magnituds)

En una taula de valors es té:

x	1	2	3	4
y	3	7	11	15

Determina si hi ha proporcionalitat directa, proporcionalitat inversa o cap de les dues.

Indicació: Que una magnitud augmenti quan l'altra augmenta no garanteix que hi hagi proporcionalitat directa. Comprova si y/x és constant.

3.7 Aplicacions a problemes de la vida real

Exercici 3.39 (Recepta)

Una recepta per a 4 persones necessita 300 g d'arròs i 120 g de verdures. Vols preparar-la per a 10 persones.

- a) Quina relació hi ha entre el nombre de persones i la quantitat d'arròs?
- b) Quants grams d'arròs calen?
- c) Quants grams de verdures calen?

Indicació: Primer decideix si, en augmentar el nombre de persones, les quantitats d'ingredients augmenten en la mateixa proporció.

Exercici 3.40 (Feina compartida)

Tres persones, treballant al mateix ritme, acaben una feina en 8 hores. Quantes hores trigaran sis persones a fer la mateixa feina, si totes treballen al mateix ritme?

Indicació: Abans de calcular, decideix si en augmentar el nombre de persones el temps augmenta o disminueix. Mira quin producte es manté constant.

Exercici 3.41 (Producció)

Una màquina fabrica 450 peces en 3 hores. Una altra màquina igual treballa durant 7 hores.

- a) Quantes peces fabricarà?
- b) Quantes hores caldrien per fabricar 1200 peces?

Indicació: Si el ritme de producció es manté constant, el nombre de peces i el temps són magnituds directament proporcionals.

Exercici 3.42 (Comparació de preus)

En una botiga, un paquet de 6 iogurts costa 2,70 euros. En una altra botiga, un paquet de 10 iogurts costa 4,30 euros. Quin paquet és més econòmic per iogurt?

Indicació: Calcula el preu d'un iogurt en cada cas. Estàs comparant dues raons.

Exercici 3.43 (Mescla)

Per preparar una beguda isotònica es barregen 3 parts d'aigua amb 1 part de concentrat. Si vols preparar 2 litres de beguda, quina quantitat d'aigua i de concentrat necessites?

Indicació: En total hi ha 4 parts. Expressa quina fracció del total correspon a l'aigua i quina fracció correspon al concentrat.

Exercici 3.44 (Percentatge de descompte)

Un llibre costa 32 euros i té un descompte del 25%. Quin és el preu final?

Indicació: Calcula primer el 25% de 32. Després resta aquest descompte al preu inicial.

Exercici 3.45 (Percentatge d'augment)

El preu d'un servei era de 80 euros i augmenta un 12%. Quin és el nou preu?

Indicació: Calcula el 12% de 80 i suma aquest increment al preu inicial.

Exercici 3.46 (Velocitat i temps)

Un trajecte de 180 km es fa a una velocitat mitjana constant. Si es circula a 90 km/h, es triga 2 hores. Quant es trigarà si es circula a 120 km/h?

Indicació: La distància és fixa. Decideix si la velocitat i el temps són directament o inversament proporcionals.

Exercici 3.47 (Repartiment segons aportacions)

Tres persones han invertit 200, 300 i 500 euros en un projecte. Al final obtenen un benefici de 1200 euros, que es reparteix segons l'aportació inicial de cadascú. Quant rep cada persona?

Indicació: El benefici s'ha de repartir en la mateixa proporció que les aportacions. Calcula primer la suma total invertida.

Exercici 3.48 (Repartiment segons eficiència)

Tres equips han de repartir-se una gratificació de 900 euros. L'equip A ha trigat 6 hores a fer una mateixa tasca, l'equip B 4 hores i l'equip C 3 hores. La gratificació es reparteix segons la rapidesa demostrada. Quant correspon a cada equip?

Indicació: Si es premia la rapidesa, qui triga menys ha de rebre més. Reparteix de manera directament proporcional als inversos dels temps.

Exercici 3.49 (Problema amb decisió prèvia)

En una excursió, el cost total d'un autobús és de 540 euros. Si hi van 30 alumnes, cada alumne paga 18 euros. Quant pagarà cada alumne si finalment hi van 45 alumnes?

Indicació: El cost total és fix. Decideix què passa amb el preu per alumne quan augmenta el nombre d'alumnes.

3.8 Proporcionalitat geomètrica i funcions de proporcionalitat

Exercici 3.50 (Escala)

En un mapa a escala 1 : 50000, la distància entre dos pobles és de 7,5 cm. Quina és la distància real en quilòmetres?

Indicació: L'escala 1 : 50000 vol dir que 1 cm en el mapa representa 50000 cm en la realitat. Converteix després els centímetres reals en metres i quilòmetres.

Exercici 3.51 (Maquetes)

Una maqueta està feta a escala 1 : 75. Si una paret real fa 9 m, quina longitud tindrà en la maqueta?

Indicació: Expressa primer 9 m en centímetres. Després divideix per 75, perquè la maqueta és 75 vegades més petita que la realitat.

Exercici 3.52 (Figures semblants)

Dos triangles semblants tenen costats corresponents de longituds 8 cm i 12 cm. Si un altre costat del primer triangle fa 14 cm, quant fa el costat corresponent del segon triangle?

Indicació: Calcula primer el factor d'escala

$$k = \frac{12}{8}.$$

Després multiplica el costat de 14 cm per aquest factor.

Exercici 3.53 (Teorema de Tales)

Dues rectes secants són tallades per rectes paral·leles. En una secant apareixen dos segments de 5 cm i 8 cm. En l'altra secant, el segment corresponent al de 5 cm fa 15 cm. Quant fa el segment corresponent al de 8 cm?

Indicació: Aplica el teorema de Tales. Si x és el segment desconegut, pots plantejar una proporció del tipus

$$\frac{5}{8} = \frac{15}{x}.$$

Exercici 3.54 (Funció associada a una relació de proporcionalitat)

Un quilogram de farina costa 1,60 euros.

- Escriu la funció que dona el preu total y en funció dels quilograms comprats x .
- Calcula el preu de 2,5 kg.
- Completa una taula per a $x = 0, 1, 2, 3$ i 4 .

Indicació: El preu total és proporcional a la quantitat comprada. La funció és de la forma $y = kx$.

Exercici 3.55 (Representació de punts d'una funció directa)

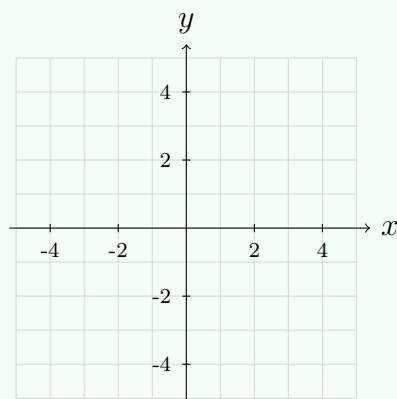
Considera la funció

$$f(x) = \frac{3}{2}x.$$

Calcula $f(x)$ per a

$$x = -2, \quad x = -1, \quad x = 0, \quad x = 1, \quad x = 2,$$

i representa només els punts obtinguts, sense traçar una línia contínua.



Indicació: Substitueix cada valor de x en la funció. Els punts obtinguts tenen coordenades $(x, f(x))$.

Exercici 3.56 (Funció associada a una relació inversa)

Una feina requereix 72 hores de treball total. Si hi treballen x persones al mateix ritme, sigui y el temps necessari.

- Escriu la funció que dona y en funció de x .
- Calcula el temps necessari si hi treballen 8 persones.
- Explica per què $x = 0$ no és un valor admissible.

Indicació: El producte entre el nombre de persones i el temps total es manté constant.

Exercici 3.57 (Representació de punts d'una funció inversa)

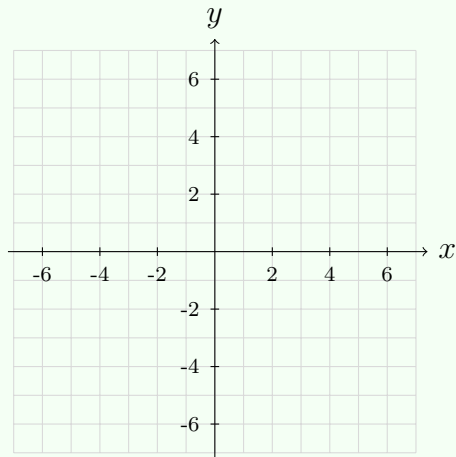
Considera la funció

$$f(x) = \frac{6}{x}.$$

Calcula $f(x)$ per a

$$x = -6, \quad x = -3, \quad x = -2, \quad x = -1, \quad x = 1, \quad x = 2, \quad x = 3, \quad x = 6,$$

i representa només els punts obtinguts, sense traçar una corba contínua.



Indicació: Substitueix cada valor de x . Recorda que $x = 0$ no forma part del domini d'aquesta funció.

4 Tests interactius

4.1 Test 1: Fonaments dels nombres racionals

Instruccions. Marca una sola resposta per pregunta. En acabar, prem el botó **Corregir**. El camp **Nota** mostrarà el resultat.

Corregir Netejar **Nota:**

1. En la construcció formal de $\mathbb{Q}$, abans d'identificar fraccions equivalents, trebalem amb parelles:

- (a) $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, amb qualsevol b .
- (b) $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$.
- (c) $(a, b) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.
- (d) Només amb parelles d'enters positius.

Correcció:

2. Dues fraccions a/b i c/d , amb $b, d \neq 0$, representen el mateix nombre racional si:

- (a) $ad = bc$.
- (b) $a + b = c + d$.
- (c) $ab = cd$.
- (d) $a = c$ i $b = d$.

Correcció:

3. L'enter -5 , vist com a nombre racional, correspon a:

- (a) $\left[\frac{1}{-5} \right]$.
- (b) $\left[\frac{5}{-5} \right]$.
- (c) $\left[\frac{-5}{1} \right]$.

(d) $\begin{bmatrix} 0 \\ -5 \end{bmatrix}$.

Correcció:

4. La fracció irreductible equivalent a $-\frac{84}{126}$ és:

(a) $-\frac{14}{21}$.

(b) $\frac{2}{3}$.

(c) $-\frac{3}{2}$.

(d) $-\frac{2}{3}$.

Correcció:

5. Per situar $\frac{7}{3}$ a la recta numèrica, podem escriure:

(a) $\frac{7}{3} = 1 + \frac{1}{3}$.

(b) $\frac{7}{3} = 2 + \frac{1}{3}$.

(c) $\frac{7}{3} = 3 + \frac{1}{2}$.

(d) $\frac{7}{3} = 2 + \frac{2}{3}$.

Correcció:

6. Quin dels nombres següents és el més petit?

(a) $-\frac{3}{4}$.

(b) $\frac{2}{3}$.

(c) 0.

(d) $-\frac{5}{6}$.

Correcció:

7. La densitat de $\mathbb{Q}$ vol dir que:

(a) Entre dos nombres racionals diferents sempre hi ha un altre nombre racional.

(b) Entre dos nombres racionals diferents no hi pot haver cap altre racional.

(c) Tots els nombres racionals són enters.

(d) Tots els nombres racionals tenen expressió decimal finita.

Correcció:

8. Una fracció irreductible $\frac{a}{b}$, amb $b > 0$, té expressió decimal finita si:

- (a) b és parell.
- (b) a és múltiple de b .
- (c) Els únics factors primers de b són 2 i 5.
- (d) a i b són nombres primers.

Correcció:

9. El valor de $0,\overline{4}$ és:

- (a) $\frac{4}{10}$.
- (b) $\frac{4}{9}$.
- (c) $\frac{4}{99}$.
- (d) $\frac{40}{9}$.

Correcció:

10. El valor absolut de $-\frac{7}{5}$ és:

- (a) $-\frac{7}{5}$.
- (b) $-\frac{5}{7}$.
- (c) $\frac{7}{5}$.
- (d) $\frac{5}{7}$.

Correcció:

11. Quin és el menor nombre natural n tal que

$$n \cdot \frac{2}{3} > 10?$$

- (a) 12.
- (b) 14.
- (c) 15.
- (d) 16.

Correcció:

12. Si

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

amb $b, d \neq 0$, la propietat fonamental de les proporcions diu que:

- (a) $ab = cd$.

- (b) $bc = ad.$
- (c) $a + b = c + d.$
- (d) $a - c = b - d.$

Correcció:

4.2 Test 2: Operacions, potències, arrels i proporcions

Instruccions. Marca una sola resposta per pregunta. En acabar, prem el botó **Corregir**. El camp **Nota** mostrarà el resultat.

Corregir Netejar **Nota:**

1. El resultat de

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{6} - \frac{1}{4}$$

és:

- (a) $-\frac{5}{4}.$
- (b) $\frac{7}{4}.$
- (c) $\frac{5}{4}.$
- (d) $\frac{1}{4}.$

Correcció:

2. El resultat de

$$\left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{6}{5} + \frac{1}{2}$$

és:

- (a) $\frac{1}{5}.$
- (b) $\frac{3}{5}.$
- (c) $\frac{2}{5}.$
- (d) $\frac{5}{3}.$

Correcció:

3. El resultat de

$$\left(\frac{5}{6} - \frac{1}{3}\right) : \frac{2}{9} - \frac{3}{4}$$

és:

- (a) $\frac{3}{2}$.
- (b) $\frac{9}{4}$.
- (c) 1.
- (d) $\frac{7}{4}$.

Correcció:

4. El resultat de

$$\frac{3}{5} - \frac{7}{10} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{4} : \frac{5}{8}$$

és:

- (a) $\frac{1}{15}$.
- (b) $\frac{2}{5}$.
- (c) $\frac{7}{15}$.
- (d) $\frac{8}{15}$.

Correcció:

5. El resultat de

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{5}{6} \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{10}\right)$$

és:

- (a) $\frac{1}{12}$.
- (b) $-\frac{1}{36}$.
- (c) $\frac{1}{36}$.
- (d) $\frac{5}{36}$.

Correcció:

6. El resultat de

$$\sqrt{\frac{25}{36}} + \sqrt[3]{-\frac{8}{27}} - \left(-\frac{1}{2}\right)^3$$

és:

- (a) $-\frac{7}{24}$.
- (b) $\frac{7}{24}$.
- (c) $\frac{13}{24}$.
- (d) $\frac{1}{24}$.

Correcció:

7. Per a qualsevol $x \in \mathbb{Q}$, es compleix:

(a) $(x^2)^3 = x^6$.

(b) $(x^2)^3 = x^5$.

(c) $(x^2)^3 = x^8$.

(d) $(x^2)^3 = 6x$.

Correcció:

8. Quina igualtat és falsa en general?

(a) $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$.

(b) $(xy)^n = x^n y^n$.

(c) $(x^m)^n = x^{mn}$.

(d) $(x + y)^2 = x^2 + y^2$.

Correcció:

9. La fracció generatriu de $1,4\overline{6}$ és:

(a) $\frac{14}{9}$.

(b) $\frac{73}{50}$.

(c) $\frac{22}{15}$.

(d) $\frac{17}{12}$.

Correcció:

10. La tercera proporcional de 2 i 6 és:

(a) 18.

(b) 12.

(c) 9.

(d) 3.

Correcció:

11. La quarta proporcional de 3, 5 i 9 és:

(a) 9.

(b) 12.

(c) 13.

(d) 15.

Correcció:

12. La mitjana proporcional positiva de 4 i 9 és:

- (a) 5.
- (b) 6.
- (c) 7.
- (d) $\frac{9}{4}$.

Correcció:

4.3 Test 3: Proporcionalitat i aplicacions

Instruccions. Marca una sola resposta per pregunta. En acabar, prem el botó **Corregir**. El camp **Nota** mostrarà el resultat.

Corregir Netejar **Nota:**

1. Amb 3 litres de pintura es poden pintar 24 m^2 de paret. Amb 5 litres, mantenint el mateix rendiment, es podran pintar:

- (a) 30 m^2 .
- (b) 36 m^2 .
- (c) 40 m^2 .
- (d) 45 m^2 .

Correcció:

2. Quatre treballadors fan una feina en 15 dies. Sis treballadors, treballant al mateix ritme, trigaran:

- (a) 8 dies.
- (b) 10 dies.
- (c) 12 dies.
- (d) 22,5 dies.

Correcció:

3. Tres persones han dedicat 2, 3 i 4 hores, respectivament, a una mateixa activitat. Si es reparteixen 900 euros segons el temps dedicat, les parts són:

- (a) 300, 300, 300.

- (b) 150, 300, 450.
- (c) 400, 300, 200.
- (d) 200, 300, 400.

Correcció:

4. Tres màquines fan una mateixa tasca en 2, 3 i 6 hores. Es vol repartir una prima de 780 euros premiant més la màquina més ràpida. Les parts han de ser:
- (a) 390, 260, 130.
 - (b) 130, 260, 390.
 - (c) 260, 260, 260.
 - (d) 300, 260, 220.

Correcció:

5. En una botiga, 3 kg d'arròs costen 7,20 euros. En una altra botiga, 5 kg costen 11,50 euros. Quina opció és més barata per quilogram?
- (a) La primera botiga, perquè $7,20 < 11,50$.
 - (b) Les dues tenen el mateix preu per quilogram.
 - (c) La segona botiga.
 - (d) No es pot saber sense comprar la mateixa quantitat.

Correcció:

6. Una recepta necessita 250 g de farina per a 4 racions. Per a 10 racions calen:
- (a) 500 g.
 - (b) 625 g.
 - (c) 750 g.
 - (d) 1000 g.

Correcció:

7. Una beguda es prepara amb 2 parts de concentrat i 5 parts d'aigua. Per preparar 3,5 litres de beguda, calen:
- (a) 0,5 L de concentrat i 3 L d'aigua.
 - (b) 1,5 L de concentrat i 2 L d'aigua.
 - (c) 2 L de concentrat i 1,5 L d'aigua.
 - (d) 1 L de concentrat i 2,5 L d'aigua.

Correcció:

8. En un plànol a escala 1 : 200, una habitació fa 4 cm. La longitud real és:

- (a) 4 m.
- (b) 6 m.
- (c) 8 m.
- (d) 20 m.

Correcció:

9. Quin dels punts següents pertany a la funció $y = 2x$?

- (a) $(2, 5)$.
- (b) $\left(\frac{3}{2}, 3\right)$.
- (c) $(3, 5)$.
- (d) $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$.

Correcció:

10. Quin dels punts següents pertany a la funció $y = \frac{6}{x}$?

- (a) $(2, 2)$.
- (b) $(3, 3)$.
- (c) $(6, 6)$.
- (d) $\left(4, \frac{3}{2}\right)$.

Correcció:

11. Considerem la taula

x	2	3	6
y	12	8	4

La relació entre x i y és:

- (a) De proporcionalitat directa.
- (b) De proporcionalitat inversa.
- (c) Les dues coses alhora.
- (d) Cap relació de proporcionalitat.

Correcció:

12. Considerem la taula

x	1	2	3
y	3	5	7

La relació entre x i y és:

- (a) De proporcionalitat directa.
- (b) De proporcionalitat inversa.
- (c) Una relació de proporcionalitat directa amb constant 3.
- (d) Cap relació de proporcionalitat.

Correcció:

4.4 Test 4: Prova de síntesi

Instruccions. Marca una sola resposta per pregunta. En acabar, prem el botó **Corregir**. El camp **Nota** mostrarà el resultat.

Corregir Netejar **Nota:**

1. Siguin

$$\left[\frac{a}{b} \right] = \left[\frac{a'}{b'} \right]$$

i sigui $\left[\frac{c}{d} \right] \in \mathbb{Q}$. Quina igualtat expressa que la multiplicació de nombres racionals no depèn del representant triat?

- (a) $\left[\frac{ac}{bd} \right] = \left[\frac{a'c}{b'd} \right]$.
- (b) $\left[\frac{a+c}{b+d} \right] = \left[\frac{a'+c}{b'+d} \right]$.
- (c) $\left[\frac{a}{b} \right] = \left[\frac{a'}{d} \right]$.
- (d) La multiplicació no està ben definida en $\mathbb{Q}$.

Correcció:

2. Per situar el nombre racional

$$-\frac{11}{4}$$

a la recta numèrica mitjançant el teorema de Tales, quin procediment és correcte?

- (a) Escrivim $-\frac{11}{4} = -2 + \frac{3}{4}$ i dividim $[-2, -1]$ en quatre parts iguals.
- (b) Dividim directament el segment $[0, -1]$ en onze parts iguals.
- (c) Escrivim $-\frac{11}{4} = -3 + \frac{1}{4}$, dividim $[-3, -2]$ en quatre parts iguals i prenem el primer punt des de -3 cap a -2 .

- (d) Escrivim $-\frac{11}{4} = -4 + \frac{3}{4}$ i dividim $[-4, -3]$ en tres parts iguals.

Correcció:

3. Quin dels nombres següents està estrictament entre

$$\frac{5}{7} \quad \text{i} \quad \frac{3}{4}?$$

- (a) $\frac{29}{42}$.
 (b) $\frac{41}{56}$.
 (c) $\frac{7}{10}$.
 (d) $\frac{3}{5}$.

Correcció:

4. La fracció irreductible

$$\frac{17}{120}$$

té una expressió decimal:

- (a) Finita, perquè 120 és múltiple de 10.
 (b) Periòdica pura, perquè 120 no és potència de 10.
 (c) Entera, perquè 17 i 120 són primers entre si.
 (d) Periòdica mixta, perquè $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$.

Correcció:

5. El resultat de

$$\left(\frac{3}{4} - \frac{5}{6}\right) : \left(-\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{2}{5}\right)^2$$

és:

- (a) $\frac{29}{100}$.
 (b) $\frac{41}{100}$.
 (c) $\frac{1}{20}$.
 (d) $\frac{9}{100}$.

Correcció:

6. El resultat de

$$\sqrt{\frac{49}{81}} - \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \sqrt[3]{-\frac{8}{27}}$$

és:

- (a) $\frac{1}{3}$.
- (b) $-\frac{1}{3}$.
- (c) $-\frac{7}{9}$.
- (d) $\frac{1}{9}$.

Correcció:

7. Si x és la quarta proporcional de

$$\frac{3}{5}, \quad \frac{2}{3} \quad \text{i} \quad \frac{4}{9},$$

aleshores

$$\frac{\frac{3}{5}}{\frac{2}{3}} = \frac{\frac{4}{9}}{x}.$$

Quin valor té x ?

- (a) $\frac{8}{27}$.
- (b) $\frac{40}{81}$.
- (c) $\frac{6}{5}$.
- (d) $\frac{81}{40}$.

Correcció:

8. La mitjana proporcional positiva de

$$\frac{9}{4} \quad \text{i} \quad \frac{16}{9}$$

és:

- (a) $\frac{13}{6}$.
- (b) 4.
- (c) 2.
- (d) $\frac{1}{2}$.

Correcció:

9. Considerem la taula

x	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{2}$
y	12	8	4

La relació entre x i y és:

- (a) De proporcionalitat directa, perquè y disminueix quan x augmenta.
- (b) De proporcionalitat inversa, perquè el producte xy és constant.

- (c) De proporcionalitat directa, perquè el quocient $\frac{y}{x}$ és constant.
- (d) Cap relació de proporcionalitat.

Correcció:

10. Cinc treballadors, treballant 6 hores al dia, acaben una feina en 12 dies. Si hi treballen 8 treballadors, 5 hores al dia, quants dies trigaran a acabar la mateixa feina, suposant que tots treballen al mateix ritme?
- (a) 8 dies.
 - (b) 9 dies.
 - (c) 10 dies.
 - (d) 16 dies.

Correcció:

11. Tres màquines fan una mateixa tasca en 4, 5 i 10 hores, respectivament. Es vol repartir una prima de 660 euros premiant més la màquina més ràpida. Quin repartiment correspon a aquest criteri?
- (a) 220, 220, 220.
 - (b) 120, 240, 300.
 - (c) 300, 240, 120.
 - (d) 250, 220, 190.

Correcció:

12. Una funció de proporcionalitat inversa compleix

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = 4.$$

Quin és el valor de

$$f\left(\frac{9}{4}\right)?$$

- (a) $-\frac{8}{3}$.
- (b) $\frac{8}{3}$.
- (c) $-\frac{27}{8}$.
- (d) $-\frac{2}{3}$.

Correcció: