

Polinomis

Miquel Àngel Perelló

1 de juliol de 2026

Índex

Introducció	iv
1 Teoria	1
1.1 Anell dels polinomis	1
1.1.1 Valor numèric d'un polinomi	2
1.1.2 Suma de polinomis	2
1.1.3 Producte de polinomis	4
1.1.4 Anell dels polinomis	5
1.2 Potència d'un binomi. Fórmula de Newton	6
1.2.1 Càlcul dels coeficients en la fórmula de Newton	8
1.2.2 Càlcul d'un terme del desenvolupament d'un binomi	8
1.3 Divisió de polinomis	9
1.3.1 Algorisme de la divisió	9
1.3.2 Divisibilitat de polinomis	10
1.3.3 Màxim comú divisor de dos polinomis	11
1.3.4 Mínim comú múltiple de dos polinomis	13
1.4 Regla de Ruffini i teorema del residu	14
1.4.1 Regla de Ruffini	14
1.4.2 Teorema del residu	15
1.5 Arrels i descomposició factorial d'un polinomi	16
1.5.1 Arrels enteres d'un polinomi amb coeficients enters	18
1.5.2 Descomposició factorial d'un polinomi	18
1.6 Fraccions racionals	21
1.6.1 Operacions en el conjunt de les fraccions racionals	23
1.6.2 El cos de les fraccions racionals	25
1.7 Funcions polinòmiques	26
1.7.1 Funcions constants	26
1.7.2 Funcions afins	27
1.7.3 Funcions quadràtiques	28
1.7.4 Altres funcions polinòmiques senzilles	33

1.8	Funcions racionals	35
2	Pràctica	37
2.1	Definicions. Anell dels polinomis	37
2.2	Potència d'un binomi. Fórmula de Newton	48
2.3	Divisió de polinomis. Algorisme d'Euclides	53
2.4	Regla de Ruffini i teorema del residu	60
2.5	Arrels i descomposició factorial d'un polinomi	66
2.6	El cos de les fraccions racionals	76
2.7	Funcions polinòmiques	84
3	Exercicis proposats	95
3.1	Definició i operacions amb polinomis	95
3.2	Potència d'un binomi i fórmula de Newton	98
3.3	Divisió de polinomis i algorisme d'Euclides	99
3.4	Regla de Ruffini, residu i factorització	101
3.5	Arrels, màxim comú divisor i mínim comú múltiple	102
3.6	Fraccions racionals	104
3.7	Funcions polinòmiques i racionals	107
4	Tests interactius	111
4.1	Test: Operacions amb polinomis	111
4.2	Test: Factorització de polinomis	114
4.3	Test: Operacions amb fraccions de polinomis	116

Prefaci

Aquests apunts formen la unitat d'**aprendes** dedicada als **polinomis**. La unitat continua l'estudi de l'àlgebra elemental i introdueix els polinomis com a expressions algebraiques que permeten representar, operar i estudiar funcions d'una manera sistemàtica.

L'objectiu no és només aprendre a fer càlculs amb polinomis, sinó entendre l'estructura algebraica que hi ha al darrere: la noció de grau, els coeficients, les operacions de suma i producte, la divisió euclidiana, la factorització, les arrels i la relació entre polinomis i funcions polinòmiques.

El text està dividit en quatre blocs: teoria, pràctica, exercicis proposats i tests interactius d'autoavaluació. La pràctica conté exercicis resolts; els exercicis proposats inclouen indicacions breus perquè l'alumnat pugui treballar de manera autònoma sense veure directament la solució.

Introducció

Els polinomis apareixen de manera natural quan es vol generalitzar el càlcul amb nombres a expressions que depenen d'una variable. Expressions com

$$3x^2 - 5x + 1, \quad x^4 - 2x^2 + 7, \quad (x - 1)(x + 3)$$

permeten descriure relacions numèriques, construir funcions, formular equacions i modelitzar situacions geomètriques o físiques.

En aquesta unitat s'estudia primer què és un polinomi i com s'identifiquen els seus termes, coeficients i grau. Després es defineixen les operacions bàsiques de suma, resta i producte, i es justifica que els polinomis formen un anell. A continuació s'introdueixen la potència d'un binomi i la fórmula de Newton, la divisió de polinomis, la regla de Ruffini, el teorema del residu, el teorema del factor, la factorització i les fraccions racionals.

Els objectius principals són:

- reconèixer monomis i polinomis i determinar-ne el grau, els coeficients i el terme independent;
- operar amb polinomis i reduir termes semblants;
- aplicar la fórmula del binomi de Newton;
- dividir polinomis i interpretar el quocient i el residu;
- utilitzar la regla de Ruffini i el teorema del residu;
- relacionar arrels, factors i descomposició factorial;
- calcular el màxim comú divisor i el mínim comú múltiple de polinomis;
- simplificar i operar amb fraccions racionals;
- interpretar gràficament funcions polinòmiques senzilles.

1 Teoria

1.1 Anell dels polinomis

S'anomena **polinomi en la indeterminada** (o variable) x tota expressió reduïble a la forma:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

on n és un nombre natural i $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ són nombres reals qualssevol. La lletra x que apareix en el polinomi no designa res en particular i, per això, s'anomena indeterminada; en realitat, pot substituir-se per qualsevol altra lletra o signe. Si $a_n \neq 0$, aleshores es diu que n és el **grau** del polinomi; s'admet que un nombre real diferent de zero és un polinomi de grau zero i que el nombre real 0 és un polinomi sense grau, s'anomena **polinomi zero**. A cadascun dels sumands $a_i x^i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) del polinomi l'anomenem **monomi de grau i** i aleshores a_i s'anomena **coeficient del monomi de grau i** . El terme a_0 s'anomena **terme independent** del polinomi (o coeficient del monomi de grau zero si $a_0 \neq 0$).

En general, els nombres reals $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ s'anomenen també **coeficients del polinomi** i, per a referir-nos a un d'ells, direm també que a_i és el **coeficient del terme de grau i** del polinomi. S'anomena **nombre de termes** del polinomi el nombre de monomis no nuls que apareixen en el polinomi; si són dos, el polinomi s'anomena **binomi**, i si són tres, **trinomi**. Finalment, per a referir-nos a un polinomi en la indeterminada x farem servir la notació $p(x)$. D'aquesta manera, si $p(x)$ és un polinomi de grau n amb coeficients $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$, escriurem

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

Dos polinomis són **iguals** si coincideixen els coeficients de tots els termes del mateix grau en un i l'altre polinomi. És clar que si dos polinomis són iguals, aleshores tots dos tenen el mateix grau; en particular, donats dos polinomis de grau n

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n \quad (a_n \neq 0)$$

i

$$q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_{n-1}x^{n-1} + b_nx^n \quad (b_n \neq 0)$$

direm que $p(x) = q(x)$ si

$$a_k = b_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n)$$

Per exemple,

$$p(x) = -1 + 2x - 3x^2 + 5x^4$$

és un polinomi de grau 4 amb coeficients $-1, 2, -3$ i 5 , essent el seu terme independent -1 . Observa que $p(x)$ està format per una suma de monomis: -1 és un monomi de grau zero, $2x$ és un monomi de grau 1, $-3x^2$ és un monomi de grau 2 i $5x^4$ és un monomi de grau 4. Per exemple, el coeficient del monomi de grau 2 és -3 i el coeficient del monomi de grau 3 és 0

De vegades un polinomi no és donat en forma reduïda. Això passa, per exemple, amb el següent polinomi

$$p(x) = x^3 - 3x^2 - \sqrt{2} + \sqrt{3}x - 7x^2 + 5x^3 + 1 - 6x^3 + 10x^2 + x$$

Aleshores, efectuant operacions amb els monomis del mateix grau, anomenats **termes semblants**, obtenim

$$\begin{aligned} p(x) &= -\sqrt{2} + 1 + (\sqrt{3} + 1)x + (-3 - 7 + 10)x^2 + (1 + 5 - 6)x^3 \\ &= -\sqrt{2} + 1 + (\sqrt{3} + 1)x \end{aligned}$$

Mitjançant aquesta **reducció de termes semblants** veiem que resulta un polinomi de grau 1 amb coeficients $-\sqrt{2} + 1$ i $\sqrt{3} + 1$.

1.1.1 Valor numèric d'un polinomi

Hem dit que la indeterminada d'un polinomi pot ser qualsevol cosa. En particular, un polinomi

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

pren un valor quan a la indeterminada x li assignem un nombre real. S'anomena **valor numèric** d'un polinomi $p(x)$ per a $x = k$ (k és un nombre real qualsevol) el nombre

$$p(k) = a_0 + a_1k + a_2k^2 + \cdots + a_{n-1}k^{n-1} + a_nk^n$$

és a dir, al resultat de substituir la x pel nombre k i efectuar després les operacions.

Per exemple, el valor numèric del polinomi $p(x) = 1 + x - x^3$ per a $x = -1$ és

$$\begin{aligned} p(-1) &= 1 + (-1) - (-1)^3 \\ &= 1 - 1 + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

1.1.2 Suma de polinomis

Donats dos polinomis

$$\begin{aligned} p(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n \\ q(x) &= b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_{m-1}x^{m-1} + b_mx^m \end{aligned}$$

amb $a_n \neq 0$ i $b_m \neq 0$, o sigui, de graus n i m respectivament. Definim la **suma de dos monomis del mateix grau i** de la manera següent

$$a_ix^i + b_ix^i = (a_i + b_i)x^i$$

Observa que, quan x pren algun valor numèric, aquesta definició és coherent amb el fet que el producte de nombres reals sigui distributiu respecte de la suma. Aleshores, definim **polinomi suma** el polinomi $p(x) + q(x)$ que resulta de sumar els monomis del mateix grau. Així, tenim

$$p(x) + q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \dots$$

Si en un polinomi o en tots dos falta algun monomi, s'ha de suposar que el seu coeficient és zero.

Per exemple, si

$$\begin{aligned} p(x) &= 2 - 3x + 5x^2 \\ q(x) &= -1 + 3x^2 - 2x^3 \end{aligned}$$

aleshores el polinomi suma $p(x) + q(x)$ és

$$\begin{array}{rcccccl} p(x) & = & 2 & -3x & 5x^2 & 0x^3 \\ q(x) & = & -1 & 0x & 3x^2 & -2x^3 \\ \hline p(x) + q(x) & = & 1 & -3x & 8x^2 & -2x^3 \end{array}$$

és a dir,

$$p(x) + q(x) = 1 - 3x + 8x^2 - 2x^3$$

1.1.2.1 Propietats de la suma

- (1) **Associativa**: qualssevol que siguin els polinomis $p(x)$, $q(x)$ i $r(x)$ es compleix

$$[p(x) + q(x)] + r(x) = p(x) + [q(x) + r(x)]$$

- (2) **Commutativa**: qualssevol que siguin els polinomis $p(x)$ i $q(x)$ es compleix

$$p(x) + q(x) = q(x) + p(x)$$

- (3) **Existència d'element neutre**: per a qualsevol polinomi $p(x)$ es compleix

$$p(x) + 0 = p(x)$$

essent 0 el polinomi zero, és a dir, el polinomi que té tots les seves coeficients iguals a 0.

- (4) **Existència d'element oposat**: per a cada polinomi $p(x)$ existeix $-p(x)$, anomenat **polinomi oposat** de $p(x)$, tal que

$$p(x) + [-p(x)] = 0$$

Aquest polinomi és únic per a cada $p(x)$ i, si $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$, aleshores

$$-p(x) = (-a_0) + (-a_1)x + (-a_2)x^2 + \dots + (-a_{n-1})x^{n-1} + (-a_n)x^n$$

és a dir, $-p(x)$ té per coeficients els oposats dels coeficients de $p(x)$. Com és habitual, definim

$$p(x) - q(x) = p(x) + [-q(x)]$$

és a dir, la **resta** de dos polinomis $p(x) - q(x)$ és la suma de $p(x)$ amb el oposat de $q(x)$.

- (5) **Grau del polinomi suma:** el grau del polinomi suma és més petit o igual que el màxim dels graus dels polinomis sumands

$$\text{grad } [p(x) + q(x)] \leq \max \{ \text{grad } p(x), \text{grad } q(x) \}$$

Per exemple, si

$$\begin{aligned} p(x) &= -16 + x^2 - 6x^4 + x^5 \\ q(x) &= 1 + 2x^2 - 5x^3 \end{aligned}$$

aleshores

$$p(x) + q(x) = -15 + 3x^2 - 5x^3 - 6x^4 + x^5$$

i es compleix

$$\text{grad } [p(x) + q(x)] = 5 \leq 5 = \max \{ \text{grad } p(x), \text{grad } q(x) \}$$

Però, si

$$\begin{aligned} p(x) &= -16 + x^2 - 6x^4 + x^5 \\ q(x) &= 1 + 2x^2 - x^5 \end{aligned}$$

aleshores

$$p(x) + q(x) = -15 + 3x^2 - 6x^4$$

i també es compleix

$$\text{grad } [p(x) + q(x)] = 4 \leq 5 = \max \{ \text{grad } p(x), \text{grad } q(x) \}$$

1.1.3 Producte de polinomis

Donats dos polinomis

$$\begin{aligned} p(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n \\ q(x) &= b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_{m-1}x^{m-1} + b_mx^m \end{aligned}$$

amb $a_n \neq 0$ i $b_m \neq 0$, o sigui, de graus n i m respectivament. Definim el **producte de dos monomis** qualssevol de la manera següent

$$(a_i x^i) \cdot (b_j x^j) = (a_i b_j) x^{i+j}$$

Observa que, quan x pren algun valor numèric, aquesta definició és coherent amb les propietats commutativa i associativa del producte de nombres reals i també amb la propietat del producte de potències. Aleshores, definim **polinomi producte** el polinomi $p(x) \cdot q(x)$ que resulta de multiplicar cada monomi de $p(x)$ per tots els monomis de $q(x)$ i després sumar-los tots. Així, tenim

$$p(x) \cdot q(x) = (a_0 b_0) + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)x^2 + \cdots$$

Per exemple, si

$$\begin{aligned} p(x) &= 2 - 3x + 5x^2 \\ q(x) &= -1 + 3x^2 - 2x^3 \end{aligned}$$

aleshores el polinomi producte $p(x) \cdot q(x)$ és

$p(x)$	=	2	−	3x	+	5x ²	
$q(x)$	=	− 1	+	3x ²	−	2x ³	
		− 2		+ 6x ²	−	4x ³	
			3x		−	9x ³	+
				− 5x ²			+
						+ 15x ⁴	−
							− 10x ⁵
$p(x) \cdot q(x)$	=	− 2	+	3x	+	x ²	−
				13x ³	+	21x ⁴	−
						10x ⁵	

1.1.3.1 Propietats del producte

- (1) **Associativa:** qualssevol que siguin els polinomis $p(x)$, $q(x)$ i $r(x)$ es compleix

$$[p(x) \cdot q(x)] \cdot r(x) = p(x) \cdot [q(x) \cdot r(x)]$$

- (2) **Commutativa:** qualssevol que siguin els polinomis $p(x)$ i $q(x)$ es compleix

$$p(x) \cdot q(x) = q(x) \cdot p(x)$$

- (3) **Existència d'element unitat:** per a qualsevol polinomi $p(x)$ es compleix

$$p(x) \cdot 1 = p(x)$$

essent 1 la unitat dels nombres reals, és a dir, un polinomi de grau zero. A 1 s'anomena aleshores **polinomi unitat**.

- (4) **Distributiva del producte respecte de la suma:** qualssevol que siguin els polinomis $p(x)$, $q(x)$ i $r(x)$ es compleix

$$p(x) \cdot [q(x) + r(x)] = p(x) \cdot q(x) + p(x) \cdot r(x)$$

- (5) **No té divisors de zero:** si $p(x) \neq 0$ i $q(x) \neq 0$, aleshores

$$p(x) \cdot q(x) \neq 0$$

o dit d'una altra manera equivalent, si $p(x) \cdot q(x) = 0$, aleshores $p(x) = 0$ o $q(x) = 0$.

- (6) **Grau del polinomi producte:** si els polinomis multiplicants són no nuls, aleshores el grau del polinomi producte es igual a la suma dels graus dels polinomis

$$\text{grad } [p(x) \cdot q(x)] = \text{grad } p(x) + \text{grad } q(x)$$

amb $p(x) \neq 0$ i $q(x) \neq 0$. Per exemple, si

$$\begin{aligned} p(x) &= 2 - 3x + 5x^2 \\ q(x) &= -1 + 3x^2 - 2x^3 \end{aligned}$$

aleshores

$$p(x) \cdot q(x) = -2 + 3x + x^2 - 13x^3 + 21x^4 - 10x^5$$

i es compleix

$$\text{grad } [p(x) \cdot q(x)] = 5 = 2 + 3 = \text{grad } p(x) + \text{grad } q(x)$$

1.1.4 Anell dels polinomis

Si designem per $\mathbb{R}[x]$ el conjunt de tots els polinomis amb coeficients reals, aleshores diem que $\mathbb{R}[x]$ té estructura de **anell unitari commutatiu sense divisors de zero**. Això és així, perquè les operacions de suma i producte de polinomis són

internes (la suma de dos polinomis és un altre polinomi, i el producte de dos polinomis és un altre polinomi) i, (i) la suma de polinomis compleix les propietats (1) a (4) i (ii) el producte de polinomis compleix les propietats (1) a (5). Designem per $\mathbb{Z}[x]$ el conjunt de tots els polinomis amb coeficients enters i per $\mathbb{Q}[x]$, el conjunt de tots els polinomis amb coeficients racionals.

Observa que $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}[x]$, perquè, hem assumit el conveni de considerar els nombres reals diferents de zero com polinomis de grau zero; el nombre real 0 és un polinomi sense grau. Aquesta inclusió dels nombres reals en el anell dels polinomis és tal que tota propietat relativa a aquest anell serà coherent amb les propietats ja conegudes dels nombres reals. Per exemple, les propietats de la suma de polinomis es tradueixen en les propietats de la suma de nombres reals al considerar els polinomis de grau zero i el nombre real 0.

1.2 Potència d'un binomi. Fórmula de Newton

Considerem ara el cas particular que el polinomi $p(x)$ sigui un binomi. S'anomena potència n -èsima del binomi al producte de $p(x)$ per si mateix n vegades, és a dir,

$$[p(x)]^n = p(x) \cdot \overset{n \text{ vegades}}{\dots} \cdot p(x)$$

Per a trobar una expressió general d'aquesta potència anem a suposar que el binomi és de la forma $A + B$, essent A i B monomis de graus qualssevol. A partir de les propietats de la suma i producte de monomis així com de les propietats dels nombres combinatoris ¹, es compleix la **fórmula de Newton**

$$(A + B)^n = \binom{n}{0}A^n + \binom{n}{1}A^{n-1}B + \binom{n}{2}A^{n-2}B^2 + \dots + \binom{n}{n-1}AB^{n-1} + \binom{n}{n}B^n$$

En efecte, demostrarem aquesta fórmula per inducció ². Per a $n = 1$, cal demostrar que es compleix la següent igualtat

$$(A + B)^1 = \binom{1}{0}A^1 + \binom{1}{1}A^0B$$

Però, això és evident ja que

$$\binom{1}{0} = \binom{1}{1} = 1$$

¹Recorda que el nombre combinatori

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}$$

és el nombre de subconjunts de m elements que poden obtenir-se a partir d'un conjunt de n elements o, de forma equivalent, és el nombre de col·leccions de m objectes que es poden fer a partir d'una col·lecció de n objectes, prescindint de l'ordre.

²El mètode de demostració anomenat per inducció s'utilitza a sovint per a provar que una determinada propietat o fórmula és vàlida per a tot nombre natural. La prova consisteix en demostrar dos fets: (1) que la propietat o fórmula es compleix per a $n = 1$ i (2) que per a tot nombre natural k , si la propietat es compleix per a $n = k$ (hipòtesi d'inducció), aleshores també es compleix per al seu següent $n = k + 1$. Una vegada demostrats aquests dos fets, pel principi d'inducció dels nombres naturals, la propietat es compleix per a tot nombre natural n .

i per definició $A^0 = 1$ (Aquest fet és coherent amb la propietat que $a^0 = 1$ per a tot nombre real diferent de zero). Suposem ara que la fórmula es compleix per a $n = k$ (hipòtesi d'inducció), essent k qualsevol nombre natural

$$(A + B)^k = \binom{k}{0}A^k + \binom{k}{1}A^{k-1}B + \binom{k}{2}A^{k-2}B^2 + \cdots + \binom{k}{k-1}AB^{k-1} + \binom{k}{k}B^k$$

Es tracta ara de demostrar que també es compleix per a $n = k + 1$. En efecte,

$$\begin{aligned} (A + B)^{k+1} &= (A + B)^k(A + B) \\ &= \left[\binom{k}{0}A^k + \binom{k}{1}A^{k-1}B + \binom{k}{2}A^{k-2}B^2 + \cdots + \binom{k}{k-1}AB^{k-1} + \binom{k}{k}B^k \right] (A + B) \\ &= \binom{k}{0}A^{k+1} + \binom{k}{1}A^k B + \binom{k}{2}A^{k-1}B^2 + \cdots + \binom{k}{k-1}A^2B^{k-1} + \binom{k}{k}AB^k + \\ &\quad \binom{k}{0}A^k B + \binom{k}{1}A^{k-1}B^2 + \binom{k}{2}A^{k-2}B^3 + \cdots + \binom{k}{k-1}AB^k + \binom{k}{k}B^{k+1} \\ &= \binom{k}{0}A^{k+1} + \left[\binom{k}{0} + \binom{k}{1} \right] A^k B + \left[\binom{k}{1} + \binom{k}{2} \right] A^{k-1}B^2 + \cdots + \left[\binom{k}{k-2} + \binom{k}{k-1} \right] AB^k + \binom{k}{k}B^{k+1} \\ &= \binom{k+1}{0}A^{k+1} + \binom{k+1}{1}A^k B + \binom{k+1}{2}A^{k-1}B^2 + \cdots + \binom{k+1}{k-1}A^2B^{k-1} + \binom{k+1}{k}AB^k + \binom{k+1}{k+1}B^{k+1} \end{aligned}$$

perquè, sabem que es compleixen les següents propietats dels nombres combinatoris

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

i

$$\binom{n}{m} + \binom{n}{m+1} = \binom{n+1}{m+1}$$

Per exemple, si

$$\begin{aligned} A &= x^2 \\ B &= 1 \end{aligned}$$

aleshores

$$\begin{aligned} (x^2 + 1)^4 &= \binom{4}{0}(x^2)^4 + \binom{4}{1}(x^2)^3 \cdot 1 + \binom{4}{2}(x^2)^2 \cdot 1^2 + \binom{4}{3}(x^2) \cdot 1^3 + \binom{4}{4}1^4 \\ &= x^8 + 4x^6 + 6x^4 + 4x^2 + 1 \end{aligned}$$

És important observar que la fórmula de Newton no només serà vàlida per a desenvolupar expressions de la forma $(A + B)^n$, amb A i B monomis de graus qualssevol, sinó que també ho serà per a desenvolupar expressions del mateix tipus on A i B siguin nombres reals o expressions subjectes a les mateixes propietats.

1.2.1 Càlcul dels coeficients en la fórmula de Newton

Per a calcular els nombres combinatoris que apareixen en la fórmula de Newton és útil formar el **triangle de Tartaglia**

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & 1 & & & & \\
 & & & & & & & 1 & & & 2 & & & 1 & & & \\
 & & & & & 1 & & & 3 & & & 3 & & & 1 & & \\
 & & & 1 & & & 4 & & & 6 & & & 4 & & & 1 & \\
 & & 1 & & 5 & & & 10 & & & 10 & & & 5 & & 1 & \\
 1 & & & 6 & & 15 & & & 20 & & & 15 & & 6 & & & 1 \\
 & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots &
 \end{array}$$

Aquest triangle té com base la propietat dels nombres combinatoris segons la qual

$$\binom{n}{m} + \binom{n}{m+1} = \binom{n+1}{m+1}$$

a més que

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

Per exemple, per a calcular $(a+b)^5$ primer construirem el triangle de Tartaglia fins a la fila 5. Els nombres d'aquesta fila es corresponen en ordre amb els nombres combinatoris que apareixen en el desenvolupament per la fórmula de Newton de $(a+b)^5$. Així tenim

$$\begin{aligned}
 (a+b)^5 &= \binom{5}{0}a^5 + \binom{5}{1}a^4b + \binom{5}{2}a^3b^2 + \binom{5}{3}a^2b^3 + \binom{5}{4}ab^4 + \binom{5}{5}b^5 \\
 &= 1 \cdot a^5 + 5 \cdot a^4b + 10 \cdot a^3b^2 + 10 \cdot a^2b^3 + 5 \cdot ab^4 + 1 \cdot b^5 \\
 &= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5
 \end{aligned}$$

1.2.2 Càlcul d'un terme del desenvolupament d'un binomi

Observa que en la fórmula de Newton

$$(A+B)^n = \binom{n}{0}A^n + \binom{n}{1}A^{n-1}B + \binom{n}{2}A^{n-2}B^2 + \dots + \binom{n}{n-1}AB^{n-1} + \binom{n}{n}B^n$$

apareixen $n+1$ termes i en cada terme hi ha un nombre combinatori que té com numerador sempre n i com denominador un nombre que és una unitat més petit que el lloc que ocupa aquest terme com a sumand del desenvolupament. A més, prenent per definició que $A^0 = B^0 = 1$, en cada terme apareix el producte d'una potència de A per una altra de B de manera que l'exponent de A és la diferència de els dos nombres que formen el nombre combinatori i l'exponent de B és el denominador del nombre combinatori. Amb aquestes observacions previes no és difícil comprendre que el terme que ocupal lloc k ($1 \leq k \leq n+1$) en el desenvolupament de $(A+B)^n$ sigui

$$t_k = \binom{n}{k-1} \cdot A^{n-(k-1)} \cdot B^{k-1}$$

Per exemple, es tracta de calcular el terme 5^o del desenvolupament de $(x^2 - 3x)^6$ sense necessitat de fer tot el desenvolupament. Així, tenim

$$\begin{aligned} t_5 &= \binom{6}{4} \cdot (x^2)^{6-4} \cdot (-3x)^4 \\ &= 15 \cdot x^4 \cdot 81x^4 \\ &= 1215x^8 \end{aligned}$$

Observa que hem pres $A = x^2$ i $B = -3x$, perquè $(x^2 - 3x)^6 = [x^2 + (-3x)]^6$.

1.3 Divisió de polinomis

Donats dos polinomis qualssevol $p(x)$ i $q(x)$ tals que $\text{grad } p(x) \geq \text{grad } q(x)$, es pot demostrar que sempre existeixen dos polinomis $c(x)$ i $r(x)$ tals que

$$p(x) = q(x) \cdot c(x) + r(x)$$

amb $\text{grad } r(x) < \text{grad } q(x)$ o $r(x) = 0$. L'operació que consisteix en trobar els polinomis $c(x)$ i $r(x)$ s'anomena **divisió** de $p(x)$ per $q(x)$. Aleshores els polinomis $c(x)$ i $r(x)$ s'anomenen **quocient** i **residu** de la divisió respectivament, i a $p(x)$ i $q(x)$, **dividend** i **divisor** de la divisió, respectivament.

Observa que, com que són $\text{grad } r(x) < \text{grad } q(x)$, el grau del quocient d'una divisió de polinomis sempre és la diferència dels graus del dividend i divisor. En efecte, atès que

$$\begin{aligned} \text{grad } p(x) &= \text{grad } (q(x) \cdot c(x) + r(x)) \\ &= \text{grad } (q(x) \cdot c(x)) \text{ ja que } \text{grad } r(x) < \text{grad } q(x) \\ &= \text{grad } q(x) + \text{grad } c(x) \end{aligned}$$

d'on

$$\text{grad } c(x) = \text{grad } p(x) - \text{grad } q(x)$$

1.3.1 Algorisme de la divisió

Exposem a continuació un mètode per a trobar el quocient i el residu d'una divisió de polinomis.

1. Ordenem els polinomis $p(x)$ i $q(x)$, dividend i divisor de la divisió, en forma de potències decreixents en lloc de creixents com fins a ara. El monomi de grau més gran del quocient s'obté dividint el monomi de grau més gran de $p(x)$ pel monomi de grau més gran de $q(x)$. Aleshores, es multiplica el divisor per aquest monomi i es resta aquest producte del dividend. La diferència resultant és el primer residu parcial.

$$\begin{array}{r|l} -2x^3 & + & 3x^2 & + & 0x & - & 1 & & 5x^2 & - & 3x & + & 2 \\ 2x^3 & - & \frac{6}{5}x^2 & + & \frac{4}{5}x & & & & -\frac{2}{5}x & & & & \\ \hline & / & \frac{9}{5}x^2 & + & \frac{4}{5}x & - & 1 & & & & & & \end{array}$$

2. Si el residu parcial obtingut abans és de grau igual o més gran que el del divisor, repetim el pas anterior fins a obtenir un residu de grau més petit que el del divisor.

$$\begin{array}{r|l}
 \begin{array}{r}
 -2x^3 + 3x^2 + 0x - 1 \\
 2x^3 - \frac{6}{5}x^2 + \frac{4}{5}x \\
 \hline
 \frac{9}{5}x^2 + \frac{4}{5}x - 1 \\
 - \frac{9}{5}x^2 + \frac{27}{25}x - \frac{18}{25} \\
 \hline
 \phantom{- \frac{9}{5}x^2 + } \frac{47}{25}x - \frac{43}{25}
 \end{array}
 &
 \begin{array}{r}
 5x^2 - 3x + 2 \\
 -\frac{2}{5}x + \frac{9}{25} \\
 \hline
 -\frac{2}{5}x + \frac{9}{25}
 \end{array}
 \end{array}$$

Observa que el residu és ara

$$\frac{47}{25}x - \frac{43}{25}$$

de grau més petit que el del divisor i, per tant, la divisió ha finalizado.

Com a conseqüència tenim que en dividir $p(x) = -2x^3 + 3x^2 - 1$ per $q(x) = 5x^2 - 3x + 2$ s'obtenen com residu i quocient, respectivament,

$$r(x) = \frac{47}{25}x - \frac{43}{25} \quad \text{i} \quad c(x) = -\frac{2}{5}x + \frac{9}{25}$$

i es compleix

$$-2x^3 + 3x^2 - 1 = (5x^2 - 3x + 2) \left(-\frac{2}{5}x + \frac{9}{25} \right) + \frac{47}{25}x - \frac{43}{25}$$

1.3.2 Divisibilitat de polinomis

Donats dos polinomis $p(x)$ i $q(x)$, diem que $p(x)$ és **divisible** per $q(x)$ o també que $q(x)$ és un **divisor** de $p(x)$ si existeix un polinomi $c(x)$ tal que

$$p(x) = q(x) \cdot c(x)$$

Aquesta relació també s'expressa dient que $p(x)$ és un **múltiple** de $q(x)$. Observa que si $p(x)$ és un múltiple de $q(x)$, aleshores el residu de la divisió de $p(x)$ per $q(x)$ és exacta, és a dir, es té residu igual a 0.

Per exemple, $x^2 - 1$ és un múltiple de $x + 1$, perquè

$$x^2 - 1 = (x + 1) \cdot (x - 1)$$

Un polinomi de grau n

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

s'anomena **mònic** o **unitari** si el coeficient del monomi de grau més gran és igual a la unitat, és a dir, $a_n = 1$. Per exemple, els polinomis $x^2 + 1$, $2 - 3x + x^2$ o $1 + x^4$, són mònics.

Tot polinomi pot escriure's com a producte d'un polinomi mònic del mateix grau per un nombre real, perquè

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n = a_n \cdot \left(\frac{a_0}{a_n} + \frac{a_1}{a_n}x + \frac{a_2}{a_n}x^2 + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n}x^{n-1} + x^n \right)$$

Per exemple, el polinomi $p(x) = 1 - 3x - 4x^3$ pot escriure's de la manera següent

$$p(x) = (-4) \cdot \left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{4}x + x^3\right)$$

i, en aquest cas, es diu que el polinomi

$$-\frac{1}{4} + \frac{3}{4}x + x^3$$

és el polinomi mònic de $p(x)$.

Un polinomi $p(x)$ s'anomena **irreduïble** si els únics divisors mònic de $p(x)$ són el polinomi unitat 1 i el seu polinomi mònic corresponent. Per exemple, els polinomis $x + 1$, $x^2 + 1$, $2x - 3$ o $x^2 + x + 1$ són irreduïbles.

1.3.3 Màxim comú divisor de dos polinomis

S'anomena **màxim comú divisor** dels polinomis $p(x)$ i $q(x)$ el polinomi mònic $d(x)$ que satisfà la propietat següent: $d(x)$ és el polinomi de grau més gran que és divisor de $p(x)$ i de $q(x)$. Escriurem

$$d(x) = \text{m.c.d.}(p(x), q(x))$$

Per exemple, el màxim comú divisor dels polinomis $p(x) = x^2 + 2x + 1$ i $q(x) = x^2 - 1$ és $d(x) = x + 1$, perquè,

$$\begin{aligned} p(x) &= (x + 1)^2 \\ q(x) &= (x + 1)(x - 1) \end{aligned}$$

i, per tant, $x + 1$ el divisor comú de grau més gran. Així, escriurem

$$\text{m.c.d.}(x^2 + 2x + 1, x^2 - 1) = x + 1$$

Si $p(x)$ i $q(x)$ són dos polinomis tals que $\text{grau } p(x) \geq \text{grau } q(x)$, aleshores es compleix

$$\text{m.c.d.}(p(x), q(x)) = \text{m.c.d.}(q(x), r(x))$$

on $r(x)$ és el residu de la divisió de $p(x)$ per $q(x)$.

En efecte, dividint $p(x)$ per $q(x)$ obtenim

$$p(x) = q(x) \cdot c(x) + r(x) \tag{1.3.1}$$

i, per tant,

$$r(x) = p(x) - q(x) \cdot c(x) \tag{1.3.2}$$

Com que $d(x) = \text{m.c.d.}(p(x), q(x))$ és un divisor de $p(x)$ i de $q(x)$, aleshores, per (1.3.2), $d(x)$ serà també un divisor de $r(x)$. Com a conseqüència, $d(x)$ és un divisor de $\text{m.c.d.}(q(x), r(x))$. D'altra banda, i de la mateixa manera, com que $\text{m.c.d.}(q(x), r(x))$ és un divisor de $q(x)$ i $r(x)$, aleshores, per (1.3.1), $\text{m.c.d.}(q(x), r(x))$ serà també un divisor de $p(x)$. Com a conseqüència, $\text{m.c.d.}(q(x), r(x))$ és un divisor de $d(x)$. Hem

demostrat així que $d(x)$ divideix a $\text{m.c.d.}(q(x), r(x))$ i que $\text{m.c.d.}(q(x), r(x))$ divideix a $d(x)$. Per tant, com que són tots dos polinomis mòncics, es dedueix³

$$\text{m.c.d.}(p(x), q(x)) = d(x) = \text{m.c.d.}(q(x), r(x))$$

Aquest resultat és la base de l'algorisme d'Euclides per a trobar el màxim comú divisor de dos polinomis.

1.3.3.1 algorisme d'Euclides

Donats dos polinomis $p(x)$ i $q(x)$ tals que $\text{grau } p(x) \geq \text{grau } q(x)$, efectuem la divisió de $p(x)$ per $q(x)$ i obtenim un residu $r_1(x)$. Aleshores es compleix

$$\text{m.c.d.}(p(x), q(x)) = \text{m.c.d.}(q(x), r_1(x))$$

amb $\text{grau } r_1(x) < \text{grau } q(x)$. Si $r_1(x)$ no és un nombre real, efectuem la divisió de $q(x)$ per $r_1(x)$ i obtenim un residu $r_2(x)$. Aleshores es compleix

$$\text{m.c.d.}(q(x), r_1(x)) = \text{m.c.d.}(r_1(x), r_2(x))$$

amb $\text{grau } r_2(x) < \text{grau } r_1(x)$. Si encara $r_2(x)$ no és un nombre real, continuem dividint fins a obtenir residu $r_n(x)$ que sigui un nombre real; observa que això passarà amb seguretat perquè

$$\text{grau } p(x) \geq \text{grau } q(x) > \text{grau } r_1(x) > \text{grau } r_2(x) > \dots$$

Com a conseqüència, obtindrem

$$\begin{aligned} \text{m.c.d.}(p(x), q(x)) &= \text{m.c.d.}(q(x), r_1(x)) \\ &= \text{m.c.d.}(r_1(x), r_2(x)) \\ &\dots \\ &= \text{m.c.d.}(r_{n-1}(x), r_n(x)) \\ &= r_{n-1}^*(x) \end{aligned}$$

essent $r_n(x)$ un nombre real i $r_{n-1}^*(x)$ el polinomi mònic de $r_{n-1}(x)$.

Per a efectuar les successives divisions i trobar $r_{n-1}(x)$ se sol utilitzar el esquema següent

	$c_1(x)$	$c_2(x)$		$c_{n-1}(x)$	
$p(x)$	$q(x)$	$r_1(x)$	$\dots$	$r_{n-2}(x)$	$r_{n-1}(x)$
$r_1(x)$	$r_2(x)$	$r_3(x)$		$r_n(x) \in \mathbb{R}$	

Per exemple, calcularem el màxim comú divisor dels polinomis

$$\begin{aligned} p(x) &= x^5 + 2x^3 + 3x^2 - 15x - 9 \\ q(x) &= x^4 - 9 \end{aligned}$$

³És fàcil demostrar que donats dos polinomis mòncics, si el primer divideix al segon i el segon el primer, aleshores els dos polinomis són iguals.

segons el esquema considerat:

x^5	$+2x^3$	$+3x^2$	$-15x$	-9	x	$\frac{1}{2}x$	$-\frac{3}{4}$	$2x$	$+3$
$-x^5$			$+9x$		x^4	$2x^3$	$+3x^2$	$-6x$	-9
$\swarrow$	$+2x^3$	$+3x^2$	$-6x$	-9	$-x^4$	$-2x^3$	$+6x$		x^2
					$-\frac{3}{2}x^3$				-3
					$+3x^2$				
					$+\frac{9}{2}x$				
					$-\frac{3}{2}x^3$				
					$+\frac{9}{4}x^2$				
					$-\frac{9}{2}x$				
					$-\frac{27}{4}$				
					$\swarrow$				
					$\frac{21}{4}x^2$				
					x^2				
					$-\frac{63}{4}$				
					-3				

és a dir, hem obtingut que

$$\text{m.c.d.} (x^5 + 2x^3 + 3x^2 - 15x - 9, x^4 - 9) = \text{m.c.d.} (x^2 - 3, 0) = x^2 - 3$$

Observa que hem aplicat en el esquemal següent fet

$$\text{m.c.d.} \left(2x^3 + 3x^2 - 6x - 9, \frac{21}{4}(x^2 - 3) \right) = \text{m.c.d.} (2x^3 + 3x^2 - 6x - 9, x^2 - 3)$$

cosa que és evident.

1.3.4 Mínim comú múltiple de dos polinomis

S'anomena **mínim comú múltiple** dels polinomis $p(x)$ i $q(x)$ el polinomi mònic $m(x)$ que satisfà la següent propietat: $m(x)$ és el polinomi de grau més petit que és múltiple de $p(x)$ i de $q(x)$. Escrivem

$$m(x) = \text{m.c.m.} (p(x), q(x))$$

Per exemple, el mínim comú múltiple dels polinomis $p(x) = x^2 + 2x + 1$ i $q(x) = x^2 - 1$ és $m(x) = (x + 1)^2(x - 1)$, perquè,

$$\begin{aligned} p(x) &= (x + 1)^2 \\ q(x) &= (x + 1)(x - 1) \end{aligned}$$

i, per tant, $(x + 1)^2(x - 1)$ el múltiple comú de més petit grau. Així, escriurem

$$\text{m.c.m.} (x^2 + 2x + 1, x^2 - 1) = (x + 1)^2(x - 1)$$

És clar que si $p(x)$ és múltiple de $q(x)$, aleshores el mínim comú múltiple és $p(x)$. Es demostra en cursos superiors que es compleix la següent relació

$$\text{m.c.d.} (p(x), q(x)) \cdot \text{m.c.m.} (p(x), q(x)) = \frac{p(x) \cdot q(x)}{a_n \cdot b_m}$$

on a_n i b_m són els coeficients dels monomis de grau més gran de $p(x)$ i $q(x)$, respectivament. Aquesta relació nos serveix per a trobar el mínim comú múltiple a partir del màxim comú divisor, perquè,

$$\text{m.c.m.} (p(x), q(x)) = \frac{1}{a_n \cdot b_m} \frac{p(x) \cdot q(x)}{\text{m.c.d.} (p(x), q(x))}$$

Per exemple, si

$$\begin{aligned} p(x) &= x^5 + 2x^3 + 3x^2 - 15x - 9 \\ q(x) &= x^4 - 9 \end{aligned}$$

aleshores

$$\begin{aligned} \text{m.c.m.} \left(x^5 + 2x^3 + 3x^2 - 15x - 9, x^4 - 9 \right) &= \frac{(x^5 + 2x^3 + 3x^2 - 15x - 9)(x^4 - 9)}{x^2 - 3} \\ &= x^7 + 5x^5 + 3x^4 - 9x^3 - 45x - 27 \end{aligned}$$

En un altre apartat veurem com la descomposició factorial d'un polinomi dona un altre mètode de càlcul del màxim comú divisor i mínim comú múltiple.

1.4 Regla de Ruffini i teorema del residu

En aquest apartat veurem com es poden calcular el quocient i el residu de la divisió d'un polinomi per un binomi de primer grau de la forma $x - a$ per un mètode més senzill que l'aplicació de l'algorisme clàssic de la divisió. Aquest mètode es coneix com la regla de Ruffini. També donarem un teorema amb el que podrem saber si un polinomi és o no divisible per un binomi de primer grau de la forma $x - a$ amb només calcular el valor numèric del polinomi per a $x = a$ i veure si és o no zero. Aquest resultat es coneix com el teorema del residu.

1.4.1 Regla de Ruffini

Donat un polinomi qualsevol $p(x)$, ara volem dividir-lo pel binomi de primer grau $x - a$, és a dir, volem trobar els polinomis quocient $c(x)$ i residu $r(x)$ tals que

$$p(x) = (x - a) \cdot c(x) + r(x) \quad (1.4.1)$$

Observa primer que grau $r(x) = 0$ o bé $r(x) = 0$, perquè, sabem que grau $r(x) <$ grau $(x - a) = 1$. Per tant, $r(x)$ serà un nombre real r . Observa també que

$$\text{grau } c(x) = \text{grau } p(x) - \text{grau } (x - a) = \text{grau } p(x) - 1$$

Per tant, si

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

aleshores

$$c(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_{n-2}x^{n-2} + b_{n-1}x^{n-1}$$

i segons (1.4.1), tenim

$$\begin{aligned} a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n &= (x - a)(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_{n-2}x^{n-2} + b_{n-1}x^{n-1}) + \\ &= (r - ab_0) + (b_0 - ab_1)x + (b_1 - ab_2)x^2 + \cdots + \\ &\quad (b_{n-2} - ab_{n-1})x^{n-1} + b_{n-1}x^n \end{aligned}$$

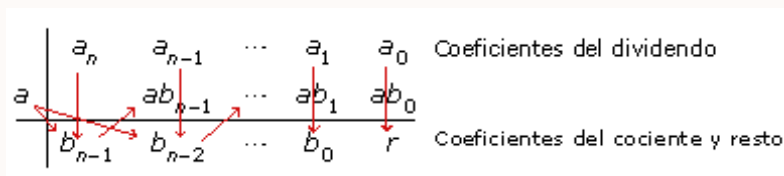
i, per tant,

$$\begin{aligned}a_0 &= r - ab_0 \\a_1 &= b_0 - ab_1 \\a_2 &= b_1 - ab_2 \\&\dots \\a_{n-1} &= b_{n-2} - ab_{n-1} \\a_n &= b_{n-1}\end{aligned}$$

i, en conseqüència, obtenim les següents fórmules que ens permetran determinar $c(x)$ i r

$$\begin{aligned}b_{n-1} &= a_n \\b_{n-2} &= a_{n-1} + a \cdot b_{n-1} \\&\dots \\b_1 &= a_2 + ab_2 \\b_0 &= a_1 + ab_1 \\r &= a_0 + ab_0\end{aligned}$$

Tanmateix, el càlcul dels coeficients b_i ($0 \leq i \leq n-1$) i r es poden fer de manera molt senzilla mitjançant l'esquema següent anomenat **regla de Ruffini**.



Per exemple, calcularem el quocient i el residu de dividir $p(x) = x^3 - 2x + 7$ per $x - 2$. Per fer-ho, farem servir la regla de Ruffini.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -2 & 7 \\ 2 & & 2 & 4 & 4 \\ \hline & 1 & 2 & 2 & 11 \end{array}$$

Dit amb paraules, baixem el primer coeficient del dividend. Aleshores, multipliquem per 2 i col·loquem el resultat sota del segon coeficient del dividend i, després, els sumem. Repetim aquest procés fins a completar el quadre. L'última fila del quadre són els coeficients del quocient (el seu grau és una unitat inferior al del dividend) i l'últim nombre és el residu. Així, tenim $c(x) = x^2 + 2x + 2$ i $r = 11$.

Observa que es col·loquen zeros per als coeficients dels monomis que no apareixen en el polinomi dividend.

1.4.2 Teorema del residu

El valor numèric del polinomi $p(x)$ per a $x = a$ coincideix amb el residu de dividir $p(x)$ per $x - a$.

En efecte, si dividim $p(x)$ per $x - a$ obtenim un quocient $c(x)$ i un residu r de forma que

$$p(x) = (x - a) \cdot c(x) + r$$

Aleshores, el valor numèric de $p(x)$ per a $x = a$ és

$$p(a) = (a - a) \cdot c(a) + r = 0 + r = r$$

és a dir, es compleix que $p(a) = r$.

Per exemple, calculem el residu r de dividir $x^3 - 2x + 7$ per $x - 2$. Segons el teorema del residu es compleix

$$r = p(2) = 2^3 - 2 \cdot 2 + 7 = 11$$

Aleshores, observa que un polinomi serà divisible pel binomi de primer grau $x - a$ si el valor numèric del polinomi és zero per a $x = a$.

Per exemple, volem esbrinar si el polinomi $p(x) = x^3 - 2x + 1$ es divisible per $x - 1$. Per a contestar a aquesta pregunta només cal calcular el valor numèric de $p(x)$ per a $x = 1$ i veure si és zero o no. En concret,

$$p(1) = 1 - 2 + 1 = 0$$

Per tant, $p(x)$ és divisible per $x - 1$.

1.5 Arrels i descomposició factorial d'un polinomi

Diem que un nombre real a és una **arrel** o **zero** d'un polinomi $p(x)$ si $p(a) = 0$. Així, 1 és una arrel del polinomi $p(x) = x^2 - 1$ perquè $p(1) = 0$, així com $\sqrt{3}$ és una arrel de $q(x) = x^2 - 3$, perquè,

$$q(\sqrt{3}) = (\sqrt{3})^2 - 3 = 0$$

Segons el teorema del residu, si a és una arrel de $p(x)$, aleshores $p(x)$ és divisible per $x - a$ i, per tant, podem escriure

$$p(x) = (x - a) \cdot c(x)$$

Aleshores, diem que a és una **arrel simple** de $p(x)$ si $c(a) \neq 0$, és a dir, quan el quocient de dividir $p(x)$ per $x - a$ no torna a ser divisible per $x - a$.

Per exemple, 3 és una arrel simple del polinomi $p(x) = x^3 + x^2 - 9x - 9$, ja que per Ruffini

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 1 & -9 & -9 \\ 3 & & 3 & 12 & 9 \\ \hline & 1 & 4 & 3 & 0 \end{array}$$

obtenim

$$p(x) = (x - 3)(x^2 + 4x + 3)$$

i a més es compleix

$$c(3) = 3^2 + 4 \cdot 3 + 3 = 24 \neq 0$$

Diem que a és una **arrel múltiple** de $p(x)$ si a es una arrel simple

$$p(x) = (x - a) \cdot c(x)$$

i a més es compleix $c(a) = 0$, és a dir, si $c(x)$ torna a ser divisible per $x - a$.

Per exemple, 1 és una arrel múltiple del polinomi $p(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$, perquè, per Ruffini

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 1 & -5 & 3 \\ 1 & & 1 & 2 & -3 \\ \hline & 1 & 2 & -3 & 0 \end{array}$$

obtenim

$$p(x) = (x - 1)(x^2 + 2x - 3)$$

i es compleix

$$c(1) = 1 + 2 - 3 = 0$$

A més, observa que si ara tornem a aplicar Ruffini al quocient,

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & 2 & -3 \\ 1 & & 1 & 3 \\ \hline & 1 & 3 & 0 \end{array}$$

aleshores obtenim

$$c(x) = (x - 1)(x + 3)$$

i, com a conseqüència,

$$\begin{aligned} p(x) &= (x - 1)(x - 1)(x + 3) \\ &= (x - 1)^2(x + 3) \end{aligned}$$

Observem que en aquest cas hem pogut dividir dos vegades $p(x)$ per $x - 1$. Aleshores, diem que 1 és una arrel múltiple de ordre 2 o simplement una arrel doble.

En general, si a és una arrel de $p(x)$ i es compleix

$$p(x) = (x - a)^s \cdot c(x)$$

amb $c(a) \neq 0$, aleshores diem que a és una **arrel múltiple de ordre s** o també que a és una **arrel de multiplicitat s** .

Per exemple, volem esbrinar la multiplicitat de l'arrel -1 en el polinomi

$$p(x) = x^5 - x^4 - 5x^3 + x^2 + 8x + 4$$

Per fer-ho, aplicarem repetidament la regla de Ruffini

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & -1 & -5 & 1 & 8 & 4 \\ -1 & & -1 & 2 & 3 & -4 & -4 \\ \hline & 1 & -2 & -3 & 4 & 4 & 0 \\ -1 & & -1 & 3 & 0 & -4 & \\ \hline & 1 & -3 & 0 & 4 & 0 & \\ -1 & & -1 & 4 & -4 & & \\ \hline & 1 & -4 & 4 & 0 & & \\ -1 & & -1 & 5 & & & \\ \hline & 1 & -5 & 9 & & & \end{array}$$

Observem que $p(x)$ pot dividir-se 3 vegades per $x + 1$. A més, es compleix

$$p(x) = (x + 1)^3(x^2 - 4x + 4)$$

i el tercer quocient que s'obté de la tercera divisió per $x + 1$ compleix

$$c_3(-1) = 1 + 4 + 4 = 9 \neq 0$$

Per tant, -1 és una arrel de $p(x)$ de multiplicitat 3.

1.5.1 Arrels enteres d'un polinomi amb coeficients enters

Considerem ara un polinomi $p(x)$ amb coeficients enters, és a dir,

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

i $a_i \in \mathbb{Z}$ ($0 \leq i \leq n$). Suposem que k és una arrel entera ($k \in \mathbb{Z}$) de $p(x)$. Aleshores, es compleix

$$\begin{aligned} a_0 + a_1k + a_2k^2 + \cdots + a_{n-1}k^{n-1} + a_nk^n &= 0 \\ (a_1 + a_2k + \cdots + a_{n-1}k^{n-2} + a_nk^{n-1})k &= -a_0 \\ a_1 + a_2k + \cdots + a_{n-1}k^{n-2} + a_nk^{n-1} &= -\frac{a_0}{k} \end{aligned}$$

i com $a_1 + a_2k + \cdots + a_{n-1}k^{n-2} + a_nk^{n-1} \in \mathbb{Z}$, k ha de ser necessàriament un divisor del terme independent a_0 . D'aquesta manera, les arrels enteres d'un polinomi amb coeficients enters s'han de trobar entre els divisors del seu terme independent.

Per exemple, si volem calcular les arrels enteres del polinomi $p(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x + 3$, caldrà provar només amb ± 1 i ± 3 , que són els divisors del terme independent. Un càlcul senzill mostra que 3 i -1 són les úniques arrels enteres d'aquest polinomi.

1.5.2 Descomposició factorial d'un polinomi

De la mateixa manera que tot nombre enter pot descompondre's com a producte de nombres primers, tot polinomi pot descompondre's en producte de polinomis irreduïbles. La descomposició varia segons el anell de polinomis que considerem. Per exemple, $x^2 - 2$ és irreduïble en $\mathbb{Q}[x]$ i, en canvi, pot descompondre's en

$$(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$$

en $\mathbb{R}[x]$. Admetem, sense demostrar-ho, que els polinomis irreduïbles en $\mathbb{R}[x]$ són de primer grau o bé de segon grau. Qualsevol polinomi de primer grau $a + bx$ és irreduïble, perquè no té altres divisors mòncics més que la unitat i el polinomi

$$\frac{a}{b} + x$$

Un polinomi de segon grau és irreduïble si l'equació $c + bx + ax^2 = 0$ no té arrels reals, és a dir, quan $b^2 - 4ac < 0$.

Ja hem vist en l'apartat anterior que si k_1 és una arrel de $p(x)$, aleshores

$$p(x) = (x - k_1) \cdot c_1(x)$$

Si ara $c_1(x)$ admet una altra arrel k_2 , també serà arrel de $p(x)$ i es compleix

$$p(x) = (x - k_1) \cdot (x - k_2) \cdot c_2(x)$$

Reiterant aquest procés, si $p(x)$ admet n arrels reals $k_1, k_2, \dots, k_n$, aleshores podrem descompondre $p(x)$ en factors lineals (polinomis de primer grau) de la forma següent

$$p(x) = a_n \cdot (x - k_1) \cdot (x - k_2) \cdot \cdots \cdot (x - k_n) \quad (1.5.1)$$

on a_n és el coeficient del monomi de grau n de $p(x)$.

Observa que un polinomi de grau n no pot tenir més que n arrels reals diferents, perquè, si no fos així, si k_{n+1} fos una altra arrel real diferent a totes les anteriors, aleshores caldria complir-se

$$p(k_{n+1}) = a_n \cdot (k_{n+1} - k_1) \cdot (k_{n+1} - k_2) \cdot \dots \cdot (k_{n+1} - k_n) = 0$$

cosa que implicaria $a_n = 0$, i això és contradictori amb el fet de que el polinomi és de grau n .

Observa que no sempre podrà efectuar-se una descomposició com (1.5.1), perquè, com ja hem dit, existeixen polinomis de segon grau que són irreduïbles i, per tant, no poden descompondre's en factors lineals. Per exemple,

$$x^3 - 1 = (x + 1) \cdot (x^2 - x + 1)$$

i el factor $x^2 - x + 1$ no pot descompondre's més ja que $b^2 - 4ac = -3 < 0$.

En general, podrem obtenir una descomposició d'un polinomi $p(x)$ de la forma

$$p(x) = p_1(x) \cdot p_2(x) \cdot \dots \cdot p_r(x) \quad (1.5.2)$$

amb

$$\text{grau } p(x) = \text{grau } p_1(x) + \text{grau } p_2(x) + \dots + \text{grau } p_r(x)$$

on cada $p_i(x)$ ($1 \leq i \leq r$) és un polinomi irreduïble de $\mathbb{R}[x]$.

Per exemple, el polinomi $p(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$ admet la següent descomposició

$$p(x) = (x^2 + 1) \cdot (x^2 + x + 1)$$

els factors del qual són polinomis irreduïbles.

Si cada $p_i(x)$ és lineal, és a dir, si $p(x)$ admet totes les arrels i són simples, aleshores (1.5.2) s'escriurà com

$$p(x) = a_n \cdot (x - k_1) \cdot (x - k_2) \cdot \dots \cdot (x - k_n)$$

essent k_i ($1 \leq i \leq n$) les arrels de $p(x)$.

Per exemple, és immediat comprovar que el polinomi $2x^4 - 10x^2 + 8$ té arrels ± 1 i ± 2 i, per tant, es descompon en factors lineals de la forma següent

$$2x^4 - 10x^2 + 8 = 2 \cdot (x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (x - 2) \cdot (x + 2)$$

Si el polinomi $p(x)$ admet totes les arrels i algunes són múltiples, agrupant els factors lineals iguals, obtindrem una descomposició de la forma

$$p(x) = a_n \cdot (x - k_1)^{n_1} \cdot (x - k_2)^{n_2} \cdot \dots \cdot (x - k_r)^{n_r}$$

amb $n_1 + n_2 + \dots + n_r = n$, essent n_i ($1 \leq i \leq r$) la multiplicitat de l'arrel k_i .

Per exemple, per a descompondre el polinomi $p(x) = x^5 - 5x^4 + 3x^3 + 13x^2 - 8x - 12$ podem utilitzar la regla de Ruffini. A més, com els seus coeficients són enters, les

arrels seran divisors del terme independent, és a dir, es trobaran entre ± 1 , ± 2 , ± 3 , ± 4 , ± 6 i ± 12 . Observa que es compleix

-1	1	-5	3	13	-8	-12
	-1		6	-9	-4	12
-1	1	-6	9	4	-12	0
	-1		7	-16	12	
2	1	-7	16	-12	0	
		2	-10	12		
2	1	-5	6	0		
		2	-6			
3	1	-3	0			
		3				
	1	0				

o sigui, les arrels de $p(x)$ són -1 (doble), 2 (doble) i 3 . Per tant, $p(x)$ es descompondrà de la forma següent

$$p(x) = (x + 1)^2(x - 2)^2(x - 3)$$

1.5.2.1 Càlcul del m.c.d. i m.c.m.

Conocidas les descomposicions factorials en $\mathbb{R}[x]$ de dos polinomis $p(x)$ i $q(x)$, el màxim comú divisor s'obtindrà multiplicant els factors irreduïbles comuns elevats a l'exponent més petit que figuri en les dues descomposicions, i el mínim comú múltiple s'obtindrà multiplicant els factors irreduïbles comuns i no comuns elevats a l'exponent més gran que figuri en totes dues descomposicions.

Per exemple, calculem el m.c.d. i el m.c.m. dels polinomis

$$\begin{aligned} p(x) &= 2x^5 - 2x^4 - 10x^3 + 2x^2 + 16x + 8 \\ q(x) &= 3x^3 - 6x^2 - 3x + 6 \end{aligned}$$

Primer, buscarem les descomposicions de tots dos polinomis. Els polinomis mònics de cada polinomi són

$$\begin{aligned} p^*(x) &= x^5 - x^4 - 5x^3 + x^2 + 8x + 4 \\ q^*(x) &= x^3 - 2x^2 - x + 2 \end{aligned}$$

Aleshores, per a $p^*(x)$ tenim

-1	1	-1	-5	1	8	4
	-1		2	3	-4	-4
-1	1	-2	-3	4	4	0
	-1		3	0	-4	
-1	1	-3	0	4	0	
	-1		4	-4		
2	1	-4	4	0		
		2	-4			
	1	-2	0			

i, per tant,

$$p^*(x) = (x+1)^3 \cdot (x-2)^2$$

i

$$p(x) = 2 \cdot (x+1)^3 \cdot (x-2)^2$$

Per a $q^*(x)$ tenim

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -2 & -1 & 2 \\ -1 & & -1 & 3 & -2 \\ \hline & 1 & -3 & 2 & 0 \\ 1 & & 1 & -2 & \\ \hline & 1 & -2 & 0 & \end{array}$$

i, per tant,

$$q^*(x) = (x+1) \cdot (x-1) \cdot (x-2)$$

i

$$q(x) = 3 \cdot (x+1) \cdot (x-1) \cdot (x-2)$$

Ara ja podem determinar m.c.d. i m.c.m. de $p(x)$ i $q(x)$. Així, tenim

$$\text{m.c.d.}(p(x), q(x)) = (x+1) \cdot (x-2)$$

i

$$\text{m.c.m.}(p(x), q(x)) = (x+1) \cdot (x+1)^3 \cdot (x-2)^2$$

1.6 Fraccions racionals

De la mateixa manera que l'equació

$$3 \cdot x = 2$$

no té solució en l'anell dels nombres enters i per a resoldre aquest problema tuvimos que ampliar $\mathbb{Z}$ construint el conjunt dels nombres racionals, l'equació

$$(x-1) \cdot A(x) = x^2 + 1$$

no té solució en l'anell de polinomis $\mathbb{R}[x]$ (ja que $x^2 + 1$ no és múltiple de $x-1$) i per a solucióar aquest problema caldrà ampliar $\mathbb{R}[x]$ construint el conjunt de les fraccions racionals.

S'anomena **fracció algebraica** o **polinòmica** a tota expressió de la forma

$$\frac{p(x)}{q(x)}$$

on $p(x)$ i $q(x)$ són polinomis i $q(x)$ és diferent del polinomi zero.

Per exemple,

$$\frac{x^2 + 1}{x}, \frac{x-1}{2}, \frac{x^3}{x^2 - 1}$$

són fraccions algebraiques.

En el conjunt de totes les fraccions algebraiques definim una relació d'equivalència de la forma següent: diem que dues fraccions algebraiques

$$\frac{p(x)}{q(x)} \quad \text{i} \quad \frac{r(x)}{s(x)}$$

són **equivalents** si i només si

$$p(x) \cdot s(x) = q(x) \cdot r(x)$$

Aquesta relació d'equivalència dona lloc a una clasiificación de les fraccions algebraiques en classes. Cada fracció

$$\frac{p(x)}{q(x)}$$

define una classe, que es pot representar per

$$\left\{ \frac{p(x)}{q(x)} \right\}$$

a la qual pertanyen totes les fraccions equivalents, és a dir,

$$\left\{ \frac{p(x)}{q(x)} \right\} = \left\{ \frac{r(x)}{s(x)} : p(x) \cdot s(x) = q(x) \cdot r(x) \right\}$$

Anomenem **fracció racional** cada classe de fraccions algebraiques. Com resulta molt feixuc escriure cada fracció racional mitjançant claus, convindrem a escriurela simplement per un representant de la classe. Així, en lloc de escriure

$$\left\{ \frac{p(x)}{q(x)} \right\}$$

escriurem

$$\frac{p(x)}{q(x)}$$

prenent aquesta fracció com a representant de la fracció racional. De aquest modo, si

$$\frac{p(x)}{q(x)} \quad \text{i} \quad \frac{r(x)}{s(x)}$$

són equivalents, atès que pertanyen a la mateixa classe i cada una d'elles representa una fracció racional, escriurem

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{r(x)}{s(x)}$$

Així, amb aquest conveni,

$$\frac{x-1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2(x-1)}$$

no significa que siguin iguals les fraccions algebraiques, sinó que són iguals les fraccions racionals que determinen.

Una fracció algebraica

$$\frac{p(x)}{q(x)}$$

s'anomena **irreduïble** si $p(x)$ i $q(x)$ són primers entre si, és a dir, si no té cap factor comú de grau més gran o igual que 1. Per exemple, les fraccions següents són irreduïbles

$$\frac{x-1}{x^2}, \frac{x^2+1}{x-1}, \frac{x^3}{x^2+1}$$

mentre que les fraccions següents

$$\frac{x}{x^2-x}, \frac{x^2-1}{x+1}, \frac{x^3+1}{x^2-1}$$

no ho són.

S'enté per **simplificar** una fracció algebraica buscar la fracció irreduïble equivalent. En la pràctica i per a facilitar els càlculs, sovint es pren com a representant d'una fracció racional la fracció irreduïble.

Per exemple, volem simplificar la següent fracció

$$\frac{x^3 + 5x^2 + 6x}{x^3 + 3x^2 + 2x}$$

Descomponent en factors els polinomis numerador i denominador, obtenim

$$\frac{x^3 + 5x^2 + 6x}{x^3 + 3x^2 + 2x} = \frac{x(x+3)(x+2)}{x(x+1)(x+2)} = \frac{x+3}{x+1}$$

Per tant,

$$\frac{x+3}{x+1}$$

és la fracció irreduïble equivalent a la fracció dada.

1.6.1 Operacions en el conjunt de les fraccions racionals

Les definicions i regles per a efectuar la suma i el producte de dos fraccions racionals són totalment anàlogues a les definicions i regles per a les operacions amb nombres racionals.

1.6.1.1 Suma de fraccions racionals

Donades dues fraccions racionals, definim la fracció racional **suma** com la que té com a representant la suma dels representants de les fraccions racionals donades. Per a efectuar la suma s'aplica la regla

$$\frac{p(x)}{q(x)} + \frac{r(x)}{s(x)} = \frac{p(x) \cdot s(x) + q(x) \cdot r(x)}{q(x) \cdot s(x)}$$

Observa que aquesta fracció és algebraica, perquè, ni $q(x)$ ni $s(x)$ són el polinomi zero, i, per tant, $q(x) \cdot s(x)$ tampoc ho és. A més, és fàcil demostrar que aquesta suma no depèn dels representants escollits i, en conseqüència, la operació està bien definida.

Les propietats associativa i commutativa, així com la existència del element neutre i de la fracció racional oposada d'una qualsevol es dedueix de la mateixa manera

ja coneguda per als nombres racionals. Recordem, simplement, que el element neutre és

$$\frac{0}{q(x)}$$

amb el polinomi zero en el numerador i qualsevol polinomi no nul en el denominador, i que la fracció racional oposada de

$$\frac{p(x)}{q(x)}$$

és

$$\frac{-p(x)}{q(x)}$$

Per exemple, volem efectuar la següent suma de fraccions

$$\frac{x+3}{x^2+x} + \frac{x-2}{x^2+3x+2}$$

Evidentment podem utilitzar la regla que hem donat al definir la suma de fraccions. Tanmateix, resulta molt més còmode utilitzar el m.c.m. dels polinomis denominadors i convertir les dues fraccions donades en altres equivalents amb el mateix denominador; observa, perquè, que es es procedeix de la mateixa manera que la suma de fraccions numèriques. Les descomposicions factorials dels polinomis denominadors són

$$\begin{aligned}x^2 + x &= x(x+1) \\ x^2 + 3x + 2 &= (x+1)(x+2)\end{aligned}$$

i, per tant, obtenim

$$\text{m.c.m.}(x^2+x, x^2+3x+2) = x(x+1)(x+2)$$

Aleshores, podem escriure

$$\begin{aligned}\frac{x+3}{x^2+x} + \frac{x-2}{x^2+3x+2} &= \frac{(x+3)(x+2)}{x(x+1)(x+2)} + \frac{x(x-2)}{x(x+1)(x+2)} \\ &= \frac{(x+3)(x+2) + x(x-2)}{x(x+1)(x+2)} \\ &= \frac{2x^2 + 3x + 6}{x^3 + 3x^2 + 2x}\end{aligned}$$

1.6.1.2 Producte de fraccions racionals

Donades dues fraccions racionals, definim la fracció racional **producte** com la que té com a representant el producte dels representants de les fraccions racionals donades. Per a efectuar el producte s'aplica la regla

$$\frac{p(x)}{q(x)} \cdot \frac{r(x)}{s(x)} = \frac{p(x) \cdot r(x)}{q(x) \cdot s(x)}$$

Observa que aquesta fracció és algebraica, perquè, ni $q(x)$ ni $s(x)$ són el polinomi zero, i, per tant, $q(x) \cdot s(x)$ tampoc ho és. A més, és fàcil demostrar que aquest

producte no depèn dels representants escollits i, en conseqüència, la operació està bien definida.

Les propietats associativa i commutativa es demostren de la mateixa manera que per als nombres racionals. L'element neutre està constituït per la fracció racional que té com a representant qualsevol fracció algebraica de numerador igual al denominador. La fracció racional inversa de

$$\frac{p(x)}{q(x)}$$

és

$$\frac{q(x)}{p(x)}$$

Observa que aquesta fracció serà algebraica si $p(x)$ no és el polinomi nul. Per tant, totes les fraccions racionals tenen inversa excepte la fracció racional zero

$$\frac{0}{q(x)}$$

on $q(x)$ és qualsevol polinomi no nul. També es compleix la propietat distributiva respecte de la suma.

Per exemple, volem trobar la fracció irreducible equivalent al següent producte de fraccions

$$\frac{1+x}{1-x} \cdot \frac{x}{1-x^2}$$

Dit amb altres paraules, es tracta d'efectuar el producte i simplificar després la fracció resultant. Així, tenim

$$\begin{aligned} \frac{1+x}{1-x} \cdot \frac{x}{1-x^2} &= \frac{x(1+x)}{(1-x)(1-x^2)} \\ &= \frac{x(1+x)}{(1-x)^2(1+x)} \\ &= \frac{x}{(1-x)^2} \\ &= \frac{1}{1-2x+x^2} \end{aligned}$$

1.6.2 El cos de les fraccions racionals

Les propietats de la suma i el producte de fraccions racionals es s'enuncien conjuntament dient que el conjunt de les fraccions racionals amb la suma i el producte constitueixen un cos commutatiu, anomenat **cos de les fraccions racionals** de $\mathbb{R}[x]$.

Ara ja podem donar resposta al problema plantejat a l'inici d'aquesta secció. Recordem que es tractava de resoldre l'equació següent

$$(x-1) \cdot A(x) = x^2 + 1$$

Evidentment podem escriure aquesta equació mitjançant fraccions racionals de la manera següent

$$\frac{x-1}{1} \cdot \frac{A(x)}{1} = \frac{x^2+1}{1}$$

on hem identificat cada polinomi $p(x)$ amb la fracció

$$\frac{p(x)}{1}$$

Multiplicant ara els dos membres de l'equació per la fracció racional inversa de

$$\frac{x-1}{1}$$

és a dir, multiplicant per

$$\frac{1}{x-1}$$

obtenim

$$\begin{aligned} \frac{1}{x-1} \cdot \left(\frac{x-1}{1} \cdot \frac{p(x)}{1} \right) &= \frac{1}{x-1} \cdot \frac{x^2+1}{1} \\ \left(\frac{1}{x-1} \cdot \frac{x-1}{1} \right) \cdot \frac{p(x)}{1} &= \frac{x^2+1}{x-1} \\ \frac{x-1}{x-1} \cdot \frac{p(x)}{1} &= \frac{x^2+1}{x-1} \\ p(x) &= \frac{x^2+1}{x-1} \end{aligned}$$

1.7 Funcions polinòmiques

S'anomena **funció polinòmica** de grau n a tota funció real de variable real f definida per

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

per a tot $x \in \mathbb{R}$, amb $a_i \in \mathbb{R}$ ($1 \leq i \leq n$) i $a_n \neq 0$.

Observa que les operacions que hi cal fer per obtenir la imatge d'un element x es poden fer per a qualsevol nombre real i, per tant, una funció polinòmica té com domini tot el conjunt dels nombres reals.

El valor que pren la funció per a $x = 0$ coincideix amb el terme independent del polinomi

$$f(0) = a_0$$

i, per tant, la gràfica de la funció tallarà l'eix d'ordenades en el punt $(0, a_0)$. Els punts de tall de la gràfica amb l'eix d'abscisses seran els punts x tals que $f(x) = 0$, és a dir, els zeros de la funció; aquests punts es corresponen amb les arrels del polinomi.

A continuació tractarem alguns casos particulars de funcions polinòmiques així com les seves gràfiques.

1.7.1 Funcions constants

Una **funció constant** és una funció polinòmica de grau zero. Tota funció constant f ve definida per

$$f(x) = a$$

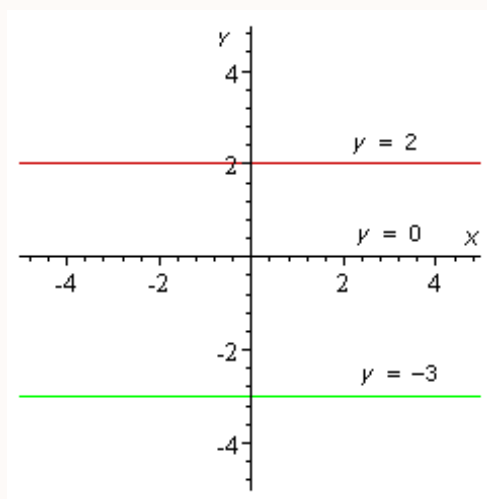
per a tot $x \in \mathbb{R}$, amb $a \in \mathbb{R}$.

És fàcil veure que la gràfica d'aquesta funció és una recta paral·lela a l'eix d'abscisses que passa pel punt $(0, a)$ i la qual equació és

$$y = a$$

Per tant, el recorregut d'aquesta funció és reduït a un sol punt $y = a$.

En la figura següent, hem dibuixat diferents funcions d'aquest tipus per a diferents valors de a . La funció constant igual a 0, o també anomenada **funció nula**, ve donada per $f(x) = 0$ per a tot $x \in \mathbb{R}$; la gràfica d'aquesta funció és la recta $y = 0$ que coincideix amb l'eix d'abscisses.



1.7.2 Funcions afins

Una **funció afí** és una funció polinòmica de primer grau. Tota funció afí f ve definida per

$$f(x) = ax + b$$

per a tot $x \in \mathbb{R}$, amb $a, b \in \mathbb{R}$ i $a \neq 0$.

És fàcil veure que la gràfica d'aquesta funció és una recta que passa pels punts $(0, b)$ i $(-b/a, 0)$, i la qual equació és

$$y = ax + b$$

Per tant, el recorregut d'aquesta funció és tot el conjunt dels nombres reals.

Observa que si $a > 0$, aleshores es compleix

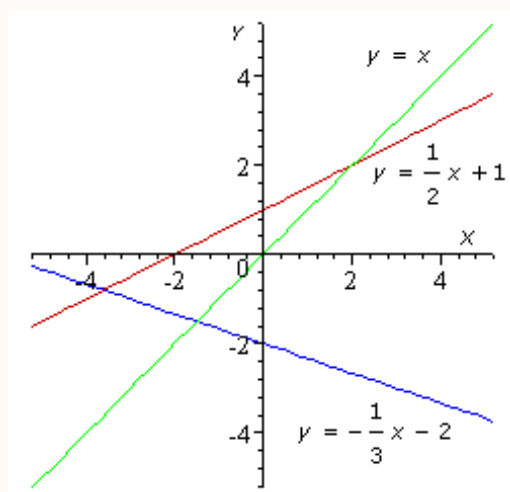
$$x_1 \leq x_2 \implies ax_1 \leq ax_2 \implies f(x_1) = ax_1 + b \leq ax_2 + b = f(x_2)$$

i, per tant, la funció és creixent. De la mateixa manera, si $a < 0$, aleshores es compleix

$$x_1 \leq x_2 \implies ax_1 \geq ax_2 \implies f(x_1) = ax_1 + b \geq ax_2 + b = f(x_2)$$

i, per tant, la funció és decreixent.

Si $b = 0$, la funció s'anomena **lineal** i la seva gràfica és una recta de pendent a que passa per l'origen de coordenades. En la següent figura hem dibuixat les gràfiques d'algunes funcions d'aquest tipus.



1.7.3 Funcions quadràtiques

Una **funció quadràtica** és una funció polinòmica de segon grau. Tota funció quadràtica f ve definida per

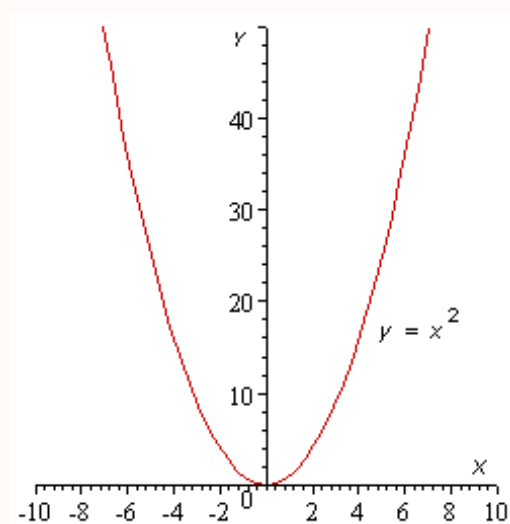
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

per a tot $x \in \mathbb{R}$, amb $a, b, c \in \mathbb{R}$ i $a \neq 0$.

Abans de passar a estudiar aquest cas general, tractarem alguns casos especials més senzills.

1. $f(x) = x^2$

És el cas més senzill de funció quadràtica. La gràfica d'aquesta funció és representada per la paràbola $y = x^2$; hem dibuixat aquesta corba en la figura següent



A partir de la gràfica d'aquesta funció podem observar les següents propietats:

- La funció és sempre positiva
- És simètrica respecte de l'eix d'ordenades, ja que $f(-x) = f(x)$; a l'eix de simetria s'anomena eix de la paràbola.

- Presenta un punt d'ordenada mínima (mínim) en el punt $(0, 0)$; a aquest punt s'anomena vèrtex de la paràbola.
- Per a valors positius de la x la funció és creixent, perquè

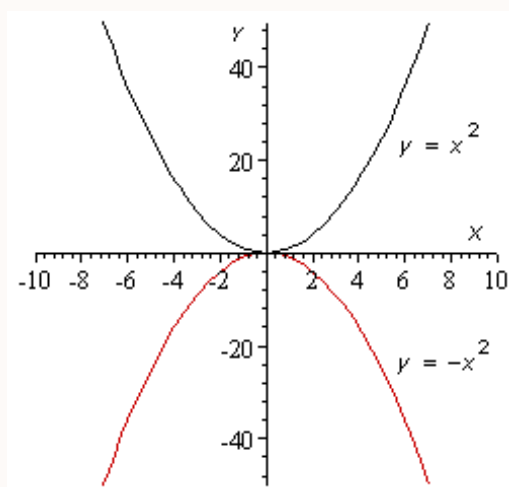
$$0 < x_1 \leq x_2 \implies f(x_1) = x_1^2 \leq x_2^2 = f(x_2)$$

i per a valors negatius de la x la funció és decreixent, perquè

$$x_1 \leq x_2 < 0 \implies f(x_1) = x_1^2 \geq x_2^2 = f(x_2)$$

2. $f(x) = -x^2$

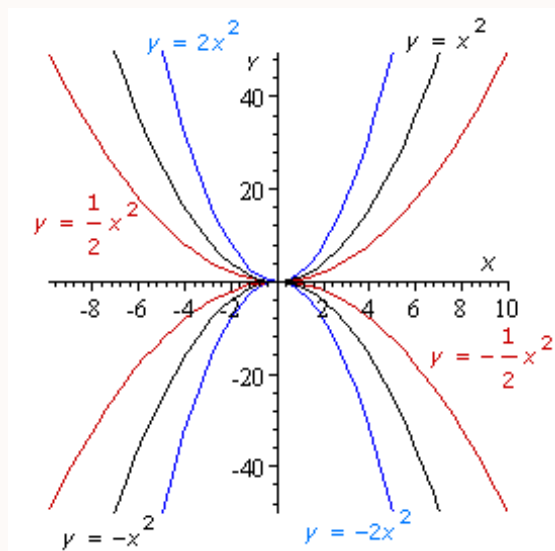
La gràfica d'aquesta funció s'obté per simetria respecte de l'eix d'abscisses de la paràbola $y = x^2$.



En aquest cas la funció en lloc de ser positiva sempre és negativa. La simetria respecte de l'eix d'ordenades es conserva però canvia el creixement de la funció. Ara la funció és creixent per a valors negatius de la x i decreixent per a valors positius. En lloc de tenir un punt d'ordenada mínima en $(0, 0)$ ara té un punt d'ordenada màxima (màxim).

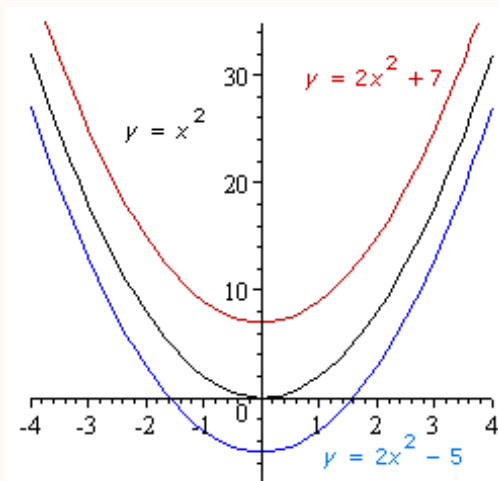
3. $f(x) = ax^2$, amb $a \in \mathbb{R}$ i $a \neq 0$

La gràfica d'aquesta funció s'obté a partir de la paràbola $y = x^2$ multiplicant les seves ordenades per la constant a . Serà una paràbola amb les mateixes característiques que $y = x^2$ o $y = -x^2$, segons que a sigui positiu o negatiu, respectivament. En la figura següent hem dibuixat diverses paràboles del tipus $y = ax^2$; és important observar que les branques de la paràbola seran més tancades o obertes segons que a augmenti o disminueixi en valor absolut.



4. $f(x) = ax^2 + c$, amb $a, c \in \mathbb{R}$ i a, c no nuls

La gràfica d'aquesta funció s'obté a partir de la paràbola $y = ax^2$ traslladant-la c unitats seguint l'eix d'ordenades; es traslladarà c unitats en el sentit positiu de l'eix d'ordenades si $c > 0$, i c unitats en el sentit negatiu d'aquest eix si $c < 0$. Observa la figura següent per a adonar-te d'aquest fet.



És important observar que ara el vèrtex de la paràbola s'ha traslladat del punt $(0,0)$ al punt $(0,c)$. També és important saber que ara la funció no ha de ser necessàriament sempre positiva o sempre negativa. En efecte, si $a > 0$ i $c < 0$, aleshores la paràbola $y = ax^2 + c$ tallarà l'eix d'abscisses en els punts

$$\left(\sqrt{-\frac{c}{a}}, 0\right) \quad \text{i} \quad \left(-\sqrt{-\frac{c}{a}}, 0\right)$$

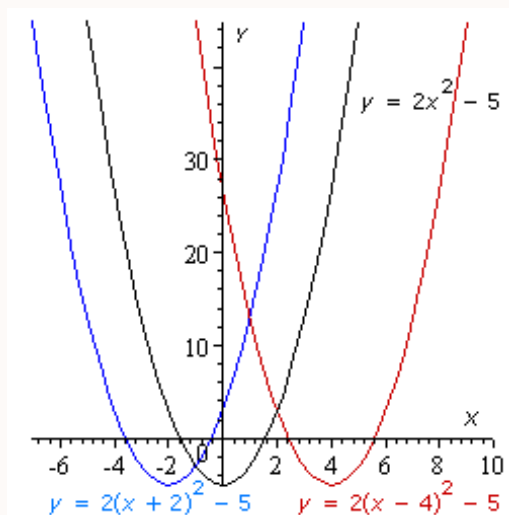
ja que

$$a \left(\pm \sqrt{-\frac{c}{a}}\right)^2 + c = a \left(-\frac{c}{a}\right) + c = 0$$

Observa que passa mateix si $a < 0$ i $c > 0$. En resum, si a i c té signes oposats, la paràbola talla l'eix d'abscisses en dos punts diferents i, com a conseqüència, la funció canvia de signe.

5. $f(x) = a(x - p)^2 + q$, amb $a, p, q \in \mathbb{R}$ i a, p, q no nuls

La gràfica d'aquesta funció s'obté a partir de la paràbola $y = ax^2 + q$ traslladant-la p unitats seguint l'eix d'abscisses; es traslladarà p unitats en el sentit positiu de l'eix d'abscisses si $p > 0$, i p unitats en el sentit negatiu d'aquest eix si $p < 0$. Observa la figura següent per a adonar-te d'aquest fet.



És important observar que ara el vèrtex de la paràbola s'ha traslladat del punt $(0, q)$ al punt (p, q) . L'eix de simetria de la paràbola és ara paral·lel a l'eix d'ordenades i passa pel punt (p, q) . És fàcil comprovar que per a $a > 0$, la funció és decreixent a l'esquerra del vèrtex i creixent a la seva dreta, i la seva gràfica presenta un mínim en el vèrtex; anàlogament, es comprova que si $a < 0$, la funció és creixent a l'esquerra del vèrtex i decreixent a la seva dreta, i la seva gràfica presenta un màxim en el vèrtex.

6. $f(x) = ax^2 + bx + c$, amb $a, b, c \in \mathbb{R}$ i $a \neq 0$

Considerem finalment el cas general. Observa en primer lloc que podem escriure

$$ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a} \right)$$

Per exemple,

$$2x^2 + 16x + 34 = 2(x + 4)^2 + 2$$

Per tant, si fem

$$\begin{aligned} p &= -\frac{b}{2a} \\ q &= c - \frac{b^2}{4a} \end{aligned}$$

aleshores

$$ax^2 + bx + c = a(x - p)^2 + q$$

de manera que la gràfica d'aquesta funció és una paràbola de la forma

$$y = a(x - p)^2 + q$$

Com ja hem vist les característiques d'aquesta paràbola són:

- Vèrtex en el punt $\left(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right)$
- Eix de simetria paral·lel a l'eix d'ordenades i passa pel vèrtex
- Per a $a > 0$, la funció presenta un punt d'ordenada mínima en el vèrtex (mínim) i, per a $a < 0$, la funció presenta un punt d'ordenada màxima en el vèrtex (màxim). Per tant, si $a > 0$, el recorregut de la funció és $\left[c - \frac{b^2}{4a}, +\infty\right)$, i si $a < 0$, és $\left(-\infty, c - \frac{b^2}{4a}\right]$
- Per a $a > 0$, diem que la paràbola té concavitat positiva (convexa) i, per a $a < 0$, diem que la paràbola té concavitat negativa (còncava)
- La paràbola talla l'eix d'ordenades en el punt $(0, c)$; talla al eix d'abscisses si a i $c - \frac{b^2}{4a}$ té signes oposats o $c - \frac{b^2}{4a} = 0$ (la paràbola és aleshores tangent a l'eix d'abscisses y el punt de contacte és el vèrtex). Observa que perquè la paràbola talli l'eix d'abscisses el polinomi $ax^2 + bx + c$ ha de tenir arrels reals i, per tant, si $a > 0$ la condició perquè això passi és

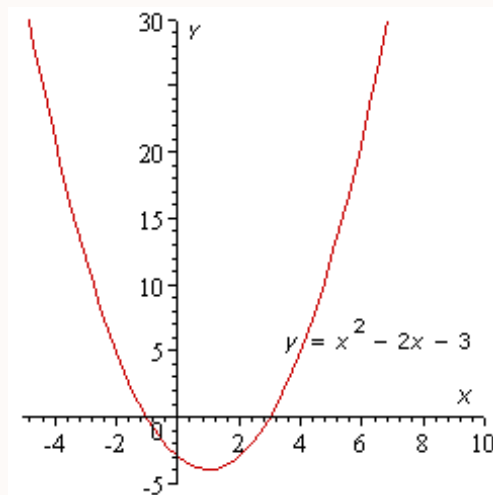
$$c - \frac{b^2}{4a} \leq 0$$

equivalent a

$$b^2 - 4ac \geq 0$$

Com a conseqüència, el polinomi $ax^2 + bx + c$ no tindrà arrels reals si $b^2 - 4ac < 0$.

Per exemple, en la figura següent hem representat la gràfica de la funció $f(x) = x^2 - 2x - 3$.



Com que

$$x^2 - 2x - 3 = (x - 1)^2 - 4$$

aleshores $(1, -4)$ és el vèrtex de la paràbola. El seu eix de simetria és la recta vertical d'equació $x = 1$. La funció té un mínim en $x = 1$ el valor del qual és -4 . La gràfica és convexa i talla l'eix d'ordenades en el punt $(0, -3)$. Els punts de tall amb l'eix d'abscisses són les arrels del polinomi $x^2 - 2x - 3$. Com que

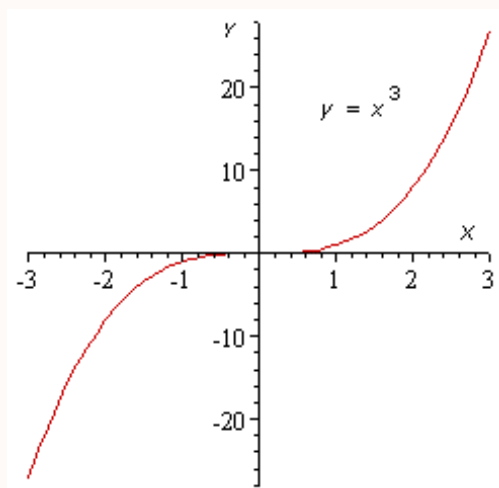
$$x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$$

aleshores les arrels són -1 i 3 , i, per tant, els punts de tall amb l'eix d'abscisses són $(-1, 0)$ i $(3, 0)$.

1.7.4 Altres funcions polinòmiques senzilles

En l'apartat anterior s'ha vist com a partir de la paràbola $y = x^2$ es pot representar qualsevol altra paràbola de la forma $y = ax^2 + bx + c$, mitjançant simetries o translacions dels eixos. La mateixa tècnica pot servir-nos per a representar altres funcions polinòmiques senzilles.

Per exemple, a partir de la gràfica de la funció $f(x) = x^3$, obtinguda mitjançant una taula de valors,



podem obtenir altres gràfiques de funcions polinòmiques de tercer grau.

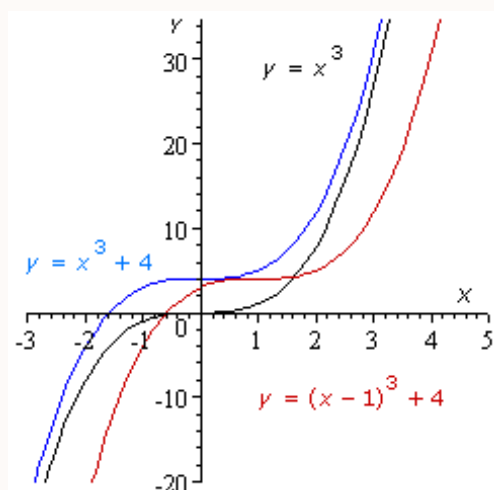
Per exemple, la gràfica de la funció

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 3$$

pot obtenir-se a partir de $y = x^3$, perquè

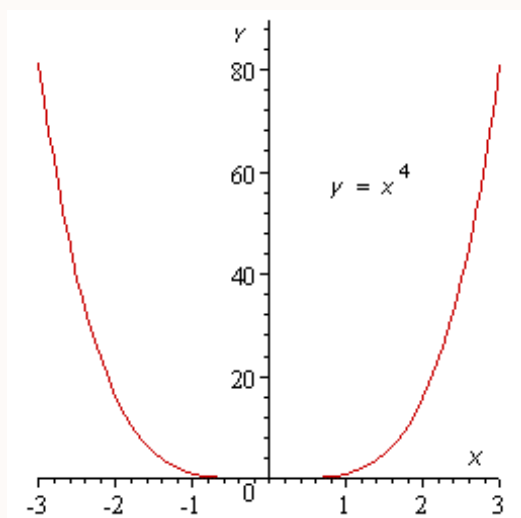
$$x^3 - 3x^2 + 3x + 3 = (x - 1)^3 + 4$$

En efecte, de la gràfica de $y = x^3$, mitjançant una translació vertical, seguint l'eix d'ordenades en el sentit positiu 4 unitats, obtindrem la gràfica de $y = x^3 + 4$. D'aquesta gràfica, mitjançant una translació horitzontal, seguint l'eix d'abscisses en el sentit positiu 1 unitat, obtindrem la gràfica de $y = (x - 1)^3 + 4$,



y, a partir de la seva gràfica, podem deduir algunes de les seves propietats.

Evidentment, a partir de la gràfica de la funció $f(x) = x^4$, obtinguda mitjançant una taula de valors,



podem obtenir altres gràfiques de funcions polinòmiques de quart grau.

Per exemple, la gràfica de la funció

$$f(x) = -x^4 - 4x^3 - 6x^2 - 4x + 4$$

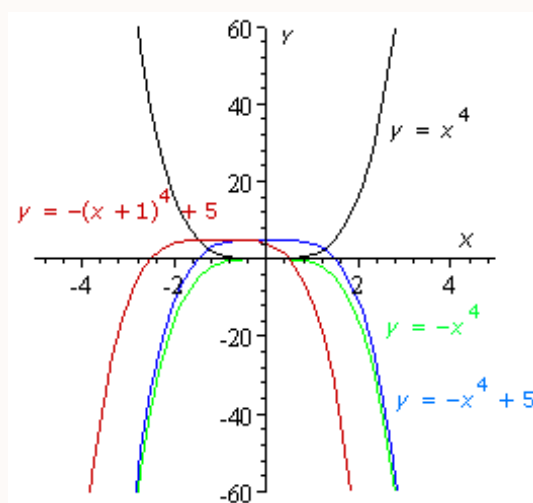
pot obtenir-se a partir de $y = x^4$, perquè

$$-x^4 - 4x^3 - 6x^2 - 4x + 4 = -(x+1)^4 + 5$$

Recorda que

$$(x+1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$$

En efecte, de la gràfica de $y = x^4$, mitjançant una simetria respecte de l'eix d'abscisses, obtindrem la gràfica de $y = -x^4$. Ara, mitjançant una translació vertical, seguint l'eix d'ordenades en el sentit positiu 5 unitats, obtindrem la gràfica de $y = -x^4 + 5$. D'aquesta gràfica, mitjançant una translació horitzontal, seguint l'eix d'abscisses en el sentit negatiu 1 unitat, obtindrem la gràfica de $y = -(x+1)^4 + 5$,



y, a partir de la seva gràfica, podem deduir algunes de les seves propietats.

1.8 Funcions racionals

Així com cada polinomi dona lloc a una funció polinòmica, cada fracció algebraica dona lloc a una funció que s'anomena **funció racional**, associada a una fracció algebraica. Una funció racional és tota funció real de variable real f definida per

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

per a tot $x \in \mathbb{R}$, on $p(x), q(x) \in \mathbb{R}[x]$ i $q(x)$ no és el polinomi zero.

Per exemple,

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{3x - 2}$$

és una funció racional. Encara que no tractarem aquí aquest tipus de funcions, només farem algunes observacions. En buscar la imatge d'un nombre real per f pot passar que per a aquest valor s'anul·li el denominador, cas en què el quocient no té sentit. Aquests valors de x que anul·len el denominador no tenen imatge i cal prescindir-ne. Per tant, el domini d'una funció racional és

$$\begin{aligned} \text{Dom } f &= \{x \in \mathbb{R} : q(x) \neq 0\} \\ &= \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} : q(x) = 0\} \end{aligned}$$

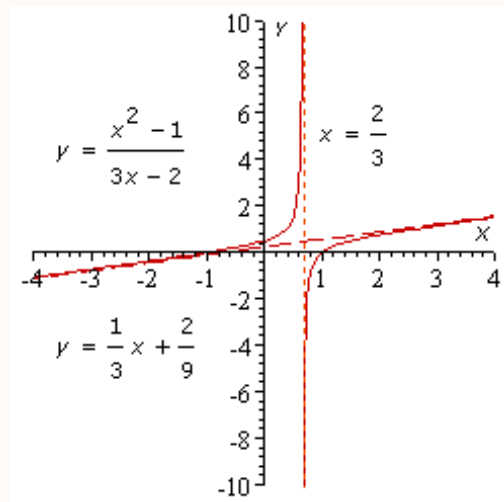
En l'exemple anterior, el valor $x = \frac{2}{3}$ no té imatge i, per tant,

$$\begin{aligned} \text{Dom } f &= \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} : 3x - 2 = 0\} \\ &= \mathbb{R} - \left\{\frac{2}{3}\right\} \end{aligned}$$

Si s'efectua la representació gràfica d'una funció racional caldrà prendre la precaució de assenyalar els punts x que no tenen imatge. De moment, per a efectuar la representació gràfica de la funció

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{3x - 2}$$

podem utilitzar una taula de valors i assenyalar el valor $x = \frac{2}{3}$. Cap valor de y associat a $\frac{2}{3}$ pot ser punt de la gràfica, és a dir, no és possible que la recta vertical $x = \frac{2}{3}$ talli la gràfica de la funció. Com que el valor $\frac{2}{3}$ no es pot donar, tractarem de completar la taula amb valors pròxims a aquest punt. En la figura següent es mostra la gràfica d'aquesta funció



En aquesta gràfica hem dibuixat també la recta

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}$$

a la que les branques de la gràfica s'aproximen a mesura que x augmenta o disminueix indefinidament. Veurem en un altre apartat el significat d'aquesta recta així com el de la recta

$$x = \frac{2}{3}$$

2 Pràctica

En aquest capítol es recullen exercicis resolts que permeten consolidar els conceptes principals de la teoria. Cada exercici presenta primer l'enunciat i, a continuació, la solució. L'enunciat no conté cap entorn de solució.

2.1 Definicions. Anell dels polinomis

Exercici 2.1

Indica quines de les expressions següents són monomis i, en cas afirmatiu, indica'l seu grau i coeficient.

$$\begin{array}{llll} a) -4x^3 & b) -\frac{25}{x^3} & c) -\frac{2y^4}{3} & d) -\frac{1}{2} \\ e) 3z^3 - 2z^2 & f) 4\sqrt[3]{x^2} & g) 4\sqrt{2}t & h) -2x^2 + x^2 \end{array}$$

Solució

a) Es tracta d'un monomi en la indeterminada x de grau 3 i coeficient -4 .

b) No es tracta d'un monomi perquè

$$-\frac{25}{x^3} = -25x^{-3}$$

i l'exponent de x no és un nombre natural.

c) Es tracta d'un monomi en la indeterminada y de grau 4 i coeficient $-\frac{2}{3}$, ja que

$$-\frac{2y^4}{3} = -\frac{2}{3}y^4$$

d) Es tracta d'un monomi de grau zero i coeficient $-\frac{1}{2}$ en una certa indeterminada.

e) Per la forma de l'expressió, no es tracta d'un monomi; en realitat és un binomi, és a dir, la suma de dos monomis, $3z^3$ i $-2z^2$.

f) No es tracta d'un monomi perquè

$$4\sqrt[3]{x^2} = 4x^{\frac{2}{3}}$$

i l'exponent de x no és un nombre natural.

- g) Es tracta d'un monomi en la indeterminada t de grau 1 i coeficient $4\sqrt{2}$.
 h) Es tracta d'un monomi en la indeterminada x de grau 2 i i coeficient -1 , perquè

$$-2x^2 + x^2 = (-2 + 1)x^2 = -x^2$$

Exercici 2.2

Indica quines de les expressions següents són monomis en la indeterminada x , i, en cas afirmatiu, indica'n el grau i coeficient.

- a) $3x^3 \cdot x^2$ b) $3x^4 + x^2$ c) $-\frac{3x^5}{x^3}$ d) $\sqrt[3]{-\frac{x^9}{27}}$
 e) $3x^5 - \frac{x^5}{2}$ f) $-\frac{4x^3}{x^4}$ g) $(x^2 + x^3)^2$ h) $(3x^2 + x^2)^3$

Solució

- a) Es tracta d'un monomi de grau 5 i coeficient 3, ja que

$$3x^3 \cdot x^2 = 3x^5$$

- b) Per la forma de l'expressió, no es tracta d'un monomi; en realitat és un binomi de grau 4.

- c) Es tracta d'un monomi de grau 2 i coeficient -3 , perquè

$$-\frac{3x^5}{x^3} = -3x^2$$

- d) Es tracta d'un monomi de grau 3 i coeficient $-\frac{1}{3}$, perquè

$$\sqrt[3]{-\frac{x^9}{27}} = \sqrt[3]{\left(-\frac{x^3}{3}\right)^3} = -\frac{1}{3}x^3$$

- e) Es tracta d'un monomi de grau 5 i coeficient $\frac{5}{2}$, perquè

$$3x^5 - \frac{x^5}{2} = \left(3 - \frac{1}{2}\right)x^5 = \frac{5}{2}x^5$$

- f) No es tracta d'un monomi ja que

$$-\frac{4x^3}{x^4} = -4x^{3-4} = -4x^{-1}$$

és a dir, l'exponent de x no és un nombre natural.

- g) No es tracta d'un monomi, perquè

$$\begin{aligned}(x^2 + x^3)^2 &= (x^2)^2 + 2x^2 \cdot x^3 + (x^3)^2 \\ &= x^4 + 2x^5 + x^6\end{aligned}$$

és a dir, és un trinomi de grau 6.

- h) Es tracta d'un monomi de grau 6 i coeficient 64.

$$(3x^2 + x^2)^3 = (4x^2)^3 = 64x^6$$

Exercici 2.3

Indica quines de les expressions següents són polinomis en la indeterminada x i, en cas afirmatiu, quin és el seu grau, el seu coeficient de grau 3 i el seu terme independent:

$$a) -3x^3 + 4x^5 - 2x + \frac{1}{3} \qquad b) -x^3 + x^4 - \frac{1}{x} + 1$$

$$c) \sqrt{3}x - 4x^5 + \frac{3x}{11} \qquad d) 4x^5 - \sqrt{3x} + 2$$

Solució

a) Es tracta d'un polinomi de grau 5, perquè

$$\frac{1}{3} - 2x - 3x^3 + 4x^5$$

A més, el seu coeficient de grau 3 és -3 i el seu terme independent és $\frac{1}{3}$.

b) No es tracta d'un polinomi, perquè, el terme

$$\frac{1}{x} = x^{-1}$$

no és un monomi.

c) És un polinomi de grau 5, ja que

$$\sqrt{3}x - 4x^5 + \frac{3x}{11} = \left(\sqrt{3} + \frac{3}{11}\right)x - 4x^5$$

És clar que el coeficient de grau 3 és 0 i el seu terme independent és també 0.

d) No es tracta d'un polinomi, perquè el terme

$$-\sqrt{3x} = -\sqrt{3}x^{\frac{1}{2}}$$

no és un monomi.

Exercici 2.4

Per a cadascun dels polinomis següents indica quin dels anells de polinomis $\mathbb{Z}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$ o $\mathbb{R}[x]$ és el més petit que el conté:

$$\begin{array}{ll} a) 1 - x + x^2 + x^4 & b) 1 + x + \sqrt{3} \cdot x^2 \\ c) x - x^2 & d) \frac{1}{3}x + 4.25x^{10} \\ e) \sqrt{2} + \frac{3}{4}x - 5x^2 & \end{array}$$

Solució

a) Com que tots els coeficients del polinomi són nombres enters, es té

$$1 - x + x^2 + x^4 \in \mathbb{Z}[x]$$

b) Com que és el coeficient del monomi de grau més gran un nombre irracional, es té

$$1 + x + \sqrt{3} \cdot x^2 \in \mathbb{R}[x]$$

c) Com que tots els coeficients del polinomi són nombres enters, es té

$$x - x^2 \in \mathbb{Z}[x]$$

d) Observa que

$$\frac{1}{3}x + 4.25x^{10} = \frac{1}{3}x + \frac{17}{4}x^{10}$$

i com que són tots els coeficients del polinomi nombres racionals, es té

$$\frac{1}{3}x + 4.25x^{10} \in \mathbb{Q}[x]$$

e) Com que és el terme independent un nombre irracional, es té

$$\sqrt{2} + \frac{3}{4}x - 5x^2 \in \mathbb{R}[x]$$

Exercici 2.5

Redueix termes semblants i ordena en potències decreixents les següents expressions:

$$a) 3x - x^3 + 4x + 2x^3 - x^2 + 2x - 7x^2 + 4x^3 + 8$$

$$b) 4x^5 - 2x^3 + 3x^2 + \frac{1}{2}x^3 - x^5 + x^2 - 3$$

Solució

a)

$$\begin{aligned} & 3x - x^3 + 4x + 2x^3 - x^2 + 2x - 7x^2 + 4x^3 + 8 \\ = & 8 + (3 + 4 + 2)x - (1 + 7)x^2 + (-1 + 2 + 4)x^3 \\ = & 8 + 9x - 8x^2 + 5x^3 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} & 4x^5 - 2x^3 + 3x^2 + \frac{1}{2}x^3 - x^5 + x^2 - 3 \\ = & -3 + (3 + 1)x^2 + \left(-2 + \frac{1}{2}\right)x^3 + (4 - 1)x^5 \\ = & -3 + 4x^2 - \frac{3}{2}x^3 + 3x^5 \end{aligned}$$

Exercici 2.6

Troba m i n perquè els polinomis següents siguin iguals

$$\begin{aligned} p(x) &= (3 + m) \cdot x^2 + 7x + 21 \\ q(x) &= 7x^2 + (2 + n) \cdot x + 21 \end{aligned}$$

Solució

Sabem que dos polinomis són iguals si coincideixen els coeficients de tots els termes del mateix grau en un i l'altre polinomi. Així, tenim

$$\begin{aligned} 3 + m &= 7 \\ 7 &= 2 + n \end{aligned}$$

d'on $m = 4$ i $n = 5$.

Exercici 2.7

Existeixen valors de A, B i C perquè es compleixi la següent igualtat?

$$3x^2 - 8x + 10 = Ax^2 + Bx + A - Cx + Bx^2 + C$$

Solució

Agrupant termes semblants en un membre de la igualtat, obtenim

$$3x^2 - 8x + 10 = (A + B)x^2 + (B - C)x + A + C$$

Com que es tracta d'una igualtat de polinomis s'han de complir les següents equacions simultàniament

$$\begin{aligned} A + B &= 3 \\ B - C &= -8 \\ A + C &= 10 \end{aligned}$$

Raquestando les dues primeres, obtenim

$$A + C = 11$$

cosa que no és possible, ja que $A + C = 10$. Per consegüent, no hi ha valors de A, B i C perquè es compleixi la igualtat.

Exercici 2.8

Troba el valor numèric dels polinomis següents per als x indicats:

$$\begin{aligned} a) \quad p(x) &= 2 + \frac{3}{4}x - x^2 & x &= -1/3 \\ b) \quad q(x) &= \sqrt{3} + \sqrt{3}x^3 & x &= \sqrt{3} \\ c) \quad r(x) &= \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{5}x^3 & x &= -\sqrt{2} \end{aligned}$$

Solució

a)

$$\begin{aligned}
 p(-1/3) &= 2 + \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 \\
 &= 2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{9} \\
 &= \frac{59}{36}
 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
 q(\sqrt{3}) &= \sqrt{3} + \sqrt{3} (\sqrt{3})^3 \\
 &= \sqrt{3} + (\sqrt{3})^4 \\
 &= \sqrt{3} + 9
 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
 r(-\sqrt{2}) &= \frac{1}{3} (-\sqrt{2}) + \frac{1}{2} (-\sqrt{2})^2 + \frac{4}{5} (-\sqrt{2})^3 \\
 &= -\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{4}{5} \cdot (-2\sqrt{2}) \\
 &= -\frac{\sqrt{2}}{3} + 1 - \frac{8\sqrt{2}}{5} \\
 &= 1 - \frac{29\sqrt{2}}{15}
 \end{aligned}$$

Exercici 2.9

Calcula m perquè el valor numèric de $p(x) = 3x^6 + 7x^4 + mx^2 + 2mx + 1$ sigui 121 per a $x = 2$.

Solució

La condició imposada per l'enunciat és equivalent a escriure

$$p(2) = 121$$

Aleshores,

$$\begin{aligned}
 3 \cdot 2^6 + 7 \cdot 2^4 + m \cdot 2^2 + 2m \cdot 2 + 1 &= 121 \\
 192 + 112 + 4m + 4m + 1 &= 121 \\
 8m &= -184 \\
 m &= -23
 \end{aligned}$$

Exercici 2.10

Donats els polinomis

$$\begin{aligned}p(x) &= 3 - x + \frac{1}{2}x^2 \\q(x) &= 4 + 5x^3 + 6x^4 \\r(x) &= 3 - x^4\end{aligned}$$

calcula

$$\begin{aligned}a) & p(x) + q(x) - r(x) \\b) & p(x) - q(x) + r(x) \\c) & -p(x) + q(x) + r(x)\end{aligned}$$

Solució

a)

$$\begin{array}{rcll}p(x) & = & 3 & - x + \frac{1}{2}x^2 \\q(x) & = & 4 & + 5x^3 + 6x^4 \\-r(x) & = & -3 & + x^4 \\ \hline p(x) + q(x) - r(x) & = & 4 & - x + \frac{1}{2}x^2 + 5x^3 + 7x^4\end{array}$$

b)

$$\begin{array}{rcll}p(x) & = & 3 & - x + \frac{1}{2}x^2 \\-q(x) & = & -4 & - 5x^3 - 6x^4 \\r(x) & = & 3 & - x^4 \\ \hline p(x) - q(x) + r(x) & = & 2 & - x + \frac{1}{2}x^2 - 5x^3 - 7x^4\end{array}$$

c)

$$\begin{array}{rcll}-p(x) & = & -3 & + x - \frac{1}{2}x^2 \\q(x) & = & 4 & + 5x^3 + 6x^4 \\r(x) & = & 3 & - x^4 \\ \hline -p(x) + q(x) + r(x) & = & 4 & + x - \frac{1}{2}x^2 + 5x^3 + 5x^4\end{array}$$

Exercici 2.11

Troba el polinomi $p(x)$ que sumat amb $q(x) = 3 - x^2 + 5x^3$ dona el polinomi $r(x) = 8 + x^2 + 5x^3 + x^4$.

Solució

La condició de l'enunciat es tradueix de la manera següent:

$$\begin{aligned}p(x) + q(x) &= r(x) \\p(x) + (3 - x^2 + 5x^3) &= 8 + x^2 + 5x^3 + x^4 \\p(x) &= 8 + x^2 + 5x^3 + x^4 - (3 - x^2 + 5x^3) \\p(x) &= 8 + x^2 + 5x^3 + x^4 - 3 + x^2 - 5x^3 \\p(x) &= 5 + 2x^2 + x^4\end{aligned}$$

Exercici 2.12

Donats els polinomis

$$p(x) = \sqrt{3} + 5x - \sqrt{3}x^2$$

$$q(x) = -\sqrt{3} + 2\sqrt{3}x$$

$$r(x) = 2\sqrt{3} - 5\sqrt{3}x + x^3$$

calcula

$$a) -[p(x) + q(x)] + r(x)$$

$$b) p(x) - [p(x) + q(x) + r(x)]$$

$$c) q(x) - r(x)$$

$$d) p(x) + q(x) - r(x)$$

Solució

a) Com que

$$-[p(x) + q(x)] + r(x) = -p(x) - q(x) + r(x)$$

tenim

$$\begin{array}{rcll} -p(x) & = & -\sqrt{3} & -5x & +\sqrt{3}x^2 \\ -q(x) & = & \sqrt{3} & -2\sqrt{3}x & \\ r(x) & = & 2\sqrt{3} & -5\sqrt{3}x & +x^3 \\ \hline -p(x) - q(x) + r(x) & = & 2\sqrt{3} & -(5+7\sqrt{3})x & +\sqrt{3}x^2 + x^3 \end{array}$$

b) Com que

$$\begin{aligned} p(x) - [p(x) + q(x) + r(x)] &= p(x) - p(x) - q(x) - r(x) \\ &= -q(x) - r(x) \end{aligned}$$

tenim

$$\begin{aligned} -q(x) - r(x) &= -(-\sqrt{3} + 2\sqrt{3}x) - (2\sqrt{3} - 5\sqrt{3}x + x^3) \\ &= \sqrt{3} - 2\sqrt{3}x - 2\sqrt{3} + 5\sqrt{3}x - x^3 \\ &= -\sqrt{3} + 3\sqrt{3}x - x^3 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} q(x) - r(x) &= -\sqrt{3} + 2\sqrt{3}x - (2\sqrt{3} - 5\sqrt{3}x + x^3) \\ &= -\sqrt{3} + 2\sqrt{3}x - 2\sqrt{3} + 5\sqrt{3}x - x^3 \\ &= -3\sqrt{3} + 7\sqrt{3}x - x^3 \end{aligned}$$

d)

$$\begin{array}{rcll} p(x) & = & \sqrt{3} & +5x & -\sqrt{3}x^2 \\ q(x) & = & -\sqrt{3} & +2\sqrt{3}x & \\ -r(x) & = & -2\sqrt{3} & +5\sqrt{3}x & -x^3 \\ \hline p(x) + q(x) - r(x) & = & -2\sqrt{3} & +(5+7\sqrt{3})x & -\sqrt{3}x^2 - x^3 \end{array}$$

Exercici 2.13

Efectual producte de les parelles de polinomis indicades:

- a) $3 + x - x^2 + \sqrt{3}x^3$ i $x + 3x^2 - 5x^3$
 b) $\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}x^2 - \sqrt{2}x^3$ i $\sqrt{2}x + \sqrt{2}x^2$

Solució

a)

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{cccccccc}
 & & 3 & + & x & - & x^2 & + & \sqrt{3}x^3 \\
 & & & & x & + & 3x^2 & - & 5x^3 \\
 \hline
 3x & + & x^2 & - & x^3 & + & \sqrt{3}x^4 & & \\
 & & 9x^2 & + & 3x^3 & - & 3x^4 & + & 3\sqrt{3}x^5 \\
 & & & - & 15x^3 & - & 5x^4 & + & 5x^5 & - & 5\sqrt{3}x^6 \\
 \hline
 3x & + & 10x^2 & - & 13x^3 & + & (\sqrt{3}-8)x^4 & + & (3\sqrt{3}+5)x^5 & - & 5\sqrt{3}x^6
 \end{array}
 \end{array}$$

b) Com que

$$\begin{aligned}
 \sqrt{2}x + 2\sqrt{2}x^2 - \sqrt{2}x^3 &= \sqrt{2}x(1 + 2x - x^2) \\
 \sqrt{2}x + \sqrt{2}x^2 &= \sqrt{2}x(1 + x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{cccc}
 1 & + & 2x & - & x^2 \\
 & & 1 & + & x \\
 \hline
 1 & + & 2x & - & x^2 \\
 & & x & + & 2x^2 & - & x^3 \\
 \hline
 1 & + & 3x & + & x^2 & - & x^3
 \end{array}
 \end{array}$$

Aleshores,

$$\begin{aligned}
 &(\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}x^2 - \sqrt{2}x^3) \cdot (\sqrt{2}x + \sqrt{2}x^2) \\
 &= \sqrt{2}x(1 + 2x - x^2) \cdot \sqrt{2}x(1 + x) \\
 &= (\sqrt{2})^2 x^2 \cdot (1 + 3x + x^2 - x^3) \\
 &= 2x^2 \cdot (1 + 3x + x^2 - x^3) \\
 &= 2x^2 + 6x^3 + 2x^4 - 2x^5
 \end{aligned}$$

Exercici 2.14

Efectua els productes següents:

- a) $(x - 1) \cdot (x + 1)$
 b) $(x - a) \cdot (x + a)$
 c) $(x + 3) \cdot (x + 1) \cdot (x - 3)$
 d) $(-x - 1) \cdot (-x - 1)$

Solució

a) Es tracta d'una suma per diferència i, per tant, tenim

$$(x-1) \cdot (x+1) = x^2 - 1$$

b) Anàlogament, tenim

$$(x-a) \cdot (x+a) = x^2 - a^2$$

c) De la mateixa manera, tenim

$$\begin{aligned} (x+3) \cdot (x+1) \cdot (x-3) &= (x^2-9) \cdot (x+1) \\ &= x^3 + x^2 - 9x - 9 \end{aligned}$$

d) Es tracta del quadrat d'un binomi i, per tant, tenim

$$\begin{aligned} (-x-1) \cdot (-x-1) &= (-1)^2 \cdot (x+1)^2 \\ &= x^2 + 2x + 1 \end{aligned}$$

Exercici 2.15

Donats els polinomis

$$p(x) = x^3 - \sqrt{2}x + 3$$

$$q(x) = 2x - 7x^3$$

$$r(x) = 1 + x^2$$

calcula

$$a) 2 \cdot p(x) - q(x) + r(x)$$

$$b) p(x) \cdot q(x) - 2 \cdot p(x)$$

$$c) p(x) \cdot p(x) - q(x) \cdot q(x)$$

$$d) p(x) \cdot r(x) - q(x) \cdot r(x)$$

Solució

a)

$$\begin{aligned} 2 \cdot p(x) - q(x) + r(x) &= 2(x^3 - \sqrt{2}x + 3) - (2x - 7x^3) + 1 + x^2 \\ &= 2x^3 - 2\sqrt{2}x + 6 - 2x + 7x^3 + 1 + x^2 \\ &= (2+7)x^3 + x^2 - (2\sqrt{2}+2)x + 6+1 \\ &= 9x^3 + x^2 - (2\sqrt{2}+2)x + 7 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} p(x) \cdot q(x) - 2 \cdot p(x) &= (x^3 - \sqrt{2}x + 3) \cdot (2x - 7x^3) - 2(x^3 - \sqrt{2}x + 3) \\ &= 2x^4 - 7x^6 - 2\sqrt{2}x^2 + 7\sqrt{2}x^4 + 6x - 21x^3 - 2x^3 + 2\sqrt{2}x - 6 \\ &= -7x^6 + (2+7\sqrt{2})x^4 - 23x^3 - 2\sqrt{2}x^2 + (6+2\sqrt{2})x - 6 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
 p(x) \cdot p(x) - q(x) \cdot q(x) &= [p(x)]^2 - [q(x)]^2 \\
 &= (x^3 - \sqrt{2}x + 3)^2 - (2x - 7x^3)^2 \\
 &= -48x^6 + (28 - 2\sqrt{2})x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 6\sqrt{2}x + 9
 \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
 p(x) \cdot r(x) - q(x) \cdot r(x) &= [p(x) - q(x)] \cdot r(x) \\
 &= (x^3 - \sqrt{2}x + 3 - 2x + 7x^3) \cdot (1 + x^2) \\
 &= [8x^3 - (2 + \sqrt{2})x + 3] \cdot (1 + x^2) \\
 &= 8x^5 + (6 - \sqrt{2})x^3 + 3x^2 - (2 + \sqrt{2})x + 3
 \end{aligned}$$

Exercici 2.16

Efectua les operacions següents:

$$\begin{aligned}
 a) & x \cdot (x^2 - 5)^2 - (x + 1) \cdot (x + 3)^2 \\
 b) & \left(\frac{2}{3}x + 5\right) \cdot \left(\frac{2}{3}x - 5\right) - \left(\frac{1}{3}x + 5\right)^2 \\
 c) & (3x + 5) \cdot (x^2 - x + 3) - (2x + 5) \cdot (x^2 - x + 3)
 \end{aligned}$$

Solució

a)

$$\begin{aligned}
 x \cdot (x^2 - 5)^2 - (x + 1) \cdot (x + 3)^2 &= x \cdot (x^4 - 10x^2 + 25) - (x + 1) \cdot (x^2 + 6x + 9) \\
 &= x^5 - 10x^3 + 25x - x^3 - 6x^2 - 9x - x^2 - 6x - 9 \\
 &= x^5 - 11x^3 - 7x^2 + 10x - 9
 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{2}{3}x + 5\right) \cdot \left(\frac{2}{3}x - 5\right) - \left(\frac{1}{3}x + 5\right)^2 &= \frac{4}{9} \cdot x^2 - 25 - \frac{1}{9} \cdot x^2 - \frac{10}{3} \cdot x - 25 \\
 &= \frac{1}{3} \cdot x^2 - \frac{10}{3} \cdot x - 50
 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
 (3x + 5) \cdot (x^2 - x + 3) - (2x + 5) \cdot (x^2 - x + 3) &= (3x + 5 - 2x - 5) \cdot (x^2 - x + 3) \\
 &= x \cdot (x^2 - x + 3) \\
 &= x^3 - x^2 + 3x
 \end{aligned}$$

2.2 Potència d'un binomi. Fórmula de Newton

Exercici 2.17

Calcula

$$a) (3x - 1)^3 \quad b) \left(\sqrt{2} + \frac{3}{x}\right)^4 \quad c) (2\sqrt{2} + 3\sqrt{3})^4 \quad d) \left(\sqrt{2}x + \frac{x^2}{2}\right)^3$$

Solució

a) Mitjançant la fórmula de Newton, obtenim

$$\begin{aligned} (3x - 1)^3 &= \binom{3}{0}(3x)^3 + \binom{3}{1}(3x)^2 \cdot (-1) + \binom{3}{2}3x \cdot (-1)^2 + \binom{3}{3}(-1)^3 \\ &= \binom{3}{0} \cdot 27x^3 - \binom{3}{1} \cdot 9x^2 + \binom{3}{2} \cdot 3x - \binom{3}{3} \end{aligned}$$

Ara calcularem els nombres combinatoris mitjançant el triangle de Tartaglia

$$\begin{array}{cccc} & & 1 & & 1 \\ & 1 & & 2 & & 1 \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \end{array}$$

Aleshores,

$$(3x - 1)^3 = 27x^3 - 27x^2 + 9x - 1$$

b) Mitjançant la fórmula de Newton, obtenim

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{2} + \frac{3}{x}\right)^4 &= \binom{4}{0}(\sqrt{2})^4 + \binom{4}{1}(\sqrt{2})^3 \cdot \frac{3}{x} + \binom{4}{2}(\sqrt{2})^2 \cdot \left(\frac{3}{x}\right)^2 + \binom{4}{3}\sqrt{2} \cdot \left(\frac{3}{x}\right)^3 + \binom{4}{4}\left(\frac{3}{x}\right)^4 \\ &= \binom{4}{0} \cdot 4 + \binom{4}{1} \cdot \frac{6\sqrt{2}}{x} + \binom{4}{2} \cdot \frac{18}{x^2} + \binom{4}{3} \cdot \frac{27\sqrt{2}}{x^3} + \binom{4}{4} \cdot \frac{81}{x^4} \end{aligned}$$

Ara calcularem els nombres combinatoris mitjançant el triangle de Tartaglia

$$\begin{array}{cccccc} & & & 1 & & 1 \\ & & 1 & & 2 & & 1 \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

Aleshores,

$$\left(\sqrt{2} + \frac{3}{x}\right)^4 = 4 + \frac{24\sqrt{2}}{x} + \frac{108}{x^2} + \frac{108\sqrt{2}}{x^3} + \frac{81}{x^4}$$

c) De la mateixa manera, obtenim

$$\begin{aligned} (2\sqrt{2} + 3\sqrt{3})^4 &= \binom{4}{0}(2\sqrt{2})^4 + \binom{4}{1}(2\sqrt{2})^3 \cdot 3\sqrt{3} + \binom{4}{2}(2\sqrt{2})^2 \cdot (3\sqrt{3})^2 + \binom{4}{3}2\sqrt{2} \cdot (3\sqrt{3})^3 + \binom{4}{4}(3\sqrt{3})^4 \\ &= 64 + 192\sqrt{6} + 1296 + 648\sqrt{6} + 729 \\ &= 2089 + 840\sqrt{6} \end{aligned}$$

d) De la mateixa manera, obtenim

$$\begin{aligned}
 \left(\sqrt{2}x + \frac{x^2}{2}\right)^3 &= \left[\left(\sqrt{2} + \frac{x}{2}\right) \cdot x\right]^3 \\
 &= x^3 \cdot \left(\sqrt{2} + \frac{x}{2}\right)^3 \\
 &= x^3 \cdot \left[\binom{3}{0}(\sqrt{2})^3 + \binom{3}{1}(\sqrt{2})^2 \cdot \frac{x}{2} + \binom{3}{2}\sqrt{2} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \binom{3}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^3\right] \\
 &= x^3 \cdot \left(2\sqrt{2} + 3x + \frac{3\sqrt{2}}{4}x^2 + \frac{1}{8}x^3\right) \\
 &= 2\sqrt{2} \cdot x^3 + 3 \cdot x^4 + \frac{3\sqrt{2}}{4} \cdot x^5 + \frac{1}{8} \cdot x^6
 \end{aligned}$$

Exercici 2.18

Calcula

$$\begin{aligned}
 a) & \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} \\
 b) & \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^{n-1} \cdot \binom{n}{n-1} + (-1)^n \cdot \binom{n}{n}
 \end{aligned}$$

Solució

a) Observa que es compleix

$$(1+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$$

Aleshores,

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$$

b) De la mateixa manera, tenim

$$(1-1)^n = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^{n-1} \cdot \binom{n}{n-1} + (-1)^n \cdot \binom{n}{n}$$

Aleshores,

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots + (-1)^{n-1} \cdot \binom{n}{n-1} + (-1)^n \cdot \binom{n}{n} = 0$$

Exercici 2.19

Del desenvolupament de $\left(2x + \frac{1}{2}\right)^{15}$ calcula: (a) el terme quart, (b) el terme independent, i (c) el coeficient del terme de lloc 14.

Solució

Recorda que el terme k -èsim del desenvolupament $(A + B)^n$ ve donat per

$$t_k = \binom{n}{k-1} \cdot A^{n-(k-1)} \cdot B^{k-1}$$

a)

$$\begin{aligned} t_4 &= \binom{15}{4-1} \cdot (2x)^{15-(4-1)} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{4-1} \\ &= \binom{15}{3} \cdot 2^{12} \cdot x^{12} \cdot \frac{1}{2^3} \\ &= 455 \cdot 2^9 \cdot x^{12} \\ &= 232960 \cdot x^{12} \end{aligned}$$

perquè,

$$\binom{15}{3} = \frac{15!}{3! \cdot (15-3)!} = 455$$

b) El terme independent és aquell que no conté x . Per tant, com el terme general és donat per l'expressió

$$t_k = \binom{15}{k-1} \cdot (2x)^{15-(k-1)} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

cal complir-se

$$\begin{aligned} 15 - (k-1) &= 0 \\ k &= 16 \end{aligned}$$

Com era d'esperar, en aquest cas el terme independent és l'últim terme. Aleshores,

$$\begin{aligned} t_{16} &= \binom{15}{15} \cdot (2x)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{15} \\ &= \frac{1}{2^{15}} \end{aligned}$$

c) El terme de lloc 14 vindrà donat per

$$\begin{aligned} t_{14} &= \binom{15}{14-1} \cdot (2x)^{15-(14-1)} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{14-1} \\ &= \binom{15}{13} \cdot (2x)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{13} \\ &= \binom{15}{13} \cdot \frac{1}{2^{11}} \cdot x^2 \end{aligned}$$

i, per tant, el seu coeficient és

$$\binom{15}{13} \cdot \frac{1}{2^{11}} = \frac{105}{2048}$$

Exercici 2.20

De la potència del binomi $\left(3x - \frac{1}{3x}\right)^6$ escriu el terme general del seu desenvolupament per la fórmula de Newton. Troba el terme tercer i el central.

Solució

El terme k -èsim del desenvolupament $(A + B)^n$ ve donat per

$$t_k = \binom{n}{k-1} \cdot A^{n-(k-1)} \cdot B^{k-1}$$

Aleshores, en el nostre cas, és

$$\begin{aligned} t_k &= \binom{6}{k-1} \cdot (3x)^{6-(k-1)} \cdot \left(-\frac{1}{3x}\right)^{k-1} \\ &= (-1)^{k-1} \cdot \binom{6}{k-1} \cdot (3x)^{7-k} \cdot \frac{1}{(3x)^{k-1}} \\ &= (-1)^{k-1} \cdot \binom{6}{k-1} \cdot (3x)^{8-2k} \end{aligned}$$

Aleshores, el terme tercer és

$$\begin{aligned} t_3 &= (-1)^{3-1} \cdot \binom{6}{3-1} \cdot (3x)^{8-6} \\ &= \binom{6}{2} \cdot (3x)^2 \\ &= 135x^2 \end{aligned}$$

Com que el desenvolupament conté set termes, el terme central és el quart terme. Per tant,

$$\begin{aligned} t_4 &= (-1)^{4-1} \cdot \binom{6}{4-1} \cdot (3x)^{8-8} \\ &= -\binom{6}{3} \\ &= -20 \end{aligned}$$

Exercici 2.21

Del desenvolupament de $(x - 1)^{200}$ calcula: (a) el terme de lloc 198, (b) l'últim terme, i (c) el terme en què apareix x^{198} .

Solució

El terme k -èsim del desenvolupament $(A + B)^n$ ve donat per

$$t_k = \binom{n}{k-1} \cdot A^{n-(k-1)} \cdot B^{k-1}$$

a) Aleshores, el terme de lloc 198 és

$$\begin{aligned} t_{198} &= \binom{200}{197} \cdot x^{200-197} \cdot (-1)^{197} \\ &= -\binom{200}{197} \cdot x^3 \end{aligned}$$

b) L'últim terme és el de lloc 201 i, per tant, tenim

$$\begin{aligned} t_{201} &= \binom{200}{200} \cdot x^{200-200} \cdot (-1)^{200} \\ &= \binom{200}{200} = 1 \end{aligned}$$

c) Per a calcular el terme en què apareix x^{198} , primer, calculem el terme general

$$t_k = \binom{200}{k-1} \cdot x^{200-(k-1)} \cdot (-1)^{k-1}$$

Aleshores, s'ha de complir que

$$\begin{aligned} 200 - (k-1) &= 198 \\ k &= 3 \end{aligned}$$

Aleshores, el terme demanat és

$$\begin{aligned} t_3 &= \binom{200}{2} \cdot x^{200-2} \cdot (-1)^2 \\ &= \binom{200}{2} \cdot x^{198} \end{aligned}$$

Exercici 2.22

Troba el terme de lloc 16 en el desenvolupament de $(\sqrt{3} - \sqrt[5]{3})^{19}$, expressant-lo de la manera més senzill possible.

Solució

El terme k -èsim del desenvolupament $(A + B)^n$ ve donat per

$$t_k = \binom{n}{k-1} \cdot A^{n-(k-1)} \cdot B^{k-1}$$

Per tant, en el nostre cas, obtenim

$$\begin{aligned}
 t_{16} &= \binom{19}{15} \cdot (\sqrt{3})^{19-15} \cdot (-\sqrt[5]{3})^{15} \\
 &= -\binom{19}{15} \cdot (\sqrt{3})^4 \cdot (\sqrt[5]{3})^{15} \\
 &= -\binom{19}{15} \cdot 3^2 \cdot 3^3 \\
 &= -\binom{19}{15} \cdot 3^5
 \end{aligned}$$

2.3 Divisió de polinomis. Algorisme d'Euclides

Exercici 2.23

Calcula el quocient i el residu de les divisions següents

- a) $(3x^2 + 2x - 7) : (x^2 + 3)$
- b) $(x^3 + 5x - 6) : (2x + 3)$
- c) $(4x^4 - 1) : (3x^2 + 5x + 3)$
- d) $(\frac{3}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - 7) : (x^2 + x - 1)$
- e) $(x^5 - 1) : (x + 1)$

Solució

a) Observa que

$$\begin{array}{r|l}
 3x^2 + 2x - 7 & x^2 + 3 \\
 -3x^2 & -9 \\
 \hline
 & 2x - 16
 \end{array}$$

i, per tant, el quocient és 3, i el residu, $2x - 16$.

b) De la mateixa manera,

$$\begin{array}{r|l}
 x^3 + 0x^2 + 5x - 6 & 2x + 3 \\
 -x^3 - \frac{3}{2}x^2 & \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{29}{8} \\
 \hline
 & -\frac{3}{2}x^2 + 5x \\
 & \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{4}x \\
 & \hline
 & \frac{29}{4}x - 6 \\
 & -\frac{29}{4}x - \frac{87}{8} \\
 & \hline
 & -\frac{135}{8}
 \end{array}$$

i, per tant, el quocient és

$$\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{29}{8}$$

i el residu, és $-135/8$.

Exercici 2.24

Troba un polinomi de tercer grau que dividit per $x + 1$ dé de quocient $x^2 + 3$ i residu -2 .

Solució

Si $p(x)$ és el polinomi que dividit per $x + 1$ dona com a quocient $x^2 + 3$ i com a residu -2 , aleshores s'ha de complir la següent condició:

$$\begin{aligned} p(x) &= (x + 1) \cdot (x^2 + 3) - 2 \\ &= x^3 + 3x + x^2 + 3 - 2 \\ &= x^3 + x^2 + 3x + 1 \end{aligned}$$

Exercici 2.25

Esbrinar si les divisions següents són o no exactes:

- a) $(x^2 + 2x + 1) : (x + 1)$
- b) $(x^3 - 3x^2 + x - 3) : (x^2 + 1)$
- c) $(x^3 + 2x^2 + \frac{15}{4}x + \frac{9}{4}) : (x^2 + \frac{1}{2}x + 3)$

Solució

Un mètode per a esbrinar si la divisió és exacta o no és efectuarla i veure si el residu és zero o no. Tanmateix, aquí no procedirem així i, en el seu lloc, farem servir altres alternatives més senzilles.

a) Es evident que la divisió de $x^2 + 2x + 1$ per $x + 1$ és exacta, perquè, $x^2 + 2x + 1$ és un múltiple de $x + 1$ al complir-se

$$x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2 = (x + 1) \cdot (x + 1)$$

b) Si la divisió de $x^3 - 3x^2 + x - 3$ per $x^2 + 1$ fos exacta, existiria un polinomi de primer grau (quocient) $c(x) = ax + b$ tal que

$$\begin{aligned} x^3 - 3x^2 + x - 3 &= (x^2 + 1)(ax + b) \\ &= ax^3 + bx^2 + ax + b \end{aligned}$$

i, per tant, caldria complir-se

$$a = 1 \quad \text{i} \quad b = -3$$

Com que existeixen aquests coeficients, podem assegurar que la divisió és exacta i, a més, es compleix

$$x^3 - 3x^2 + x - 3 = (x^2 + 1) \cdot (x - 3)$$

c) Anàlogament, si la divisió de

$$x^3 + 2x^2 + \frac{15}{4}x + \frac{9}{4}$$

per

$$x^2 + \frac{1}{2}x + 3$$

fos exacta, existiria un polinomi de primer grau (quocient) $c(x) = ax + b$ tal que

$$\begin{aligned} x^3 + 2x^2 + \frac{15}{4}x + \frac{9}{4} &= \left(x^2 + \frac{1}{2}x + 3\right) \cdot (ax + b) \\ &= ax^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3ax + bx^2 + \frac{b}{2}x + 3b \\ &= ax^3 + \left(\frac{1}{2} + b\right)x^2 + \left(3a + \frac{b}{2}\right)x + 3b \end{aligned}$$

i, per tant, caldria complir-se simultàniament les següents equacions

$$\begin{aligned} a &= 1 \\ \frac{1}{2} + b &= 2 \\ 3a + \frac{b}{2} &= \frac{15}{4} \\ 3b &= \frac{9}{4} \end{aligned}$$

Ara bé, la segona i la quarta són incompatibles, perquè, de la segona es dedueix $b = 3/2$ i, de la quarta, $b = 3/4$, resultando dos valors diferents per a b . Per consegüent, la divisió en aquest cas no és exacta.

Exercici 2.26

Calcula a perquè $x^3 - 3x^2 + x - a$ sigui divisible per $x^2 + 1$.

Solució

Si $x^3 - 3x^2 + x - a$ és divisible per $x^2 + 1$ significa que la divisió de $x^3 - 3x^2 + x - a$ per $x^2 + 1$ és exacta i, en conseqüència, existeix un polinomi de primer grau (quocient) $c(x) = mx + n$ tal que

$$\begin{aligned} x^3 - 3x^2 + x - a &= (x^2 + 1) \cdot (mx + n) \\ &= mx^3 + nx^2 + mx + n \end{aligned}$$

Aleshores, s'han de satisfer conjuntament les següents condicions

$$\begin{aligned} m &= 1 \\ n &= -3 \\ n &= -a \end{aligned}$$

i, per tant, $a = 3$.

Exercici 2.27

Donat el polinomi $3x^5 + 7x^2 - 5$, troba el seu polinomi mònic.

Solució

Recorda que un polinomi s'anomena mònic si el coeficient del monomi de grau més gran és igual a la unitat. És clar que

$$3x^5 + 7x^2 - 5 = 3 \left(x^5 + \frac{7}{3}x^2 - \frac{5}{3} \right)$$

i, per tant,

$$x^5 + \frac{7}{3}x^2 - \frac{5}{3}$$

és el polinomi mònic de $3x^5 + 7x^2 - 5$.

Exercici 2.28

Utilitzant l'algorisme d'Euclides, calcula m.c.d. i m.c.m. dels polinomis $p(x)$ i $q(x)$, en els casos següents:

- a) $p(x) = x^4 - 5x^2 + 6$ i $q(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3$
 b) $p(x) = x^6 + x^4 - x^2 - 1$ i $q(x) = x^5 - x^4 - x + 1$
 c) $p(x) = x^3 + \sqrt{2}x^2 + 3x + 3\sqrt{2}$ i $q(x) = x^2 + 2$

Solució

Recorda que l'algorisme d'Euclides consisteix a fer divisions successives, de manera que

$$\begin{aligned} \text{m.c.d.}(p(x), q(x)) &= \text{m.c.d.}(q(x), r_1(x)) \\ &= \text{m.c.d.}(r_1(x), r_2(x)) \\ &\dots \\ &= \text{m.c.d.}(r_{n-1}(x), r_n(x)) \\ &= r_{n-1}^*(x) \end{aligned}$$

essent $r_n(x)$ un nombre real i $r_{n-1}^*(x)$ el polinomi mònic de $r_{n-1}(x)$. Un cop calculat el m.c.d., calcularem m.c.m. mitjançant

$$\text{m.c.m.}(p(x), q(x)) = \frac{1}{a_n \cdot b_m} \frac{p(x) \cdot q(x)}{\text{m.c.d.}(p(x), q(x))}$$

a)

x^4	0	$-5x^2$	0	$+6$	x	-1	x	$+1$
$-x^4$	$-x^3$	$+3x^2$	$+3x$		x^3	$+x^2$	x^2	-3
					$-x^3$	$+3x$		
/	$-x^3$	$-2x^2$	$+3x$	$+6$	/	x^2	0	-3
	x^3	x^2	$-3x$	-3		$-x^2$		$+3$
	/	$-x^2$	0	3	/	/	/	
		x^2	-3					

Per tant, tenim

$$\begin{aligned} \text{m.c.d.} (x^4 - 5x^2 + 6, x^3 + x^2 - 3x - 3) &= \text{m.c.d.} (x^3 + x^2 - 3x - 3, x^2 - 3) \\ &= \text{m.c.d.} (x^2 - 3, 0) \\ &= x^2 - 3 \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} \text{m.c.m.} (x^4 - 5x^2 + 6, x^3 + x^2 - 3x - 3) &= \frac{(x^4 - 5x^2 + 6) \cdot (x^3 + x^2 - 3x - 3)}{x^2 - 3} \\ &= x^5 - 5x^3 + x^4 - 5x^2 + 6x + 6 \end{aligned}$$

b)

x^6	0	$+x^4$	0	$-x^2$	0	-1	x	$+1$	x	-1
$-x^6$	$+x^5$			$+x^2$	$-x$		x^5	$-x^4$	0	0
	x^5	$+x^4$	0		$-x$	-1	$-x^5$	$+x$		1
$\swarrow$	$-x^5$	$+x^4$			$+x$	-1	$\swarrow$	$-x^4$	0	0
		$2x^4$	0	0	0	-2		x^4		-1
	$\swarrow$	x^4				-1	$\swarrow$		0	

Aleshores,

$$\begin{aligned} \text{m.c.d.} (x^6 + x^4 - x^2 - 1, x^5 - x^4 - x + 1) &= \text{m.c.d.} (x^3 + x^2 - 3x - 3, x^5 - x^4 - x + 1) \\ &= \text{m.c.d.} (x^5 - x^4 - x + 1, x^4 - 1) \\ &= \text{m.c.d.} (x^4 - 1, 0) \\ &= x^4 - 1 \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} \text{m.c.m.} (x^6 + x^4 - x^2 - 1, x^5 - x^4 - x + 1) &= \frac{(x^6 + x^4 - x^2 - 1) \cdot (x^5 - x^4 - x + 1)}{x^4 - 1} \\ &= x^7 + x^5 - x^6 - x^4 - x^3 - x + x^2 + 1 \end{aligned}$$

c)

x^3	$+\sqrt{2}x^2$	$+3x$	$+3\sqrt{2}$	x	$+\sqrt{2}$	x	$-\sqrt{2}$	x	$+\sqrt{2}$
$-x^3$		$-2x$		x^2	0	x	$+\sqrt{2}$	1	
			$+3\sqrt{2}$	$-x^2$	$-\sqrt{2}x$	$-x$	$-\sqrt{2}$		
$\swarrow$	$\sqrt{2}x^2$	$+x$	$+3\sqrt{2}$	$\swarrow$	$-\sqrt{2}x$	$+2$	0		
	$-\sqrt{2}x^2$		$-2\sqrt{2}$		$\sqrt{2}x$	$+2$			
	$\swarrow$	x	$+\sqrt{2}$		4				
					1				

Aleshores, tenim

$$\begin{aligned} \text{m.c.d.} (x^3 + \sqrt{2}x^2 + 3x + 3\sqrt{2}, x^2 + 2) &= \text{m.c.d.} (x^2 + 2, x + \sqrt{2}) \\ &= \text{m.c.d.} (x + \sqrt{2}, 1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Observa que els dos polinomis són primers entre si i, per tant,

$$\begin{aligned}\text{m.c.m.} \left(x^3 + \sqrt{2}x^2 + 3x + 3\sqrt{2}, x^2 + 2 \right) &= \left(x^3 + \sqrt{2}x^2 + 3x + 3\sqrt{2} \right) \cdot (x^2 + 2) \\ &= x^5 + 5x^3 + \sqrt{2}x^4 + 5\sqrt{2}x^2 + 6x + 6\sqrt{2}\end{aligned}$$

Exercici 2.29

Calcula a i b perquè el polinomi m.c.d. de $p(x) = x^2 + ax + b$ i $q(x) = x^2 - 9$ sigui $x + 3$. Hi ha una única solució?

Solució

Segons el enunciat, tenim que

$$\text{m.c.d.} \left(x^2 + ax + b, x^2 - 9 \right) = x + 3$$

Per tant, $x^2 + ax + b$ i $x^2 - 9$ han de ser divisibles per $x + 3$. Es és clar que

$$x^2 - 9 = (x + 3) \cdot (x - 3)$$

i, per tant, cal verificar-se

$$\begin{aligned}x^2 + ax + b &= (x + 3) \cdot (x + k) \\ &= x^2 + (k + 3)x + 3k\end{aligned}$$

i, d'aquí, es dedueix que s'han de complir les relacions següents

$$\begin{aligned}k + 3 &= a \\ 3k &= b\end{aligned}$$

és a dir,

$$3(a - 3) = b$$

Per consegüent, hi ha més d'una solució. Per exemple, si fem $a = 1$, aleshores $b = -6$, i es compleix

$$\text{m.c.d.} \left(x^2 + x - 6, x^2 - 9 \right) = x + 3$$

Exercici 2.30

És divisible $p(x) = 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$ per $q(x) = x^3 + 1$? Calcula el m.c.d. i el m.c.m. de tots dos polinomis.

Solució

Com que és $p(x)$ i $q(x)$ del mateix grau, és evident que $p(x)$ no és divisible per $q(x)$. Per l'algorisme d'Euclides, tenim

$$\begin{array}{r|rrrr|rrrr|rrrr|rrrr}
 & & & & 2 & & & & x & -\frac{2}{3} & & x & -\frac{1}{3} \\
 2x^3 & +3x^2 & +2x & +1 & x^3 & 0 & 0 & 1 & x^2 & +\frac{2}{3}x & -\frac{1}{3} & x & +1 \\
 -2x^3 & & & -2 & -x^3 & -\frac{2}{3}x^2 & +\frac{1}{3}x & & -x^2 & -x & & & \\
 \hline
 / & 3x^2 & +2x & -1 & / & -\frac{2}{3}x^2 & +\frac{1}{3}x & 1 & / & -\frac{1}{3}x & -\frac{1}{3} & & \\
 & x^2 & +\frac{2}{3}x & -\frac{1}{3} & & \frac{2}{3}x^2 & +\frac{4}{9}x & -\frac{2}{9} & & \frac{1}{3}x & +\frac{1}{3} & & \\
 & & & & & \hline
 & & & & & / & \frac{7}{9}x & +\frac{7}{9} & & / & 0 & & \\
 & & & & & & x & +1 & & & & &
 \end{array}$$

Per tant, tenim

$$\begin{aligned}
 \text{m.c.d.} \left(2x^3 + 3x^2 + 2x + 1, x^3 + 1 \right) &= \text{m.c.d.} \left(x^3 + 1, x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} \right) \\
 &= \text{m.c.d.} \left(x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}, x + 1 \right) \\
 &= \text{m.c.d.} (x + 1, 0) \\
 &= x + 1
 \end{aligned}$$

D'altra banda, tenim

$$\begin{aligned}
 \text{m.c.m.} \left(2x^3 + 3x^2 + 2x + 1, x^3 + 1 \right) &= \frac{1(2x^3 + 3x^2 + 2x + 1)(x^3 + 1)}{x + 1} \\
 &= x^5 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

2.4 Regla de Ruffini i teorema del residu

Exercici 2.31

Utiliza la regla de Ruffini per a determinar el quocient i el residu de les següents divisions:

- a) $(x^5 - x^3 - x - 1) : (x - 3)$
- b) $(x^3 - 4) : \left(x - \frac{1}{2}\right)$
- c) $(x^4 - 3) : (x - \sqrt{3})$
- d) $(x^3 - 2x^2 + 5) : \left(x - \frac{1}{3}\right)$

Solució

a) Mitjançant la regla de Ruffini, tenim

$$\begin{array}{r|rrrrrr}
 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\
 3 & & 3 & 9 & 24 & 72 & 213 \\
 \hline
 & 1 & 3 & 8 & 24 & 71 & 212
 \end{array}$$

i, per tant, el quocient és $c(x) = x^4 + 3x^3 + 8x^2 + 24x + 71$, i el residu, $r(x) = 212$.

b) Mitjançant la regla de Ruffini, tenim

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & 0 & -4 \\ \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ \hline & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{31}{8} \end{array}$$

i, per tant, el quocient és $c(x) = x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$, i el residu, $r(x) = -\frac{31}{8}$.

c) Mitjançant la regla de Ruffini, tenim

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ \sqrt{3} & & \sqrt{3} & 3 & 3\sqrt{3} & 9 \\ \hline & 1 & \sqrt{3} & 3 & 3\sqrt{3} & 6 \end{array}$$

i, per tant, el quocient és $c(x) = x^3 + \sqrt{3}x^2 + 3x + 3\sqrt{3}$, i el residu, $r(x) = 6$.

d) Mitjançant la regla de Ruffini, tenim

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & 0 & 5 \\ \frac{1}{3} & & \frac{1}{3} & -\frac{5}{9} & -\frac{5}{27} \\ \hline & 1 & -\frac{5}{3} & -\frac{5}{9} & \frac{130}{27} \end{array}$$

i, per tant, el quocient és $c(x) = x^2 - \frac{5}{3}x - \frac{5}{9}$, i el residu, $r(x) = \frac{130}{27}$.

Exercici 2.32

Utilitza el teorema del residu per a determinar el residu de cada una de les següents divisions:

- a) $(x^2 + x + 1) : (x - \frac{1}{3})$
- b) $(x^3 - 2x + \sqrt{2}) : (x - \sqrt{2})$
- c) $(\frac{3}{4}x^5 + 8x - \frac{5}{7}) : (x + \frac{2}{3})$
- d) $(4x^4 + 5x^3 - 7x^2) : (x + 2)$

Solució

Recorda que, segons el teorema del residu, el valor numèric del polinomi $p(x)$ per a $x = a$ coincideix amb el residu de dividir $p(x)$ per $x - a$.

a) Si fem $p(x) = x^2 + x + 1$, aleshores el residu de la divisió per $x - \frac{1}{3}$ és

$$\begin{aligned} p\left(\frac{1}{3}\right) &= \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} + 1 \\ &= \frac{13}{9} \end{aligned}$$

b) Si fem $p(x) = x^3 - 2x + \sqrt{2}$, aleshores el residu de la divisió per $x - \sqrt{2}$ és

$$\begin{aligned} p(\sqrt{2}) &= (\sqrt{2})^3 - 2\sqrt{2} + \sqrt{2} \\ &= 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2} + \sqrt{2} \\ &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

c) Si fem $p(x) = \frac{3}{4}x^5 + 8x - \frac{5}{7}$, aleshores el residu de la divisió per $x + \frac{2}{3}$ és

$$\begin{aligned} p\left(-\frac{2}{3}\right) &= \frac{3}{4}\left(-\frac{2}{3}\right)^5 + 8\left(-\frac{2}{3}\right) - \frac{5}{7} \\ &= -\frac{8}{81} - \frac{16}{3} - \frac{5}{7} \\ &= -\frac{3485}{567} \end{aligned}$$

d) Si fem $p(x) = 4x^4 + 5x^3 - 7x^2$, aleshores el residu de la divisió per $x + 2$ és

$$\begin{aligned} p(-2) &= 4(-2)^4 + 5(-2)^3 - 7(-2)^2 \\ &= 64 - 40 - 28 \\ &= -4 \end{aligned}$$

Exercici 2.33

Sense efectuar la divisió, averigua si els polinomis que siguen són divisibles pels polinomis indicats

- a) $x^4 - x^2 + 6$ i $x + \sqrt{3}$
- b) $x^2 - x - 1$ i $x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
- c) $x^6 - x^4 - x^2 - 1$ i $x - 1$

Solució

a) El polinomi $p(x) = x^4 - x^2 + 6$ serà divisible per $x + \sqrt{3}$, si el residu de la divisió és zero. Aplicando el teorema del residu, tenim

$$\begin{aligned} p(-\sqrt{3}) &= (-\sqrt{3})^4 - (-\sqrt{3})^2 + 6 \\ &= 9 - 3 + 6 \\ &= 12 \end{aligned}$$

i, com a conseqüència, $p(x)$ no és divisible per $x + \sqrt{3}$.

b) El polinomi $p(x) = x^2 - x - 1$ serà divisible per $x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, si el residu de la divisió és zero. Aplicando el teorema del residu, tenim

$$\begin{aligned} p\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 \\ &= \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} - \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 \\ &= \frac{6+2\sqrt{5}-2-2\sqrt{5}-4}{4} \\ &= 0 \end{aligned}$$

i, per tant, el polinomi és divisible per $x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

c) El polinomi $p(x) = x^6 - x^4 - x^2 - 1$ serà divisible per $x - 1$, si el residu de la divisió és zero. Aplicando el teorema del residu, tenim

$$\begin{aligned} p(1) &= 1^6 - 1^4 - 1^2 - 1 \\ &= -2 \end{aligned}$$

i, com a conseqüència, $p(x)$ no és divisible per $x - 1$.

Exercici 2.34

Escriu un polinomi de tercer grau que sigui divisible pels polinomis $x - 3 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ i $x - 3 - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Solució

Si el polinomi que busquem $p(x)$ és divisible per $x - 3 + \frac{\sqrt{2}}{2}$, aleshores

$$p(x) = \left(x - 3 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot c_1(x)$$

on $c_1(x)$ és un polinomi de segon grau. Si, a més, $p(x)$ és divisible per $x - 3 - \frac{\sqrt{2}}{2}$, aleshores pel teorema del residu, obtenim

$$c_1(x) = \left(x - 3 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot c_2(x)$$

on $c_2(x)$ és un polinomi de primer grau. Per tant, es compleix

$$p(x) = \left(x - 3 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \left(x - 3 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot c_2(x)$$

Si ara prenem $c_2(x) = x$, obtenim

$$p(x) = x^3 - 6x^2 + \frac{17}{2}x$$

que compleix les condicions de l'enunciat.

Exercici 2.35

Calcula els valors de a i b perquè el polinomi $p(x) = x^4 - 5x^3 + 4x^2 + ax - b$ sigui divisible pels binomis $x - 3$ i $x + 1$.

Solució

Si $p(x)$ és divisible per $x - 3$, aleshores pel teorema del residu, obtenim

$$p(3) = 3^4 - 5 \cdot 3^3 + 4 \cdot 3^2 + a \cdot 3 - b = 0$$

o sigui,

$$\begin{aligned}81 - 135 + 36 + 3a - b &= 0 \\3a - b &= 18\end{aligned}$$

Si, a més, $p(x)$ és divisible per $x + 1$, aleshores pel teorema del residu, obtenim

$$p(-1) = (-1)^4 - 5(-1)^3 + 4(-1)^2 + a(-1) - b = 0$$

és a dir,

$$\begin{aligned}1 + 5 + 4 - a - b &= 0 \\-a - b &= -10 \\a + b &= 10\end{aligned}$$

En resum, perquè es compleixin les condicions de l'enunciat s'han de satisfer conjuntament les equacions

$$\begin{aligned}3a - b &= 18 \\a + b &= 10\end{aligned}$$

Resolent aquest sistema, obtenim $a = 7$ i $b = 3$.

Exercici 2.36

Troba el valor de a perquè el polinomi $p(x) = x^3 + ax + 3$ doni de residu -4 en dividir-lo per $x - 1$.

Solució

Recorda que, segons el teorema del residu, el valor numèric del polinomi $p(x)$ per a $x = a$ coincideix amb el residu de dividir $p(x)$ per $x - a$. Per tant, s'ha de verificar que

$$p(1) = -4$$

és a dir,

$$\begin{aligned}1 + a + 3 &= -4 \\a &= -8\end{aligned}$$

Exercici 2.37

Se sap que un polinomi $p(x)$ és divisible per $x + 1$ i, a més, el residu de la divisió de $p(x)$ per $x + 2$ és 4. Calcula el residu que es obté en dividir-lo per $(x + 1)(x + 2)$.

Solució

Si dividim $p(x)$ per $(x+1)(x+2)$, segons l'algorisme de la divisió, obtindrem un quocient $c(x)$ i un residu $r(x)$ de manera que

$$p(x) = (x+1)(x+2) \cdot c(x) + r(x)$$

i grau $r(x) < 2$; d'aquesta darrera condició obtenim que $r(x)$ serà un polinomi de primer grau, o sigui de la forma $ax + b$. Utilitzant ara les condicions de l'enunciat, pel teorema del residu, tenim

$$p(-1) = (-1+1)(-1+2) \cdot c(-1) + r(-1) = 0$$

i

$$p(-2) = (-2+1)(-2+2) \cdot c(-2) + r(-2) = 4$$

Aleshores, es compleix

$$\begin{aligned} r(-1) &= -a + b = 0 \\ r(-2) &= -2a + b = 4 \end{aligned}$$

Resolent aquest sistema, obtenim que $a = b = -4$ i, per tant, el residu es

$$r(x) = -4x - 4$$

Exercici 2.38

Troba el valor de a perquè el polinomi $p(x) = x^4 - 2x^3 + ax^2 - 5x + 10$ sigui divisible per $x + 2$.

Solució

Recorda que, segons el teorema del residu, el valor numèric del polinomi $p(x)$ per a $x = a$ coincideix amb el residu de dividir $p(x)$ per $x - a$. Per tant, s'ha de verificar que

$$p(-2) = 0$$

és a dir,

$$\begin{aligned} (-2)^4 - 2(-2)^3 + a(-2)^2 - 5(-2) + 10 &= 0 \\ 16 + 16 + 4a + 10 + 10 &= 0 \\ 4a &= -52 \\ a &= -13 \end{aligned}$$

Exercici 2.39

Troba a i b perquè el polinomi $p(x) = x^2 + ax - b$ doni de residu 1 en dividir-lo per $x - 1$, i residu 3 en dividir-lo per $x - 3$.

Solució

Recorda que, segons el teorema del residu, el valor numèric del polinomi $p(x)$ per a $x = a$ coincideix amb el residu de dividir $p(x)$ per $x - a$. Per tant, s'ha de verificar que

$$p(1) = 1$$

i

$$p(3) = 3$$

és a dir, s'han de satisfer les dues equacions següents

$$1^2 + a \cdot 1 - b = 1$$

$$3^2 + a \cdot 3 - b = 3$$

Resolent aquest sistema, obtenim $a = b = -3$.

2.5 Arrels i descomposició factorial d'un polinomi

Exercici 2.40

Comprova que els valors indicades són arrels dels polinomis que s'acompanyen

$$a) \quad 1 \quad p(x) = x^3 - 1$$

$$b) \quad 1/2 \quad q(x) = 16x^3 - 2x^2 + x - 2$$

$$c) \quad \sqrt{3} \quad r(x) = x^4 - 5x^2 + 6$$

Solució

Recorda que diem que un nombre real a és una arrel d'un polinomi $p(x)$ si $p(a) = 0$.

a) Tenim

$$p(1) = 1^3 - 1 = 0$$

després, 1 és arrel del polinomi.

b) Tenim

$$\begin{aligned} q\left(\frac{1}{2}\right) &= 16\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} - 2 \\ &= 2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

després, $1/2$ és arrel del polinomi.

c) Tenim

$$\begin{aligned} r(\sqrt{3}) &= (\sqrt{3})^4 - 5(\sqrt{3})^2 + 6 \\ &= 9 - 15 + 6 \\ &= 0 \end{aligned}$$

després, $\sqrt{3}$ és arrel del polinomi.

Exercici 2.41

Comprova si són certes o falses les afirmacions següents: (a) 1 és una arrel doble del polinomi $x^3 + 1$, (b) $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ és una arrel simple del polinomi $4x^2 - 4x - 1$, i (c) 2 és una arrel triple del polinomi $x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 8x$.

Solució

a) Observem que 1 no és arrel del polinomi $p(x) = x^3 + 1$, ja que $p(1) \neq 0$, i, per tant, no és arrel doble.

b) Si fem $p(x) = 4x^2 - 4x - 1$, aleshores tenim

$$\begin{aligned} p\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right) &= 4\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right) - 1 \\ &= 1 + 2\sqrt{2} + 2 - 2 - 2\sqrt{2} - 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

després, $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ és arrel de $p(x)$. Si ara dividim $p(x)$ per $x - \frac{1+\sqrt{2}}{2}$, obtenim

$$4x^2 - 4x - 1 = \left(x - \frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)(4x - 2 + 2\sqrt{2})$$

i si fem $c(x) = 4x - 2 + 2\sqrt{2}$, aleshores

$$\begin{aligned} c\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right) &= 4\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right) - 2 + 2\sqrt{2} \\ &= 2 + 2\sqrt{2} - 2 + 2\sqrt{2} \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

i, per tant, $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ és arrel simple de $p(x)$.

c) Si fem $p(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 8x$, aleshores tenim

$$\begin{aligned} p(2) &= 2^4 - 6 \cdot 2^3 + 12 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 \\ &= 16 - 48 + 48 - 16 \\ &= 0 \end{aligned}$$

i, per tant, 2 és arrel de $p(x)$. Observem que

$$p(x) = x \cdot (x^3 - 6x^2 + 12x - 8)$$

i ara, mitjançant la regla de Ruffini, tenim

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -6 & 12 & -8 \\ 2 & & 2 & -8 & 8 \\ \hline & 1 & -4 & 4 & 0 \\ 2 & & 2 & -4 & \\ \hline & 1 & -2 & 0 & \\ 2 & & 2 & & \\ \hline & 1 & 0 & & \end{array}$$

i, per tant, deducimos que 2 és arrel triple del polinomi.

Exercici 2.42

Troba la multiplicitat de l'arrel 2 pel polinomi $p(x) = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16$.

Solució

Mitjançant la regla de Ruffini, obtenim

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & -8 & 24 & -32 & 16 \\
 2 & & 2 & -12 & 24 & -16 \\
 \hline
 & 1 & -6 & 12 & -8 & 0 \\
 2 & & 2 & -8 & 8 & \\
 \hline
 & 1 & -4 & 4 & 0 & \\
 2 & & 2 & -4 & & \\
 \hline
 & 1 & -2 & 0 & & \\
 2 & & 2 & & & \\
 \hline
 & 1 & 0 & & &
 \end{array}$$

i, per tant, 2 és una arrel múltiple d'ordre 4. Observa que es compleix

$$x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16 = (x - 2)^4$$

Exercici 2.43

Calcula les arrels enteres del polinomi $p(x) = x^5 - 2x^4 - 6x^3 - 6x^2 - 7x - 4$. Quines són les seves multiplicitats? Té $p(x)$ alguna arrel real que no sigui entera?

Solució

Com que el polinomi $p(x)$ té tots els seus coeficients enters, les arrels enteres s'obtidran dels divisors del seu terme independent. Aleshores, les possibles arrels enteres són $\pm 1, \pm 2$ o ± 4 . Mitjançant la regla de Ruffini podem ara esbrinar quines de són efectivament arrels del polinomi.

$$\begin{array}{r|rrrrrr}
 & 1 & -2 & -6 & -6 & -7 & -4 \\
 -1 & & -1 & 3 & 3 & 3 & 4 \\
 \hline
 & 1 & -3 & -3 & -3 & -4 & 0 \\
 -1 & & -1 & 4 & -1 & 4 & \\
 \hline
 & 1 & -4 & 1 & -4 & 0 & \\
 4 & & 4 & 0 & 4 & & \\
 \hline
 & 1 & 0 & 1 & & &
 \end{array}$$

Per tant, les arrels enteres de $p(x)$ són -1 i 4 ; a més, -1 és arrel doble de $p(x)$. D'aquesta manera, hem obtingut la següent descomposició factorial del polinomi

$$p(x) = (x + 1)^2 \cdot (x - 4) \cdot (x^2 + 1)$$

Observa que $x^2 + 1$ no té arrels, perquè no hi ha cap nombre real que el seu quadrat sumat amb 1 doni com a resultat zero. Aleshores, $p(x)$ no té cap arrel real que no sigui entera.

Exercici 2.44

Escriu un polinomi de tercer grau que tingui -2 com a arrel múltiple d'ordre dos.

Solució

Si el polinomi $p(x)$ ha de tenir a -2 com a arrel de multiplicitat 2, el seu descomposició factorial contindrà el factor $(x+2)^2$. Si ara fem que també tingui, per exemple, l'arrel 0, aleshores

$$\begin{aligned} p(x) &= (x+2)^2 \cdot x \\ &= x^3 + 4x^2 + 4x \end{aligned}$$

Per tant, $x^3 + 4x^2 + 4x$ és un polinomi de tercer grau que té -2 com a arrel doble.

Exercici 2.45

Calcula el valor que ha de tenir a perquè el polinomi $p(x) = x^3 - 3x + a$ tingui l'arrel 1.

Solució

Recorda que diem que un nombre real a és una arrel d'un polinomi $p(x)$ si $p(a) = 0$. Aleshores, s'ha de complir que

$$p(1) = 0$$

és a dir,

$$\begin{aligned} 1^3 - 3 \cdot 1 + a &= 0 \\ a &= 2 \end{aligned}$$

Exercici 2.46

Indica les arrels del polinomi $p(x) = (x-1)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$.

Solució

Com el polinomi $p(x)$ ve descompost en factors lineals, obtenim de seguida els seus arrels. Les seves arrels són 1, $-\sqrt{2}$ i $\sqrt{2}$.

Exercici 2.47

Troba un polinomi de segon grau que tingui per arrels $\sqrt{3}$ i $-\sqrt{2}$.

Solució

Si el polinomi $p(x)$ que busquem és de segon grau i té arrels $\sqrt{3}$ i $-\sqrt{2}$, aleshores $p(x)$ admetirà la següent descomposició en factors lineals

$$\begin{aligned} p(x) &= (x - \sqrt{3}) \cdot (x + \sqrt{2}) \\ &= x^2 + (\sqrt{2} - \sqrt{3})x - \sqrt{6} \end{aligned}$$

Exercici 2.48

Calcula la descomposició factorial dels polinomis següents:

- a) $(x - 1)^2 - (x - 1)(x + 1)$
- b) $(x - 1)(x^2 - 4)$
- c) $x^4 + 2x^3 - 2x - 1$
- d) $x^3 - 1$
- e) $3x^4 - 27x^3 + 39x^2 + 27x - 42$

Solució

a) Tenim,

$$\begin{aligned} (x - 1)^2 - (x - 1) \cdot (x + 1) &= (x - 1) \cdot (x - 1 - x - 1) \\ &= -2 \cdot (x - 1) \end{aligned}$$

en on hem sacado factor comú per a obtenir la descomposició.

b) Tenim,

$$(x - 1)(x^2 - 4) = (x - 1) \cdot (x - 2) \cdot (x + 2)$$

perquè, sabem que $x^2 - 4 = (x - 2) \cdot (x + 2)$.

c) Mitjançant la regla de Ruffini, obtenim

	1	2	0	-2	-1
1		1	3	3	1
	1	3	3	1	0
-1		-1	-2	-1	
	1	2	1	0	
-1		-1	-1		
	1	1	0		
-1		-1			
	1	0			

Per tant, tenim la següent descomposició factorial

$$x^4 + 2x^3 - 2x - 1 = (x - 1) \cdot (x + 1)^3$$

d) Mitjançant la regla de Ruffini, obtenim

	1	0	0	-1
1		1	1	1
	1	1	1	0

Per tant, tenim

$$x^3 - 1 = (x - 1) \cdot (x^2 + x + 1)$$

Ara bé $x^2 + x + 1$ no admet arrels reals, perquè, si no fos així, l'equació de segon grau següent

$$x^2 + x + 1 = 0$$

tindria solucions i això no és possible perquè

$$b^2 - 4ac = 1 - 4 < 0$$

En resum, la descomposició factorial del polinomi és

$$x^3 - 1 = (x - 1) \cdot (x^2 + x + 1)$$

e) Observa primer que es compleix

$$3x^4 - 27x^3 + 39x^2 + 27x - 42 = 3 \cdot (x^4 - 9x^3 + 13x^2 + 9x - 14)$$

Ara, mitjançant la regla de Ruffini, obtenim

	1	-9	13	9	-14
1		1	-8	5	14
	1	-8	5	14	0
-1		-1	9	-14	
	1	-9	14	0	
2		2	-14		
	1	-7	0		
7		7			
	1	0			

Per tant, tenim

$$3x^4 - 27x^3 + 39x^2 + 27x - 42 = 3 \cdot (x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (x - 2) \cdot (x - 7)$$

Exercici 2.49

Troba el m.c.d. i m.c.m. de $p(x)$ i $q(x)$ en els casos següents:

a) $p(x) = (x - 1)^2(x - 2)$ i $q(x) = (x + 1)(x + 2)^2$

b) $p(x) = (x - \sqrt{2})^2(x + 3)$ i $q(x) = (x - \sqrt{2})^3(x + \sqrt{2})$

c) $p(x) = x^6 - 1$ i $q(x) = x^3 - x$

d) $p(x) = 3x^4 - 14x^3 + 20x^2 - 11x + 2$ i $q(x) = 3x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 10x - 4$

Solució

Recorda que el màxim comú divisor s'obtindrà multiplicant els factors irreduïbles comuns elevats a l'exponent més petit que figuri en les dues descomposicions, i el mínim comú múltiple s'obtindrà multiplicant els factors irreduïbles comuns i no comuns elevats a l'exponent més gran que figuri en totes dues descomposicions.

a) Com que els dos polinomis estan donats pels seus descomposicions factorials, tenim de seguida que

$$\text{m.c.d.}(p(x), q(x)) = 1$$

i

$$\text{m.c.m.}(p(x), q(x)) = (x-1)^2 \cdot (x-2) \cdot (x+1) \cdot (x+2)^2$$

b) Per la mateixa raó, tenim que

$$\text{m.c.d.}(p(x), q(x)) = (x - \sqrt{2})^2$$

i

$$\text{m.c.m.}(p(x), q(x)) = (x - \sqrt{2})^3 \cdot (x+3) \cdot (x + \sqrt{2})$$

c) En aquest cas, cal primer calcular les descomposicions dels dos polinomis. Per la regla de Ruffini, obtenim

1	1	0	0	0	0	0	-1
1	1	1	1	1	1	1	1
-1	1	1	1	1	1	1	0
-1	-1	0	-1	0	-1	-1	-1
1	1	0	1	0	1	0	0

i, per tant,

$$x^6 - 1 = (x-1) \cdot (x+1) \cdot (x^4 + x^2 + 1)$$

Observa que el factor $x^4 + x^2 + 1$ és irreduïble, perquè, si no ho fos, l'equació (bicuadrada)

$$x^4 + x^2 + 1 = 0$$

admetiria solucióes, però, si fem el cambio $x^2 = t$, aleshores obtenim l'equació de segon grau

$$t^2 + t + 1 = 0$$

que no té solucions reals, perquè,

$$b^2 - 4ac = 1 - 4 < 0$$

D'altra banda, tenim

$$x^3 - x = x \cdot (x^2 - 1) = x \cdot (x-1) \cdot (x+1)$$

Per consegüent, tenim

$$\begin{aligned} p(x) &= (x-1) \cdot (x+1) \cdot (x^4 + x^2 + 1) \\ q(x) &= x \cdot (x-1) \cdot (x+1) \end{aligned}$$

i, per tant,

$$\text{m.c.d.}(p(x), q(x)) = (x-1) \cdot (x+1)$$

i

$$\text{m.c.m.}(p(x), q(x)) = x \cdot (x-1) \cdot (x+1) \cdot (x^4 + x^2 + 1)$$

d) Calcularem primer la descomposició factorial de $p(x) = 3x^4 - 14x^3 + 20x^2 - 11x + 2$. Com tots els seus coeficients són nombres enters, les arrels enteres

d'aquest polinomi s'obtinran a partir dels divisors del terme independent. En aquest cas, els possibles candidats són ± 1 i ± 2 . Mitjançant la regla de Ruffini, observem que només 1 és arrel entera de $p(x)$, perquè,

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 3 & -14 & 20 & -11 & 2 \\ 1 & & 3 & -11 & 9 & -2 \\ \hline & 3 & -11 & 9 & -2 & 0 \end{array}$$

D'aquí, obtenim

$$p(x) = (x - 1) \cdot (3x^3 - 11x^2 + 9x - 2)$$

Les altres possibles arrels, pertanyents el polinomi $3x^3 - 11x^2 + 9x - 2$, seran nombres reals que no són nombres enters. Com que calcular-les directament és feixuc i encara tenim un polinomi de tercer grau, veiem que per a calcular el m.c.d. de aquests dos polinomis serà més convenient usar l'algorisme d'Euclides. Així, tenim

$\begin{array}{rrrrr} 3x^4 & -14x^3 & +20x^2 & -11x & +2 \\ -3x^4 & +5x^3 & +4x^2 & -10x & +4 \\ \hline / & -9x^3 & +24x^2 & -21x & +6 \\ & 3x^3 & -8x^2 & +7x & -2 \end{array}$	$\begin{array}{rrrrr} 1 & & & & \\ 3x^4 & -5x^3 & -4x^2 & +10x & -4 \\ -3x^4 & +8x^3 & -7x^2 & +2x & \\ \hline / & 3x^3 & -11x^2 & 12x & -4 \\ & -3x^3 & +8x^2 & -7x & +2 \\ & & / & -3x^2 & +5x & -2 \\ & & & x^2 & -\frac{5}{3}x & +\frac{2}{3} \end{array}$	$\begin{array}{rrrr} x & +1 & & \\ 3x^3 & -8x^2 & +7x & -2 \\ -3x^3 & +5x^2 & -2x & \\ \hline / & -3x^2 & +5x & -2 \\ & +3x^2 & -5x & +2 \\ & & / & 0 & 0 \end{array}$
--	--	--

Per tant, tenim

$$\begin{aligned} \text{m.c.d.}(p(x), q(x)) &= \text{m.c.d.}(3x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 10x - 4, 3x^3 - 8x^2 + 7x - 2) \\ &= \text{m.c.d.}\left(3x^3 - 8x^2 + 7x - 2, x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{2}{3}\right) \\ &= \text{m.c.d.}\left(x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{2}{3}, 0\right) \\ &= x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

i, aleshores, obtenim

$$\begin{aligned} \text{m.c.m.}(p(x), q(x)) &= \frac{1}{3 \cdot 3} \cdot \frac{(3x^4 - 14x^3 + 20x^2 - 11x + 2) \cdot (3x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 10x - 4)}{x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{2}{3}} \\ &= x^6 - \frac{14}{3}x^5 + \frac{14}{3}x^4 + \frac{17}{3}x^3 - \frac{38}{3}x^2 + \frac{22}{3}x - \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Exercici 2.50

Dos polinomis s'anomenen primers entre si quan el seu m.c.d. és 1, és a dir, quan el únic divisor comú és el polinomi unitat. Indica quines de les parelles

següents de polinomis són primers entre si

$$a) p(x) = x^2 - 2x + 1 \text{ i } q(x) = x^2 + 2x + 1$$

$$b) p(x) = x^3 - 3x^2 \text{ i } q(x) = x^3 + 3x^2$$

$$c) p(x) = x^2 + x + 1 \text{ i } q(x) = x^2 - x - 1$$

Solució

a) Com que

$$x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$$

i

$$x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$$

aleshores,

$$\text{m.c.d.}(p(x), q(x)) = 1$$

i els dos polinomis són primers entre si.

b) Com que

$$x^3 - 3x^2 = x^2 \cdot (x - 3)$$

i

$$x^3 + 3x^2 = x^2 \cdot (x + 3)$$

aleshores,

$$\text{m.c.d.}(p(x), q(x)) = x^2$$

i els dos polinomis no són primers entre si.

c) Com que $p(x)$ és irreduïble i grau $q(x) = 2$, és clar que els dos polinomis són primers entre si.

Exercici 2.51

Resol les següents equacions polinòmiques

$$a) x^3 + 21x^2 + 98x - 120 = 0$$

$$b) x^3 - 14x^2 + 63x - 90 = 0$$

Solució

Observa que buscar les solucions reals de l'equació

$$p(x) = 0$$

és equivalent, per definició, a trobar les arrels del polinomi $p(x)$.

a) Com tots els coeficients del polinomi són nombres enters, les arrels enteres es trobaran entre els divisors del terme independent. Provarem aquests divisors mitjançant la regla de Ruffini,

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 21 & 98 & -120 \\ 1 & & 1 & 22 & 120 \\ \hline & 1 & 22 & 120 & 0 \end{array}$$

D'aquí, obtenim

$$x^3 + 21x^2 + 98x - 120 = (x - 1) \cdot (x^2 + 22x + 120)$$

Podríem continuar buscant més arrels per Ruffini, però serà més senzill procedir d'una altra manera. Observa que l'equació inicial pot ara escriure's de la manera següent

$$(x - 1) \cdot (x^2 + 22x + 120) = 0$$

i, per tant, les solucions de l'equació són

$$x - 1 = 0 \implies x = 1$$

i les altres solucions s'obtinran de l'equació següent de segon grau

$$x^2 + 22x + 120 = 0$$

que, resolviéndola, obtenim $x = -10$ o $x = -12$. Per consegüent, les solucions de l'equació

$$x^3 + 21x^2 + 98x - 120 = 0$$

són 1, -10 i -12 .

b) Procederemos de la mateixa manera, primer, mitjançant la regla de Ruffini, obtenim

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -14 & 63 & -90 \\ 3 & & 3 & -33 & 90 \\ \hline & 1 & -11 & 30 & 0 \end{array}$$

Per tant, l'equació original pot escriure's de la manera següent

$$(x - 3) \cdot (x^2 - 11x + 30) = 0$$

Les solucions d'aquesta equació són

$$x - 3 = 0 \implies x = 3$$

i les que s'obtenen de l'equació següent de segon grau

$$x^2 - 11x + 30 = 0$$

les quals solucions són 5 i 6. Per consegüent, les solucions de l'equació

$$x^3 - 14x^2 + 63x - 90 = 0$$

són 3, 5 i 6.

2.6 El cos de les fraccions racionals

Exercici 2.52

Indica si són o no equivalents les parelles següents de fraccions algebraïques:

$$\begin{array}{ll} a) & \frac{x^2-1}{x^3-1} \quad \frac{x+1}{x^2+x+1} \\ b) & \frac{x^3+x^2+x+1}{x^2+1} \quad \frac{x}{x+1} \\ c) & \frac{1}{x} \quad \frac{x+1}{x^2+x} \end{array}$$

Solució

Recorda que diem que dues fraccions algebraïques

$$\frac{p(x)}{q(x)} \quad \text{i} \quad \frac{r(x)}{s(x)}$$

són equivalents si i només si

$$p(x) \cdot s(x) = q(x) \cdot r(x)$$

a) Com que

$$(x^2 - 1) \cdot (x^2 + x + 1) = x^4 + x^3 - x - 1$$

i

$$(x^3 - 1) \cdot (x + 1) = x^4 + x^3 - x - 1$$

es té

$$\frac{x^2 - 1}{x^3 - 1} = \frac{x + 1}{x^2 + x + 1}$$

o sigui, són equivalents.

b) Com que

$$(x^3 + x^2 + x + 1) \cdot x = x^4 + x^4 + x^2 + x$$

i

$$(x^2 + 1) \cdot (x^2 + x) = x^4 + x^3 + x^2 + x$$

es té

$$\frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^2 + 1} = \frac{x^2 + x}{x}$$

c) Com que

$$1 \cdot (x^2 + x) = x \cdot (x + 1)$$

també es té

$$\frac{1}{x} = \frac{x + 1}{x^2 + x}$$

Exercici 2.53

Escriu tres fraccions algebraiques pertanyents a la fracció racional

$$\left\{ \frac{x}{x+3} \right\}$$

Solució

De la definició d'equivalència de fraccions algebraiques, és clar que es compleix

$$\begin{aligned} \frac{x}{x+3} &= \frac{x^2}{x^2+3x} \\ &= \frac{x^2-x}{x^2+2x-3} \\ &= \frac{x^3-x^2}{x^3+2x^2-3x} \end{aligned}$$

Exercici 2.54

Simplificar les fraccions algebraiques següents:

$$\begin{array}{lll} a) \frac{x+2}{x^2-4} & b) \frac{x-\sqrt{2}}{x^2-2\sqrt{2}x+2} & c) \frac{x}{x^4-x} \\ d) \frac{2x^2-3x+1}{3x^3-3x^2+x-1} & e) \frac{(x+3)^2-(5x-4)^2}{36x^2-1} & f) \frac{x^2-1}{x^3-2x^2+x} \end{array}$$

Solució

Recorda que simplificar una fracció algebraica és buscar la fracció irreduïble equivalent.

a)

$$\begin{aligned} \frac{x+2}{x^2-4} &= \frac{x+2}{(x+2)(x-2)} \\ &= \frac{1}{x-2} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \frac{x-\sqrt{2}}{x^2-2\sqrt{2}x+2} &= \frac{x-\sqrt{2}}{(x-\sqrt{2})^2} \\ &= \frac{1}{x-\sqrt{2}} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \frac{x}{x^4-x} &= \frac{x}{x(x^3-1)} \\ &= \frac{1}{x^3-1} \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}\frac{2x^2 - 3x + 1}{3x^3 - 3x^2 + x - 1} &= \frac{(x-1)(2x-1)}{(x-1)(3x^2+1)} \\ &= \frac{2x-1}{3x^2+1}\end{aligned}$$

perquè, per la regla de Ruffini, tenim

$$\begin{array}{r|rrr} & 2 & -3 & 1 \\ 1 & & 2 & -1 \\ \hline & 2 & -1 & 0 \end{array}$$

i

$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & & 3 & 0 & 1 \\ \hline & 3 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

e)

$$\begin{aligned}\frac{(x+3)^2 - (5x-4)^2}{36x^2 - 1} &= \frac{(x+3+5x-4) \cdot (x+3-5x+4)}{(6x+1)(6x-1)} \\ &= \frac{(6x-1)(-4x+7)}{(6x+1)(6x-1)} \\ &= \frac{-4x+7}{6x+1}\end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned}\frac{x^2 - 1}{x^3 - 2x^2 + x} &= \frac{(x+1)(x-1)}{x(x^2 - 2x + 1)} \\ &= \frac{(x+1)(x-1)}{x(x-1)^2} \\ &= \frac{x+1}{x(x-1)}\end{aligned}$$

Exercici 2.55

Efectua les operacions indicades

$$\begin{aligned}a) & \frac{1+x}{1-x} + x - \frac{x}{1-x^2} \\ b) & 3 - \frac{1}{1+x} + \frac{x^2-1}{1-x} \\ c) & \frac{x+1}{3} + \frac{x^2-1}{9(x+1)} + \frac{x+1}{6(x^2-1)} \\ d) & \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x^2-1} - \frac{1}{x+1}\end{aligned}$$

Solució

a)

$$\begin{aligned}
 \frac{1+x}{1-x} + x - \frac{x}{1-x^2} &= \frac{(1+x)^2}{1-x^2} + \frac{x(1-x^2)}{1-x^2} - \frac{x}{1-x^2} \\
 &= \frac{1+2x+x^2+x-x^3-x}{1-x^2} \\
 &= \frac{1+2x+x^2-x^3}{1-x^2}
 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
 3 - \frac{1}{1+x} + \frac{x^2-1}{1-x} &= \frac{3(1+x)(1-x)}{(1+x)(1-x)} - \frac{1-x}{(1+x)(1-x)} + \frac{(1+x)(x^2-1)}{(1+x)(1-x)} \\
 &= \frac{3-3x^2-1+x+x^2-1+x^3-x}{(1+x)(1-x)} \\
 &= \frac{x^3-2x^2+1}{(1+x)(1-x)} \\
 &= -\frac{(1-x)(x^2-x-1)}{(1+x)(1-x)} \\
 &= -\frac{x^2-x-1}{1+x}
 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
 \frac{x+1}{3} + \frac{x^2-1}{9(x+1)} + \frac{x+1}{6(x^2-1)} &= \frac{6(x+1)^2(x-1)}{18(x^2-1)} + \frac{2(x-1)(x^2-1)}{18(x^2-1)} + \frac{3(x+1)}{18(x^2-1)} \\
 &= \frac{-6+6x^2-6x+6x^3+2-2x^2-2x+2x^3+3x+3}{18(x^2-1)} \\
 &= \frac{8x^3+4x^2-5x-1}{18(x^2-1)} \\
 &= \frac{(x+1)(8x^2-4x-1)}{18(x+1)(x-1)} \\
 &= \frac{8x^2-4x-1}{18(x-1)}
 \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x^2-1} - \frac{1}{x+1} &= \frac{x+1}{x^2-1} + \frac{1}{x^2-1} - \frac{x-1}{x^2-1} \\
 &= \frac{x+1+1-x+1}{x^2-1} \\
 &= \frac{3}{x^2-1}
 \end{aligned}$$

Exercici 2.56

Efectua les operacions, simplificant al màxim el resultat:

$$\begin{aligned} a) & \frac{1+x}{1-x} \cdot \frac{x}{1-x^2} \\ b) & \frac{3x^2+1}{x^2+2x+1} \cdot \frac{x^2-1}{x+2} \\ c) & \frac{x^2-4x+4}{x+1} \cdot \frac{x^2-1}{x-2} \\ d) & \frac{8x}{x+1} \cdot \frac{3x}{x-1} \cdot \frac{x^2-1}{x^2+1} \end{aligned}$$

Solució

a)

$$\begin{aligned} \frac{1+x}{1-x} \cdot \frac{x}{1-x^2} &= \frac{x(1+x)}{(1-x)^2(1+x)} \\ &= \frac{x}{(1-x)^2} \\ &= \frac{x}{1-2x+x^2} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \frac{3x^2+1}{x^2+2x+1} \cdot \frac{x^2-1}{x+2} &= \frac{(3x^2+1)(x+1)(x-1)}{(x+1)^2(x+2)} \\ &= \frac{(3x^2+1)(x-1)}{(x+1)(x+2)} \\ &= \frac{3x^3-3x^2+x-1}{x^2+3x+2} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \frac{x^2-4x+4}{x+1} \cdot \frac{x^2-1}{x-2} &= \frac{(x-2)^2(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-2)} \\ &= \frac{(x-2)(x-1)}{1} \\ &= x^2-3x+2 \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} \frac{8x}{x+1} \cdot \frac{3x}{x-1} \cdot \frac{x^2-1}{x^2+1} &= \frac{8x}{x+1} \cdot \left(\frac{3x}{x-1} \cdot \frac{x^2-1}{x^2+1} \right) \\ &= \frac{8x}{x+1} \cdot \frac{3x(x+1)(x-1)}{(x-1)(x^2+1)} \\ &= \frac{8x}{x+1} \cdot \frac{3x(x+1)}{x^2+1} \\ &= \frac{24x^2(x+1)}{(x+1)(x^2+1)} \\ &= \frac{24x^2}{x^2+1} \end{aligned}$$

Exercici 2.57

Efectua les operacions, simplificant al màxim el resultat:

$$\begin{aligned} a) & \quad \frac{x^2}{x+1} : \frac{3x^2+1}{x^2+2x+1} \\ b) & \quad \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}\right) : \frac{x^2+x}{x^3-1} \\ c) & \quad \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{x^2}{x+1} - \frac{x^3}{x-1}\right) \\ d) & \quad \frac{a(x+1)}{b} : \left(\frac{a+b}{x+1} - \frac{a-b}{bx+b}\right) \end{aligned}$$

Solució

a)

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{x+1} & : \frac{3x^2+1}{x^2+2x+1} = \frac{x^2}{x+1} \cdot \frac{x^2+2x+1}{3x^2+1} \\ & = \frac{x^2(x+1)^2}{(x+1)(3x^2+1)} \\ & = \frac{x^2(x+1)}{3x^2+1} \\ & = \frac{x^3+x^2}{3x^2+1} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}\right) & : \frac{x^2+x}{x^3-1} = \left(\frac{x+1}{x(x+1)} + \frac{x}{x(x+1)}\right) : \frac{x^2+x}{x^3-1} \\ & = \frac{x+1+x}{x(x+1)} : \frac{x^2+x}{x^3-1} \\ & = \frac{2x+1}{x(x+1)} \cdot \frac{x^3-1}{x^2+x} \\ & = \frac{(2x+1)(x^3-1)}{x^2(x+1)^2} \\ & = \frac{2x^4+x^3-2x-1}{x^4+2x^3+x^2} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{x^2}{x+1} - \frac{x^3}{x-1}\right) & = \frac{1}{x} \cdot \left[\frac{x^2(x-1)}{(x+1)(x-1)} - \frac{x^3(x+1)}{(x+1)(x-1)}\right] \\ & = \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2(x-1-x^2-x)}{x^2-1} \\ & = \frac{x^2(-1-x^2)}{x(x^2-1)} \\ & = -\frac{x+x^3}{x^2-1} \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
\frac{a(x+1)}{b} &: \left(\frac{a+b}{x+1} - \frac{a-b}{bx+b} \right) = \frac{a(x+1)}{b} : \left[\frac{b(a+b)}{b(x+1)} - \frac{a-b}{b(x+1)} \right] \\
&= \frac{a(x+1)}{b} : \frac{b(a+b) - a + b}{b(x+1)} \\
&= \frac{a(x+1)}{b} \cdot \frac{b(x+1)}{b(a+b) - a + b} \\
&= \frac{ab(x+1)^2}{b(ab + b^2 - a + b)} \\
&= \frac{a(x+1)^2}{ab + b^2 - a + b}
\end{aligned}$$

Exercici 2.58

Determinar la solució de l'equació

$$\frac{x^2}{x^2-1} \cdot A(x) = \frac{x^2-1}{x^2+x} + \frac{x+1}{x}$$

Solució

Resolent aquesta equació en el cos de les fraccions racionals, tenim

$$\begin{aligned}
\frac{x^2-1}{x^2} \cdot \left(\frac{x^2}{x^2-1} \cdot A(x) \right) &= \frac{x^2-1}{x^2} \cdot \left(\frac{x^2-1}{x^2+x} + \frac{x+1}{x} \right) \\
\left(\frac{x^2-1}{x^2} \cdot \frac{x^2}{x^2-1} \right) \cdot A(x) &= \frac{x^2-1}{x^2} \cdot \left(\frac{x^2-1}{x^2+x} + \frac{x+1}{x} \right) \\
\frac{1}{1} \cdot A(x) &= \frac{x^2-1}{x^2} \cdot \left[\frac{x^2-1}{x(x+1)} + \frac{(x+1)^2}{x(x+1)} \right] \\
A(x) &= \frac{x^2-1}{x^2} \cdot \frac{x^2-1 + x^2 + 2x + 1}{x(x+1)} \\
A(x) &= \frac{x^2-1}{x^2} \cdot \frac{2x(x+1)}{x(x+1)} \\
A(x) &= \frac{x^2-1}{x^2} \cdot \frac{2}{1} \\
A(x) &= \frac{2x^2-2}{x^2}
\end{aligned}$$

Exercici 2.59

Comprova que es compleix

$$\left(x+1 + \frac{x^2}{1-x} \right) : \left(1 - \frac{x}{1+x} \cdot \frac{x+1}{x^2-x} \right) = -\frac{1}{x-2}$$

Solució

$$\begin{aligned}
\left(x + 1 + \frac{x^2}{1-x}\right) &: \left(1 - \frac{x}{1+x} \cdot \frac{x+1}{x^2-x}\right) \\
&= \left[\frac{(x+1)(1-x)}{1-x} + \frac{x^2}{1-x}\right] : \left[1 - \frac{x(x+1)}{x(x-1)(x+1)}\right] \\
&= \frac{x - x^2 + 1 - x + x^2}{1-x} : \left(1 - \frac{1}{x-1}\right) \\
&= \frac{1}{1-x} : \frac{x-1-1}{x-1} \\
&= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{x-1}{x-2} \\
&= -\frac{1-x}{(1-x)(x-2)} \\
&= -\frac{1}{x-2}
\end{aligned}$$

Exercici 2.60

Simplifica:

a)

$$\frac{1 + \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2}{1 - \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2}$$

b)

$$\frac{1 - \frac{x+a}{x-a}}{1 + \frac{x+a}{x-a}}$$

Solució

a)

$$\begin{aligned}
\frac{1 + \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2}{1 - \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2} &= \left[1 + \frac{(1-x)^2}{(1+x)^2}\right] : \left[1 - \frac{(1-x)^2}{(1+x)^2}\right] \\
&= \frac{1 + 2x + x^2 + 1 - 2x + x^2}{(1+x)^2} : \frac{1 + 2x + x^2 - 1 + 2x - x^2}{(1+x)^2} \\
&= \frac{2(1+x^2)}{(1+x)^2} \cdot \frac{(1+x)^2}{4x} \\
&= \frac{2(1+x^2)(1+x)^2}{4x(1+x)^2} \\
&= \frac{1+x^2}{2x}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\frac{1 - \frac{x+a}{x-a}}{1 + \frac{x+a}{x-a}} &= \left(1 - \frac{x+a}{x-a}\right) : \left(1 + \frac{x+a}{x-a}\right) \\
&= \frac{x-a-x-a}{x-a} : \frac{x-a+x+a}{x-a} \\
&= \frac{-2a}{x-a} \cdot \frac{x-a}{2x} \\
&= \frac{-2a(x-a)}{2x(x-a)} \\
&= -\frac{a}{x}
\end{aligned}$$

2.7 Funcions polinòmiques

Exercici 2.61

Calcula $f(-1)$, $f(1/3)$ i $f(\sqrt{2})$ per a les funcions següents: (a) $f(x) = 2x + 5$; (b) $f(x) = -x^2 + 2x - 3$; i (c) $f(x) = 1$.

Solució

Es tracta de trobar les imatges dels punts -1 , $1/3$ i $\sqrt{2}$ per cada una de les funcions donades.

a)

$$\begin{aligned}
f(-1) &= 2 \cdot (-1) + 5 = 3 \\
f(1/3) &= 2 \cdot \frac{1}{3} + 5 = \frac{17}{3} \\
f(\sqrt{2}) &= 2 \cdot \sqrt{2} + 5
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
f(-1) &= -(-1)^2 + 2 \cdot (-1) - 3 = -1 - 2 - 3 = -6 \\
f(1/3) &= -\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2 \cdot \frac{1}{3} - 3 = -\frac{1}{9} + \frac{2}{3} - 3 = -\frac{22}{9} \\
f(\sqrt{2}) &= -(\sqrt{2})^2 + 2 \cdot \sqrt{2} - 3 = -2 + 2\sqrt{2} - 3 = -5 + 2\sqrt{2}
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
f(-1) &= 1 \\
f(1/3) &= 1 \\
f(\sqrt{2}) &= 1
\end{aligned}$$

perquè la funció és, en aquest cas, la funció constant igual a 1, és a dir, la imatge de qualsevol nombre real és sempre igual a 1.

Exercici 2.62

Calcula, si existeixen, les antiimatges de 0, 1 i -1 per a les funcions següents: (a) $f(x) = 2x - 1$; (b) $f(x) = 2x^2$; (c) $f(x) = x^3$; i (d) $f(x) = -1$.

Solució

Recorda que donada una funció f , si y és la imatge de x per f , escrivim

$$f(x) = y$$

i aleshores també es diu que y és una antiimatge de x per f . Es tracta de trobar els valors de x per als valors de y donats en el enunciat.

a)

$$\begin{aligned} f(x) = y &\implies x = ??? \\ 2x - 1 = 0 &\implies x = 1/2 \\ 2x - 1 = 1 &\implies x = 1 \\ 2x - 1 = -1 &\implies x = 0 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} f(x) = y &\implies x = ??? \\ 2x^2 = 0 &\implies x = 0 \\ 2x^2 = 1 &\implies x = \pm\sqrt{1/2} \\ 2x^2 = -1 &\implies \text{No hi ha antiimatges de } -1 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} f(x) = y &\implies x = ??? \\ x^3 = 0 &\implies x = 0 \\ x^3 = 1 &\implies x = 1 \\ x^3 = -1 &\implies x = \sqrt[3]{-1} = -1 \end{aligned}$$

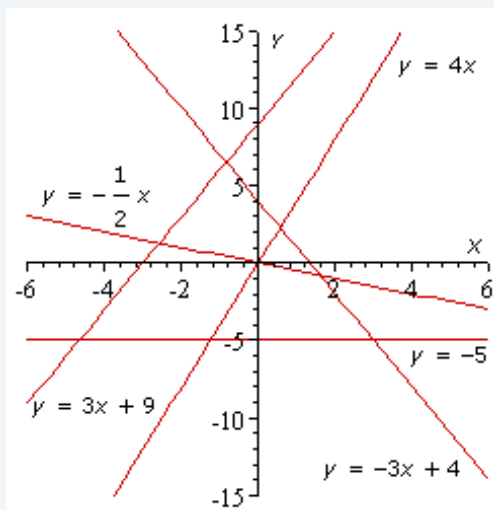
d) En aquest cas, la funció és constant igual a -1 , és a dir, la imatge de qualsevol nombre real per aquesta funció és sempre igual a -1 . Per consegüent, només -1 té antiimatge per la funció i aquesta és -1 i, qualsevol altre nombre real no té antiimatge.

Exercici 2.63

Construeix la gràfica de les funcions les imatges de les quals estan definides per les relacions següents: (a) $y = -5$; (b) $y = 4x$; (c) $y = -\frac{1}{2}x$; (d) $y = -3x + 4$; (e) $y = 3x + 9$.

Solució

Les gràfiques de totes les funcions indicades es mostren en la següent figura.



- a) La relació $y = -5$ estableix una funció f definida per $f(x) = -5$, per a tot $x \in \mathbb{R}$. Es tracta d'una funció constant i, per tant, la seva representació gràfica serà una recta horitzontal.
- b) La relació $y = 4x$ estableix una funció f definida per $f(x) = 4x$, per a tot $x \in \mathbb{R}$. Es tracta d'una funció lineal i, per tant, la seva representació gràfica serà una recta de pendent 4 que passa per l'origen de coordenades. Com que el pendent és positiva, la funció és creixent i pren valors positius per a $x > 0$ i negatius, per a $x < 0$.
- c) La relació $y = -\frac{1}{2}x$ estableix una funció f definida per $f(x) = -\frac{1}{2}x$, per a tot $x \in \mathbb{R}$. Es tracta d'una funció lineal i, per tant, la seva representació gràfica serà una recta de pendent $-\frac{1}{2}$ que passa per l'origen de coordenades. Com que el pendent és negatiu, la funció és decreixent i pren valors positius per a $x < 0$ i negatius, per a $x > 0$.
- d) La relació $y = -3x + 4$ estableix una funció f definida per $f(x) = -3x + 4$, per a tot $x \in \mathbb{R}$. Es tracta d'una funció afí i, per tant, la seva representació gràfica serà una recta de pendent -3 que passa pel punt de coordenades $(0, 4)$. Com que el pendent és negatiu, la funció és decreixent i pren valors positius per a $x < \frac{4}{3}$ i negatius, per a $x > \frac{4}{3}$, perquè la funció s'anul·la per a $x = \frac{4}{3}$.
- e) La relació $y = 3x + 9$ estableix una funció f definida per $f(x) = 3x + 9$, per a tot $x \in \mathbb{R}$. Es tracta d'una funció afí i, per tant, la seva representació gràfica serà una recta de pendent 3 que passa pel punt de coordenades $(0, 9)$. Com que la pendent és positiu, la funció és creixent i pren valors positius per a $x > -3$ i negatius, per a $x < -3$, perquè la funció s'anul·la per a $x = -3$.

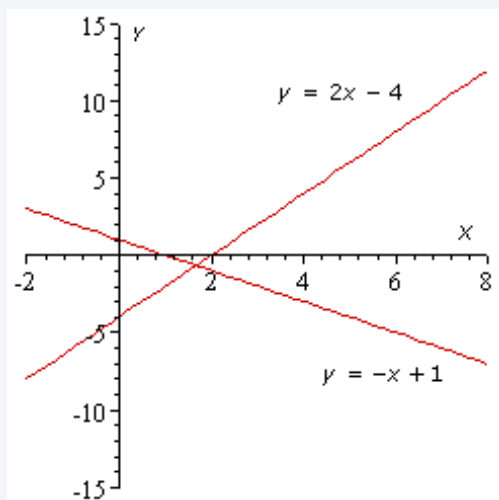
Exercici 2.64

En quins punts talla la gràfica de les funcions indicades als eixos de coordenades? En quins punts es tallen les dues gràfiques? Per a quins valors de x les funcions prenen valors positius i valors negatius?

$$\begin{aligned} f(x) &= -x + 1 \\ g(x) &= 2x - 4 \end{aligned}$$

Solució

Les gràfiques de les dues funcions indicades es mostren en la següent figura. Evidentment, són funcions afins i, per tant, les gràfiques són rectes.



Els punts de tall amb l'eix d'abscisses s'obtenen com les antiimatges de 0, és a dir, com els valors de x que verifiquen

$$f(x) = 0$$

i els punts de tall amb l'eix d'ordenades s'obtenen com les imatges de 0. Així, per a la funció $f(x) = -x + 1$, tenim

$$-x + 1 = 0 \implies x = 1$$

i

$$f(0) = 1$$

Per tant, la gràfica talla l'eix X en el punt $(1, 0)$ i l'eix Y en $(0, 1)$. Per a la funció $g(x) = 2x - 4$, tenim

$$2x - 4 = 0 \implies x = 2$$

i

$$g(0) = -4$$

i, per tant, la gràfica talla l'eix X en el punt $(2, 0)$ i l'eix Y en $(0, -4)$.

Els punts de tall de les dues gràfiques es corresponen amb els valors de x per als quals les imatges per totes dues funcions són iguals, és a dir, per als quals es compleix la relació

$$f(x) = g(x)$$

En el nostre cas, tenim

$$-x + 1 = 2x - 4 \implies x = \frac{5}{3}$$

i, a més, la imatge de $5/3$ és

$$f(5/3) = -\frac{5}{3} + 1 = -\frac{2}{3}$$

Aleshores, les dues gràfiques es tallen en el punt de coordenades $(5/3, -2/3)$. Com que es tracta de funcions afins, la representació gràfica de les quals són rectes, esbrinarem els valors de x per als quals la funció és positiva o negativa a partir del valor en el que la funció s'anul·la (talla l'eix X). A partir d'aquest valor, segons sigui la funció creixent o decreixent, determinarem els valors de x per als quals la funció és positiva i negativa. Així, la funció $f(x) = -x + 1$ és decreixent, perquè la seva gràfica és una recta de pendent negativa, i com que s'anul·la en $x = 1$, aleshores f és positiva per a $x < 1$ i negativa per a $x > 1$. En canvi, la funció $g(x) = 2x - 4$ és creixent, perquè la seva gràfica és una recta de pendent positiva, i com que s'anul·la en $x = 2$, aleshores g és positiva per a $x > 2$ i negativa per a $x < 2$.

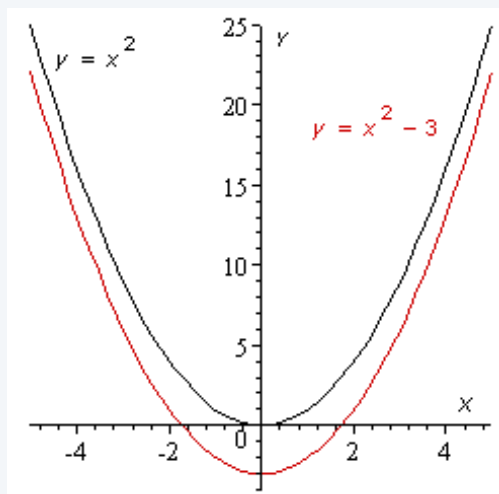
Exercici 2.65

Construeix la gràfica de les funcions les imatges de les quals estan definides per les relacions següents: (a) $y = x^2 - 3$; (b) $y = -x^2 + 5$; (c) $y = (x + 2)^2 - 3$; (d) $y = -2(x - 3)^2 + 3$. Esbrinar si tallen o no l'eix d'abscisses.

Solució

Evidentment, totes les funcions indicades són polinòmiques de segon grau i, per tant, tindran com a gràfica una paràbola.

a) La relació $y = x^2 - 3$ estableix una funció quadràtica f definida per $f(x) = x^2 - 3$, per a tot $x \in \mathbb{R}$. La gràfica d'aquesta funció s'obté a partir de la paràbola $y = x^2$ mitjançant una translació seguint l'eix d'ordenades 3 unitats en el sentit negatiu.



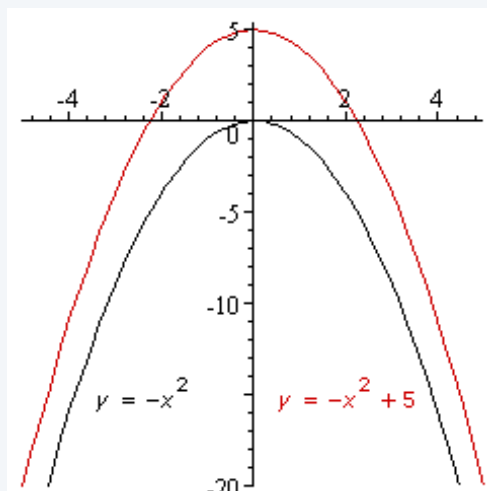
A partir de la gràfica observem que hi ha dos talls amb l'eix d'abscisses. Aquests punts són els zeros de la funció, és a dir, els valors de x que verifiquen l'equació

$$x^2 - 3 = 0$$

les quals solucions són $\pm\sqrt{3}$.

b) La relació $y = -x^2 + 5$ estableix una funció quadràtica f definida per $f(x) = -x^2 + 5$, per a tot $x \in \mathbb{R}$. La gràfica d'aquesta funció s'obté a partir de la

paràbola $y = -x^2$ mitjançant una translació seguint l'eix d'ordenades 5 unitats en el sentit positiu.

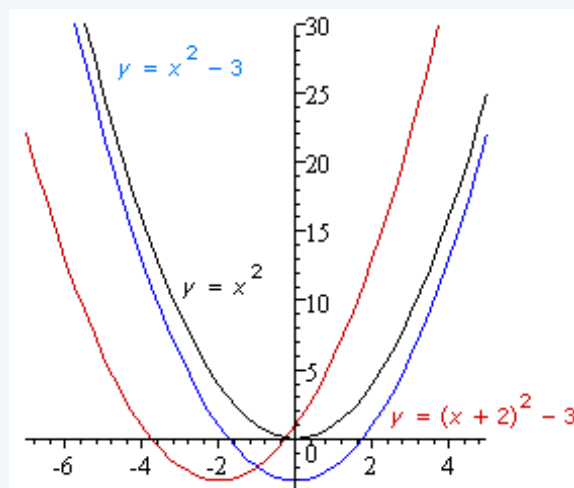


A partir de la gràfica observem que hi ha dos talls amb el eix d'abscisses. Aquests punts són els zeros de la funció, és a dir, els valors de x que verifiquen l'equació

$$-x^2 + 5 = 0$$

les quals solucions són $\pm\sqrt{5}$.

c) La relació $y = (x + 2)^2 - 3$ estableix una funció quadràtica f definida per $f(x) = (x + 2)^2 - 3$, per a tot $x \in \mathbb{R}$. La gràfica d'aquesta funció s'obté a partir de la paràbola $y = x^2$ fent primer una translació seguint l'eix d'ordenades 3 unitats en el sentit negatiu, i, després, una translació seguint l'eix d'abscisses 2 unitats en el sentit negatiu.

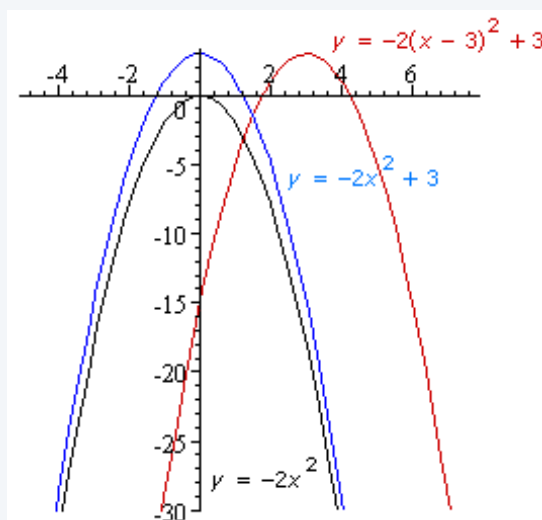


A partir de la gràfica observem que hi ha dos talls amb l'eix d'abscisses. Aquests punts són els zeros de la funció, és a dir, els valors de x que verifiquen l'equació

$$\begin{aligned}(x + 2)^2 - 3 &= 0 \\ (x + 2)^2 &= 3\end{aligned}$$

les quals solucions són $-2 \pm \sqrt{3}$.

d) La relació $y = -2(x - 3)^2 + 3$ estableix una funció quadràtica f definida per $f(x) = -2(x - 3)^2 + 3$, per a tot $x \in \mathbb{R}$. La gràfica d'aquesta funció s'obté a partir de la paràbola $y = -2x^2$ fent primer una translació seguint l'eix d'ordenades 3 unitats en el sentit positiu, i, després, una translació seguint l'eix d'abscisses 3 unitats en el sentit positiu.



A partir de la gràfica observem que hi ha dos talls amb l'eix d'abscisses. Aquests punts són els zeros de la funció, és a dir, els valors de x que verifiquen l'equació

$$\begin{aligned} -2(x - 3)^2 + 3 &= 0 \\ 2(x - 3)^2 &= 3 \\ (x - 3)^2 &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

les quals solucions són $3 \pm \sqrt{3/2}$.

Exercici 2.66

Representa les gràfiques de les funcions següents, les imatges de les quals estan definides per les relacions següents: (a) $y = x^2 - 2x - 3$; (b) $y = -2x^2 + 4x - 3$; i (c) $y = 2x^2 - 4x$. Caracteritza cada una d'aquestes gràfiques.

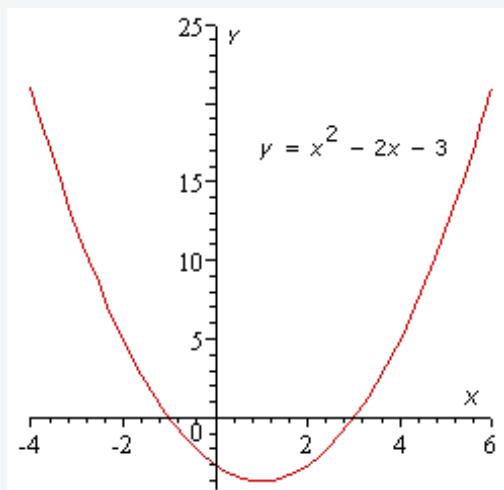
Solució

Totes les funcions indicades són quadràtiques i, per tant, tindran com a gràfica una paràbola.

a) La relació $y = x^2 - 2x - 3$ estableix una funció quadràtica f definida per $f(x) = x^2 - 2x - 3$, per a tot $x \in \mathbb{R}$. Observa que podem escriure

$$x^2 - 2x - 3 = (x - 1)^2 - 4$$

i, per tant, la gràfica d'aquesta funció s'obté a partir de la paràbola $y = x^2$ fent primer una translació de 4 unitats en la direcció de l'eix Y en sentit negatiu, i, després, una translació de 1 unitat en la direcció de l'eix X en sentit positiu.



És clar que el vèrtex de la paràbola es troba en el punt de coordenades $(1, -4)$, que és el transformat de $(0, 0)$ per les operacions indicades abans. L'eix de simetria és la recta vertical $x = 1$. La funció té un punt d'ordenada mínima en $x = 1$, el valor del qual és -4 . La funció és creixent per a $x > 1$ i decreixent per a $x < 1$. La gràfica talla l'eix Y en el punt $(0, -3)$ i l'eix X en els punts d'abscissa que verifiquen l'equació

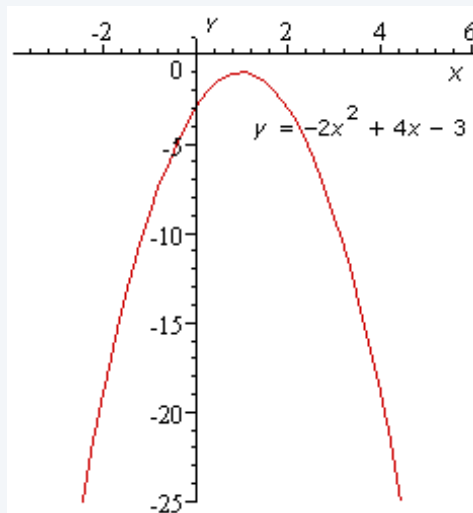
$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

és a dir, en $x = -1$ i en $x = 3$. La funció és positiva en $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$ i negativa en $(-1, 3)$.

b) La relació $y = -2x^2 + 4x - 3$ estableix una funció quadràtica f definida per $f(x) = -2x^2 + 4x - 3$, per a tot $x \in \mathbb{R}$. Observa que podem escriure

$$\begin{aligned} -2x^2 + 4x - 3 &= -2\left(x^2 - 2x + \frac{3}{2}\right) \\ &= -2\left[(x-1)^2 + \frac{1}{2}\right] \\ &= -2(x-1)^2 - 1 \end{aligned}$$

i, per tant, la gràfica d'aquesta funció s'obté a partir de la paràbola $y = -2x^2$ fent primer una translació de 1 unitat en la direcció de l'eix Y en sentit negatiu, i, després, una translació de 1 unitat en la direcció de l'eix X en sentit positiu.

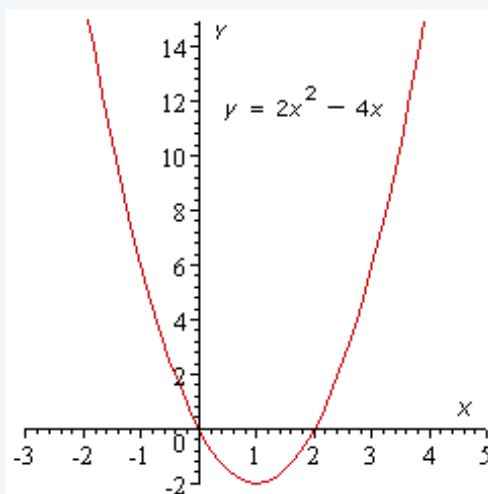


És clar que el vèrtex de la paràbola es troba en el punt de coordenades $(1, -1)$, que és el transformat de $(0, 0)$ per les operacions abans indicades. L'eix de simetria és la recta vertical $x = 1$. La funció té un punt d'ordenada màxima en $x = 1$, el valor del qual és -1 . La funció és creixent per a $x < 1$ i decreixent per a $x > 1$. La gràfica talla l'eix Y en el punt $(0, -3)$ i no talla l'eix X . La funció és sempre negativa.

c) La relació $y = 2x^2 - 4x$ estableix una funció quadràtica f definida per $f(x) = 2x^2 - 4x$, per a tot $x \in \mathbb{R}$. Observa que podem escriure

$$\begin{aligned} 2x^2 - 4x &= 2(x^2 - 2x) \\ &= 2[(x - 1)^2 - 1] \\ &= 2(x - 1)^2 - 2 \end{aligned}$$

i, per tant, la gràfica d'aquesta funció s'obté a partir de la paràbola $y = 2x^2$ fent primer una translació de 2 unitats en la direcció de l'eix Y en sentit negatiu, i, després, una translació de 1 unitat en la direcció de l'eix X en sentit positiu.



És clar que el vèrtex de la paràbola es troba en el punt de coordenades $(1, -2)$, que és el transformat de $(0, 0)$ per les operacions indicades abans. L'eix de simetria és la recta vertical $x = 1$. La funció té un punt d'ordenada mínima en $x = 1$, el valor del qual és -2 . La funció és creixent per a $x > 1$ i decreixent per a $x < 1$. La gràfica talla l'eix Y en el punt $(0, 0)$ i l'eix X en els punts d'abscissa que verifiquen l'equació

$$\begin{aligned} 2x^2 - 4x &= 0 \\ 2x(x - 2) &= 0 \end{aligned}$$

és a dir, en $x = 0$ i en $x = 2$. La funció és positiva en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ i negativa en $(0, 2)$.

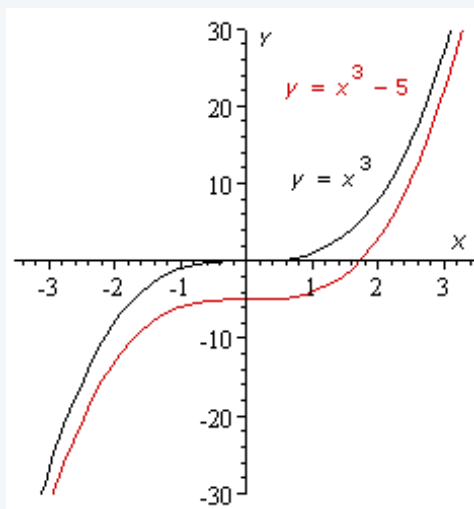
Exercici 2.67

Construeix les gràfiques de les funcions següents: (a) $f(x) = x^3 - 5$; (b) $f(x) = -x^4 + 5$; i (c) $f(x) = (x + 3)^3 + 2$.

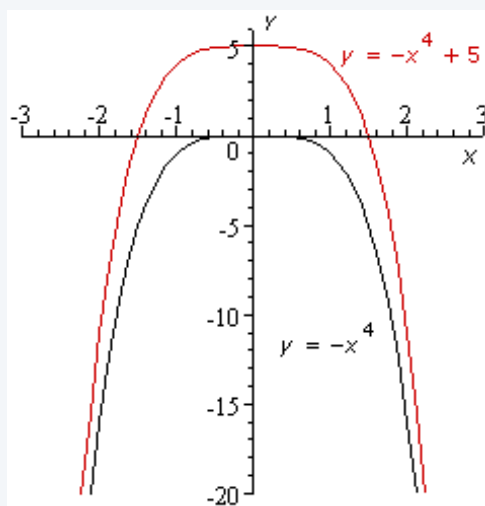
Solució

Totes les funcions d'aquest exercici són polinòmiques de grau més gran que 2.

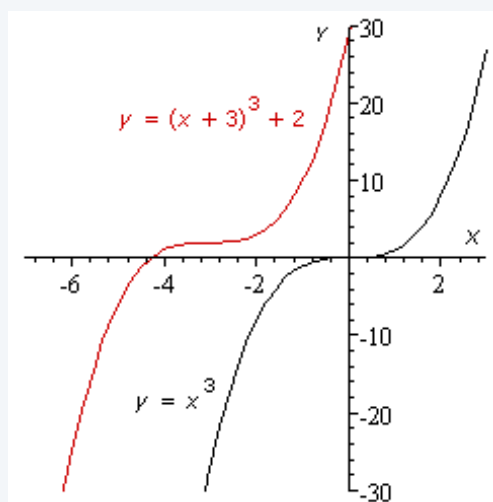
a) La gràfica de la funció $f(x) = x^3 - 5$ s'obté a partir de la de $y = x^3$ mitjançant una translació de 5 unitats en la direcció de l'eix d'ordenades en sentit negatiu.



b) La gràfica de $f(x) = -x^4 + 5$ s'obté a partir de la de $y = x^4$, fent primer una simetria respecte de l'eix X i després traslladant-la 5 unitats en la direcció de l'eix d'ordenades en el sentit positiu.



c) La gràfica de $f(x) = (x + 3)^3 + 2$ s'obté a partir de la de $y = x^3$ fent primer una translació de 2 unitats en la direcció de l'eix Y en sentit positiu i, després, una translació de 3 unitats en la direcció de l'eix X en el sentit negatiu.



3 Exercicis proposats

En aquest capítol es proposen exercicis per treballar de manera autònoma els continguts de la unitat. Cada exercici inclou una indicació breu i la solució corresponent.

3.1 Definició i operacions amb polinomis

Exercici 3.1

Escriu un polinomi en x , de quart grau, complet i ordenat en potències decreixents, amb (a) coeficients enters (b) coeficients racionals i (c) coeficients irracionals

Indicació: Recorda que un polinomi complet de quart grau ha de contenir termes de grau 4, 3, 2, 1 i 0. Tria els coeficients dins del conjunt indicat.

Solució

(a) $x^4 - 5x^3 + 2x^2 - x + 1$, (b) $2x^4 - \frac{3}{5}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - 6x + \frac{2}{3}$, (c) $\sqrt{2}x^4 - 3\sqrt{2}x^3 + \sqrt{3}x^2 + 3\sqrt{5}x + \sqrt{7}$

Exercici 3.2

Per a quin valor de a el polinomi $p(x) = (a - 2)x^2 + 2(a^2 - 4)x + 8a - 16$ es redueix el polinomi zero?

Indicació: Un polinomi és el polinomi zero si tots els seus coeficients són zero. Iguala'ls a zero dona les condicions sobre el paràmetre.

Solució

$a = 2$

Exercici 3.3

Quins valors han de tenir a i b perquè els polinomis $p(x) = x^3 + (b + 2)x^2 - 7$ i $q(x) = x^3 + ax^2 + (a + b)x - 7$ siguin iguals?

Indicació: Iguala els coeficients dels termes del mateix grau o aplica el teorema del residu, segons correspongui.

Solució

$$a = 1 \text{ i } b = -1$$

Exercici 3.4

Donats els polinomis següents:

$$\begin{aligned} a(x) &= -2x^2 + 6x - 5 \\ b(x) &= 3x^2 + 1 \\ c(x) &= x^3 - 6x + 9 \\ d(x) &= \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 - x - \frac{1}{4} \\ e(x) &= \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x \end{aligned}$$

(a) calcula: (i) $a(x) + b(x) + c(x)$, (ii) $3 \cdot a(x) - 2 \cdot b(x) + 5 \cdot e(x)$, (iii) $a(x) \cdot [b(x) + c(x)]$, (iv) $[3 \cdot d(x) - 2 \cdot e(x)] [a(x) - b(x)]$, i (b) troba el polinomi $p(x)$ que compleix la igualtat proposada: (i) $a(x) + p(x) = e(x)$, (ii) $4 \cdot p(x) = a(x)$, (iii) $5 \cdot p(x) - 2 \cdot a(x) = b(x) + c(x)$.

Indicació: Fes les operacions indicades, ordena els termes per graus i redueix termes semblants al final.

Solució

(a) (i) $x^3 + x^2 + 5$, (ii) $\frac{5}{3}x^3 - \frac{19}{2}x^2 + 23x - 17$, (iii) $-2x^5 + 25x^3 - 71x^2 + 90x - 50$, (iv) $-\frac{25}{6}x^5 + 55x^4 - 40x^3 + \frac{135}{4}x^2 + \frac{51}{2}x + \frac{9}{2}$, (b) (i) $\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 5x + 5$, (ii) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{5}{4}$ i (iii) $\frac{1}{5}x^3 - \frac{1}{5}x^2 + \frac{6}{5}x$

Exercici 3.5

Troba el valor numèric de $p(x) = 8x^4 - 5x^2 + 5$ per a $x = \sqrt{2}$ i per a $x = -\sqrt{2}$. Què observes?

Indicació: Substitueix el valor de la variable i observa si només apareixen potències parelles o imparelles.

Solució

$p(\sqrt{2}) = p(-\sqrt{2}) = 27$. El valor numèric és el mateix perquè totes les potències de x són parelles.

Exercici 3.6

Troba el valor numèric de $p(x) = 3x^5 - 5x^3 + 8x$ per a $x = 0$, $x = 1$ i per a $x = -1$. Què observes?

Indicació: Iguala els coeficients dels termes del mateix grau o aplica el teorema del residu, segons correspongui.

Solució

$p(0) = 0$, $p(1) = 6$ i $p(-1) = -6$. Els dos donarrers valors són oposats perquè totes les potències de x són imparelles.

Exercici 3.7

Fes els càlculs indicats i redueix termes semblants:

- a) $(-2x^3 - 5x + 7) \cdot (x^2 - 3x) - (-2x^2 + x + 1)^2$
- b) $2 \cdot [3 - 2x + 4 \cdot (-3x^2 - 5x + 7)] - [6x - 2 \cdot (3 - 2x)]^2$
- c) $(x - 2)^3 - (x + 3)(x - 1)(x + 5) - (x - 1)(x^2 + 1) - (x - 1)^3$
- d) $(x - 3)(x + 3)(x^2 + 9)$
- e) $(3x - 4)(2x^2 + x - 6) - (3x - 4)(x^2 + 7x + 11) - x^2(3x - 4)$

Indicació: Fes les operacions indicades, ordena els termes per graus i redueix termes semblants al final.

Solució

- a) $-2x^5 + 2x^4 - x^3 + 25x^2 - 23x - 1$
- b) $-124x^2 + 76x + 26$
- c) $-2x^3 - 9x^2 + x + 9$
- d) $x^4 - 81$
- e) $-18x^2 - 27x + 68$

Exercici 3.8

Transforma les expressions següents en productes:

- a) $x^2 - x + \frac{1}{4}$
- b) $(x + a)(x - a) + (x + a)^2$
- c) $x^2 - 2ax + a^2 - b^2$
- d) $(x + a - b)^2 - (x - a + b)^2$
- e) $x^2 - 4x + 4 - (x - 2)(x + 7)$
- f) $\frac{1}{3}(x - 3)(2x - 5)^2 - \frac{1}{3}(x - 3)(x + 2)^2$

Indicació: Busca productes notables, diferències de quadrats i factors comuns abans de desenvolupar completament.

Solució

- a) $(x - 1/2)^2$
- b) $2x(x + a)$
- c) $(x - a + b)(x - a - b)$
- d) $4x(a - b)$
- e) $-9(x - 2)$
- f) $(x - 3)(x - 1)(x - 7)$

Exercici 3.9

Determina m i n perquè els polinomis $p(x) = x^3 + 2x^2 + mx + 6$ i $q(x) = (x + n) \cdot (x^2 + nx + 6)$ siguin iguals.

Indicació: Iguala els coeficients dels termes del mateix grau o aplica el teorema del residu, segons correspongui.

Solució

$m = 7$ i $n = 1$

3.2 Potència d'un binomi i fórmula de Newton

Exercici 3.10

Desenvolupa les potències indicades, usant la fórmula del binomi de Newton:

- a) $(2x - 3)^4$
- b) $\left(x - \frac{1}{x}\right)^3$
- c) $(a^2b + 3ab^2)^5$
- d) $\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^4$

Indicació: Usal terme general del binomi de Newton: el terme corresponent depèn del coeficient binomial i de les potències dels dos termes del binomi.

Solució

a) $16x^4 - 96x^3 + 216x^2 - 216x + 81$; b) $x^3 - 3x + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3}$; c) $a^{10}b^5 + 15a^9b^6 + 90a^8b^7 + 270a^7b^8 + 405a^6b^9 + 243a^5b^{10}$; i d) $x^8 - 8x^5 + 24x^2 - \frac{32}{x} + \frac{16}{x^4}$

Exercici 3.11

Sense fer el desenvolupament, troba els termes 2° i 14° del desenvolupament de $(x - 1)^{14}$.

Indicació: Usal terme general del binomi de Newton: el terme corresponent depèn del coeficient binomial i de les potències dels dos termes del binomi.

Solució

$$-14x^{13} \text{ i } -14x$$

Exercici 3.12

Sense fer el desenvolupament, troba el terme central del desenvolupament de $(a^2x + x^2)^6$.

Indicació: Usal terme general del binomi de Newton: el terme corresponent depèn del coeficient binomial i de les potències dels dos termes del binomi.

Solució

$$20a^6x^9$$

Exercici 3.13

Troba el terme independent del desenvolupament de $\left(3x - \frac{1}{x}\right)^8$.

Indicació: Usal terme general del binomi de Newton: el terme corresponent depèn del coeficient binomial i de les potències dels dos termes del binomi.

Solució

$$5670$$

Exercici 3.14

Troba el terme la qual part literal és x^5 en desenvolupar $\left(x + \frac{2}{x}\right)^7$.

Indicació: Usal terme general del binomi de Newton: el terme corresponent depèn del coeficient binomial i de les potències dels dos termes del binomi.

Solució

$$14x^5$$

3.3 Divisió de polinomis i algorisme d'Euclides

Exercici 3.15

Efectua les divisions següents de polinomis:

- a) $(x^3 - 3x^2 + 2x + 5) : (x^2 + x + 2)$
- b) $(4x^5 - 3x^3 + 2x + 1) : (2x^3 - x + 2)$
- c) $\left(\frac{1}{2}x^6 + 3x^4 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{6}\right) : (3x^3 + 2x)$
- d) $(x^5 - 5x^4 - 3x + 15) : (x^2 - \sqrt{3})$

$$e) (x^3 + 2x^2 - 3x - 6) : (6x + 1)$$

Indicació: Aplica la divisió euclidiana de polinomis. En l'algorisme d'Euclides, continua fins que el residu sigui zero.

Solució

	Quocient	Residu
a)	$x - 4$	$4x + 13$
b)	$2x^2 - \frac{1}{2}$	$-4x^2 + \frac{3}{2}x + 2$
c)	$\frac{1}{6}x^3 + \frac{8}{9}x - \frac{1}{9}$	$-\frac{16}{9}x^2 + \frac{2}{9}x + \frac{1}{6}$
d)	$x^3 - 5x^2 + \sqrt{3}x - 5\sqrt{3}$	0
e)	$\frac{1}{6}x^2 + \frac{11}{36}x - \frac{119}{216}$	$-\frac{1177}{216}$

Exercici 3.16

Troba els valors de m i n perquè el polinomi $p(x) = x^2 - 10$ sigui un divisor de $q(x) = x^4 - 3x^3 - 8x^2 + mx + n$.

Indicació: Iguala els coeficients dels termes del mateix grau o aplica el teorema del residu, segons correspongui.

Solució

$$m = 30 \text{ i } n = -20$$

Exercici 3.17

Troba els valors de m i n perquè el polinomi $p(x) = x^4 + 4x^3 - x^2 + m$ sigui un múltiple de $q(x) = x^2 + 7x + n$.

Indicació: Iguala els coeficients dels termes del mateix grau o aplica el teorema del residu, segons correspongui.

Solució

$$m = 84 \text{ i } n = 14$$

Exercici 3.18

Troba el m.c.d. dels polinomis següents per l'algorisme de Euclides:

a) $p(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ i $q(x) = x^3 - x^2 + x - 1$

b) $p(x) = x^4 - 5x^3 + 6x^2 - 15x + 9$ i $q(x) = x^3 - 7x^2 + 13x - 6$

c) $p(x) = x^4 - 3x^3 - 12x^2 + 17x - 3$ i $q(x) = x^4 - 5x^3 + 3x^2 - 10x + 2$

Indicació: Aplica la divisió euclidiana de polinomis. En l'algorisme d'Euclides, continua fins que el residu sigui zero.

Solució

- a) $x^2 + 1$
 b) $x^2 - 5x + 3$
 c) $x^2 - 5x + 1$

3.4 Regla de Ruffini, residu i factorització**Exercici 3.19**

Efectua les divisions següents mitjançant la regla de Ruffini:

- a) $(x^5 - 9x^3 + 30x^2) : (x + 4)$
 b) $(2x^5 - x^2 - x - 1) : (x + \frac{1}{3})$
 c) $(x^4 + 2x^3 + 3x^2 - 4x - 10) : (x - \sqrt{2})$
 d) $(x^4 + ax^3 + a^2x^2 + a^3x + a^4) : (x + a)$

Indicació: En les divisions per un binomi de primer grau, pots aplicar Ruffini o el teorema del residu.

Solució

	Quocient	Residu
a)	$x^4 - 4x^3 + 7x^2 + 2x - 8$	32
b)	$2x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{9}x^2 - \frac{29}{27}x - \frac{52}{81}$	$-\frac{191}{243}$
c)	$x^3 + (2 + \sqrt{2})x^2 + (5 + 2\sqrt{2})x + 5\sqrt{2}$	0
d)	$x^3 + a^2x$	a^4

Exercici 3.20

Troba el residu de les divisions següents: (a) $(x^{128} + 1) : (x + 1)$ i (b) $(x^{128} - 1) : (x + 1)$.

Indicació: En les divisions per un binomi de primer grau, pots aplicar Ruffini o el teorema del residu.

Solució

(a) 2 i (b) 0

Exercici 3.21

Troba el valor de a perquè el polinomi $p(x) = x^3 - x^2 + 2x - a - 3$ sigui divisible per $x + 7$.

Indicació: Iguala els coeficients dels termes del mateix grau o aplica el teorema del residu, segons correspongui.

Solució

$$a = 409$$

Exercici 3.22

Troba el valor de k perquè en dividir el polinomi $p(x) = x^4 - 2kx^3 + x^2 - 4kx + 9$ per $x + 1$ el residu sigui -7 .

Indicació: Iguala els coeficients dels termes del mateix grau o aplica el teorema del residu, segons correspongui.

Solució

$$k = -3$$

Exercici 3.23

Troba un polinomi de segon grau que en dividir-lo per $x + 1$ el residu sigui -2 , que en dividir-lo per $x - 2$ el residu sigui 4 , i que sigui múltiple de $x + 3$.

Indicació: Iguala els coeficients dels termes del mateix grau o aplica el teorema del residu, segons correspongui.

Solució

$$-\frac{3}{5}x^2 + \frac{7}{5}x - \frac{6}{5}$$

Exercici 3.24

Donat el polinomi $p(x) = x^3 - 5x^2 + ax + b$, troba a i b sabent que tant en dividir-lo per $x - 2$ com per $x + 1$ el residu de la divisió és -11 .

Indicació: Iguala els coeficients dels termes del mateix grau o aplica el teorema del residu, segons correspongui.

Solució

$$a = 2 \text{ i } b = -3$$

3.5 Arrels, màxim comú divisor i mínim comú múltiple

Exercici 3.25

Troba les arrels i la descomposició factorial dels següents polinomis:

a) $9x^2 + 6x + 1$

b) $25x^2 - 9$

- c) $x^4 - 6x^2 + 9$
 d) $5x^5 - 10\sqrt{2}x^4 + 10x^3$
 e) $3x^4 - 10x^3 + 7x^2 + 4x - 4$
 f) $x^4 + 2x^3 - 5x^2 - 18x - 36$

Indicació: Factoritza els polinomis tant com sigui possible. Les arrels i els factors lineals són la clau del càlcul.

Solució

- a) $(3x + 1)^2$ $-\frac{1}{3}$ (doble)
 b) $(5x + 3)(5x - 3)$ $-\frac{3}{5}$ i $\frac{3}{5}$
 c) $(x - \sqrt{3})^2(x + \sqrt{3})^2$ $\pm\sqrt{3}$ (dobles)
 d) $5x^3(x - \sqrt{2})^2$ 0 (triple) i $\sqrt{2}$ (doble)
 e) $3(x - 1)^2(x - 2)(x - 2/3)$ 1 (doble), 2 i $2/3$
 f) $(x - 3)(x + 3)(x^2 + 2x + 4)$ 3 i -3

Exercici 3.26

Troba el m.c.d. i el m.c.m. dels polinomis següents:

- a) $4x - 4, x^2 - 1$ i $6x^2 - 6$
 b) $4x^2 - 4x + 1, 2x^2 - 3x + 1$ i $x - 1$
 c) $x^3 + 5x^2 - x - 5$ i $x^3 - 2x^2 - x + 2$
 d) $x^6 - 1$ i $x^3 - x$

Indicació: Factoritza els polinomis tant com sigui possible. Les arrels i els factors lineals són la clau del càlcul.

Solució

- | | m.c.d. | m.c.m. |
|----|------------------|--------------------------------|
| a) | $x - 1$ | $x^2 - 1$ |
| b) | 1 | $\frac{1}{4}(2x - 1)^2(x - 1)$ |
| c) | $(x - 1)(x + 1)$ | $(x + 5)(x - 1)(x - 2)(x + 1)$ |
| d) | $(x - 1)(x + 1)$ | $x(x^6 - 1)$ |

Exercici 3.27

Resol les equacions següents:

- a) $8x^4 - 38x^3 + 37x^2 + 17x - 6 = 0$
 b) $3x(x + 2) - (x + 2)(x^2 - 1) = 5$

Indicació: Factoritza els polinomis tant com sigui possible. Les arrels i els factors lineals són la clau del càlcul.

Solució

(a) $2, 3, 1/4$ i $-1/2$; (b) $3, -1 + \sqrt{2}$ i $-1 - \sqrt{2}$

Exercici 3.28

Troba els valors de m i n perquè les fraccions següents siguin equivalents:

$$\frac{x^2 - 4}{x^3 - 3x - 2} \quad \text{i} \quad \frac{x^2 - x - 6}{x^3 - x^2 + mx + n}$$

Indicació: Factoritza els polinomis tant com sigui possible. Les arrels i els factors lineals són la clau del càlcul.

Solució

$m = -5$ i $n = -3$

3.6 Fraccions racionals

Exercici 3.29

Simplifica les fraccions racionals següents:

a)

$$\frac{3x^2}{x^2 - 6x}$$

b)

$$\frac{x^2 - 14x + 49}{x^2 - 49}$$

c)

$$\frac{x^4 - 16}{x^4 + 8x^2 + 16}$$

d)

$$\frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x^4 + 18x^2 + 81}$$

e)

$$\frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 + x^2 + 2x - 4}$$

Indicació: Factoritza numeradors i denominadors, simplifica factors comuns i recorda les restriccions del domini.

Solució

- a) $\frac{3x}{x-6}$
 b) $\frac{x-7}{x^2+7}$
 c) $\frac{x^2-4}{x^2+4}$
 d) Irreductible
 e) $\frac{x-1}{x^2+2}$

Exercici 3.30

Efectua les operacions indicades, simplificant el resultat:

a)

$$\frac{1}{x^2-4} - \frac{1}{x^2-2x} + \frac{1}{x^2-4x+4}$$

b)

$$\left(1 - \frac{9}{x^2}\right) \cdot \frac{4x}{x^2-6x+9}$$

c)

$$\frac{x^2-3x}{x^2-4x+4} : \left(\frac{x}{x-2} - \frac{x}{x+2}\right)$$

d)

$$\left(\frac{2x}{x^2-4} - \frac{x}{x-2}\right) : \left(\frac{5}{2+x} - \frac{5}{2-x}\right)$$

e)

$$\left(\frac{3x}{x-1} + \frac{4}{x+1} - \frac{2x^2+7x}{x^2-1}\right) : \left(\frac{2x-1}{x-1} - \frac{9}{x+1}\right)$$

f)

$$\frac{x+6}{x^3-9x} + \frac{18}{x^4-81} + \frac{x+6}{x^3+9x}$$

Indicació: Factoritza numeradors i denominadors, simplifica factors comuns i recorda les restriccions del domini.

Solució

- a) $\frac{x^2+4}{x(x+2)(x-2)^2}$
 b) $\frac{4x+12}{x^2-3x}$
 c) $\frac{-x^2+x+6}{4x-8}$
 d) $\frac{4-x}{10}$
 e) $\frac{x+2}{2x-4}$
 f) $\frac{2x+6}{x^3-3x^2+9x-27}$

Exercici 3.31

Troba A, B i C , de manera que es compleixin les igualtats que s'indiquen:

a)

$$\frac{4x - 12}{x^2 - 36} = \frac{A}{x - 6} + \frac{B}{x + 6}$$

b)

$$\frac{x^2 - 2x - 1}{x^2(x - 1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x - 1}$$

c)

$$\frac{3x + 2}{x^3 + 4x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4}$$

d)

$$\frac{2x - 1}{x^2 - 6x + 9} = \frac{A}{x - 3} + \frac{B}{(x - 3)^2}$$

Indicació: Factoritza numeradors i denominadors, simplifica factors comuns i recorda les restriccions del domini.

Solució

	A	B	C
a)	1	3	
b)	3	1	-2
c)	1/2	-1/2	3
d)	2	5	

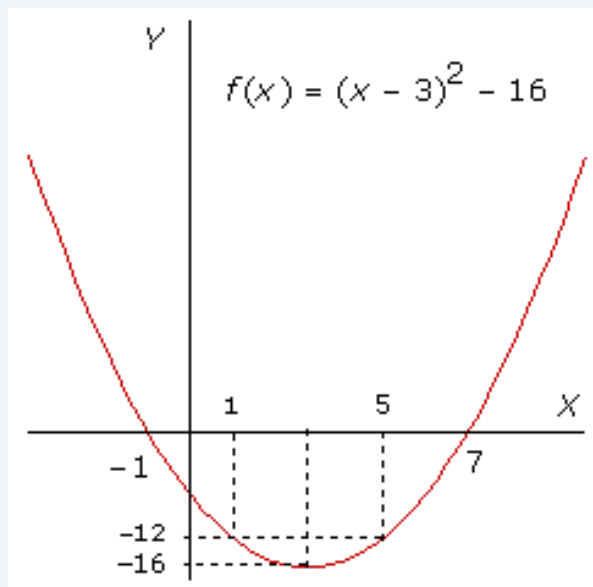
Exercici 3.32

Representa la funció $f(x) = x^2 - 6x - 7$ i respon les preguntes següents: (a) Quin és el recorregut d'aquesta funció? (b) Quines són les antiimatges de 0 i -20? (c) Per a quins valors de x es compleix $f(x) < 0$? I $f(x) \leq -12$?

Indicació: Factoritza numeradors i denominadors, simplifica factors comuns i recorda les restriccions del domini.

Solució

(a) $[-16, +\infty)$. (b) Les antiimatges de 0 són 7 i -1; -20 no té antiimatges. (c) $f(x) < 0$ si $x \in (-1, 7)$ i $f(x) \leq -12$ si $x \in [1, 5]$.



3.7 Funcions polinòmiques i racionals

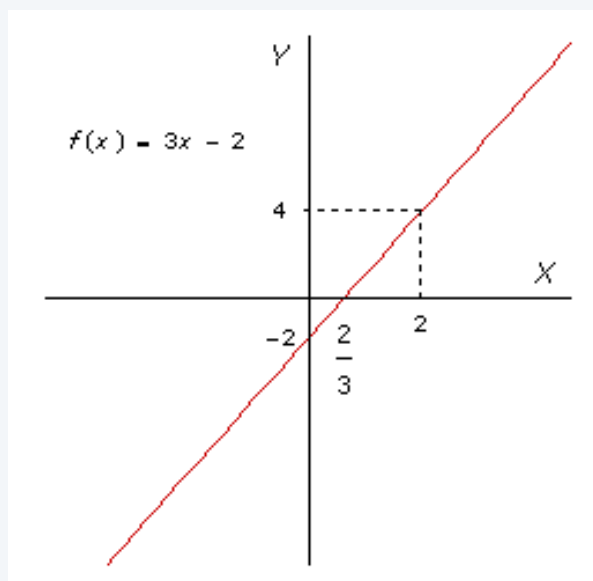
Exercici 3.33

Representa la funció $f(x) = 3x - 2$ i respon les preguntes següents: (a) Quines són les imatges de $1/3$ i 0 ? (b) Quines són les antiimatges de -1 i 2 ? (c) Per a quins valors de x es compleix $f(x) \geq 0$? I $f(x) < 4$?

Indicació: Identifica els punts de tall amb els eixos, el vèrtex o els zeros de la funció, segons el tipus de funció.

Solució

(a) $f(1/3) = -1$ i $f(0) = -2$; (b) $1/3$ és antiimatge de -1 i $4/3$ ho és de 2 ; (c) $f(x) \geq 0$ si $x \in [2/3, +\infty)$ i $f(x) < 4$ si $x \in (-\infty, 2)$.



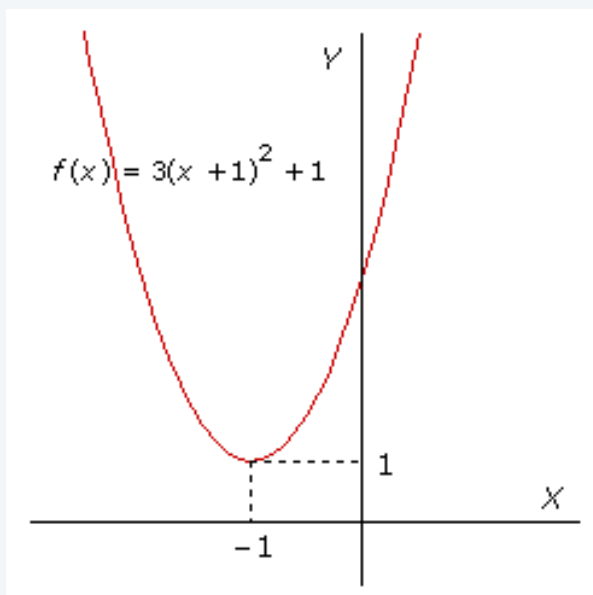
Exercici 3.34

La gràfica de la funció $f(x) = 3x^2 + bx + 4$ passa pel punt $(2, 28)$. Troba el valor de b i representa la gràfica de la funció.

Indicació: Identifica els punts de tall amb els eixos, el vèrtex o els zeros de la funció, segons el tipus de funció.

Solució

$$b = 6$$

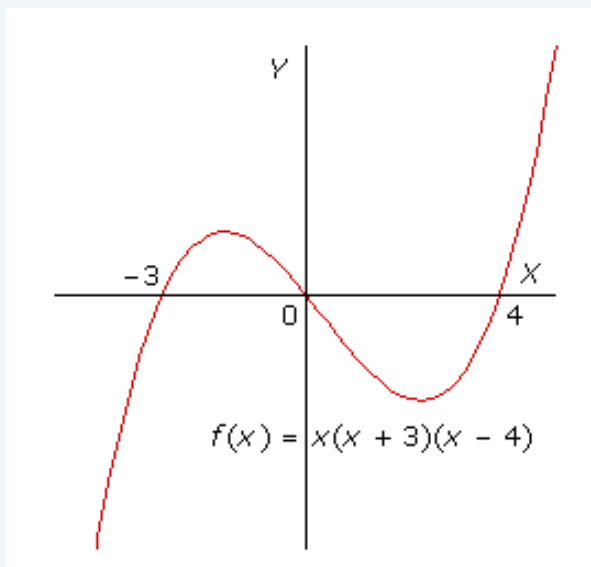
**Exercici 3.35**

Escriu una funció polinòmica de tercer grau que tingui per zeros els nombres $-3, 0$ i 4 . Representa aproximadament aquesta funció.

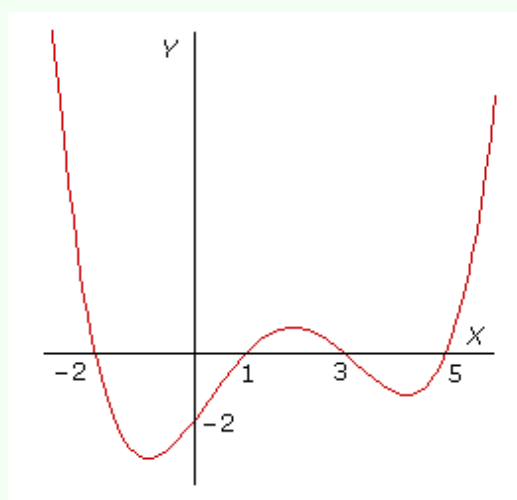
Indicació: Identifica els punts de tall amb els eixos, el vèrtex o els zeros de la funció, segons el tipus de funció.

Solució

$$f(x) = x(x + 3)(x - 4)$$

**Exercici 3.36**

Escriu una funció polinòmica que tingui per gràfica la de la figura següent.



Indicació: Identifica els punts de tall amb els eixos, el vèrtex o els zeros de la funció, segons el tipus de funció.

Solució

La funció té 4 zeros: -2 , 1 , 3 i 5 . Aleshores, $f(x) = k(x+2)(x-1)(x-3)(x-5)$. A més, com que passa per $(0, -2)$, aleshores $k = 1/15$. Per tant, la funció és $f(x) = 1/15 \cdot (x+2)(x-1)(x-3)(x-5)$

Exercici 3.37

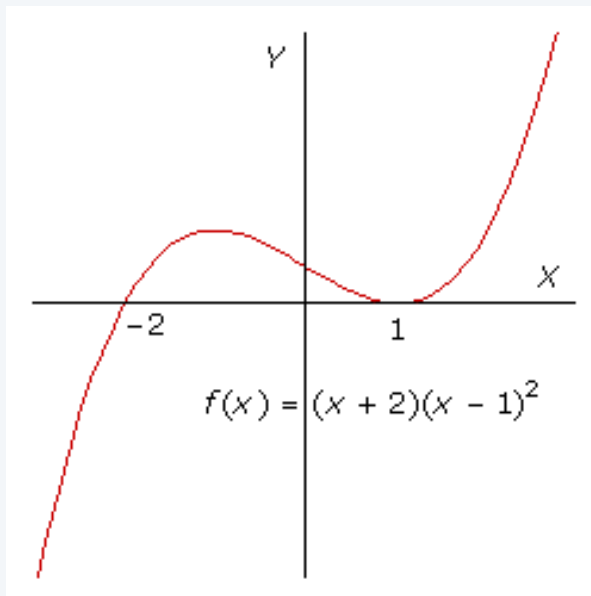
És possible que la gràfica d'una funció polinòmica de tercer grau tingui exactament dos punts de tall amb el eix d'abscisses?

Indicació: Factoritza el numerador i estudia el signe de cada factor i del denominador en els

intervals determinats pels punts crítics.

Solució

Sí, per exemple, la funció $f(x) = (x + 2)(x - 1)^2$ té un punt doble en $x = 1$. Geomètricament, la funció és tangent a l'eix d'abscisses en $x = 1$.



Exercici 3.38

Troba els intervals en què la següent funció racional

$$f(x) = \frac{3x^2 - 5x + 2}{2x + 9}$$

és positiva.

Indicació: Resol pas a pas i comprova el resultat substituint-lo en l'enunciat.

Solució

Es té

$$\frac{3x^2 - 5x + 2}{2x + 9} > 0$$

quan $x \in (-9/2, 2/3) \cup (1, +\infty)$

4 Tests interactius

4.1 Test: Operacions amb polinomis

Instruccions. Marca una sola resposta per pregunta. En acabar, prem el botó **Corregir**. El camp **Nota** mostrarà el resultat.

Corregir Netejar **Nota:**

1. Si $p(x)$ i $q(x)$ són dos polinomis, aleshores

- a) $\text{grau } (p(x) + q(x)) = \text{grau } p(x) + \text{grau } q(x)$
- b) $\text{grau } (p(x) + q(x)) \leq \max \{ \text{grau } p(x), \text{grau } q(x) \}$
- c) $\text{grau } (p(x) \cdot q(x)) = \text{grau } p(x) \cdot \text{grau } q(x)$
- d) $\text{grau } (p(x) \cdot q(x)) = \text{grau } (p(x) + q(x))$

Correcció:

2. De les expressions següents, quina és un polinomi de $\mathbb{Z}[x]$?

- a) $3x^4 - 2x + \sqrt{2}$
- b) $2x^{-3} + x^2 - 2x + 1$
- c) $x^5 - \frac{8}{2}x^3 - 4x - 1$
- d) $3\sqrt{x^3} + 2x^2 + x - 1$

Correcció:

3. Si $p(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 1$, aleshores

- a) $p(-1) = -4$
- b) $p(\sqrt{2}) = -7$
- c) $p(\frac{1}{2}) = -\frac{11}{8}$
- d) Cap de les anteriors

Correcció:

4. Sabent que $p(x) = 3x^3 - 5x^2 + 5x + 1$ i $q(x) = Ax^3 + (B - C)x^2 + (2A + B + C)x + 1$. Aleshores $p(x) = q(x)$ si

- a) $A = 3, B = -3, C = 2$
- b) $A = 3, B = 2, C = -3$
- c) $A = 3, B = C = 2$
- d) Cap de les anteriors

Correcció:

5. Donada la potència següent

$$\left(\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{21}$$

aleshores:

- a) El terme general del seu desenvolupament per la fórmula de Newton és $\binom{21}{k} (\sqrt{2})^{23-2k}$
- b) El terme onzè del seu desenvolupament és $2\binom{21}{10}\sqrt{2}$
- c) L'últim terme del seu desenvolupament és $\frac{1}{1024\sqrt{2}}$
- d) Cap de les anteriors

Correcció:

6. En el desenvolupament per la fórmula de Newton de la potència

$$\left(2x + \frac{1}{2}\right)^{15}$$

es compleix:

- a) El terme quart del desenvolupament és $\binom{15}{3} \cdot x^{12}$
- b) El terme independent de x en el desenvolupament és 2^{-15}
- c) El coeficient del terme de lloc 14 és $\binom{15}{13} \cdot 2^{-9}$
- d) El terme en què apareix x^{10} és $16 \cdot \binom{15}{5} \cdot x^{10}$

Correcció:

7. Calculant els productes indicats

$$(x - 1 + \sqrt{2}) \cdot (x - 1 - \sqrt{2}) \cdot (x + 1 + \sqrt{2}) \cdot (x + 1 - \sqrt{2})$$

i expressant el resultat en forma de polinomi, s'obté

- a) $x^4 - 6x^2 - 1$
- b) $x^4 + 6x^2 + 1$
- c) $x^4 - 6x^2 + 1$
- d) $x^4 + 6x^2 - 1$

Correcció:

8. El quocient $c(x)$ i el residu $r(x)$ de dividir $12x^4 - 7x^3 - 74x^2 + 7x + 10$ per $3x^2 - 7x - 4$ són

- a) $c(x) = x^2 + x + 1$ i $r(x) = x - 1$
- b) $c(x) = 4x^2 + 7x - 3$ i $r(x) = 7x - 1$
- c) $c(x) = x^2 + x + 1$ i $r(x) = 2x - 2$
- d) $c(x) = 4x^2 + 7x - 3$ i $r(x) = 14x - 2$

Correcció:

9. Donats els polinomis

$$\begin{aligned}p(x) &= 6x^3 + 9x^2 + 2x + 3 \\q(x) &= 2x^3 + 3x^2 + 4x + 6\end{aligned}$$

aleshores:

- a) $\text{m.c.d.}(p(x), q(x)) = x + \frac{3}{2}$
- b) $\text{m.c.d.}(p(x), q(x)) = x^2 + 2$
- c) $\text{m.c.d.}(p(x), q(x)) = x^3 + \frac{3}{2}x^2$
- d) Cap de les anteriors

Correcció:

10. Si $x^3 - 3x^2 + x - a$ és divisible per $x^2 + 1$, aleshores

- a) $a = 4$
- b) $a = 3$
- c) $a = 2$
- d) $a = 1$

Correcció:

4.2 Test: Factorització de polinomis

Instruccions. Marca una sola resposta per pregunta. En acabar, prem el botó **Corregir**. El camp **Nota** mostrarà el resultat.

Corregir Netejar **Nota:**

1. Si un polinomi $p(x)$ compleix $p(a) = 0$ per a un cert nombre real, aleshores

- a) $p(x)$ és divisible per $x - a$
- b) $p(x)$ és divisible per $x + a$
- c) $p(x)$ no és divisible per $x - a$
- d) No es pot assegurar res si no sabem el valor de a

Correcció:

2. En la següent divisió

$$\begin{array}{r|l} p(x) & x + a \\ R & c(x) \end{array}$$

es compleix:

- a) $p(a) = c(a)$
- b) $p(-a) = R$
- c) $p(a) = R$
- d) $p(-a) = c(a)$

Correcció:

3. Si un polinomi $p(x)$ té tots els seus coeficients enters i -3 és una de les seves arrels, aleshores

- a) El seu terme independent pot ser 8
- b) El seu terme independent pot ser 9
- c) El seu terme independent pot ser qualsevol nombre negatiu
- d) $p(3) = 0$

Correcció:

4. El quocient $c(x)$ i el residu $r(x)$ de dividir $\sqrt{2}x^4 - 4\sqrt{2}$ per $x + \sqrt{2}$ són

- a) $c(x) = \sqrt{2}x^3 + 2x^3 + 2\sqrt{2}x + 4$ i $r(x) = 0$

- b) $c(x) = \sqrt{2}x^3 + 2x^3 + 2\sqrt{2}x + 4$ i $r(x) = \sqrt{2}$
- c) $c(x) = \sqrt{2}x^3 - 2x^2 + 2\sqrt{2}x - 4$ i $r(x) = 0$
- d) $c(x) = \sqrt{2}x^3 - 2x^2 + 2\sqrt{2}x - 4$ i $r(x) = -\sqrt{2}$

Correcció:

5. Quin dels polinomis següents és divisible per $x - 2$?

- a) $x^2 + 2x + 1$
- b) $x^2 + x - 2$
- c) $x^3 - 3x + 2$
- d) $x^6 - 64$

Correcció:

6. Si el residu de dividir $p(x) = x^3 + ax^2 - bx + 6$ per $x - 1$ és 5 i el de dividir-lo per $x + 1$ és 3, aleshores:

- a) $a = -2$ i $b = 0$
- b) $a = -2$ i $b = -4$
- c) $a = 2$ i $b = -4$
- d) $a = 2$ i $b = -2$

Correcció:

7. Un polinomi té residu 5 en dividir-lo per $x - 3$ i també al dividir-lo per $x + 1$. Quin és el residu de dividir-lo per $(x - 3)(x + 1)$?

- a) $3x + 5$
- b) $x + 5$
- c) 5
- d) No podem trobar-lo perquè falten dades

Correcció:

8. Les solucions reals de l'equació

$$x^6 - x^5 - 6x^4 - x^2 + x + 6 = 0$$

són:

- a) $-2, -1, 1$ i 2

- b) $-2, -1, 1$ i 3
- c) $-3, -1, 1$ i 2
- d) Cap de les anteriors

Correcció:

9. La descomposició factorial del polinomi $p(x) = 4x^4 - 17x^2 + 4$ és

- a) $4(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$
- b) $4(x^2+1)(x-2)(x+2)$
- c) $4(x^2+1)(x^2+4)$
- d) $4(x-2)(x+2)(x-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2})$

Correcció:

10. Quin dels polinomis següents té -2 com a arrel doble, 0 com a arrel triple i 1 com a arrel de multiplicitat 4 ?

- a) $(x-2)^2(x+1)^4$
- b) $x(x+2)^2(x-1)^4$
- c) $x^3(x+2)^2(x-1)^4$
- d) $x^3(x-2)^2(x+1)^4$

Correcció:

4.3 Test: Operacions amb fraccions de polinomis

Instruccions. Marca una sola resposta per pregunta. En acabar, prem el botó **Corregir**. El camp **Nota** mostrarà el resultat.

Corregir Netejar **Nota:**

1. La fracció algebraica

$$\frac{x^2 + x}{x^2 + 2x}$$

és equivalent a:

- a) $\frac{x+1}{x+2}$
- b) $\frac{x}{2x}$

- c) $\frac{x^3}{2x^3}$
 d) $\frac{x}{x+2}$

Correcció:

2. Quina és la fracció irreduïble, equivalent a

$$\frac{x^2 - 25}{x^2 + 10x + 25}$$

- a) $\frac{1}{10x}$
 b) $\frac{x+5}{x-5}$
 c) $\frac{x-5}{x+5}$
 d) Cap de les anteriors

Correcció:

3. En simplificar la fracció algebraica següent

$$\frac{2x^4 + 3x^3 - 4x^2 - 4x + 3}{2x^5 + x^3 + 2x^2 - 10x + 5}$$

s'obté:

- a) $\frac{2x-3}{2x^2+5}$
 b) $\frac{2x+3}{2x^2+5}$
 c) $\frac{2x+3}{2x^2+1}$
 d) $\frac{2x-1}{2x^2+1}$

Correcció:

4. En efectuar les operacions indicades i simplificar

$$\frac{x+1}{2x-2} - \frac{4x}{x^2-1} - \frac{x^2+1}{1-x^2} - \frac{x-1}{2x+2}$$

s'obté:

- a) $\frac{x-1}{x+1}$
 b) $\frac{-1}{x+1}$
 c) $\frac{x}{x+1}$
 d) $\frac{x+1}{x-1}$

Correcció:

5. En efectuar les operacions indicades i simplificar

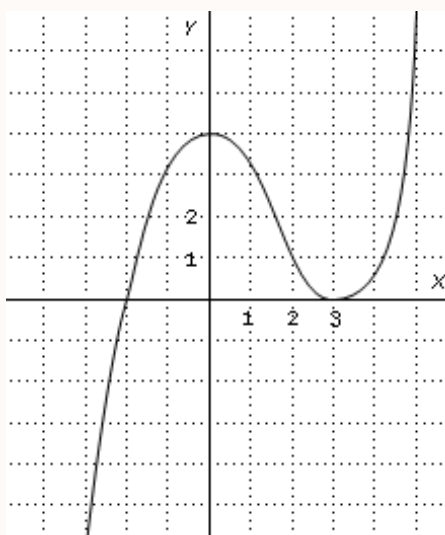
$$\left(\frac{x}{x+1} + \frac{x-1}{x}\right) : \left(\frac{x}{x+1} - \frac{x-1}{x}\right)$$

s'obté:

- a) -1
- b) 1
- c) $2x^2 - 1$
- d) $-2x^2 + 1$

Correcció:

6. Donada la següent gràfica d'una funció polinòmica de tercer grau f

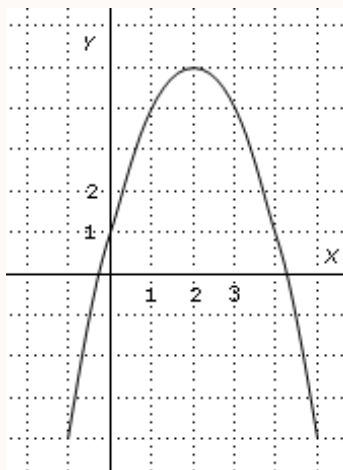


aleshores, quina de les afirmacions següents és falsa?

- a) La funció és decreixent per a $0 < x < 3$
- b) El domini de f és $\mathbb{R}$
- c) Per a $x < -2$ la funció és negativa
- d) 1 té dos antiimatges

Correcció:

7. Donada la següent gràfica d'una funció quadràtica f

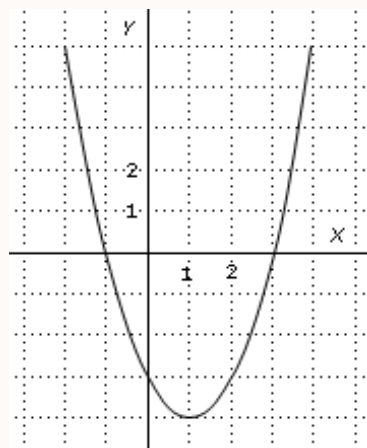


aleshores, quina de les afirmacions següents és falsa?

- a) La funció presenta un punt d'ordenada màxima en $x = 2$ i el seu valor és 5
- b) La gràfica d'aquesta funció és la paràbola d'equació $y = -x^2 + 4x + 1$
- c) La funció és negativa per a $2 - \sqrt{5} < x < 2 + \sqrt{5}$
- d) La funció és creixent $x < 2$

Correcció:

8. Donada la següent gràfica d'una funció quadràtica f



quina de les següents característiques correspon a aquesta gràfica?

- a) La funció és positiva per a $-1 < x < 3$
- b) La funció té un punt d'ordenada mínima en $x = 1$ el valor del qual és 2
- c) La funció és creixent per a $x < 1$
- d) La gràfica d'aquesta funció és la paràbola d'equació $y = x^2 - 2x - 3$

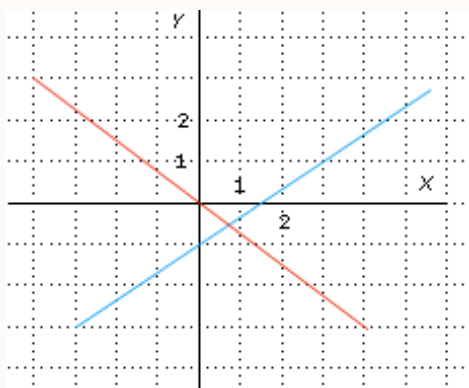
Correcció:

9. Donada la funció quadràtica f definida per $f(x) = x^2 + 2x + k$, aleshores:

- a) La seva gràfica talla l'eix d'abscisses en un punt si $k = 1$
- b) La seva gràfica talla l'eix d'abscisses en dos punts si $k > 1$
- c) La seva gràfica no talla l'eix d'abscisses si $k < 1$
- d) Cap de les anteriors

Correcció:

10. Donades les següents gràfiques de dues funcions



quina de les afirmacions següents és falsa?

- a) La gràfica de la funció lineal és la recta d'equació $y = -\frac{3}{4}x$
- b) La gràfica de la funció afí és la recta d'equació $y = \frac{3}{2}x - 1$
- c) $\frac{12}{17}$ té la mateixa imatge en totes dues funcions
- d) Les dues funcions són negatives en l'interval $(0, \frac{3}{2})$

Correcció: