

Nombres complexos

Miquel Àngel Perelló

2 de juliol de 2026

Índex

Introducció	iii
1 Teoria	1
1.1 Introducció	1
1.2 El cos dels nombres complexos	2
1.3 Representació geomètrica dels nombres complexos	19
1.3.1 Afix d'un nombre complex	19
1.3.2 Interpretació geomètrica de la suma de dos nombres complexos	21
1.3.3 Mòdul i argument d'un nombre complex	22
1.4 Forma polar i trigonomètrica d'un nombre complex	30
1.4.1 Forma polar d'un nombre complex	30
1.4.2 Forma trigonomètrica d'un nombre complex	33
1.4.3 Interpretació geomètrica del producte de dos nombres complexos	37
1.5 Operacions amb nombres complexos en forma polar	40
1.5.1 Productes	40
1.5.2 Quocients	41
1.5.3 Potències. Fórmula de De Moivre	43
1.5.4 Arrels n -èsimes	47
1.5.5 Interpretació geomètrica de les arrels n -èsimes d'un nombre complex	49
2 Pràctica	50
3 Exercicis proposats	73
4 Tests interactius	78

Prefaci

Aquests apunts formen la unitat d'**aprendes** dedicada als **nombres complexos**.

La unitat continua l'estudi dels conjunts numèrics i introdueix els nombres complexos com una ampliació natural dels nombres reals. Aquesta ampliació permet resoldre equacions com $x^2 + 1 = 0$ i proporciona una eina algebraica i geomètrica fonamental. L'objectiu no és només aprendre a operar amb expressions de la forma $a + bi$, sinó entendre l'estructura del cos dels nombres complexos, la representació en el pla complex, el conjugat, el mòdul, l'argument, la forma polar, la fórmula de De Moivre i el càlcul d'arrels.

El text està organitzat seguint el model de la unitat de polinomis d'**aprendes**: teoria, pràctica, exercicis proposats i tests interactius d'autoavaluació.

Introducció

Els nombres complexos apareixen de manera natural quan es vol ampliar el camp d'equacions que es poden resoldre. En els nombres reals, l'equació

$$x^2 + 1 = 0$$

no té solució, perquè cap quadrat real és negatiu. La introducció d'una unitat imaginària i , definida per la propietat $i^2 = -1$, permet construir nombres de la forma

$$a + bi, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

i treballar-hi de manera coherent.

En aquesta unitat s'estudia primer la forma binòmica i les operacions bàsiques. Després s'introdueix la representació geomètrica dels complexos en el pla, el conjugat, el mòdul i l'argument. Finalment es presenten la forma polar i trigonomètrica, la fórmula de De Moivre, el càlcul de potències i el càlcul d'arrels.

Els objectius principals són:

- reconèixer i operar amb nombres complexos en forma binòmica;
- calcular el conjugat, el mòdul i l'argument d'un complex;
- representar complexos en el pla i interpretar geomètricament les operacions principals;
- expressar un complex en forma polar i trigonomètrica;
- aplicar la fórmula de De Moivre al càlcul de potències;
- calcular arrels n -èsimes i interpretar-ne la disposició geomètrica;
- resoldre equacions i problemes algebraics senzills amb nombres complexos.

1 Teoria

1.1 Introducció

En el cos $\mathbb{R}$ dels nombres reals hi ha equacions que no tenen solució, com ara

$$x^2 + 1 = 0$$

i

$$x^2 + x + 1 = 0.$$

Per aquesta raó, el cos dels nombres reals s'amplia a un altre cos numèric en què aquestes equacions, i de fet totes les equacions polinòmiques, tinguin solució. Aquest nou cos s'anomena **cos dels nombres complexos** i es denota per $\mathbb{C}$.

Com que $\mathbb{C}$ és una ampliació de $\mathbb{R}$, l'equació

$$x^2 + 1 = 0$$

té solució si el nou cos conté un element que faci el paper de

$$\sqrt{-1}.$$

Aquest element es denota per i i s'anomena **unitat imaginària**; per definició, compleix $i^2 = -1$.

Aleshores, l'equació

$$x^2 + x + 1 = 0$$

té com a solucions

$$\begin{aligned} \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} &= \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{3}\sqrt{-1}}{2} \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}. \end{aligned}$$

Per tant, $\mathbb{C}$ ha de contenir els elements

$$-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \text{i} \quad -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

En general, com veurem en l'apartat següent, el cos dels nombres complexos està format pels nombres de la forma

$$a + bi,$$

on a i b són nombres reals.

1.2 El cos dels nombres complexos

En el conjunt $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dels parells ordenats de nombres reals definim les dues operacions següents:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \quad (1.2.1)$$

i

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc) \quad (1.2.2)$$

El lector pot comprovar sense gaire dificultat les propietats següents:

1. $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +)$ és un grup commutatiu d'element neutre $(0, 0)$, en què $(-a, -b)$ és l'oposat de (a, b) .
2. La multiplicació (1.2.2) és distributiva respecte a la suma (1.2.1).
3. $(\mathbb{R} \times \mathbb{R} - \{(0, 0)\}, \cdot)$ és un grup commutatiu d'element neutre $(1, 0)$, en què el simètric de (a, b) és

$$\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right)$$

Com a conseqüència, $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +, \cdot)$ és un cos commutatiu que anomenarem **cos dels nombres complexos** i denotarem per $\mathbb{C}$. Un **nombre complex** és un element de $\mathbb{C}$, és a dir, un parell ordenat de nombres reals.

Identificarem el nombre real a amb el nombre complex $(a, 0)$ i, com a conseqüència, podrem afirmar que $\mathbb{C}$ és una extensió de $\mathbb{R}$.

Com que

$$(0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0)$$

és natural escriure $(0, 1) = i$, complint-se aleshores que $i^2 = -1$, i, per tant, -1 té arrel quadrada en $\mathbb{C}$. A més, si b és un nombre real, aleshores es compleix

$$(0, 1) \cdot (b, 0) = (0, b)$$

i podem escriure bi en lloc de $(0, b)$. D'aquesta manera, si z és el nombre complex (a, b) , aleshores podem escriure'l de manera única en la forma

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b)$$

i, com a conseqüència, és natural escriure z com

$$a + bi$$

Aquesta manera de representar un nombre complex s'anomena **forma binòmica**. Aleshores, a s'anomena **part real** de z i s'escriu

$$\operatorname{Re} z = a$$

i b s'anomena **part imaginària** de z i s'escriu

$$\operatorname{Im} z = b$$

Si $b = 0$, diem que z és un **nombre real**; si $a = 0$, diem que z és un **nombre imaginari pur**. Al nombre complex i se l'anomena **unitat imaginària**.

Les operacions (1.2.1) i (1.2.2), poden escriure's en forma binòmica, operant com en el cas dels nombres reals, tenint en compte que $i^2 = -1$:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

ja que

$$\begin{aligned}(a + bi) + (c + di) &= a + bi + c + di \\ &= a + c + bi + di \\ &= (a + c) + (b + d)i\end{aligned}$$

i

$$(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

ja que

$$\begin{aligned}(a + bi) \cdot (c + di) &= (a + bi) \cdot c + (a + bi) \cdot di \\ &= ac + bci + adi + bdi^2 \\ &= ac - bd + bci + adi \\ &= (ac - bd) + (bc + ad)i\end{aligned}$$

És clar que dos nombres complexos $a + bi$ i $c + di$ són **iguals**

$$a + bi = c + di \iff (a, b) = (c, d) \iff \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$$

quan tenen iguals les seves parts reals i les seves parts imaginàries.

S'anomena **conjugat** del complex $z = a + bi$ el complex $\bar{z} = a - bi$. De la definició es dedueixen les propietats evidents següents:

- 1) $\operatorname{Re} \bar{z} = \operatorname{Re} z$ i $\operatorname{Im} \bar{z} = -\operatorname{Im} z$
- 2) z és real si i només si $\bar{z} = z$
- 3) z és imaginari pur si i només si $\bar{z} + z = 0$

El cos $\mathbb{C}$ dels nombres complexos dotat de les dues operacions següents

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

i

$$k \cdot (a + bi) = ka + kbi$$

amb $k \in \mathbb{R}$, és un espai vectorial sobre $\mathbb{R}$. És immediat comprovar-ho. A més, 1 i i formen una base d'aquest espai, ja que són evidentment generadors

$$a + ib = a \cdot 1 + b \cdot i$$

i també linealment independents, ja que

$$\lambda \cdot 1 + \mu \cdot i = 0 + 0 \cdot i \iff \lambda = \mu = 0$$

Exemple 1.1

Expressa en forma binòmica cadascun dels nombres següents complexos: $(-2, 1)$, $(0, -1)$, $(-1, -1)$ i $(-3, 0)$.

Solució

Recordant que el nombre complex (a, b) s'expressa en forma binòmica com $a + bi$, obtenim

Parell ordenat	Binòmica
$(-2, 1)$	$-2 + i$
$(0, -1)$	$-i$
$(-1, -1)$	$-1 - i$
$(-3, 0)$	-3

Exemple 1.2

Expressa els nombres següents en forma cartesiana o de parell ordenat: -3 , $2i$, $\sqrt{-5}$ i $1 - \sqrt{-4}$.

Solució

Recordant que i és en lloc de $\sqrt{-1}$, obtenim

	Parell ordenat
-3	$(-3, 0)$
$2i$	$(0, 2)$
$\sqrt{-5} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{5}i$	$(0, \sqrt{5})$
$1 - \sqrt{-4} = 1 - \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} = 1 - 2i$	$(1, -2)$

Exemple 1.3

Resol les equacions següents de segon grau en $\mathbb{C}$: (a) $x^2 - 2x + 5 = 0$ i (b) $x^2 + 9 = 0$.

Solució

(a) Observa que, com el discriminant de l'equació

$$\Delta = b^2 - 4ac = -16 < 0$$

és negatiu, l'equació no té solució en $\mathbb{R}$. En $\mathbb{C}$, les solucions són

$$\begin{aligned} \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} &= \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} \\ &= \frac{2 \pm \sqrt{16} \cdot \sqrt{-1}}{2} \\ &= \frac{2 \pm 4i}{2} \\ &= 1 \pm 2i \end{aligned}$$

(b) És clar que

$$x^2 = -9 \implies x = \pm\sqrt{-9} = \pm\sqrt{9} \cdot \sqrt{-1} = \pm 3i$$

Exemple 1.4

Donats els nombres següents complexos: $z_1 = -2 + i$, $z_2 = 4 - 3i$, $z_3 = -2$ i $z_4 = -i$. Calcula: (a) $z_1 - z_2 + z_3 - z_4$, (b) $z_1 - 2 \cdot (z_2 + z_3) + 3 \cdot z_4$, (c) $(z_1 + z_2) \cdot (z_3 + z_4)$, i (d) $(i \cdot z_1 - z_2 + i \cdot z_3) \cdot z_4$.

Solució

(a)

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 + z_3 - z_4 &= (-2 + i) - (4 - 3i) + (-2) - (-i) \\ &= -2 + i - 4 + 3i - 2 + i \\ &= -8 + 5i \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} z_1 - 2 \cdot (z_2 + z_3) + 3 \cdot z_4 &= (-2 + i) - 2 \cdot (4 - 3i - 2) + 3 \cdot (-i) \\ &= -2 + i - 2 \cdot (2 - 3i) - 3i \\ &= -2 + i - 4 + 6i - 3i \\ &= -6 + 4i \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} (z_1 + z_2) \cdot (z_3 + z_4) &= (-2 + i + 4 - 3i) \cdot (-2 - i) \\ &= (2 - 2i) \cdot (-2 - i) \\ &= -4 + 4i - 2i + 2i^2 \\ &= -4 + 2i - 2 \\ &= -6 + 2i \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} (i \cdot z_1 - z_2 + i \cdot z_3) \cdot z_4 &= [i \cdot (-2 + i) - (4 - 3i) + i \cdot (-2)] \cdot (-i) \\ &= (-2i + i^2 - 4 + 3i - 2i) \cdot (-i) \\ &= (-5 - i) \cdot (-i) \\ &= 5i + i^2 \\ &= -1 + 5i \end{aligned}$$

Exemple 1.5

(a) Comprova que l'invers de $z = a + bi$ és

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$$

(b) Com a aplicació calcula els inversos dels nombres següents complexos: $z_1 = 1 - i$, $z_2 = -3i$ i $z_3 = 2$.

Solució

(a) Observa que es compleix

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i \right) (a + bi) &= \frac{a^2}{a^2 + b^2} - \frac{ab}{a^2 + b^2}i + \frac{ab}{a^2 + b^2}i - \frac{b^2}{a^2 + b^2}i^2 \\ &= \frac{a^2}{a^2 + b^2} + \frac{b^2}{a^2 + b^2} \\ &= \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2} = 1 \end{aligned}$$

i, per tant, com l'invers d'un nombre si existeix és únic, deduïm que

$$z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$$

(b) Aplicant aquest resultat, obtenim

Complex	Complex invers
$z_1 = 1 - i$	$z_1^{-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$
$z_2 = -3i$	$z_2^{-1} = \frac{1}{3}i$
$z_3 = 2$	$z_3^{-1} = \frac{1}{2}$

Exemple 1.6

(a) Escribe els conjugats dels nombres següents complexos: $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 3 - i$, $z_3 = -1$ i $z_4 = 2i$. (b) Comprova que $z \cdot \bar{z}$ és un nombre real no negatiu, i positiu si $z \neq 0$.

Solució

(a) De la definició obtenim

Complex	Complex conjugat
$z_1 = 2 + 3i$	$\bar{z}_1 = 2 - 3i$
$z_2 = 3 - i$	$\bar{z}_2 = 3 + i$
$z_3 = -1$	$\bar{z}_3 = -1$
$z_4 = 2i$	$\bar{z}_4 = -2i$

(b) Si $z = a + bi$, aleshores $\bar{z} = a - bi$ i, per tant,

$$\begin{aligned} z \cdot \bar{z} &= (a + bi) \cdot (a - bi) \\ &= a^2 - b^2 i^2 \\ &= a^2 + b^2 \end{aligned}$$

és a dir, $z \cdot \bar{z}$ és una suma de quadrats. Per tant, $z \cdot \bar{z}$ és un nombre real no negatiu; és positiu si $z \neq 0$.

Exemple 1.7

Comprova les propietats següents de la conjugació de nombres complexos:

- a) $\overline{\bar{z}} = z$
- b) $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$
- c) $\overline{z \cdot z'} = \bar{z} \cdot \bar{z'}$

Solució

(a) Si $z = a + bi$, aleshores $\bar{z} = a - bi$ i, per tant, $\overline{\bar{z}} = a - (-b)i = a + bi = z$.

(b) Si $z = a + bi$ i $z' = c + di$, aleshores $z + z' = (a + c) + (b + d)i$ i, per tant,

$$\begin{aligned} \overline{z + z'} &= (a + c) - (b + d)i \\ &= (a - bi) + (c - di) \\ &= \bar{z} + \bar{z'} \end{aligned}$$

(c) Si $z = a + bi$ i $z' = c + di$, aleshores $z \cdot z' = (ac - bd) + (bc + ad)i$ i, per tant,

$$\overline{z \cdot z'} = (ac - bd) - (bc + ad)i$$

D'altra banda, tenim

$$\begin{aligned} \bar{z} \cdot \bar{z'} &= (a - bi) \cdot (c - di) \\ &= (ac - bd) + (-bc - ad)i \\ &= (ac - bd) - (bc + ad)i \end{aligned}$$

Després,

$$\overline{z \cdot z'} = \bar{z} \cdot \bar{z'}$$

Exemple 1.8

(a) Comprova que l'invers d'un nombre complex z pot expressar-se de la manera següent:

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}}$$

(b) Mitjançant aquest procediment calcula l'invers de $-1 + 2i$.

Solució

(a) Hem vist en l'exemple anterior que si $z = a + bi$, aleshores

$$z^{-1} = \frac{1}{a + bi} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$$

Ara bé, segons l'exemple anterior,

$$z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$$

Per tant,

$$z^{-1} = \frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}}$$

Per tant, per calcular l'invers de $a + bi$

$$\frac{1}{a + bi}$$

multiplicarem numerador i denominador pel conjugat de $a + bi$, o sigui, per $a - bi$.

(b)

$$\begin{aligned} \frac{1}{-1 + 2i} &= \frac{-1 - 2i}{(-1 + 2i) \cdot (-1 - 2i)} \\ &= \frac{-1 - 2i}{(-1)^2 + 2^2} \\ &= -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i \end{aligned}$$

Exemple 1.9

Expressa en forma binòmica les divisions següents de nombres complexos:

a)

$$\frac{1 - i}{2 + 3i}$$

b)

$$\frac{5 + 2i}{1 - 4i}$$

c)

$$\frac{1 + i}{i}$$

Solució

Segons el exemple anterior,

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}}$$

Aleshores,

$$\begin{aligned}\frac{u}{z} &= u \cdot \frac{1}{z} \\ &= u \cdot \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} \\ &= \frac{u \cdot \bar{z}}{z \cdot \bar{z}}\end{aligned}$$

Per tant, per calcular un quocient de nombres complexos multiplicarem numerador i denominador pel conjugat del denominador.

(a)

$$\begin{aligned}\frac{1-i}{2+3i} &= \frac{(1-i) \cdot (2-3i)}{(2+3i) \cdot (2-3i)} \\ &= \frac{2-2i-3i+3i^2}{4-9i^2} \\ &= \frac{-1-5i}{13} \\ &= -\frac{1}{13} - \frac{5}{13}i\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\frac{5+2i}{1-4i} &= \frac{(5+2i) \cdot (1+4i)}{(1-4i) \cdot (1+4i)} \\ &= \frac{5+2i+20i+8i^2}{1-16i^2} \\ &= \frac{-3+22i}{17} \\ &= -\frac{3}{17} + \frac{22}{17}i\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\frac{1+i}{i} &= \frac{(1+i) \cdot (-i)}{i \cdot (-i)} \\ &= \frac{-i-i^2}{-i^2} \\ &= 1-i\end{aligned}$$

Exemple 1.10

Expressa en forma binòmica el resultat de les operacions següents amb nombres complexos:

a)

$$\frac{(3-i) \cdot (2+i)}{(2+3i) \cdot (1-2i)}$$

b)

$$\frac{(2+3i) \cdot i}{(1+i) \cdot (2-i)} - \frac{1+i}{2(2-3i)}$$

Solució

(a)

$$\begin{aligned} \frac{(3-i) \cdot (2+i)}{(2+3i) \cdot (1-2i)} &= \frac{6-2i+3i-i^2}{2+3i-4i-6i^2} \\ &= \frac{7+i}{8-i} \\ &= \frac{(7+i) \cdot (8+i)}{(8-i) \cdot (8+i)} \\ &= \frac{56+8i+7i+i^2}{64-i^2} \\ &= \frac{55+15i}{65} \\ &= \frac{11}{13} + \frac{3}{13}i \end{aligned}$$

(b) Com que

$$\begin{aligned} \frac{(2+3i) \cdot i}{(1+i) \cdot (2-i)} &= \frac{2i+3i^2}{2+2i-i-i^2} \\ &= \frac{-3+2i}{3+i} \\ &= \frac{(-3+2i) \cdot (3-i)}{(3+i) \cdot (3-i)} \\ &= \frac{-9+6i+3i-2i^2}{9-i^2} \\ &= -\frac{7}{10} + \frac{9}{10}i \end{aligned}$$

A més,

$$\begin{aligned} \frac{1+i}{2(2-3i)} &= \frac{(1+i) \cdot (2+3i)}{2(2-3i) \cdot (2+3i)} \\ &= \frac{2+2i+3i+3i^2}{2(4-9i^2)} \\ &= -\frac{1}{26} + \frac{5}{26}i \end{aligned}$$

aleshores

$$\begin{aligned}\frac{(2+3i) \cdot i}{(1+i) \cdot (2-i)} - \frac{1+i}{2(2-3i)} &= -\frac{7}{10} + \frac{9}{10}i - \left(-\frac{1}{26} + \frac{5}{26}i\right) \\ &= -\frac{7}{10} + \frac{1}{26} + \left(\frac{9}{10} - \frac{5}{26}\right)i \\ &= -\frac{86}{130} + \frac{92}{130}i \\ &= -\frac{43}{65} + \frac{46}{65}i\end{aligned}$$

Exemple 1.11

Calcula les potències successives de i . Dedueix la fórmula per calcular-les. Troba: i^{207} , i^{26} , i^{2004} i i^{37} .

Solució

Per definició, tenim

$$i^2 = -1$$

Aleshores,

$$i^3 = i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i$$

i

$$i^4 = i^3 \cdot i = (-i) \cdot i = -i^2 = 1$$

i, d'aquí, obtenim:

$$\begin{aligned}i^0 &= i^4 = i^8 = \dots = 1 \\ i^1 &= i^5 = i^9 = \dots = i \\ i^2 &= i^6 = i^{10} = \dots = -1 \\ i^3 &= i^7 = i^{11} = \dots = -i\end{aligned}$$

Per tant, es compleix que

$$i^{r+4 \cdot c} = i^r$$

sent $0 \leq r < 4$. Amb l'ajuda d'aquesta fórmula, obtenim

$$\begin{aligned}i^{207} &= i^{3+4 \cdot 51} = i^3 = -i \\ i^{26} &= i^{2+4 \cdot 6} = i^2 = -1 \\ i^{2004} &= i^{0+4 \cdot 501} = i^0 = 1 \\ i^{37} &= i^{1+4 \cdot 9} = i^1 = i\end{aligned}$$

Exemple 1.12

Expressa en forma binòmica el resultat de les operacions següents amb nombres complexos:

a)

$$(i^7 - i^5)^3$$

b)

$$(1 - i)^5$$

c)

$$\frac{i^7 - i^{-7}}{2i}$$

d)

$$i + i^2 + i^3 + \dots + i^{22}$$

Solució

(a) Com que

$$\begin{aligned} i^7 &= i^{3+4} = i^3 = -i \\ i^5 &= i^{1+4} = i \end{aligned}$$

aleshores

$$(i^7 - i^5)^3 = (-i - i)^3 = (-2i)^3 = -8i^3 = 8i$$

(b) Per la fórmula del binomi de Newton obtenim

$$(1 - i)^5 = \binom{5}{0} - \binom{5}{1}i + \binom{5}{2}i^2 - \binom{5}{3}i^3 + \binom{5}{4}i^4 - \binom{5}{5}i^5$$

Els nombres combinatoris s'obtenen amb el triangle de Tartaglia de la manera següent

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & 1 & \\ & & 1 & & 2 & & 1 \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ 1 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \end{array}$$

Després,

$$\begin{aligned} (1 - i)^5 &= 1 - 5i + 10i^2 - 10i^3 + 5i^4 - i^5 \\ &= 1 - 5i - 10 + 10i + 5 - i \\ &= -4 + 4i \end{aligned}$$

(c) Com que

$$i^7 = i^{3+4} = i^3 = -i$$

aleshores

$$\begin{aligned} \frac{i^7 - i^{-7}}{2i} &= \frac{i^7 - \frac{1}{i^7}}{2i} \\ &= \frac{-i + \frac{1}{i}}{2i} \\ &= \frac{\frac{-i^2 + 1}{i}}{2i} \\ &= \frac{2}{2i^2} = \frac{2}{-2} = -1 \end{aligned}$$

(d) La successió

$$i, i^2, i^3, \dots, i^{22}$$

és una progressió geomètrica de raó i amb 22 termes. Recordant que la suma dels n primers termes d'una progressió geomètrica es calcula mitjançant la fórmula

$$S_n = \frac{a_1(1 - r^n)}{1 - r}$$

obtenim

$$\begin{aligned} i + i^2 + i^3 + \dots + i^{22} &= \frac{i(1 - i^{22})}{1 - i} \\ &= \frac{i(1 - i^2)}{1 - i} \\ &= \frac{2i}{1 - i} \\ &= \frac{2i \cdot (1 + i)}{(1 - i) \cdot (1 + i)} \\ &= \frac{2i + 2i^2}{1 - i^2} \\ &= -1 + i \end{aligned}$$

Exemple 1.13

Resol en $\mathbb{C}$ les equacions següents amb una incògnita z :

a)

$$\frac{z}{3 - i} + \frac{2z - i}{3 + i} = 1$$

b)

$$\frac{z}{1 + 2i} + 3 + 2i = 2 + 5i$$

Solució

(a)

$$\begin{aligned} \frac{z}{3 - i} + \frac{2z - i}{3 + i} &= 1 \\ \frac{(3 + i)z}{(3 - i)(3 + i)} + \frac{(3 - i)(2z - i)}{(3 - i)(3 + i)} &= \frac{(3 - i)(3 + i)}{(3 - i)(3 + i)} \\ 3z + iz + 6z - 2iz + -3i + i^2 &= 9 - i^2 \\ 9z - iz &= 11 + 3i \\ (9 - i)z &= 11 + 3i \\ z &= \frac{11 + 3i}{9 - i} \end{aligned}$$

Aleshores, la solució en forma binòmica és,

$$\begin{aligned}
 z &= \frac{11 + 3i}{9 - i} \\
 &= \frac{(11 + 3i)(9 + i)}{(9 - i)(9 + i)} \\
 &= \frac{99 + 27i + 11i + 3i^2}{81 - i^2} \\
 &= \frac{96}{82} + \frac{38}{82}i \\
 &= \frac{48}{41} + \frac{19}{41}i
 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
 \frac{z}{1 + 2i} + 3 + 2i &= 2 + 5i \\
 \frac{z}{1 + 2i} &= 2 + 5i - 3 - 2i \\
 \frac{z}{1 + 2i} &= -1 + 3i \\
 z &= (1 + 2i)(-1 + 3i) \\
 &= -1 - 2i + 3i + 6i^2 \\
 &= -7 + i
 \end{aligned}$$

Exemple 1.14

Troba els nombres reals a i b tals que

$$(a + 2i) \cdot (4 - bi) = 18 - i$$

Solució

És clar que

$$\begin{aligned}
 (a + 2i) \cdot (4 - bi) &= 4a + 8i - abi - 2bi^2 \\
 &= (4a + 2b) + (8 - ab)i
 \end{aligned}$$

i, per tant,

$$(4a + 2b) + (8 - ab)i = 18 - i$$

Com dos nombres complexos són iguals si tenen iguals les seves parts reals i les seves parts imaginàries, aleshores s'ha de complir

$$\begin{cases} 4a + 2b = 18 \\ 8 - ab = -1 \end{cases}$$

De la primera equació, obtenim

$$b = 9 - 2a$$

i, substituint aquesta expressió en la segona, tenim

$$\begin{aligned} 8 - a(9 - 2a) &= -1 \\ 2a^2 - 9a + 9 &= 0 \end{aligned}$$

d'on s'obté $a = 3$ o $a = 3/2$. Per tant, hi ha dues solucions:

$$\begin{cases} a = 3 \\ b = 3 \end{cases} \quad \text{o bé} \quad \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = 6 \end{cases}$$

Exemple 1.15

Resol el sistema següent:

$$\begin{cases} iu + (2 - 2i)v = 2i \\ u + iv = 3 + i \end{cases}$$

Solució

Els sistemes d'equacions en $\mathbb{C}$ es resolen de la mateixa manera que en $\mathbb{R}$. Reduïm el sistema donat per reducció. Multiplicant la segona equació per $-i$ i sumant després membre a membre, obtenim

$$\begin{array}{rcl} iu & + & (2 - 2i)v = 2i \\ -iu & - & i^2v = -3i - i^2 \\ \hline (3 - 2i)v & = & 1 - i \end{array}$$

Després,

$$v = \frac{1 - i}{3 - 2i} = \frac{(1 - i) \cdot (3 + 2i)}{(3 - 2i) \cdot (3 + 2i)} = \frac{5}{13} - \frac{1}{13}i$$

Substituint el valor de v en la segona equació, obtenim

$$\begin{aligned} u + i \cdot \left(\frac{5}{13} - \frac{1}{13}i \right) &= 3 + i \\ u + \frac{1}{13} + \frac{5}{13}i &= 3 + i \\ u &= \frac{38}{13} + \frac{8}{13}i \end{aligned}$$

Per tant, la solució del sistema és

$$u = \frac{38}{13} + \frac{8}{13}i \quad \text{i} \quad v = \frac{5}{13} - \frac{1}{13}i$$

Exemple 1.16

Calcula el nombre real a perquè el producte

$$(3 + 2i) \cdot (a + 6i)$$

sigui (a) un nombre real i (b) un nombre imaginari pur.

Solució

És clar que

$$\begin{aligned}(3 + 2i) \cdot (a + 6i) &= 3a + 2ai + 18i + 12i^2 \\ &= (3a - 12) + (2a + 18)i\end{aligned}$$

(a) Perquè un nombre complex sigui real la seva part imaginària ha de ser zero. Per tant,

$$\begin{aligned}2a + 18 &= 0 \\ 2a &= -18 \\ a &= -9\end{aligned}$$

(b) Perquè un nombre complex sigui imaginari pur la seva part real ha de ser zero. Per tant,

$$\begin{aligned}3a - 12 &= 0 \\ 3a &= 12 \\ a &= 4\end{aligned}$$

Exemple 1.17

(a) Prova que si l'equació $ax^2 + bx + c = 0$, sent $a, b, c \in \mathbb{R}$, no té solucions reals, aleshores les seves solucions són dos nombres complex conjugats. (b) Generalitza aquest resultat a qualsevol equació polinòmica amb coeficients reals, demostrant que si z és solució de l'equació, aleshores també ho és el seu conjugat $\bar{z}$. (c) Si $1 + i$ és arrel d'una equació de segon grau amb coeficients reals, quin és l'altra arrel? Escribeu l'equació de segon grau. (d) Dos de les arrels de un polinomi de quart grau amb coeficients reals són i i $2 - i$. Troba les altres arrels i escriu el polinomi.

Solució

(a) Per tenir $\mathbb{C}$ la mateixa estructura algebraica que $\mathbb{R}$, és immediat comprovar que si

$$\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$$

és una equació de segon grau amb coeficients $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ i $\alpha \neq 0$, aleshores les seves solucions complexes z_1 i z_2 satisfan les relacions següents

$$z_1 + z_2 = -\frac{\beta}{\alpha} \quad \text{i} \quad z_1 \cdot z_2 = \frac{\gamma}{\alpha}$$

i, per aquesta raó, l'equació de segon grau pot escriure's també en termes de les seves solucions de la manera següent:

$$z^2 - (z_1 + z_2)z + z_1 \cdot z_2 = 0$$

En particular, si aquesta equació de segon grau té els seus coeficients en $\mathbb{R}$ i suponem que les seves solucions no són nombres reals, aleshores es compleix

$$z_1 + z_2 \in \mathbb{R} \quad \text{i} \quad z_1 \cdot z_2 \in \mathbb{R}$$

Ara bé, si $z_1 = a + bi$ i $z_2 = c + di$, aleshores la condició $z_1 + z_2 \in \mathbb{R}$ és equivalent a que

$$d = -b$$

i, aleshores, la condició $z_1 \cdot z_2 \in \mathbb{R}$ és equivalent a que

$$bc - ab = b(c - a) = 0$$

però com $b \neq 0$ (Les solucions de l'equació de segon grau no són nombres reals), aleshores

$$c = a$$

Després, si el complex $z = a + bi$ és solució (no real) d'una equació de segon grau els quals coeficients són nombres reals, aleshores el seu conjugat $\bar{z} = a - bi$ és l'altra solució de l'equació. En altres paraules, si una equació de segon grau amb coeficients reals no té solucions reals, les seves solucions són dos nombres complexos conjugats.

(b) Cal demostrar que si el complex z és solució de l'equació polinòmica

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

sent $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$, aleshores també ho és $\bar{z}$. En efecte, per les propietats de la conjugació de nombres complexos (vegeu l'exemple anterior), obtenim

$$\begin{aligned} a_n (\bar{z})^n + a_{n-1} (\bar{z})^{n-1} + \dots + a_1 (\bar{z}) + a_0 &= \overline{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0} \\ &= \overline{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0} \\ &= \overline{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0} \\ &= \bar{0} = 0 \end{aligned}$$

Després, $\bar{z}$ és arrel del polinomi i, per tant, solució de l'equació.

(c) Segons l'apartat (a), si $z_1 = 1 + i$ és solució de l'equació de segon grau amb coeficients reals, l'altra solució és $z_2 = \bar{z}_1 = 1 - i$ i, a més, l'equació s'escriu de la següent manera:

$$z^2 - (z_1 + z_2)z + z_1 \cdot z_2 = 0$$

és a dir,

$$z^2 - 2z + 2 = 0$$

(d) Segons l'apartat (b), si $z_1 = i$ i $z_2 = 2 - i$ són arrels de un polinomi de quart grau amb coeficients reals, aleshores $z_3 = \bar{z}_1 = -i$ i $z_4 = \bar{z}_2 = 2 + i$ són les altres dues arrels del polinomi. Aleshores, el polinomi admet la següent descomposició factorial

$$\begin{aligned} (x - i) \cdot (x + i) \cdot [x - (2 - i)] \cdot [x - (2 + i)] &= (x^2 + 1) \cdot [(x - 2) + i] \cdot [(x - 2) - i] \\ &= (x^2 + 1) \cdot [(x - 2)^2 + 1] \\ &= (x^2 + 1) \cdot (x^2 - 2x + 5) \\ &= x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 2x + 5 \end{aligned}$$

Per tant, el polinomi buscat és

$$x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 2x + 5$$

Exemple 1.18

(a) L'equació

$$2z^3 - 3z^2 - 4z + 1 = 0$$

pot tenir tres solucions no reals? Justifica per què almenys una de les solucions ha de ser real. (b) Generalitza el resultat anterior, demostrant que tota equació polinòmica amb coeficients reals de grau senar ha de tenir almenys una solució real.

Solució

(a) Segons l'apartat (b) de l'exemple anterior, si una equació polinòmica amb coeficients reals té una solució que és un nombre complex, també té com a solució el seu complex conjugat. D'aquesta manera, les solucions complexes de les equacions polinòmiques amb coeficients reals de grau major o igual que 2 apareixen per parelles de nombres complexos conjugats. Per tant, no és possible que l'equació

$$2z^3 - 3z^2 - 4z + 1 = 0$$

tingui tres solucions complexes. De fet, aquesta equació pot tenir tres solucions reals o bé una solució real i dues solucions no reals conjugades.

(b) Pel raonament fet en l'apartat anterior, és evident que si una equació polinòmica amb coeficients reals té grau senar ha de tenir almenys una solució real.

Exemple 1.19

Troba dos nombres complexos tals que la seva suma és $1 + 3i$, el seu quocient és imaginari pur i la part real del primer és 2.

Solució

El primer complex és de la forma $2 + bi$, ja que la seva part real és 2. Suposem que el segon complex és $c + di$. Aleshores, com la seva suma és $1 + 3i$, s'ha de complir

$$\begin{aligned}(2 + bi) + (c + di) &= 1 + 3i \\ (2 + c) + (b + d)i &= 1 + 3i\end{aligned}$$

i, per tant,

$$\begin{cases} 2 + c = 1 \\ b + d = 3 \end{cases}$$

d'on s'obté $b = 3 - d$ i $c = -1$. Calculant el seu quocient,

$$\begin{aligned}\frac{2 + (3 - d)i}{-1 + di} &= \frac{2 + (3 - d)i}{-1 + di} \cdot \frac{-1 - di}{-1 - di} \\ &= \frac{-2 - (3 - d)i - 2di - d(3 - d)i^2}{1 - d^2i^2} \\ &= \frac{-2 + d(3 - d)}{1 + d^2} + \frac{-5 - d}{1 + d^2}i\end{aligned}$$

com ha de ser imaginari pur, s'ha de complir també que

$$\frac{-2 + d(3 - d)}{1 + d^2} = 0$$

és a dir,

$$-2 + 3d - d^2 = 0$$

Resolent aquesta equació, obtenim $d = 1$ o $d = 2$ i, per tant, $b = 2$ o $b = 1$. Per tant, hi ha dues solucions:

$$2 + 2i \quad \text{i} \quad -1 + i$$

o

$$2 + i \quad \text{i} \quad -1 + 2i$$

1.3 Representació geomètrica dels nombres complexos

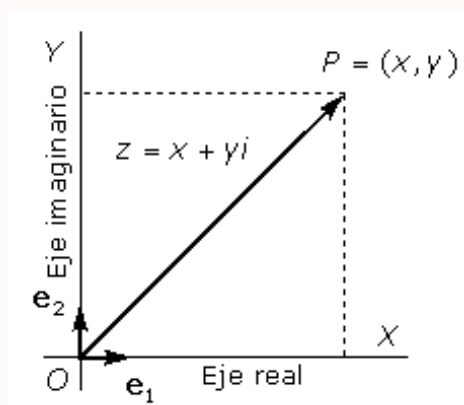
La geometria euclídea del pla proporciona una imatge adequada del cos dels nombres complexos.

1.3.1 Afix d'un nombre complex

Considerem en el pla ordinari un origen O i uns eixos de coordenades rectangulars X i Y . Siguin $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ els vectors de la base ortonormal corresponent. Aleshores, entre l'espai vectorial V_2 dels vectors lliures del pla i el cos $\mathbb{C}$ dels nombres complexos, considerado com espai vectorial real de base $(1, i)$, existeix una corresponència bijectiva definida per

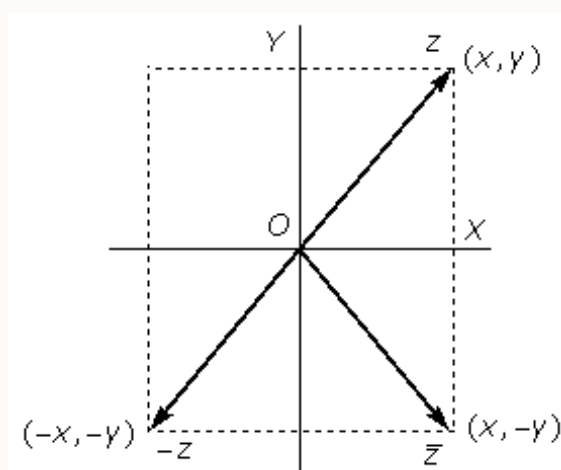
$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\longleftrightarrow V_2 \\ z = x + yi &\longleftrightarrow \mathbf{v} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

Al vector lliure $\mathbf{v} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$ associat al complex $z = x + yi$ correspon un vector fix d'origen O i extrem el punt P de coordenades (x, y) que s'anomena **afix** del nombre complex z .



D'aquesta manera, entre el pla ordinari i el cos dels nombres complexos queda establerta una bijecció que el converteix en lo que s'anomena **pla complex**. Els complexos que són nombres reals tenen per afijos els punts de l'eix X , i els que són nombres imaginaris purs, els punts de l'eix Y . Aquesta és la raó per la qual aquests eixos s'anomenen aleshores **eix real** i **eix imaginari** del pla complex, respectivament. Tanmateix, aquestes denominacions són un abús del llenguatge, ja que tant el eix Y com el pla XY estan descrits per punts de coordenades reals.

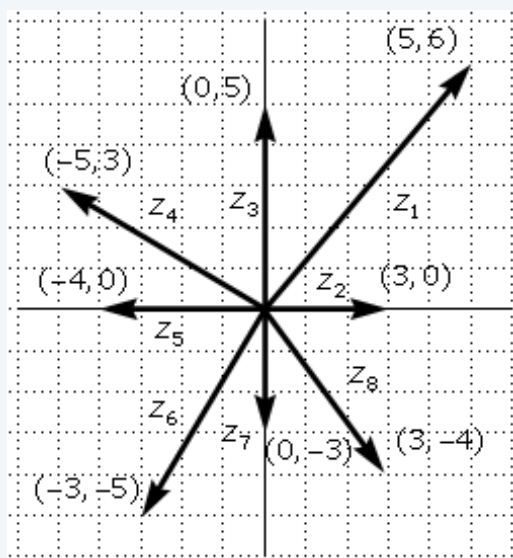
En particular, els afijos dels nombres complexos z i $-z$ són dos punts simètrics respecte de l'origen O , i els afijos dels nombres complexos z i $\bar{z}$ són dos punts simètrics respecte de l'eix X .



Exemple 1.20

Representa gràficament els nombres següents complexos: $z_1 = 5 + 6i$, $z_2 = 3$, $z_3 = 5i$, $z_4 = -5 + 3i$, $z_5 = -4$, $z_6 = -3 - 5i$, $z_7 = -3i$ i $z_8 = 3 - 4i$.

Solució



Exemple 1.21

Quina figura formen els afixos dels complexos z tals que $z + \bar{z} = 2$? I els que compleixen que $z - \bar{z} = 2i$?

Solució

Si l'afix de z és el punt de coordenades (x, y) , aleshores l'afix de $z + \bar{z}$ és el punt $(2x, 0)$. Per tant, segons l'enunciat, ha de ser $2x = 2$, o sigui, $x = 1$. Com a conseqüència, els afixos dels complexos z tals que $z + \bar{z} = 2$ formen la recta $x = 1$.

De la mateixa manera, l'afix de $z - \bar{z}$ és el punt $(0, 2y)$. Per tant, segons l'enunciat, ha de ser $2y = 2$, o sigui, $y = 1$. Com a conseqüència, els afixos dels complexos z tals que $z - \bar{z} = 2i$ formen la recta $y = 1$.

Exemple 1.22

Si l'afix del complex z és el punt de coordenades $(-2, 1)$, quins són els afixos de l'oposat i del conjugat de z ?

Solució

Com els afixos dels nombres complexos z i $-z$ són dos punts simètrics respecte de l'origen O , deduïm que l'afix de $-z$ és el punt $(2, -1)$.

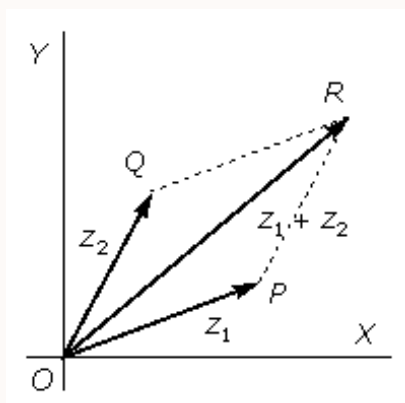
Com els afixos dels nombres complexos z i $\bar{z}$ són dos punts simètrics respecte de l'eix X , deduïm que l'afix de $\bar{z}$ és el punt $(-2, -1)$.

1.3.2 Interpretació geomètrica de la suma de dos nombres complexos

Si P i Q són els afixos de dos nombres complexos z_1 i z_2 , i es compleix

$$\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OR}$$

aleshores R és l'afix del complex suma $z_1 + z_2$, ja que per sumar vectors d'origen O basta amb sumar les seves components respecte dels eixos de coordenades; observa que $z_1 + z_2$ és la diagonal del paral·lelogram que determinen z_1 i z_2 .



Per tant, l'aplicació de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$ que $z \mapsto z + z_0$ representa geomètricament una **translació** de vector associat el complex z_0 .

Exemple 1.23

Donats els punts $O = (0, 0)$, $P = (2, -3)$ i $Q = (-1, 4)$, troba les coordenades del punt R perquè els punts $OPRQ$ formen un paral·lelogram.

Solució

Els punts P i Q són els afixos dels nombres complexos $z_1 = 2 - 3i$ i $z_2 = -1 + 4i$, respectivament. Aleshores, el punt R és l'afix de la suma

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (2 - 3i) + (-1 + 4i) \\ &= 1 + i \end{aligned}$$

és a dir,

$$R = (1, 1)$$

Exemple 1.24

Calcula el transformat del punt $(2, 3)$ per la translació del vector de components $(1, 1)$.

Solució

El punt $(2, 3)$ és l'afix del complex $z = 2 + 3i$. Considerem el complex $z_0 = 1 + i$ que té com vector associat el de components $(1, 1)$. Aleshores, el transformat del punt $(2, 3)$ és l'afix del complex suma

$$\begin{aligned} z + z_0 &= (2 + 3i) + (1 + i) \\ &= 3 + 4i \end{aligned}$$

és a dir, el punt de coordenades $(3, 4)$.

1.3.3 Mòdul i argument d'un nombre complex

S'anomena **mòdul** d'un nombre complex $z = x + iy$ i es denota per $|z|$ a la norma del vector $\mathbf{v} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$ associat a z , és a dir,

$$|z| = \|\mathbf{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

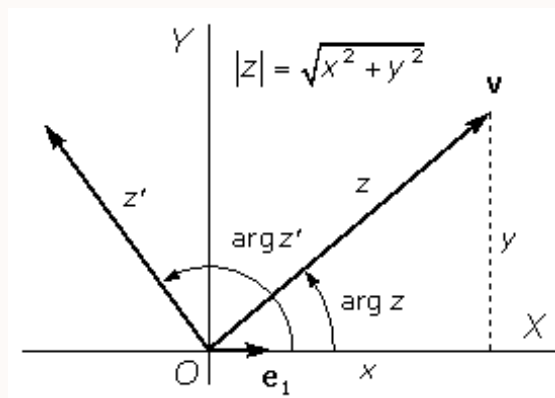
De les propietats de la norma euclídea es dedueixen enseguida les propietats del mòdul d'un nombre complex:

1. $|z| = 0$ si i només si $z = 0$
2. $|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$
3. $|z + z'| \leq |z| + |z'|$

i d'aquesta manera l'aplicació

$$\begin{aligned}\mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ z &\longmapsto |z|\end{aligned}$$

és un valor absolut en $\mathbb{C}$. Aleshores podem anomenar $|z|$ valor absolut de z , però el costum fa que es prefereixi el terme mòdul.



S'anomena **argument** d'un nombre complex no nul $z = x + iy$ a la mesura de l'angle orientat α que determina el vector $\mathbf{e}_1$ amb el vector $\mathbf{v} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2$ associat a z . L'argument d'un nombre complex z es denota per $\arg z$. El argument no està definit de manera unívoca, ja que si α_0 és argument de z

$$\alpha_0 + k \cdot 2\pi$$

amb $k \in \mathbb{Z}$, també ho és. Per evitar ambigüitats, recomanem utilitzar el **valor principal** de l'argument de z , que es defineix mitjançant $0 \leq \alpha < 2\pi$. Per calcular-lo, observa que si $\alpha = \arg z$ aleshores es compleix

$$\tan \alpha = \frac{y}{x}$$

i, d'aquí resulta que

$$\arg z = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad \text{o bé} \quad \arg z = \pi + \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

i escollirem el que correspongui en funció del quadrant en què es trobi l'afix del complex z .

De la representació geomètrica d'un nombre complex z es dedueix de manera immediata les propietats següents:

- 1) $|-z| = |z|$ i $\arg(-z) = \arg z + \pi$
- 2) $|\bar{z}| = |z|$ i $\arg(\bar{z}) = -\arg z$

Exemple 1.25

Sense fer càlculs, troba el mòdul i l'argument dels següents nombres complexos: 3, -2 , i i $-4i$.

Solució

Representant gràficament els nombres complexos donats s'obté de manera immediata que

Complex	Mòdul	Argument
3	3	0
-2	2	π
i	1	$\frac{\pi}{2}$
$-4i$	4	$-\frac{\pi}{2}$

Exemple 1.26

Calcula el mòdul i l'argument dels nombres següents complexos: (a) $z_1 = 1 - i$ i (b) $z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$.

Solució

(a)

$$|z_1| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

i, si $\alpha = \arg z_1$, aleshores

$$\tan \alpha = \frac{-1}{1} = -1 \implies \begin{cases} \alpha = \frac{3\pi}{4} \\ \alpha = -\frac{\pi}{4} \end{cases}$$

i atès que l'afix de z_1 és en el quart quadrant, és

$$\arg z_1 = -\frac{\pi}{4}$$

(b)

$$|z_2| = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 1$$

i, si $\beta = \arg z_2$, aleshores

$$\tan \alpha = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = -1 \implies \begin{cases} \alpha = \frac{3\pi}{4} \\ \alpha = -\frac{\pi}{4} \end{cases}$$

i atès que l'afix de z_2 és en el segon quadrant, és

$$\arg z_2 = \frac{3\pi}{4}$$

Exemple 1.27

Sense efectuar les operacions indicades, calcula el mòdul dels següents nombres complexos:

a)

$$\frac{1}{4 + 3i}$$

b)

$$\frac{3i}{(3-4i) \cdot (-1+i)}$$

Solució

Primer observa lo següent: si $z \neq 0$, aleshores

$$z \cdot \frac{1}{z} = 1$$

i, per tant,

$$\left| z \cdot \frac{1}{z} \right| = 1$$

De aquí, per les propietats del mòdul, obtenim

$$|z| \cdot \left| \frac{1}{z} \right| = 1$$

Després,

$$\left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|}$$

(a) Com que

$$|4+3i| = \sqrt{4^2+3^2} = 5$$

i pel que acabem de veure, obtenim

$$\left| \frac{1}{4+3i} \right| = \frac{1}{|4+3i|} = \frac{1}{5}$$

(b) Com que

$$\begin{aligned} |3i| &= 3 \\ |3-4i| &= 5 \\ |-1+i| &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

i per les propietats del mòdul, obtenim

$$\begin{aligned} \left| \frac{3i}{(3-4i) \cdot (-1+i)} \right| &= \left| 3i \cdot \frac{1}{(3-4i) \cdot (-1+i)} \right| \\ &= |3i| \cdot \left| \frac{1}{(3-4i) \cdot (-1+i)} \right| \\ &= |3i| \cdot \frac{1}{|(3-4i) \cdot (-1+i)|} \\ &= |3i| \cdot \frac{1}{|3-4i| \cdot |-1+i|} \\ &= \frac{3}{5\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{10} \end{aligned}$$

Exemple 1.28

(a) Prova que si $z \neq 0$, aleshores

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

(b) Prova que un nombre complex z és **unitari** (Té mòdul igual a 1) si i només si $z^{-1} = \bar{z}$. (c) Com a aplicació del resultat obtingut en el primer apartat, sense efectuar les operacions indicades, calcula el mòdul de

$$\frac{1}{-3 - 4i}$$

Solució

(a) Si $z = x + yi$, aleshores

$$z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$$

i es compleix

$$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$$

i, per tot nombre complex $z \neq 0$, segons l'exemple anterior, obtenim

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

En particular, d'aquí es dedueix que un nombre complex z és unitari (té mòdul 1) si i només si $z^{-1} = \bar{z}$.

(b) Per l'apartat anterior, és evident que

$$z^{-1} = \bar{z} \iff |z| = 1$$

(c) Per l'apartat (a), és evident que

$$|z^{-1}| = \left| \frac{\bar{z}}{|z|^2} \right| = \frac{|\bar{z}|}{|z|^2}$$

i, per tant,

$$\left| \frac{1}{-3 - 4i} \right| = \frac{|-3 + 4i|}{\left(\sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} \right)^2} = \frac{5}{25} = \frac{1}{5}$$

Exemple 1.29

Calcula el valor de a perquè

$$\frac{a + i}{2 + i}$$

tingui mòdul $\sqrt{2}$.

Solució

Com que

$$\left| \frac{a+i}{2+i} \right| = \frac{|a+i|}{|2+i|} = \frac{\sqrt{a^2+1}}{\sqrt{4+1}}$$

aleshores

$$\frac{\sqrt{a^2+1}}{\sqrt{5}} = \sqrt{2}$$

i, per tant,

$$\sqrt{a^2+1} = \sqrt{10}$$

Després,

$$\begin{aligned} a^2 + 1 &= 10 \\ a^2 &= 9 \end{aligned}$$

és a dir,

$$a = 3 \quad \text{o} \quad a = -3$$

Exemple 1.30

(a) Prova que el mòdul de

$$z = \frac{1+ai}{1-ai}$$

és 1. (b) Calcula a perquè $\arg z = \arctan(3/4)$.

Solució

(a)

$$\left| \frac{1+ai}{1-ai} \right| = \frac{|1+ai|}{|1-ai|} = \frac{\sqrt{1+a^2}}{\sqrt{1+(-a)^2}} = 1$$

(b) Expresando z en forma binòmica, tenim

$$\begin{aligned} \frac{1+ai}{1-ai} &= \frac{(1+ai)^2}{(1-ai) \cdot (1+ai)} \\ &= \frac{1+2ai+a^2i^2}{1-a^2i^2} \\ &= \frac{1-a^2}{1+a^2} + \frac{2a}{1+a^2}i \end{aligned}$$

Si $\arg z = \arctan(3/4)$, aleshores

$$\frac{3}{4} = \tan(\arctan(3/4)) = \frac{\frac{2a}{1+a^2}}{\frac{1-a^2}{1+a^2}} = \frac{2a}{1-a^2}$$

Resolent l'equació

$$\frac{2a}{1-a^2} = \frac{3}{4}$$

s'obtenen els valors $a = -3$ i $a = \frac{1}{3}$. Ara bé, l'angle $\arctan(3/4)$ és del primer quadrant. Per tant, la part real i la part imaginària de z han de ser positives, i l'únic valor admissible és

$$a = \frac{1}{3}.$$

Exemple 1.31

(a) Donats dos nombres complexos z i z' els quals afixos són els punts P i Q , respectivament. Justifica la igualtat següent:

$$|z' - z| = d(P, Q)$$

(b) Quina figura determinen els afixos dels nombres complexos z tals que

$$|z - (a + bi)| = r$$

sent $a, b, r \in \mathbb{R}$. (c) Troba els nombres complexos z que satisfan

$$\begin{cases} |z - i| = 1 \\ |z + i| = 1 \end{cases}$$

Representa els afixos d'aquests nombres complexos.

Solució

(a) Si P i Q són dos punts del pla euclídeo, $\overrightarrow{OP}$ i $\overrightarrow{OQ}$ són els seus vectors de posició, la distància entre ells es defineix per

$$d(P, Q) = \|\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}\|$$

Si ara interpretamos els punts P i Q com els afixos dels nombres complexos z i z' , aleshores $\overrightarrow{OP}$ i $\overrightarrow{OQ}$ són vectors associats a z i z' . Per tant, s'ha de complir

$$|z' - z| = \|\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}\| = d(P, Q)$$

(b) Segons el que acabem de veure, si l'afix de z és el punt Q de coordenades (x, y) i l'afix de $a + bi$ és el punt $P = (a, b)$, aleshores

$$|z - (a + bi)| = d(P, Q) = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$$

Després, l'equació

$$|z - (a + bi)| = r$$

és equivalente a

$$\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = r$$

és a dir,

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Les solucions d'aquesta equació es representen en el pla com una circumferència de centre (a, b) i radi r .

(c) Segons l'apartat (b), les solucions de l'equació

$$|z - i| = 1$$

es representen en el pla com una circumferència de centre $(0, 1)$ i radi 1. De la mateixa manera, les solucions de l'equació

$$|z + i| = 1$$

formen una circumferència de centre $(0, -1)$ i radi 1. Per tant, les solucions del sistema

$$\begin{cases} |z - i| = 1 \\ |z + i| = 1 \end{cases}$$

són la intersecció de dos circumferències que són tangents en el origen. Després, la solució d'aquest sistema és $z = 0$.

Exemple 1.32

Al multiplicar un complex per i s'obté un altre complex de mòdul 5, part real -4 i el seu afíx està situat en el tercer quadrant. Calcula aquest complex.

Solució

Suposem que el complex és $a + bi$. Aleshores,

$$\begin{aligned} (a + bi) \cdot i &= ai + bi^2 \\ &= -b + ai \end{aligned}$$

i com la part real del producte és -4 i el seu mòdul és 5, ha de complir-se

$$\begin{cases} -b = -4 \\ \sqrt{(-b)^2 + a^2} = 5 \end{cases}$$

és a dir, $b = 4$ i

$$\sqrt{16 + a^2} = 5$$

Després,

$$\begin{aligned} 16 + a^2 &= 25 \\ a^2 &= 9 \end{aligned}$$

i, per tant, $a = 3$ o $a = -3$. Ara bé, com l'afíx d'aquest producte ha d'estar situat en el tercer quadrant, deduïm que $a < 0$. Per consegüent, el complex que busquem és

$$-3 + 4i$$

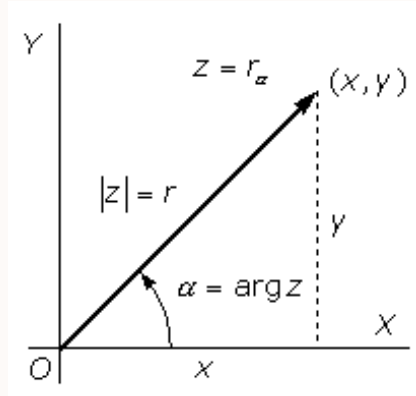
1.4 Forma polar i trigonomètrica d'un nombre complex

Fins ara hem vist que un nombre complex z pot escriure's de dos maneres diferents. La primera, anomenada **forma cartesiana**, consisteix en escriure z com un parell ordenat (x, y) ; les components de aquest parell se interpreten geomètricament com les coordenades de l'afix de z . La segona, anomenada **forma binòmica**, consisteix en escriure z com $x + yi$; x és la part real e y és la part imaginària de z .

Ara donarem altres dos maneres de escriure un nombre complex: forma polar i forma trigonomètrica.

1.4.1 Forma polar d'un nombre complex

Si un nombre complex $z \neq 0$ té mòdul r i argument α , s'anomena **forma polar** o **mòdul-argumental** de z al parell (r, α) , representat sovint per r_α .



La igualtat de nombres complexos es tradueix de la manera següent

$$r_\alpha = r'_{\alpha'} \iff r = r' \text{ i } \alpha' = \alpha + k \cdot 2\pi$$

sent $k \in \mathbb{Z}$.

Donat un nombre complex no nul en forma binòmica $z = x + iy$, aleshores les relacions següents

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

i

$$\tan \alpha = \frac{y}{x} \tag{1.4.1}$$

permeten determinar la forma polar r_α de z . Recorda que hi ha dues angles que complen (1.4.1): si $y > 0$, es pren $\alpha \in (0, \pi)$, i si $y < 0$, es pren $\alpha \in (\pi, 2\pi)$. Si $x = 0$, podem prendre $\theta = \pi/2$ si $y > 0$, i $\theta = 3\pi/2$ quan $y < 0$.

A partir del mòdul r i l'argument α del complex z trobarem les coordenades de l'afix de z mitjançant les fórmules

$$\begin{cases} x = r \cos \alpha \\ y = r \sin \alpha \end{cases}$$

i, per tant, l'expressió de z en forma binòmica. De fet, les equacions anteriors constitueixen les fórmules del canvi de coordenades polars a cartesianes.

Exemple 1.33

Escriu en forma polar els nombres següents complexos: $3, (-4, 0), 5i, (0, -2), i^{39}, 2 + 2i$ i $\sqrt{3} - i$.

Solució

Els cinc primers complexos s'escriuen en forma polar de manera immediata:

Complex	Mòdul	Argument	Forma polar
3	3	0	3_0
$(-4, 0)$	4	π	4_π
$5i$	5	$\frac{\pi}{2}$	$5_{\frac{\pi}{2}}$
$(0, -2)$	2	$-\frac{\pi}{2}$	$2_{-\frac{\pi}{2}}$
$i^{39} = i^3 = -i$	1	$-\frac{\pi}{2}$	$1_{-\frac{\pi}{2}}$

Per escriure en forma polar $z = 2 + 2i$ calculem el seu mòdul i su argument:

$$|z| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

i, sabent que l'afix de z és en el primer quadrant,

$$\tan \alpha = \frac{2}{2} = 1 \implies \alpha = \frac{\pi}{4}$$

Per tant, la forma polar de $z = 2 + 2i$ és

$$(2\sqrt{2})_{\frac{\pi}{4}}$$

De la mateixa manera, per escriure en forma polar $z' = \sqrt{3} - i$, tenim

$$|z'| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$$

i, atès que l'afix de z' és en el quart quadrant,

$$\tan \alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \implies \alpha = -\frac{\pi}{6}$$

Per tant, la forma polar de $z' = \sqrt{3} - i$ és

$$2_{-\frac{\pi}{6}}$$

Exemple 1.34

Escriu en forma binòmica els nombres següents complexos: $2_0, 3_\pi, 1_{\frac{\pi}{2}}, 5_{\frac{3\pi}{2}}, 4_{\frac{\pi}{3}}$ i $(\sqrt{3})_{\frac{3\pi}{4}}$.

Solució

Els quatre primers complexos se escriben en forma binòmica de manera immediata:

Forma polar	Forma binòmica
2_0	2
3_π	-3
$1_{\frac{\pi}{2}}$	i
$5_{\frac{3\pi}{2}}$	$-5i$

Per escriure en forma binòmica $z = 4_{\frac{\pi}{3}}$ calculem les coordenades del seu afix:

$$\begin{cases} x = 4 \cos \frac{\pi}{3} = 2 \\ y = 4 \sin \frac{\pi}{3} = 2\sqrt{3} \end{cases}$$

Per tant, $z = 4_{\frac{\pi}{3}}$ escrit en forma binòmica és

$$2 + 2\sqrt{3}i$$

De la mateixa manera, per escriure en forma binòmica $z = (\sqrt{3})_{\frac{3\pi}{4}}$ calculem les coordenades del seu afix:

$$\begin{cases} x = \sqrt{3} \cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = \sqrt{3} \sin \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Per tant, $z = (\sqrt{3})_{\frac{3\pi}{4}}$ escrit en forma binòmica és

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

Exemple 1.35

Si $z = 5_{\frac{\pi}{6}}$, escriu en forma polar i binòmica els complexos $-z$ i $\bar{z}$.

Solució

Per la posició dels afixos és evident que

	z	$-z$	$\bar{z}$
Mòdul	r	r	r
Argument	α	$\alpha + \pi$	$-\alpha$

Després, si $z = r_\alpha$, aleshores $-z = r_{\alpha+\pi}$ i $\bar{z} = r_{-\alpha}$. D'aquesta manera, obtenim

$$\begin{aligned} -z &= 5_{\frac{\pi}{6}+\pi} \\ \bar{z} &= 5_{-\frac{\pi}{6}} \end{aligned}$$

Per escriure en forma binòmica $z = 5_{\frac{\pi}{6}}$ calculem les coordenades del seu afix:

$$\begin{cases} x = 5 \cos \frac{\pi}{6} = \frac{5\sqrt{3}}{2} \\ y = 5 \sin \frac{\pi}{6} = \frac{5}{2} \end{cases}$$

Per tant, $z = 5\frac{\pi}{6}$ escrit en forma binòmica és

$$\frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}i$$

Aleshores, és evident que

$$-z = -\frac{5\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{2}i$$

i

$$\bar{z} = \frac{5\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{2}i$$

Exemple 1.36

Calcula a i b perquè

$$\frac{a + 2i}{3 + bi} = (\sqrt{2})_{\frac{\pi}{4}}$$

Solució

Primer escriurem $(\sqrt{2})_{\frac{\pi}{4}}$ en forma binòmica. Com que

$$\begin{cases} x = \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4} = 1 \\ y = \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4} = 1 \end{cases}$$

aleshores la forma binòmica del complex considerat és $1 + i$. L'equació

$$\frac{a + 2i}{3 + bi} = (\sqrt{2})_{\frac{\pi}{4}}$$

també pot escriure's de la manera següent

$$\frac{a + 2i}{3 + bi} = 1 + i$$

Després,

$$\begin{aligned} a + 2i &= (3 + bi) \cdot (1 + i) \\ a + 2i &= 3 + bi + 3i - b \\ a + 2i &= 3 - b + (b + 3)i \end{aligned}$$

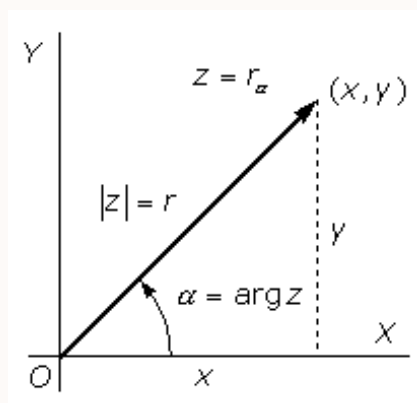
i, per tant,

$$\begin{cases} a = 3 - b \\ 2 = b + 3 \end{cases}$$

d'on es dedueix $a = 4$ i $b = -1$.

1.4.2 Forma trigonomètrica d'un nombre complex

Donat un nombre complex $z = r_{\alpha}$ en forma polar, la següent figura



mostra que es compleixen les relacions següents

$$x = r \cos \alpha \quad \text{i} \quad y = r \sin \alpha$$

de manera que qualsevol nombre complex no nul $z = x + yi$ de mòdul r i argument α es pot escriure de la manera següent:

$$z = x + yi = r \cos \alpha + r \sin \alpha \cdot i = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

Decimos que un nombre complex viene donat en **forma trigonomètrica** quan s'escriu así

$$r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$$

Donat un nombre complex no nul en forma binòmica $z = x + iy$, aleshores les relacions següents

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

i

$$\sin \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{i} \quad \cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

permeten determinar la forma trigonomètrica de z .

Exemple 1.37

Escriu en forma trigonomètrica els nombres següents complexos: 3 , $(-4, 0)$, $5i$, $(0, -2)$, i^{39} , $2 + 2i$, $\sqrt{3} - i$ i $3\frac{7\pi}{4}$.

Solució

Per escriure un complex en forma trigonomètrica hace falta conocer el seu mòdul i el seu argument. Basándonos en els resultats obtinguts en el exemple anterior,

tenim

Complex	Mòdul	Argument	Forma trigonomètrica
3	3	0	$3(\cos 0 + i \sin 0)$
$(-4, 0)$	4	π	$4(\cos \pi + i \sin \pi)$
$5i$	5	$\frac{\pi}{2}$	$5\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)$
$(0, -2)$	2	$-\frac{\pi}{2}$	$2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$
$i^{39} = i^3 = -i$	1	$-\frac{\pi}{2}$	$\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$
$2 + 2i$	$2\sqrt{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$2\sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$
$\sqrt{3} - i$	2	$-\frac{\pi}{6}$	$2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$
$3\frac{7\pi}{4}$	3	$\frac{7\pi}{4}$	$3\left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4}\right)$

Exemple 1.38

Escriu en forma binòmica i en forma polar els nombres següents complexos: (a) $2(\cos 210^\circ + i \sin 210^\circ)$, (b) $\cos 30^\circ - i \sin 30^\circ$, (c) $4(-\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)$ i (d) $-\cos 45^\circ - i \sin 45^\circ$.

Solució

Per passar de la forma trigonomètrica a la forma binòmica calcularem les raons trigonomètriques i efectuarem l'operació indicada. Así, tenim

(a) La forma binòmica de $2(\cos 210^\circ + i \sin 210^\circ)$ és

$$2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = -\sqrt{3} - i$$

La forma polar d'aquest nombre complex és evidentment

$$2\frac{7\pi}{6}$$

(b) La forma binòmica de $\cos 30^\circ - i \sin 30^\circ$ és

$$\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

Per trobar su forma polar, observa que el complex $\cos 30^\circ - i \sin 30^\circ$ és el conjugat de $\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ$. Per tant, la forma polar d'aquest complex és

$$1 - \frac{\pi}{6}$$

(c) La forma binòmica de $4(-\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)$ és

$$4\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -2 + 2\sqrt{3}i$$

Per trobar su forma polar, observa que el complex $4(-\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)$ és l'oposat del conjugat de $4(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)$. Per tant, la forma polar d'aquest complex és

$$4 - \frac{\pi}{3} + \pi = 4\frac{2\pi}{3}$$

(d) La forma binòmica de $-\cos 45^\circ - i \sin 45^\circ$ és

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

Per trobar su forma polar, observa que el complex $-\cos 45^\circ - i \sin 45^\circ$ és l'oposat de $\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ$. Per tant, la forma polar d'aquest complex és

$$1_{\frac{\pi}{4} + \pi} = 1_{\frac{5\pi}{4}}$$

Exemple 1.39

Si $z = -2 - 2\sqrt{3}i$, escriu en forma trigonomètrica els complexos $-z$ i $\bar{z}$.

Solució

Primer escriurem z en forma trigonomètrica. Calculant el mòdul i l'argument de z , obtenim

$$|z| = \sqrt{(-2)^2 + (-2\sqrt{3})^2} = 4$$

i, com l'afix de z es troba en el tercer quadrant,

$$\tan \alpha = \frac{-2\sqrt{3}}{-2} = \sqrt{3} \implies \alpha = \frac{4\pi}{3}$$

Per tant,

$$z = 4 \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right)$$

i, d'aquí, deduïm que

$$-z = 4 \left(-\cos \frac{4\pi}{3} - i \sin \frac{4\pi}{3} \right)$$

i

$$\bar{z} = 4 \left(\cos \frac{4\pi}{3} - i \sin \frac{4\pi}{3} \right)$$

Exemple 1.40

Troba el complex que al sumarlo amb

$$\frac{1+i}{2-2i}$$

s'obté un altre complex de mòdul $\sqrt{2}$ i argument 45° .

Solució

Si z és el complex que busquem, segons l'enunciat, s'ha de complir

$$z + \frac{1+i}{2-2i} = \left(\sqrt{2}\right)_{45^\circ}$$

La forma trigonomètrica del complex $(\sqrt{2})_{45^\circ}$ és

$$\sqrt{2}(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ)$$

i, per tant, su forma binòmica és

$$\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) = 1 + i$$

Per tant,

$$z = 1 + i - \frac{1 + i}{2 - 2i}$$

Efectuant l'operació, obtenim

$$\begin{aligned} 1 + i - \frac{1 + i}{2 - 2i} &= 1 + i - \frac{(1 + i)(2 + 2i)}{(2 - 2i)(2 + 2i)} \\ &= 1 + i - \frac{4i}{8} \\ &= 1 + \frac{1}{2}i \end{aligned}$$

Per tant,

$$z = 1 + \frac{1}{2}i$$

1.4.3 Interpretació geomètrica del producte de dos nombres complexos

Donats dos nombres complexos escrits en forma trigonomètrica

$$z_1 = r_1(\cos \alpha_1 + i \sin \alpha_1) \quad \text{i} \quad z_2 = r_2(\cos \alpha_2 + i \sin \alpha_2)$$

aleshores, calculant el seu producte

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1 \cdot r_2 (\cos \alpha_1 + i \sin \alpha_1)(\cos \alpha_2 + i \sin \alpha_2) \\ &= r_1 \cdot r_2 [(\cos \alpha_1 \cdot \cos \alpha_2 - \sin \alpha_1 \cdot \sin \alpha_2) + i(\cos \alpha_1 \cdot \sin \alpha_2 + \sin \alpha_1 \cdot \cos \alpha_2)] \\ &= r_1 \cdot r_2 [\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i \sin(\alpha_1 + \alpha_2)] \end{aligned}$$

(3) Per trigonometria sabem que

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

i

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha$$

obtenim

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 [\cos(\alpha_1 + \alpha_2) + i \sin(\alpha_1 + \alpha_2)]$$

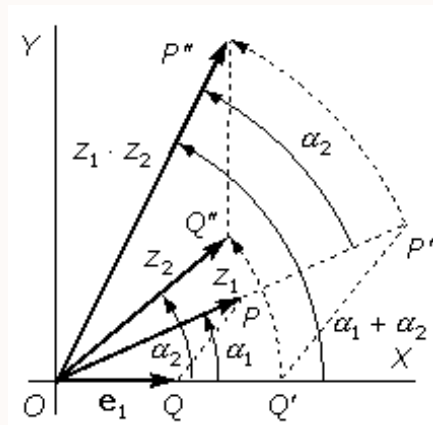
i, com a conseqüència, deduïm que l'argument del producte de dos nombres complexos és la suma dels arguments dels dos nombres complexos:

$$\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$$

i

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

Aquest resultat proporciona una interpretació geomètrica del producte de dos nombres complexos. En efecte, aplicant l'homotècia de centre O i raó r_2 al triangle OPQ , s'obté el triangle semblant $OP'Q'$ en què $\overline{OQ'} = r_2$ i $\overline{OP'} = r_1 \cdot r_2$. Aplicant després al triangle $OP'Q'$ un gir de centre O i angle α_2 , s'obté el triangle semblant $OP''Q''$ en què $\overline{OP''} = r_1 \cdot r_2$ i l'angle $P''OQ''$ és α_1 .



Aleshores, per construcció, l'afix del producte $z_1 \cdot z_2$ és el punt P'' , ja que el mòdul del vector $\overrightarrow{OP''}$ és $r_1 \cdot r_2$ i el angle $P''OQ$ és $\alpha_1 + \alpha_2$.

Per tant, l'aplicació de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$ que $z \mapsto z \cdot z_0$ representa geomètricament la composició d'una **homotècia** de centre l'origen i raó $|z_0|$ i un **gir** de centre l'origen i angle $\arg z_0$.

En particular, obtenim les transformacions següents geomètriques:

- 1) Si $z_0 = 1_\alpha$, aleshores la transformació $z \mapsto z \cdot 1_\alpha$ representa un **gir** de centre l'origen i angle α .
- 2) Si $z_0 = r_{0^\circ}$, aleshores la transformació $z \mapsto z \cdot r_{0^\circ}$ representa una **homotècia** de centre l'origen i raó r .

Exemple 1.41

Calcula el transformat del punt $(1, 2)$ per l'homotècia de centre l'origen i raó 2, seguida del gir de centre l'origen i angle 30° .

Solució

El punt $(1, 2)$ és l'afix del nombre complex $z = 1 + 2i$. Considerem el nombre complex z_0 de mòdul 2 i argument 30°

$$\begin{aligned} z_0 &= 2(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ) \\ &= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \\ &= \sqrt{3} + i \end{aligned}$$

Aleshores, el transformat de $(1, 2)$ és l'afix del producte

$$\begin{aligned} z_0 \cdot z &= (\sqrt{3} + i) \cdot (1 + 2i) \\ &= \sqrt{3} + i + 2\sqrt{3}i - 2 \\ &= \sqrt{3} - 2 + (1 + 2\sqrt{3})i \end{aligned}$$

és a dir, el punt

$$(\sqrt{3} - 2, 1 + 2\sqrt{3})$$

Exemple 1.42

Calcula el transformat del punt $(1, 2)$ per un gir de 60° amb centre en l'origen.

Solució

El punt $(1, 2)$ és l'afix del complex $z = 1 + 2i$. Considerem el complex unitari de argument 60°

$$\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Aleshores, el transformat del punt $(1, 2)$ és l'afix del producte

$$\begin{aligned} (1 + 2i) \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) &= \frac{1}{2} + i + \frac{\sqrt{3}}{2}i + \sqrt{3}i^2 \\ &= \left(\frac{1}{2} - \sqrt{3} \right) + \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)i \end{aligned}$$

és a dir, el punt de coordenades

$$\left(\frac{1}{2} - \sqrt{3}, 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

Exemple 1.43

Donat el triangle de vèrtexs $A(1, 1)$, $B = (3, 2)$ i $C = (2, 3)$, calcula els vèrtexs del seu transformat segons una homotècia de centre l'origen i raó 3 seguida d'un gir de centre l'origen i angle 45° .

Solució

Els punts $A(1, 1)$, $B = (3, 2)$ i $C = (2, 3)$ són els afixos dels complexos $z_A = 1 + i$, $z_B = 3 + 2i$ i $z_C = 2 + 3i$. Aleshores, els afixos dels complexos

$$\begin{aligned} z'_A &= z_A \cdot 3_{45^\circ} \\ z'_B &= z_B \cdot 3_{45^\circ} \\ z'_C &= z_C \cdot 3_{45^\circ} \end{aligned}$$

són els vèrtexs del nou triangle. Com

$$\begin{aligned} z_{A'} &= (1+i) \cdot 3(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ) \\ &= (1+i) \cdot \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}i \right) \\ &= 3\sqrt{2}i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_{B'} &= (3+2i) \cdot 3(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ) \\ &= (3+2i) \cdot \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}i \right) \\ &= \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{15\sqrt{2}}{2}i \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} z_{C'} &= (2+3i) \cdot 3(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ) \\ &= (2+3i) \cdot \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}i \right) \\ &= -\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{15\sqrt{2}}{2}i \end{aligned}$$

aleshores les coordenades de aquests vèrtexs són

$$\begin{aligned} A' &= (0, 3\sqrt{2}) \\ B' &= \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{15\sqrt{2}}{2} \right) \\ C' &= \left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{15\sqrt{2}}{2} \right) \end{aligned}$$

1.5 Operacions amb nombres complexos en forma polar

La forma polar no pot utilitzar-se per sumar o restar nombres complexos.

1.5.1 Productes

Hem vist en l'apartat anterior que

$$\arg(z \cdot z') = \arg z + \arg z'$$

i, per tant, si $z = r_\alpha$ i $z' = r'_{\alpha'}$, aleshores

$$r_\alpha \cdot r'_{\alpha'} = (r \cdot r')_{\alpha+\alpha'}$$

Exemple 1.44

Calcula el producte $2\frac{\pi}{3} \cdot 3\frac{\pi}{4}$ i expressa el resultat en forma binòmica sense usar la calculadora.

Solució

És evident que

$$2\frac{\pi}{3} \cdot 3\frac{\pi}{4} = (2 \cdot 3)\frac{\pi}{\frac{3}{3} + \frac{\pi}{4}} = 6\frac{\pi}{12}$$

Passant aquest nombre complex a la forma trigonomètrica, tenim

$$6 \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right) = 6(\cos 105^\circ + i \sin 105^\circ)$$

Per trigonometria, tenim

$$\begin{aligned} \cos 105^\circ &= \cos(60^\circ + 45^\circ) \\ &= \cos 60^\circ \cdot \cos 45^\circ - \sin 60^\circ \cdot \sin 45^\circ \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} \sin 105^\circ &= \sin(60^\circ + 45^\circ) \\ &= \sin 60^\circ \cdot \cos 45^\circ + \sin 45^\circ \cdot \cos 60^\circ \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \end{aligned}$$

Per tant, el resultat de l'operació en forma binòmica és

$$6 \left(\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}i \right) = \frac{3\sqrt{2} - 3\sqrt{6}}{2} + \frac{3\sqrt{2} + 3\sqrt{6}}{2}i$$

1.5.2 Quocients

Hem vist que si $z \neq 0$, aleshores

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{1}{|z|^2} \cdot \bar{z}$$

Per tant,

$$\begin{aligned}\arg\left(\frac{1}{z}\right) &= \arg\left(\frac{1}{|z|^2} \cdot \bar{z}\right) \\ &= \arg\left(\frac{1}{|z|^2}\right) + \arg(\bar{z}) \\ &= 0 - \alpha = -\alpha\end{aligned}$$

i, com a conseqüència, si $z = r_\alpha$, aleshores

$$(r_\alpha)^{-1} = \frac{1}{r_\alpha} = \left(\frac{1}{r}\right)_{-\alpha}$$

ja que

$$|z^{-1}| = \frac{1}{|z|} = \frac{1}{r}$$

Amb aquest resultat podem deduir el quocient de dos nombres complexos en forma polar. En efecte, atès que

$$\frac{z}{z'} = z \cdot \frac{1}{z'}$$

amb $z' \neq 0$. Aleshores

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg\left(z \cdot \frac{1}{z'}\right) = \arg z + \arg\left(\frac{1}{z'}\right)$$

i, per tant, si $z = r_\alpha$ i $z' = r'_{\alpha'}$, aleshores

$$\frac{r_\alpha}{r'_{\alpha'}} = \left(\frac{r}{r'}\right)_{\alpha-\alpha'}$$

ja que

$$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$$

Exemple 1.45

Calcula el quocient $2\frac{\pi}{3}/3\frac{\pi}{4}$ i expressa el resultat en forma binòmica sense usar la calculadora.

Solució

És clar que

$$\frac{2\frac{\pi}{3}}{3\frac{\pi}{4}} = \left(\frac{2}{3}\right)_{\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}} = \left(\frac{2}{3}\right)_{\frac{\pi}{12}}$$

Passant aquest nombre complex a la forma trigonomètrica, tenim

$$\frac{2}{3} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right) = \frac{2}{3} (\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ)$$

Per trigonometria, tenim

$$\begin{aligned}\cos 15^\circ &= \cos(60^\circ - 45^\circ) \\ &= \cos 60^\circ \cdot \cos 45^\circ + \sin 60^\circ \cdot \sin 45^\circ \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}\sin 105^\circ &= \sin(60^\circ - 45^\circ) \\ &= \sin 60^\circ \cdot \cos 45^\circ - \sin 45^\circ \cdot \cos 60^\circ \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}\end{aligned}$$

Per tant, el resultat de l'operació en forma binòmica és

$$\frac{2}{3} \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4} i \right) = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{6} + \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{6} i$$

1.5.3 Potències. Fórmula de De Moivre

És clar que per inducció sobre el nombre de factors, de les fórmules

$$|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$$

i

$$\arg(z \cdot z') = \arg z + \arg z'$$

podem deduir

$$\left| \prod_{i=1}^n z_i \right| = \prod_{i=1}^n |z_i|$$

i

$$\arg \left(\prod_{i=1}^n z_i \right) = \sum_{i=1}^n \arg z_i$$

En particular, per $n \in \mathbb{N}$ tenim

$$|z^n| = |z|^n \quad \text{i} \quad |z^{-n}| = |z^{-1}|^n \quad (z \neq 0)$$

i

$$\arg z^n = n \cdot \arg z \quad \text{i} \quad \arg z^{-n} = -n \cdot \arg z \quad (z \neq 0)$$

i, per tant, si $z = r_\alpha$, aleshores

$$(r_\alpha)^n = (r^n)_{n \cdot \alpha}$$

per tot $n \in \mathbb{Z}$.

Aquesta última fórmula, escrita en forma trigonomètrica és

$$[r(\cos \alpha + i \sin \alpha)]^n = r^n [\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)]$$

i si, a més, el complex és unitari, o sigui, $r = 1$, aleshores obtenim la **fórmula de De Moivre**

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha)$$

per tot $n \in \mathbb{Z}$.

Exemple 1.46

Calcula de dos maneres la potencia $(1 - \sqrt{3}i)^4$.

Solució

Primer calcularem la potencia utilitzant la fórmula del binomi de Newton:

$$\begin{aligned} (1 - \sqrt{3}i)^4 &= \binom{4}{0} - \binom{4}{1}\sqrt{3}i + \binom{4}{2}(\sqrt{3})^2 i^2 - \binom{4}{3}(\sqrt{3})^3 i^3 + \binom{4}{4}(\sqrt{3})^4 i^4 \\ &= \binom{4}{0} - \binom{4}{1}\sqrt{3}i - 3\binom{4}{2} + 3\sqrt{3}\binom{4}{3}i + 9\binom{4}{4} \end{aligned}$$

Els nombres combinatoris s'obtenen amb el triangle de Tartaglia de la manera següent

$$\begin{array}{cccccc} & & 1 & & 1 & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

Després,

$$\begin{aligned} (1 - \sqrt{3}i)^4 &= 1 - 4\sqrt{3}i - 18 + 12\sqrt{3}i + 9 \\ &= -8 + 8\sqrt{3}i \end{aligned}$$

Ara calcularem la potencia escribint primer el complex en forma polar. El mòdul i l'argument de $z = 1 - \sqrt{3}i$ són

$$|z| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$$

i, com l'afix de z es troba en el quart quadrant,

$$\tan \alpha = \frac{-\sqrt{3}}{1} = -\sqrt{3} \implies \alpha = -60^\circ$$

Per tant, la forma polar de z és

$$2_{-\frac{\pi}{3}}$$

Aleshores, la potencia és

$$\left(2_{-\frac{\pi}{3}}\right)^4 = \left(2^4\right)_{-\frac{4\pi}{3}} = 16_{\frac{2\pi}{3}}$$

Observa que aquest últim resultat coincideix amb què hem encontrado anteriorment, ja que si passem $16\frac{2\pi}{3}$ a forma binòmica, obtenim

$$\begin{aligned} 16(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ) &= 16 \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \\ &= -8 + 8\sqrt{3}i \end{aligned}$$

Exemple 1.47

Donats els complexos $z_1 = 2_{15^\circ}$, $z_2 = 3_{45^\circ}$, $z_3 = 2i$, calcula els complexos següents: (a) $z_1 \cdot z_2$, (b) $z_3 - z_2$, (c) z_3/z_2^2 , (d) $z_3 \cdot z_1^4$ i (e) z_2^{-3} . Expressa els resultats en forma binòmica.

Solució

(a)

$$z_1 \cdot z_2 = 2_{15^\circ} \cdot 3_{45^\circ} = (2 \cdot 3)_{15^\circ + 45^\circ} = 6_{60^\circ}$$

Per tant,

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= 6(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ) \\ &= 6 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \\ &= 3 + 3\sqrt{3}i \end{aligned}$$

(b) Com que

$$\begin{aligned} z_2 &= 3(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ) \\ &= 3 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) \\ &= \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}i \end{aligned}$$

aleshores

$$\begin{aligned} z_3 - z_2 &= 2i - \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}i \right) \\ &= -\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{4 - 3\sqrt{2}}{2}i \end{aligned}$$

(c) Com que $z_3 = 2_{90^\circ}$, aleshores

$$\frac{z_3}{z_2^2} = \frac{2_{90^\circ}}{(3_{45^\circ})^2} = \frac{2_{90^\circ}}{(3^2)_{2 \cdot 45^\circ}} = \left(\frac{2}{9} \right)_{90^\circ - 90^\circ} = \left(\frac{2}{9} \right)_{0^\circ}$$

Per tant,

$$\frac{z_3}{z_2^2} = \frac{2}{9}$$

(d)

$$\begin{aligned}
 z_3 \cdot z_1^4 &= 2_{90^\circ} \cdot (2_{15^\circ})^4 \\
 &= 2_{90^\circ} \cdot (2^4)_{4 \cdot 15^\circ} \\
 &= (2^5)_{90^\circ + 60^\circ} \\
 &= 32_{150^\circ}
 \end{aligned}$$

Per tant,

$$\begin{aligned}
 z_3 \cdot z_1^4 &= 32(\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ) \\
 &= 32 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) \\
 &= -16\sqrt{3} + 16i
 \end{aligned}$$

(e)

$$z_2^{-3} = (3_{45^\circ})^{-3} = (3^{-3})_{(-3) \cdot 45^\circ} = \left(\frac{1}{27} \right)_{-135^\circ} = \left(\frac{1}{27} \right)_{225^\circ}$$

Per tant,

$$\begin{aligned}
 z_2^{-3} &= \frac{1}{27}(\cos 225^\circ + i \sin 225^\circ) \\
 &= \frac{1}{27} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) \\
 &= -\frac{\sqrt{2}}{54} - \frac{\sqrt{2}}{54}i
 \end{aligned}$$

Exemple 1.48

Escriu la fórmula de Moivre pel cas $n = 2$ i dedueix d'aquí les fórmules del sinus i el cosinus de l'angle doble.

Solució

La fórmula de Moivre és

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \cos(n\alpha) + i \sin(n\alpha)$$

per $n \in \mathbb{Z}$. En particular, per $n = 2$ obtenim

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^2 = \cos 2\alpha + i \sin 2\alpha$$

Desenvolupant el membre esquerre de la igualtat, obtenim

$$\begin{aligned}
 (\cos \alpha + i \sin \alpha)^2 &= \cos^2 \alpha + 2i \sin \alpha \cos \alpha + i^2 \sin^2 \alpha \\
 &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha + 2i \sin \alpha \cos \alpha
 \end{aligned}$$

Per tant, tenim la igualtat següent

$$\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha + 2i \sin \alpha \cos \alpha = \cos 2\alpha + i \sin 2\alpha$$

d'on obtenim

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha\end{aligned}$$

ja que dos nombres complexos són iguals quan són iguals les seves parts reals i les seves parts imaginàries.

1.5.4 Arrels n -èsimes

Un nombre complex z s'anomena **arrel n -èsima** d'un nombre complex z' si

$$z^n = z'$$

Si $z = r_\alpha$ i $z' = r'_{\alpha'}$, aleshores la igualtat anterior pot escriure's en forma polar de la manera següent:

$$\begin{aligned}(r_\alpha)^n &= r'_{\alpha'} \\ (r^n)_{n\cdot\alpha} &= r'_{\alpha'}\end{aligned}$$

Per tant,

$$r^n = r'$$

i

$$n\alpha \equiv \alpha' + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

és a dir,

$$r = \sqrt[n]{r'}$$

i

$$\alpha = \frac{\alpha'}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}$$

Ara bé, com $0 \leq \alpha \leq 2\pi$, aleshores

$$\alpha = \frac{\alpha'}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

Com a conseqüència, obtenim la fórmula següent per trobar les arrels n -èsimes d'un complex

$$\sqrt[n]{r_\alpha} = \left(\sqrt[n]{r} \right)_{\frac{\alpha}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

Observa que tot complex no nul té n arrels diferents.

Exemple 1.49

Calcula les arrels cinquenes de $-1 + \sqrt{3}i$.

Solució

Per calcular les arrels cinquenes del complex $z = -1 + \sqrt{3}i$, primer escriurem z en forma polar. És clar que

$$|z| = 2$$

i, com l'afix de z es troba en el segon quadrant, obtenim

$$\arg z = \arctan(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi}{3}$$

Després,

$$z = 2_{120^\circ}$$

i, per tant,

$$\sqrt[5]{2_{120^\circ}} = \left(\sqrt[5]{2}\right)_{\frac{120^\circ}{5} + k \cdot \frac{360^\circ}{5}} = \begin{cases} \left(\sqrt[5]{2}\right)_{24^\circ} & k = 0 \\ \left(\sqrt[5]{2}\right)_{96^\circ} & k = 1 \\ \left(\sqrt[5]{2}\right)_{168^\circ} & k = 2 \\ \left(\sqrt[5]{2}\right)_{240^\circ} & k = 3 \\ \left(\sqrt[5]{2}\right)_{312^\circ} & k = 4 \end{cases}$$

Exemple 1.50

Resol l'equació següent

$$(1 + i) \cdot z^3 - 2i = 0$$

Solució

És clar que

$$\begin{aligned} z^3 &= \frac{2i}{1+i} \\ &= \frac{2i(1-i)}{(1+i)(1-i)} \\ &= \frac{2+2i}{2} \\ &= 1+i \end{aligned}$$

i, per tant,

$$z = \sqrt[3]{1+i}$$

Calculant el mòdul i l'argument de $1+i$, obtenim

$$r = \sqrt{2}$$

i, com l'afix del complex és en el primer quadrant,

$$\alpha = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

Després,

$$\sqrt[3]{(\sqrt{2})_{45^\circ}} = \left(\sqrt[3]{\sqrt{2}}\right)_{\frac{45^\circ}{3} + k \cdot \frac{360^\circ}{3}} = \left(\sqrt[6]{2}\right)_{\frac{45^\circ}{3} + k \cdot \frac{360^\circ}{3}}$$

i, per tant,

$$\sqrt[3]{1+i} = \begin{cases} \left(\sqrt[6]{2}\right)_{15^\circ} & k = 0 \\ \left(\sqrt[6]{2}\right)_{135^\circ} & k = 1 \\ \left(\sqrt[6]{2}\right)_{255^\circ} & k = 2 \end{cases}$$

1.5.5 Interpretació geomètrica de les arrels n -èsimes d'un nombre complex

Suposem que les arrels n -èsimes d'un complex z no nul són

$$z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$$

aleshores,

$$|z_k| = \sqrt[n]{|z|}$$

i

$$\arg z_k = \frac{\arg z}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}$$

sent $0 \leq k \leq n-1$. Per tant, és evident que

$$|z_k| = |z_{k+1}| = \sqrt[n]{|z|}$$

i

$$\arg z_{k+1} = \frac{2\pi}{n} + \arg z_k$$

Geomètricament, aquests resultats s'interpreten de la manera següent:

- 1) Si $n = 2$, els afijos de les dues arrels quadrades z_0 i z_1 d'un complex z són dos punts simètrics respecte de l'origen de coordenades.
- 2) Si $n > 2$, els afijos de les n arrels n -èsimes $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$ d'un complex z són els vèrtexs d'un polígon regular de n costats inscrit en una circumferència de centre l'origen de coordenades i radi $\sqrt[n]{|z|}$.

Exemple 1.51

Els afijos de les arrels cinquenes d'un complex z són els vèrtexs d'un pentàgon regular inscrit en una circumferència de radi 2 i centre en l'origen de coordenades. Sabent que l'argument de una d'aqu aquestes arrels és 100° , calcula z i les altres arrels.

Solució

Per l'enunciat deduïm que 2_{100° és una arrel cinquena del nombre complex z . Per tant,

$$z = (2_{100^\circ})^5 = (2^5)_{5 \cdot 100^\circ} = 32_{140^\circ}$$

Com els mòduls de totes les arrels cinquenes de z són iguals a 2 i els arguments de dues arrels consecutives difereixen en

$$\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$$

aleshores les restants arrels són:

$$2_{100^\circ - 72^\circ} = 2_{28^\circ}$$

$$2_{100^\circ + 72^\circ} = 2_{172^\circ}$$

$$2_{172^\circ + 72^\circ} = 2_{244^\circ}$$

$$2_{244^\circ + 72^\circ} = 2_{316^\circ}$$

2 Pràctica

Exercici 2.1

Calcula el nombre real a perquè el quocient

$$\frac{a+i}{2-i}$$

sigui (a) un nombre real, i (b) imaginari.

Solució

Efectuant el quocient, obtenim

$$\begin{aligned}\frac{a+i}{2-i} &= \frac{(a+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} \\ &= \frac{2a+2i+ai+i^2}{4-i^2} \\ &= \frac{2a-1}{5} + \frac{2+a}{5}i\end{aligned}$$

(a) Perquè el quocient sigui un nombre real la part imaginària ha de ser zero:

$$\frac{2+a}{5} = 0 \implies a = -2$$

(b) Perquè el quocient sigui un nombre imaginari la part real ha de ser zero:

$$\frac{2a-1}{5} = 0 \implies a = \frac{1}{2}$$

Exercici 2.2

Troba el complex z del qual se sap que $z + \bar{z} = 6$ i $z \cdot \bar{z} = 25$.

Solució

Suposem que $z = a + bi$. Aleshores $\bar{z} = a - bi$ i, per tant, les condicions de l'enunciat s'expressen mitjançant el sistema següent:

$$\begin{cases} (a+bi) + (a-bi) = 6 \\ (a+bi) \cdot (a-bi) = 25 \end{cases}$$

és a dir,

$$\begin{cases} 2a = 6 \\ a^2 + b^2 = 25 \end{cases}$$

Després, $a = 3$ i

$$\begin{aligned} b^2 &= 25 - 9 \\ b^2 &= 16 \end{aligned}$$

i, per tant, $b = 4$ o $b = -4$. Hi ha, ja que dues solucions: $z = 3 + 4i$ o $z = 3 - 4i$.

Exercici 2.3

Calcula l'expressió següent en $\mathbb{C}$

$$\sqrt{-4} + \sqrt{9} - \sqrt{-16} + \sqrt{25} + 2 - i$$

Solució

Com que

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} = 2i$$

aleshores

$$\sqrt{-4} + \sqrt{9} - \sqrt{-16} + \sqrt{25} + 2 - i = 2i + 3 - 4i + 5 + 2 - i = 10 - 3i$$

Exercici 2.4

Escriu l'equació de segon grau amb coeficients reals que té $z = -2 - i$ com una de les seves solucions. Comprova després el resultat.

Solució

Com els coeficients de l'equació de segon grau són nombres reals, les solucions d'aquesta equació són dos complexos conjugats. Per tant, si $z = -2 - i$ és solució, l'altra és $\bar{z} = -2 + i$. Com que la suma d'aquests complexos és

$$z + \bar{z} = -4$$

i el seu producte és

$$z \cdot \bar{z} = 4 - i^2 = 5$$

aleshores, l'equació és

$$x^2 + 4x + 5 = 0$$

Resolent ara aquesta equació, obtenim

$$\frac{-4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{-4 \pm 2i}{2} = \begin{cases} -2 + i \\ -2 - i \end{cases}$$

Exercici 2.5

Calcula els nombres reals a i b perquè

$$\frac{3a - 9i}{3a + bi} = 5 + 4i$$

Solució

S'ha de complir que

$$\begin{aligned} 3a - 9i &= (5 + 4i) \cdot (3a + bi) \\ 3a - 9i &= 15a + 12ai + 5bi + 4bi^2 \\ 3a - 9i &= (15a - 4b) + (12a + 5b)i \end{aligned}$$

Per tant,

$$\begin{cases} 15a - 4b = 3a \\ 12a + 5b = -9 \end{cases}$$

Resolent el sistema, obtenim

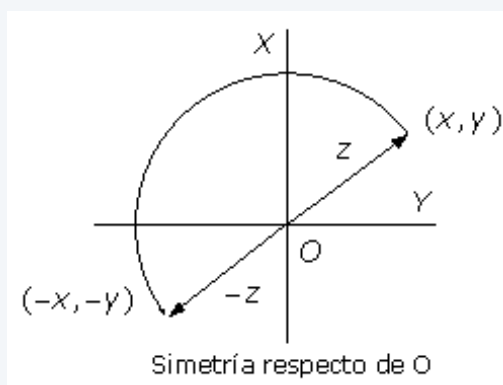
$$a = -\frac{1}{3} \quad \text{i} \quad b = -1$$

Exercici 2.6

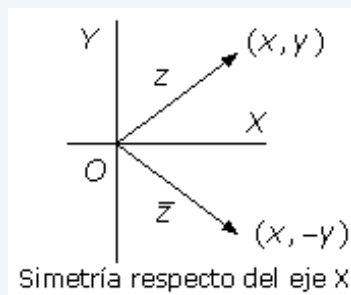
Interpreta geomètricament les transformacions següents del pla complex: (a) $z \mapsto -z$, (b) $z \mapsto \bar{z}$, (c) $z \mapsto iz$.

Solució

(a) La transformació $z \mapsto -z$ és una simetria respecte de l'origen o un gir de 180° .



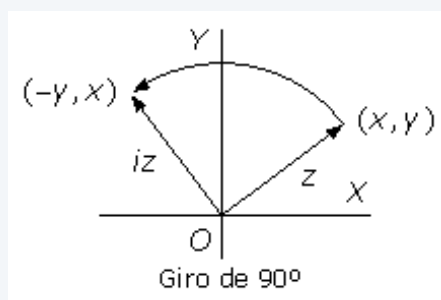
(b) La conjugació $z \mapsto \bar{z}$ és una simetria respecte de l'eix X .



(c) La transformació $z \mapsto iz$ aplica l'afix (x, y) de z en el de iz que és $(-y, x)$, ja que

$$i(x + iy) = ix + i^2y = -y + ix$$

Per tant, aquesta transformació és un gir de 90° .



Exercici 2.7

Representa en el pla els conjunts de nombres complexos que satisfan cada una de les condicions següents: (a) $|z| = 2$, (b) $|z - 4 + i| = 2$, (c) $|z| < 2$, (d) $|z - 4 + i| \geq 2$ i (e) $\arg z = 45^\circ$.

Solució

(a) Els afixos dels complexos z que satisfan la condició que el seu mòdul sigui 2 formen una circumferència de centre l'origen i radi 2.

(b) Els afixos dels complexos z que satisfan la condició

$$|z - (4 - i)| = 2$$

és una circumferència de centre $(4, -1)$ i radi 2.

(c) Els afixos dels complexos z que satisfan la condició que el seu mòdul sigui menor que 2 formen un disc de centre l'origen i radi 2.

(d) Els afixos dels complexos z que satisfan la condició

$$|z - (4 - i)| \geq 2$$

formen tot el pla amb un forat delimitat per la circumferència de centre $(4, -1)$ i radi 2.

(e) Els afixos dels complexos $z = x + iy$ que tenen argument 45° és la semirecta

$$\begin{cases} y = x \\ y > 0 \end{cases}$$

Exercici 2.8

Determina els conjunts següents del pla complex:

$$a) \quad z\bar{z} = 4 \quad b) \quad \operatorname{Re} \frac{1}{z} = 1 \quad c) \quad 1 < |z - i| < 2$$

Solució

(a) Si $z\bar{z} = 4$, aleshores

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = 2$$

i, per tant, els afixos dels complexos satisfan la condició $z\bar{z} = 4$ formen una circumferència de centre l'origen i radi 2.

(b) Si $z = x + iy \neq 0$, aleshores

$$\operatorname{Re} \left(\frac{1}{z} \right) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

Per tant, s'ha de complir que

$$\frac{x}{x^2 + y^2} = 1$$

és a dir,

$$x^2 + y^2 - x = 0$$

Aquesta equació pot expressar-se de la manera següent

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$$

i, com a conseqüència, els afixos dels complexos que satisfan $\operatorname{Re} \frac{1}{z} = 1$ és una circumferència de centre $(1/2, 0)$ i radi $1/2$.

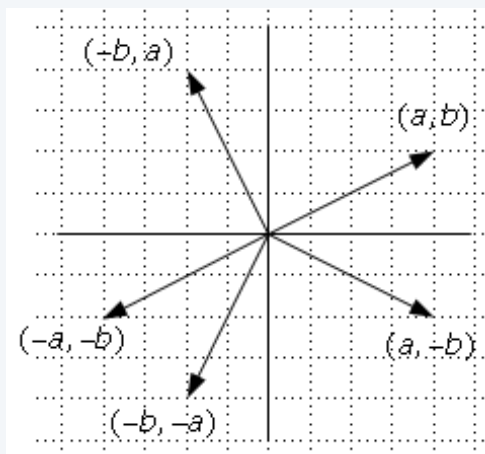
(c) Es tracta d'una corona circular, centrada en el punt $(0, 1)$ i les quals circumferències interior i exterior tenen radis 1 i 2, respectivament.

Exercici 2.9

Si l'argument del complex $z = a + bi$ és 35° , troba l'argument de $-b + ai$, $a - bi$, $-a - bi$ i $-b - ai$. Expressa cadascun d'ells en termes del complex z .

Solució

Els arguments d'aquests complexos es dedueixen de manera immediata a partir de la seva representació gràfica.



Así, tenim

Complex	Argument	
$-b + ai$	125°	iz
$a - bi$	-35°	$\bar{z}$
$-a - bi$	215°	$-z$
$-b - ai$	235°	$\overline{iz}$

Exercici 2.10

Si el mòdul del complex z és 2, troba el mòdul dels complexos següents: (a) $|2z|$, (b) $|\bar{z}|$, (c) $|3/z|$ i (d) $|z^3|$.

Solució

Per les propietats del mòdul d'un nombre complex, tenim:

(a)

$$|2z| = |2| \cdot |z| = 2 \cdot 2 = 4$$

(b)

$$|\bar{z}| = |z| = 2$$

(c)

$$\left| \frac{3}{z} \right| = \frac{|3|}{|z|} = \frac{3}{2}$$

(d)

$$|z^3| = |z|^3 = 2^3 = 8$$

Exercici 2.11

Si z és un complex unitari d'argument α , expressa en forma polar i trigonomètrica: z , $-z$, $\bar{z}$ i $-\bar{z}$.

Solució

Complex	Polar	Trigonomètrica
z	1_α	$\cos \alpha + i \sin \alpha$
$-z$	$1_{\alpha+\pi}$	$-\cos \alpha - i \sin \alpha$
$\bar{z}$	$1_{-\alpha}$	$\cos \alpha - i \sin \alpha$
$-\bar{z}$	$1_{-\alpha+\pi}$	$-\cos \alpha + i \sin \alpha$

Exercici 2.12

Efectúa les operacions següents, expressant el resultat en forma binòmica:

a)

$$1_0 + 2_{\frac{\pi}{2}} + 3_\pi + 4_{\frac{3\pi}{2}}$$

b)

$$\frac{4_{-\frac{\pi}{6}} \cdot (\cos 28^\circ + i \sin 28^\circ)}{(\cos 31^\circ - i \sin 31^\circ)^2}$$

c)

$$\frac{5 \cdot (\sqrt{2})_{\frac{\pi}{4}} \cdot (\sqrt{12} + 2i) \cdot (-\cos 25^\circ - i \sin 25^\circ)}{2(\cos 50^\circ - i \sin 50^\circ)}$$

Solució

(a) Com que els nombres complexos no se poden sumar en forma polar, passem cadascun d'ells a forma binòmica, i resulta

$$\begin{aligned} 1_0 + 2_{\frac{\pi}{2}} + 3_\pi + 4_{\frac{3\pi}{2}} &= 1 + 2i - 3 - 4i \\ &= -2 - 2i \end{aligned}$$

(b) Efectuarem l'operació

$$\frac{4_{-\frac{\pi}{6}} \cdot (\cos 28^\circ + i \sin 28^\circ)}{(\cos 31^\circ - i \sin 31^\circ)^2}$$

passant tots els complexos a la forma polar. D'aquesta manera, tenim

$$\begin{aligned} \frac{4_{-30^\circ} \cdot 1_{28^\circ}}{(1_{-31^\circ})^2} &= \frac{(4 \cdot 1)_{-30^\circ+28^\circ}}{(1^2)_{2 \cdot (-31^\circ)}} \\ &= \frac{4_{-2^\circ}}{1_{-62^\circ}} \\ &= \left(\frac{4}{1}\right)_{-2^\circ - (-62^\circ)} \\ &= 4_{60^\circ} \end{aligned}$$

Passant aquest resultat a forma binòmica, obtenim

$$4(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ) = 4 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 2 + 2\sqrt{3}i$$

(c) Efectuarem l'operació

$$\frac{5 \cdot (\sqrt{2})_{\frac{\pi}{4}} \cdot (\sqrt{12} + 2i) \cdot (-\cos 25^\circ - i \sin 25^\circ)}{2(\cos 50^\circ - i \sin 50^\circ)}$$

passant tots els complexos a la forma polar. D'aquesta manera, tenim

$$\begin{aligned} \frac{5_{0^\circ} \cdot (\sqrt{2})_{45^\circ} \cdot 4_{30^\circ} \cdot 1_{25^\circ+180^\circ}}{2_{-50^\circ}} &= \frac{(20\sqrt{2})_{280^\circ}}{2_{-50^\circ}} \\ &= (10\sqrt{2})_{330^\circ} \end{aligned}$$

Passant aquest resultat a forma binòmica, obtenim

$$\begin{aligned} 10\sqrt{2}(\cos 330^\circ + i \sin 330^\circ) &= 10\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right) \\ &= 5\sqrt{6} - 5\sqrt{2}i \end{aligned}$$

Exercici 2.13

Efectúa les operacions següents, expressant el resultat en forma binòmica:

a)

$$(i^5 + i^8)^{10}$$

b)

$$\left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - i} \right)^{10}$$

c)

$$\frac{(-1 + i)^5}{(-2 - 2\sqrt{3}i)^6}$$

d)

$$[2(\cos 40^\circ + i \sin 40^\circ)]^3 + [2(\cos 20^\circ + i \sin 20^\circ)]^3$$

Solució

(a) Com que $i^5 = i$ i $i^8 = 1$, hem de calcular

$$(1 + i)^{10}$$

Per això, passarem a forma polar el complex $1 + i$. El seu mòdul és

$$r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

i, com el seu afix és en el primer quadrant, el seu argument és

$$\tan \alpha = 1 \implies \alpha = 45^\circ$$

Després,

$$\left[(\sqrt{2})_{45^\circ}\right]^{10} = (\sqrt{2})_{10 \cdot 45^\circ}^{10} = (2^5)_{90^\circ + 360^\circ} = 32_{90^\circ}$$

Per tant

$$(1+i)^{10} = 32i$$

(b) Efectuarem l'operació

$$\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-i}\right)^{10}$$

en forma polar. El mòdul de $1+\sqrt{3}i$ és

$$r = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

i, com el seu afix es troba en el primer quadrant, el seu argument és

$$\tan \alpha = \sqrt{3} \implies \alpha = 60^\circ$$

El mòdul de $1-i$ és

$$r' = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

i, com el seu afix es troba en el quart quadrant, el seu argument és

$$\tan \alpha' = -1 \implies \alpha' = -45^\circ$$

Per tant, l'operació que volem calcular en forma polar és

$$\begin{aligned} \left[\frac{2_{60^\circ}}{(\sqrt{2})_{-45^\circ}}\right]^{10} &= \left[\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)_{105^\circ}\right]^{10} \\ &= \left[(\sqrt{2})^{10}\right]_{10 \cdot 105^\circ} \\ &= (2^5)_{330^\circ + 2 \cdot 360^\circ} \\ &= 32_{330^\circ} \end{aligned}$$

Per tant,

$$\begin{aligned} \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-i}\right)^{10} &= 32(\cos 330^\circ + i \sin 330^\circ) \\ &= 32\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) \\ &= 16\sqrt{3} - 16i \end{aligned}$$

(c) Efectuarem l'operació

$$\frac{(-1+i)^5}{(-2-2\sqrt{3}i)^6}$$

en forma polar. El mòdul de $-1+i$ és

$$r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

i, com el seu afíx es troba en el segon quadrant, el seu argument és

$$\tan \alpha = -1 \implies \alpha = 135^\circ$$

El mòdul de $-2 - 2\sqrt{3}i$ és

$$r' = \sqrt{(-2)^2 + (-2\sqrt{3})^2} = 4$$

i, com el seu afíx es troba en el tercer quadrant, el seu argument és

$$\tan \alpha' = \sqrt{3} \implies \alpha' = 240^\circ$$

Per tant, l'operació que volem calcular en forma polar és

$$\begin{aligned} \frac{\left[(\sqrt{2})_{135}\right]^5}{(4_{240^\circ})^6} &= \frac{\left[(\sqrt{2})^5\right]_{5 \cdot 135^\circ}}{(4^6)_{6 \cdot 240^\circ}} \\ &= \left(\frac{4\sqrt{2}}{4096}\right)_{675^\circ - 1440^\circ} \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{1024}\right)_{-45^\circ - 2 \cdot 360^\circ} \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{1024}\right)_{-45^\circ} \end{aligned}$$

Per tant,

$$\begin{aligned} \frac{(-1+i)^5}{(-2-2\sqrt{3}i)^6} &= \frac{\sqrt{2}}{1024} (\cos(-45^\circ) + i \sin(-45^\circ)) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{1024} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) \\ &= \frac{1}{1024} - \frac{1}{1024}i \end{aligned}$$

(d) Passant l'expressió

$$[2(\cos 40^\circ + i \sin 40^\circ)]^3 + [2(\cos 20^\circ + i \sin 20^\circ)]^3$$

a forma polar, obtenim

$$(2_{40^\circ})^3 + (2_{20^\circ})^3 = 8_{120^\circ} + 8_{60^\circ}$$

Per calcular aquesta suma de nombres complexos, passem a forma binòmica cadascun dels sumands. La forma binòmica de 8_{120° és

$$\begin{aligned} 8(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ) &= 8 \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \\ &= -4 + 4\sqrt{3}i \end{aligned}$$

i la de 8_{60° és

$$\begin{aligned} 8(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ) &= 8 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \\ &= 4 + 4\sqrt{3}i \end{aligned}$$

Per tant,

$$[2(\cos 40^\circ + i \sin 40^\circ)]^3 + [2(\cos 20^\circ + i \sin 20^\circ)]^3 = 8\sqrt{3}i$$

Exercici 2.14

Demuestra les següents fórmules d'addició d'angles

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha$$

i

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

Solució

Com que

$$1_\alpha \cdot 1_\beta = 1_{\alpha+\beta}$$

deduïm que

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta) = \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)$$

Ara bé, com

$$\begin{aligned} (\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta) &= \cos \alpha \cdot \cos \beta + i \sin \alpha \cdot \cos \beta + i \cos \alpha \cdot \sin \beta + i^2 \sin \alpha \cdot \sin \beta \\ &= (\cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta) + (\sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha)i \end{aligned}$$

aleshores

$$(\cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta) + (\sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha)i = \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)$$

i, per tant,

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

i

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha$$

Exercici 2.15

Calcula β perquè

$$\frac{10_{3\beta}}{2_\beta} = \frac{5}{\sqrt{2}} + \frac{5}{\sqrt{2}}i$$

Solució

Primer passarem a forma polar el complex

$$\frac{5}{\sqrt{2}} + \frac{5}{\sqrt{2}}i$$

El seu mòdul és

$$r = \sqrt{\left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2} = 5$$

i, com el seu afix és en el primer quadrant, el seu argument és

$$\tan \alpha = 1 \implies \alpha = 45^\circ$$

Aleshores podem escriure

$$\frac{10_{3\beta}}{2_\beta} = 5_{45^\circ}$$

és a dir,

$$5_{2\beta} = 5_{45^\circ}$$

Per tant,

$$2\beta = 45^\circ + k \cdot 360^\circ$$

o sigui,

$$\beta = 22.5^\circ + k \cdot 180^\circ$$

Exercici 2.16

A partir de la fórmula de Moivre expressa $\sin 3\alpha$ i $\cos 3\alpha$ en termes de $\sin \alpha$ i $\cos \alpha$.

Solució

Per la fórmula de Moivre, tenim

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^3 = \cos 3\alpha + i \sin 3\alpha$$

Desenvolupant $(\cos \alpha + i \sin \alpha)^3$ per la fórmula del binomi de Newton, obtenim

$$\begin{aligned} (\cos \alpha + i \sin \alpha)^3 &= \binom{3}{0} \cos^3 \alpha + \binom{3}{1} \cos^2 \alpha \cdot i \sin \alpha + \binom{3}{2} \cos \alpha \cdot i^2 \sin^2 \alpha + \binom{3}{3} i^3 \sin^3 \alpha \\ &= \binom{3}{0} \cos^3 \alpha + \binom{3}{1} \cos^2 \alpha \cdot i \sin \alpha - \binom{3}{2} \cos \alpha \cdot \sin^2 \alpha - \binom{3}{3} i \sin^3 \alpha \end{aligned}$$

Mitjançant el triangle de Tartaglia calculem els nombres combinatoris:

$$\begin{array}{ccccccc} & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \end{array}$$

Després,

$$\begin{aligned} (\cos \alpha + i \sin \alpha)^3 &= \cos^3 \alpha + 3 \cos^2 \alpha \cdot i \sin \alpha - 3 \cos \alpha \cdot \sin^2 \alpha - i \sin^3 \alpha \\ &= (\cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \cdot \sin^2 \alpha) + (3 \cos^2 \alpha \cdot \sin \alpha - \sin^3 \alpha)i \end{aligned}$$

Per tant,

$$(\cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \cdot \sin^2 \alpha) + (3 \cos^2 \alpha \cdot \sin \alpha - \sin^3 \alpha)i = \cos 3\alpha + i \sin 3\alpha$$

i, com a conseqüència, deduïm

$$\cos 3\alpha = \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha \cdot \sin^2 \alpha$$

i

$$\sin 3\alpha = 3 \cos^2 \alpha \cdot \sin \alpha - \sin^3 \alpha$$

Exercici 2.17

Calcula les arrels sisenes de -1 i els afixos corresponents. Quina figura formen aquests punts? Calcula la suma de aquestes arrels.

Solució

El complex -1 en forma polar és

$$1_{180^\circ}$$

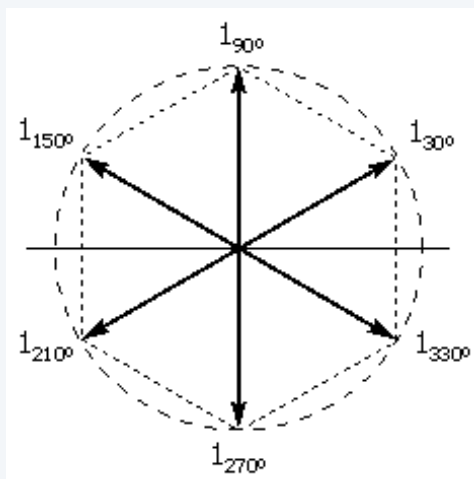
Per tant,

$$\sqrt[6]{1_{180^\circ}} = 1_{\frac{180^\circ}{6} + k \cdot \frac{360^\circ}{6}} = \begin{cases} 1_{30^\circ} & k = 0 \\ 1_{90^\circ} & k = 1 \\ 1_{150^\circ} & k = 2 \\ 1_{210^\circ} & k = 3 \\ 1_{270^\circ} & k = 4 \\ 1_{330^\circ} & k = 5 \end{cases}$$

Passant aquests complexos a forma binòmica s'obtidran les coordenades dels afixos de les arrels. Así, tenim

Polar	Trigonomètrica	Binòmica	Afix
1_{30°	$\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ$	$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$
1_{90°	$\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ$	i	$(0, 1)$
1_{150°	$\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ$	$-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$	$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$
1_{210°	$\cos 210^\circ + i \sin 210^\circ$	$-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$	$\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$
1_{270°	$\cos 270^\circ + i \sin 270^\circ$	$-i$	$(0, -1)$
1_{330°	$\cos 330^\circ + i \sin 330^\circ$	$\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

Els afixos de les arrels sisenes de -1 formen un hexàgon regular inscrit en una circumferència de centre l'origen i radi 1.



És evident que la suma de aquestes arrels és zero, ja que és zero la suma de els seus vectors associats.

Exercici 2.18

Calcula la arrel quadrada de $3 + 4i$ sense utilitzar la forma polar.

Solució

Si $a + bi$ és una arrel quadrada de $3 + 4i$, aleshores

$$(a + bi)^2 = 3 + 4i$$

Després,

$$\begin{aligned} a^2 + 2abi + b^2i^2 &= 3 + 4i \\ (a^2 - b^2) + 2abi &= 3 + 4i \end{aligned}$$

i, per tant,

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ 2ab = 4 \end{cases}$$

Resolent aquest sistema, s'obten dues solucions

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \quad \text{i} \quad \begin{cases} a = -2 \\ b = -1 \end{cases}$$

Per tant, les arrels quadrades del complex donat són $2 + i$ i $-2 - i$.

Exercici 2.19

Una arrel cúbica d'un complex és $1 - i$. Calcula aquest complex i les demás arrels.

Solució

El complex $1 - i$ en forma polar és $(\sqrt{2})_{-45^\circ}$. Si z és el complex que busquem, aleshores s'ha de complir

$$z = \left[(\sqrt{2})_{-45^\circ} \right]^3$$

i, per tant,

$$z = (2\sqrt{2})_{-135^\circ} = (2\sqrt{2})_{225^\circ}$$

és a dir,

$$\begin{aligned} z &= 2\sqrt{2}(\cos 225^\circ + i \sin 225^\circ) \\ &= 2\sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \right) \\ &= -2 - 2i \end{aligned}$$

Com els mòduls de totes les arrels cúbiques de z són iguals a $\sqrt{2}$ i els arguments de dues arrels consecutives difereixen en

$$\frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$$

aleshores les restants arrels són:

$$\begin{aligned} (\sqrt{2})_{195^\circ + 120^\circ} &= (\sqrt{2})_{75^\circ} \\ (\sqrt{2})_{315^\circ - 120^\circ} &= (\sqrt{2})_{195^\circ} \end{aligned}$$

Exercici 2.20

(a) Prova que si z_0 és una arrel n -èsima d'un complex no nul z , aleshores les arrels n -èsimes de z són les arrels n -èsimes de la unitat multiplicades per z_0 . (b) Com a aplicació, resol l'exercici anterior.

Solució

Si z_0 és una arrel n -èsima de z , aleshores

$$z_0^n = z$$

Si z_1 és qualsevol una altra arrel n -èsima de z , tenim

$$z_1^n = z$$

i, per tant,

$$\frac{z_1^n}{z_0^n} = \left(\frac{z_1}{z_0} \right)^n = 1$$

Després, el complex $\frac{z_1}{z_0}$ és una arrel n -èsima de la unitat. Com a conseqüència, qualsevol una altra arrel n -èsima de z és el producte de z_0 per una arrel n -èsima de la unitat.

(b) Sabem que una arrel cúbica d'un complex z és $z_1 = 1 - i$ i volem trobar les altres dues arrels. Com les arrels cúbiques de la unitat són

$$\begin{aligned}u_1 &= 1_{0^\circ} = 1 \\u_2 &= 1_{120^\circ} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\u_3 &= 1_{240^\circ} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\end{aligned}$$

les altres arrels de z són

$$z_2 = (1 - i) \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right)i$$

i

$$z_3 = (1 - i) \cdot \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right)i$$

Exercici 2.21

Resol en $\mathbb{C}$ l'equació següent

$$(2 - i)z^2 - (3 + i)z - 2 + 6i = 0$$

Per què les solucions no són dos complexos conjugats?

Solució

Al no ser una equació de segon grau amb coeficients reals, no podem assegurar que les seves solucions siguin dos complexos conjugats.

Resolent l'equació com en el cas del cos $\mathbb{R}$ dels nombres reals, obtenim

$$\frac{3 + i + \sqrt{(3 + i)^2 - 4(2 - i)(-2 + 6i)}}{2(2 - i)} = \frac{3 + i + \sqrt{-50i}}{4 - 2i}$$

Ara bé, com $-50i$ en forma polar és 50_{270° , tenim

$$\sqrt{50_{270^\circ}} = (\sqrt{50})_{\frac{270^\circ}{2} + k \cdot \frac{360^\circ}{2}} = \begin{cases} (5\sqrt{2})_{135^\circ} & k = 0 \\ (5\sqrt{2})_{315^\circ} & k = 1 \end{cases}$$

i, expressant aquestes arrels en forma binòmica, obtenim

$$\sqrt{-50i} = \begin{cases} -5 + 5i \\ 5 - 5i \end{cases}$$

Per tant,

$$\begin{aligned}\frac{3 + i + \sqrt{-50i}}{4 - 2i} &= \frac{3 + i - 5 + 5i}{4 - 2i} \\ &= \frac{-2 + 6i}{4 - 2i} \\ &= \frac{(-1 + 3i)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} \\ &= -1 + i\end{aligned}$$

o bé

$$\begin{aligned}\frac{3+i+\sqrt{-50i}}{4-2i} &= \frac{3+i+5-5i}{4-2i} \\ &= \frac{8-4i}{4-2i} \\ &= 2\end{aligned}$$

Per tant, les solucions de

$$(2-i)z^2 - (3+i)z - 2 + 6i = 0$$

són $z = 2$ o $z = -1 + i$.

Exercici 2.22

Resol en $\mathbb{C}$ les equacions següents:

a)

$$z^4 + 64z = 0$$

b)

$$z^6 - 28z^3 + 27 = 0$$

Solució

(a)

$$z(z^3 + 64) = 0 \implies \begin{cases} z = 0 \\ z^3 + 64 = 0 \end{cases}$$

Les solucions de l'equació

$$z^3 + 64 = 0$$

són les arrels cúbiques de -64 . Com -64 en forma polar és 64_{180° , tenim

$$\sqrt[3]{64_{180^\circ}} = \left(\sqrt[3]{64}\right)_{\frac{180^\circ}{3} + k \cdot \frac{360^\circ}{3}} = \begin{cases} 4_{60^\circ} & k = 0 \\ 4_{180^\circ} & k = 1 \\ 4_{240^\circ} & k = 2 \end{cases}$$

Passant aquestes arrels a forma binòmica, obtenim

Polar	Binòmica
4_{60°	$2 + 2\sqrt{3}i$
4_{180°	-4
4_{240°	$2 - 2\sqrt{3}i$

Per tant, les solucions de l'equació $z^4 + 64z = 0$ són $z_1 = 0$, $z_2 = 2 + 2\sqrt{3}i$, $z_3 = -4$ i $z_4 = 2 - 2\sqrt{3}i$.

(b) Observa que l'equació

$$z^6 - 28z^3 + 27 = 0$$

és biquadrada. Mitjançant el canvi $u = z^3$, s'obté l'equació

$$u^2 - 28u + 27 = 0$$

Resolent aquesta equació, obtenim

$$\frac{28 + \sqrt{784 - 108}}{2} = \frac{28 \pm 26}{2} = \begin{cases} 27 \\ 1 \end{cases}$$

Per tant, ara cal resoldre en $\mathbb{C}$ les equacions següents:

$$z^3 = 27 \quad \text{i} \quad z^3 = 1$$

Les solucions de la primera són les arrels cúbiques de 27_{0° , és a dir,

$$\sqrt[3]{27_{0^\circ}} = \left(\sqrt[3]{27}\right)_{k \cdot \frac{360^\circ}{3}} = \begin{cases} 3_{0^\circ} & k = 0 \\ 3_{120^\circ} & k = 1 \\ 3_{240^\circ} & k = 2 \end{cases}$$

i, les solucions de la segona són les arrels cúbiques de 1_{0° , és a dir,

$$\sqrt[3]{1_{0^\circ}} = \left(\sqrt[3]{1}\right)_{k \cdot \frac{360^\circ}{3}} = \begin{cases} 1_{0^\circ} & k = 0 \\ 1_{120^\circ} & k = 1 \\ 1_{240^\circ} & k = 2 \end{cases}$$

Escribiendo aquestes arrels en forma binòmica, obtenim

Polar	Binòmica		Polar	Binòmica
3_{0°	3		1_{0°	1
3_{120°	$-\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$	i	1_{120°	$-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$
3_{240°	$-\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$		1_{240°	$-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Per tant, les solucions de l'equació

$$z^6 - 28z^3 + 27 = 0$$

són $z_1 = 3$, $z_2 = 1$, $z_3 = -\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$, $z_4 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $z_5 = -\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$ i $z_6 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Exercici 2.23

Troba dos nombres complexos tals que el seu producte és $2i$, i el quadrat de uno de ellos, dividido pel un altre, és $1/2$.

Solució

Suposem que r_α i s_β són les formes polars dels complexos que volem trobar. Com el producte de tots dos és $2i$, podem escriure

$$\begin{aligned} r_\alpha \cdot s_\beta &= 2_{90^\circ} \\ (r \cdot s)_{\alpha+\beta} &= 2_{90^\circ} \end{aligned}$$

De aquí, deduïm

$$\begin{cases} r \cdot s = 2 \\ \alpha + \beta = 90^\circ + k \cdot 360^\circ \end{cases}$$

Per un un altre costat, com el quadrat de uno de ellos, dividido pel un altre és $1/2$, podem escriure

$$\frac{(r_\alpha)^2}{s_\beta} = \left(\frac{1}{2}\right)_{0^\circ}$$

$$\left(\frac{r^2}{s}\right)_{2\alpha-\beta} = \left(\frac{1}{2}\right)_{0^\circ}$$

De aquí, deduïm

$$\begin{cases} \frac{r^2}{s} = \frac{1}{2} \\ 2\alpha - \beta = k \cdot 360^\circ \end{cases}$$

Per tant, hem obtingut un parell de sistemes:

$$\begin{cases} r \cdot s = 2 \\ \frac{r^2}{s} = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{i} \quad \begin{cases} \alpha + \beta = 90^\circ + k \cdot 360^\circ \\ 2\alpha - \beta = k \cdot 360^\circ \end{cases}$$

Del primer, s'obté $r = 1$ i $s = 2$, i del segon,

$$\begin{aligned} \alpha &= 30^\circ + k \cdot 120^\circ \\ \beta &= 60^\circ + k \cdot 120^\circ \end{aligned}$$

Per tant, obtenim tres solucions

r_α	s_β	
1_{30°	2_{60°	$k = 0$
1_{150°	2_{180°	$k = 1$
1_{270°	2_{300°	$k = 2$

Exercici 2.24

Troba els complexos tals que el quadrat del seu invers és l'oposat del seu conjugat.

Solució

Si z és un dels complexos que busquem, aleshores ha de complir la següent condició:

$$\left(\frac{1}{z}\right)^2 = -\bar{z}$$

Si $z = r_\alpha$, aleshores

$$\frac{1}{z} = \left(\frac{1}{r}\right)_{-\alpha} \implies \left(\frac{1}{z}\right)^2 = \left[\left(\frac{1}{r}\right)^2\right]_{-2\alpha}$$

i

$$\bar{z} = r_{-\alpha} \implies -\bar{z} = r_{-\alpha+180^\circ}$$

Per tant, expressant la condició en forma polar, tenim

$$\left[\left(\frac{1}{r}\right)^2\right]_{-2\alpha} = r_{-\alpha+180^\circ}$$

Després,

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{r}\right)^2 = r \\ -2\alpha = -\alpha + 180^\circ + k \cdot 360^\circ \end{cases}$$

De la primera equació s'obté $r = 1$, i de la segona,

$$\alpha = 180^\circ$$

Per tant,

$$z = -1$$

Exercici 2.25

Troba dos complexos del mateix mòdul, els quals arguments sumen 90° i el primer és conjugat del quadrat del segon.

Solució

Suposem que r_α i s_β són les formes polars dels complexos que volem trobar. Com són del mateix mòdul i els seus arguments sumen 90° , podem escriure

$$\begin{cases} r = s \\ \alpha + \beta = 90^\circ \end{cases}$$

Si el primer és conjugat del quadrat del segon, podem escriure

$$r_\alpha = (s^2)_{-2\beta}$$

i, per tant, s'ha de complir

$$\begin{cases} r = s^2 \\ \alpha = -2\beta + k \cdot 360^\circ \end{cases}$$

D'aquesta manera, tenim dos sistemes:

$$\begin{cases} r = s \\ r = s^2 \end{cases} \quad \text{i} \quad \begin{cases} \alpha + \beta = 90^\circ \\ \alpha = -2\beta + k \cdot 360^\circ \end{cases}$$

Del primer s'obté $r = s = 1$, i del segon,

$$\begin{aligned} \alpha &= 180^\circ \\ \beta &= -90^\circ \end{aligned}$$

Per tant, els nombres complexos són -1 i $-i$.

Exercici 2.26

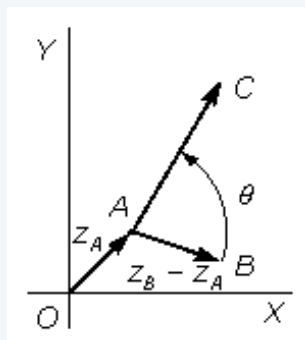
Donats dos complexos z_1 i z_2 , interpreta geomètricament la següent transformació

$$z \longmapsto z_1 + z \cdot z_2$$

sent $z \in \mathbb{C}$. Com a aplicació d'aquest resultat, calcula el vèrtex C d'un triangle equilàter ABC si sabem que $A = (1, 1)$ i $B = (4, 2)$.

Solució

Recorda que la transformació $z \mapsto z + z_0$ representa geomètricament una translació, i $z \mapsto z \cdot z_0$, la composició d'una homotècia i un gir. Com l'operació $z_1 + z \cdot z_2$ és una combinació de les dues anteriors, la transformació $z \mapsto z_1 + z \cdot z_2$ representa geomètricament la composició d'una homotècia i un gir seguida d'una translació. Per exemple, en la figura següent



es compleix

$$z_C = z_A + (z_B - z_A) \cdot r_\theta$$

sent

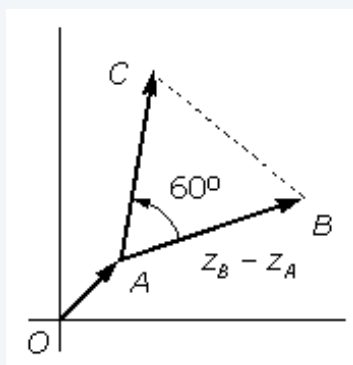
$$r = \left| \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right|$$

Considerem els complexos z_A i z_B els quals afixos són els punts $A = (1, 1)$ i $B = (4, 2)$. Aleshores, és clar que el complex $z_B - z_A$ té per mòdul la longitud del costat del triangle equilàter. A més, com tots els angles d'aquest triangle mesuren 60° , es compleix

$$z_C = z_A + (z_B - z_A) \cdot 1_{60^\circ}$$

o bé,

$$z_C = z_A + (z_B - z_A) \cdot 1_{-60^\circ}$$



Per tant, prenent la primera equació, obtenim

$$\begin{aligned}
 z_C &= 1 + i + (3 + i) \cdot (\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ) \\
 &= 1 + i + (3 + i) \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) \\
 &= 1 + i + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i + \frac{3\sqrt{3}}{2}i + \frac{\sqrt{3}}{2}i^2 \\
 &= \frac{5 - \sqrt{3}}{2} + \frac{3 + 3\sqrt{3}}{2}i
 \end{aligned}$$

i, com a conseqüència, les coordenades del punt C són

$$C = \left(\frac{5 - \sqrt{3}}{2}, \frac{3 + 3\sqrt{3}}{2} \right)$$

De la mateixa manera, prenent la segona equació, s'obté l'altra solució

$$C' = \left(\frac{5 + \sqrt{3}}{2}, \frac{3 - 3\sqrt{3}}{2} \right)$$

Exercici 2.27

Determina les coordenades dels vèrtexs C i D del quadrat $ABCD$, si $A = (1, 3)$ i $B = (5, 2)$.

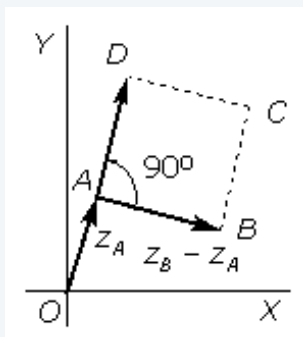
Solució

Suposem que z_A , z_B , z_C i z_D són els complexos els quals afixos són els vèrtexs del quadrat. Com que es tracta d'un quadrat, els complexos $z_B - z_A$ i $z_D - z_A$ tenen el mateix mòdul i l'angle que determinen els seus vectors associats és recte. Per tant, es compleix

$$z_D = z_A + (z_B - z_A) \cdot 1_{90^\circ}$$

o bé,

$$z_D = z_A + (z_B - z_A) \cdot 1_{-90^\circ}$$



Prenent la primera equació, obtenim

$$z_D = 1 + 3i + (4 - i) \cdot i = 2 + 7i$$

i, per tant, el punt $D = (2, 7)$. Per determinar C , observem que també es compleix

$$z_C = z_B + (z_A - z_B) \cdot 1_{-90^\circ}$$

Després,

$$z_C = 5 + 2i + (-4 + i) \cdot (-i) = 6 + 6i$$

i, per tant, el punt $C = (6, 6)$.

De la mateixa manera, prenent la segona equació, s'obté $D = (0, -1)$ i després $C = (4, -2)$.

Exercici 2.28

Donats els nombres complexos $z_1 = -1 + i$ i $z = -2 + 3i$, calcula dos nombres complexos z_2, z_3 tals que els afixos de z_1, z_2 i z_3 formen un triangle equilàter de centre l'afix de z .

Solució

Sabem que els afixos de les arrels cúbiques d'un nombre complex w són els vèrtexs d'un triangle equilàter inscrit en una circumferència de centre l'origen i radi $\sqrt[3]{|w|}$. Com que el nostre triangle ha d'estar centrat en el afix de z , haurem d'efectuar una translació de vector associat a z . D'aquesta manera, tenim

$$z_i = z + \sqrt[3]{w} \quad (i = 1, 2, 3)$$

Com una de les arrels cúbiques de w és $z_1 - z$, podem obtenir les arrels cúbiques de w multiplicant $z_1 - z$ per les arrels cúbiques de la unitat (vegeu l'exercici anterior). Les arrels cúbiques de la unitat són

$$\begin{aligned} u_1 &= 1 \\ u_2 &= \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \\ u_3 &= \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Per tant, les arrels cúbiques de w són

$$\begin{aligned} w_1 &= 1 - 2i \\ w_2 &= (1 - 2i) \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -\frac{1}{2} + \sqrt{3} + i \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \right) \\ w_3 &= (1 - 2i) \left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -\frac{1}{2} - \sqrt{3} + i \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \right) \end{aligned}$$

i, en conseqüència, els nombres complexos que busquem són

$$\begin{aligned} z_1 &= z + w_1 = -1 + i \\ z_2 &= z + w_2 = -\frac{5}{2} + \sqrt{3} + i \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 4 \right) \\ z_3 &= z + w_3 = -\frac{5}{2} - \sqrt{3} + i \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + 4 \right) \end{aligned}$$

3 Exercicis proposats

1. Calcula les operacions següents amb complexos:

a)

$$\frac{(2-3i)(1-i)}{(-2+i)(-1-3i)} - \frac{i(3+i)}{2-3i}$$

b)

$$i^{327} - \frac{1}{i^{26}} + \frac{i^{125}}{1-i}$$

c)

$$\left(\frac{i^7 - 1}{i^{29} + 1} \right)^4$$

Indicació: (a) $\frac{16}{65} - \frac{41}{65}i$; (b) $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$; (c) 1

2. Resol en $\mathbb{C}$ les equacions següents amb la incògnita z :

a)

$$\frac{z}{1+2i} + 3 + 2i = 2 + 5i$$

b)

$$(4+3i)z + 7 - 10i = 2 + 3i + (1-2i)z$$

Indicació: (a) $z = -7 + i$; (b) $z = \frac{25}{17} + \frac{32}{17}i$

3. Resol en $\mathbb{C}$ els següents sistemes:

a)

$$\begin{cases} (1-i)u + iv = 1 + 3i \\ (2+i)u + (1+i)v = 1 - 3i \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} (3+i)u + (3-i)v = -4 \\ (2+3i)u - (2-3i)v = 4 \end{cases}$$

Indicació: (a)

$$\begin{cases} u = -\frac{21}{13} - \frac{1}{13}i \\ v = \frac{19}{13} - \frac{35}{13}i \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} u = \frac{2}{9} + \frac{4}{9}i \\ v = -\frac{10}{9} - \frac{8}{9}i \end{cases}$$

4. Calcula la part real i la part imaginària del complex

$$z = i + \frac{(1-i)^2}{3+i} - \frac{(1-i)^3}{(2+i)^2}$$

Indicació: $\operatorname{Re}(z) = \frac{9}{25}$ i $\operatorname{Im}(z) = \frac{8}{25}$

5. Troba els nombres reals a i b perquè

$$(a+bi)(2-3i) + (a-bi)(1-i) = 2+3i$$

Indicació: $a = -\frac{4}{11}$, $b = \frac{17}{11}$

6. Determina $a \in \mathbb{R}$ perquè $(1+ai)(2-3i)$ sigui un nombre real.

Indicació: $a = \frac{3}{2}$

7. Determina $a \in \mathbb{R}$ perquè $(1-3i)(a-i) - (1+2i)(1-ai)$ sigui un complex imaginari pur.

Indicació: $a = -4$

8. Escriu una equació de segon grau amb coeficients reals de manera que una de les seves solucions sigui $3-2i$.

Indicació: $x^2 - 6x + 13 = 0$

9. Escriu una equació de segon grau que tingui com a solucions $3+2i$ i $4+i$.

Indicació: $x^2 - (7+3i)x + 10 + 11i = 0$

10. Expressa en forma polar els complexos següents:

$$\begin{array}{lll} a) & -2 & b) & -3i & c) & i^{1237} \\ d) & -2 - 2\sqrt{3}i & e) & \cos 35^\circ + i \cos 55^\circ & f) & 4(-\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ) \end{array}$$

Indicació: (a) 2π ; (b) $3\frac{3\pi}{2}$; (c) $1\frac{\pi}{2}$; (d) $4\frac{4\pi}{3}$; (e) 135° ; (f) 4_{165°

11. Si z és un complex unitari d'argument α , escriu en forma trigonomètrica els complexos

$$a) \quad z \quad b) \quad z^{-1} \quad c) \quad z^3 \quad d) \quad z^2 + \frac{1}{z^2}$$

Indicació: (a) $\cos \alpha + i \sin \alpha$; (b) $\cos \alpha - i \sin \alpha$; (c) $\cos 3\alpha + i \sin 3\alpha$; (d) $2 \cos 2\alpha$

12. Mitjançant la fórmula de Moivre, expressa $\sin 4\alpha$ i $\cos 4\alpha$ en funció de $\sin \alpha$ i $\cos \alpha$.

Indicació: $\sin 4\alpha = \cos^4 \alpha - 6 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha$ i $\cos 4\alpha = 4 \cos^3 \alpha \sin \alpha - 4 \cos \alpha \sin^3 \alpha$

13. Per què valors de $n \in \mathbb{N}$, $(1+i)^n$ és imaginari.

Indicació: $n = 4k - 2$, sent $k \in \mathbb{N}$

14. Calcula el mòdul i l'argument dels complexos següents:

a)

$$z_1 = \frac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$$

b)

$$z_2 = 3 \left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right)^{10}$$

Indicació: (a) $|z_1| = 2$ i $\arg(z_1) = 0$; (b) $|z_2| = 3$ i $\arg(z_2) = \pi$

15. Calcula la suma dels cent primers sumands de la suma:

$$(-1 + 2i) + (1 + i) + 3 + (5 - i) + (7 - 2i) + \dots$$

Indicació: $9800 + 4800i$

16. Calcula les operacions següents amb complexos i expressa el resultat en forma binòmica:

a)

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \right)^{21}$$

b)

$$\left(\frac{3}{\sqrt{3_{30^\circ}}} \right)^6$$

c)

$$\left[\frac{\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)}{2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)} \right]^{12}$$

Indicació: (a) i ; (b) $-6\sqrt{3} - 6\sqrt{3}i$; (c) $\frac{1}{729}$

17. Escribe en forma trigonomètrica l'expressió següent

$$\frac{(\cos 5x + i \sin 5x)^6 \cdot (\cos 3x - i \sin 3x)^7}{(\cos x + i \sin x)^4 \cdot (\cos 2x - i \sin 2x)^2}$$

Indicació: $\cos 9x + i \sin 9x$

18. Calcula el valor de x perquè el producte $1_{30^\circ} \cdot 5_x$ sigui: (a) un nombre real positiu; (b) un nombre real negatiu; (c) un imaginari pur positiu; (d) un imaginari pur negatiu.

Indicació: (a) $x = -30^\circ + k \cdot 360^\circ$; (b) $x = 150^\circ + k \cdot 360^\circ$; (c) $x = 60^\circ + k \cdot 360^\circ$; (d) $x = -60^\circ + k \cdot 360^\circ$, sent $k \in \mathbb{Z}$

19. Troba dos nombres complexos sabent que el seu quocient és 3, els seus arguments sumen $\frac{\pi}{3}$ i els seus mòduls sumen 8.

Indicació: $3(\sqrt{3} + i)$ i $\sqrt{3} + i$

20. Calcula

$$\sqrt[4]{16 (\cos 80^\circ + i \sin 80^\circ)}$$

Indicació:

$$\sqrt[4]{16_{80^\circ}} = \begin{cases} 2_{20^\circ} \\ 2_{110^\circ} \\ 2_{200^\circ} \\ 2_{290^\circ} \end{cases}$$

21. Calcula les arrels cinques de la unitat imaginària i representa-les gràficament.

Indicació: Calcula les cinc arrels com a arrels cinques de $i = 1_{90^\circ}$ i representa-les separades per angles de 72° .

22. Resol en $\mathbb{C}$ les equacions següents:

a)

$$z^3 - i = 1$$

b)

$$z^3 - 2z^2 + 9z - 18 = 0$$

c)

$$z^6 - 2z^3 + 2 = 0$$

d)

$$z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0$$

e)

$$z^2 - (10i - 5)z - 14i - 48 = 0$$

Indicació: (a) $z_1 = (\sqrt[6]{2})_{\frac{\pi}{12}}$, $z_2 = (\sqrt[6]{2})_{\frac{9\pi}{12}}$, $z_3 = (\sqrt[6]{2})_{\frac{17\pi}{12}}$; (b) $z_1 = 2$, $z_2 = 3i$, $z_3 = -3i$; (c) $z_1 = (\sqrt[6]{2})_{15^\circ}$, $z_2 = (\sqrt[6]{2})_{135^\circ}$, $z_3 = (\sqrt[6]{2})_{255^\circ}$, $z_4 = (\sqrt[6]{2})_{-45^\circ}$, $z_5 = (\sqrt[6]{2})_{105^\circ}$, $z_6 = (\sqrt[6]{2})_{225^\circ}$; (d) $z_1 = 1_{36^\circ}$, $z_2 = 1_{108^\circ}$, $z_3 = 1_{252^\circ}$, $z_4 = 1_{324^\circ}$; (e) $z_1 = -8 + 6i$, $z_2 = 3 + 4i$

23. Troba dos complexos conjugats tals que la seva diferència és $6i$ i el seu quocient és imaginari pur.

Indicació: $3 + 3i, 3 - 3i$ o bé $-3 + 3i, -3 - 3i$

24. Troba dos complexos tals que un és imaginari pur, el mòdul de l'altre és $\frac{\sqrt{2}}{2}$ i la seva suma és igual al seu producte.

Indicació: $i, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ o bé $-i, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

25. Troba dos complexos tals que el seu producte és $4i$ i el seu quocient és $2\frac{\pi}{6}$.

Indicació: $\sqrt{2} + \sqrt{6}i$ i $\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

26. Troba els vèrtexs d'un hexàgon regular de centre l'origen, si se sap que un d'ells és $(0, 1)$.

Indicació: $(0, 1), \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right), (0, -1), \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

27. D'un triangle equilàter es coneixen un vèrtex $(0, 2)$ i el baricentre $(0, 0)$. Troba els altres dos vèrtexs.

Indicació: $(-\sqrt{3}, -1)$ i $(\sqrt{3}, -1)$

28. Un rombe els quals costats formen un angle de 45° té dos vèrtexs consecutius en $(0, 0)$ i $(1, 1)$. Troba els altres dos vèrtexs si se sap que estan en el primer quadrant.

Indicació: Dos solucions: $(1, 1 + \sqrt{2})$, $(0, \sqrt{2})$ i $(1 + \sqrt{2}, 1)$, $(\sqrt{2}, 0)$

29. Donats els complexos $u = 1 + i$ i $v = 4 + 2i$, troba el complex z que els afixos de u, v, z són els vèrtexs d'un triangle equilàter.

Indicació: Dos solucions: $z = \frac{1}{2}(5 - \sqrt{3}) + \frac{1}{2}(3\sqrt{3} + 3)i$ i $z = \frac{1}{2}(5 + \sqrt{3}) + \frac{1}{2}(3 - 3\sqrt{3})i$

30. Troba els vèrtexs d'un quadrat del qual se sap que el centre és $(3, 3)$ i el punt mitjà d'un costat és $(4, 1)$.

Indicació: $(2, 0)$, $(6, 2)$, $(4, 6)$, $(0, 4)$

31. Quina transformació geomètrica representa l'aplicació de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$ definida per $z' = 2 + iz$?

Indicació: És un gir d'angle recte i centre punt $(1, 1)$

$$z - z_C = (z - z_C) \cdot 1_{\frac{\pi}{2}}$$

amb $C = (1, 1)$.

4 Tests interactius

Test 1. Forma binòmica, conjugat i pla complex

Instruccions. Marca una sola resposta per pregunta. En acabar, prem el botó **Corregir**. El camp **Nota** mostrarà el resultat.

Corregir Netejar **Nota:**

1. Quina propietat defineix la unitat imaginària i ?

- (a) $i = 1$
- (b) $i^2 = -1$
- (c) $i^2 = 1$
- (d) $i = -1$

Correcció:

2. Quina és la forma binòmica general d'un nombre complex?

- (a) $a + b$
- (b) $a + bi$, amb $a, b \in \mathbb{R}$
- (c) $ab + i$
- (d) $a/b + i$

Correcció:

3. Si $z = 5 - 2i$, quina és la part imaginària de z ?

- (a) 5
- (b) $-2i$
- (c) -2
- (d) 2

Correcció:

4. Quin és el conjugat de $z = -3 + 4i$?

- (a) $3 - 4i$
- (b) $-3 - 4i$
- (c) $3 + 4i$
- (d) $4 - 3i$

Correcció:

5. Quant val $z\bar{z}$ si $z = a + bi$?

- (a) $a + b$
- (b) $a^2 - b^2$
- (c) $2ab$
- (d) $a^2 + b^2$

Correcció:

6. Quin dels nombres següents és un imaginari pur?

- (a) $3 + 2i$
- (b) $-7i$
- (c) 4
- (d) 7

Correcció:

7. Quina operació permet dividir per $c + di \neq 0$ en forma binòmica?

- (a) Multiplicar numerador i denominador per $c - di$
- (b) Multiplicar només el numerador per $c + di$
- (c) Canviar i per -1
- (d) Sumar el conjugat al denominador

Correcció:

8. Si $z = 3 + 4i$, quin és $|z|$?

- (a) 7
- (b) 5
- (c) 25

(d) 1

Correcció:9. Els afixos de z i $\bar{z}$ són simètrics respecte de:

- (a) l'eix imaginari
- (b) l'origen
- (c) l'eix real
- (d) la recta $y = x$

Correcció:10. La igualtat de dos complexos $a + bi = c + di$ equival a:

- (a) $a = d$ i $b = c$
- (b) $a + b = c + d$
- (c) $a = c$ i $b = d$
- (d) $ab = cd$

Correcció:

Test 2. Forma polar, potències i arrels

Instruccions. Marca una sola resposta per pregunta. En acabar, prem el botó **Corregir**. El camp **Nota** mostrarà el resultat.

Corregir Netejar **Nota:**

1. Si $z = r_\alpha$ i $w = s_\beta$, quin és el producte zw en forma polar?

- (a) $rs_{\alpha+\beta}$
- (b) $(r + s)_{\alpha+\beta}$
- (c) $rs_{\alpha-\beta}$
- (d) $\frac{r}{s}\alpha+\beta$

Correcció:2. Si $z = r_\alpha$ i $w = s_\beta$ amb $w \neq 0$, quin és z/w ?

- (a) $\frac{r}{s}\alpha+\beta$
- (b) $\frac{r}{s}\alpha-\beta$

(c) $(r - s)_{\alpha - \beta}$

(d) $rs_{\alpha/\beta}$

Correcció:

3. La fórmula de De Moivre afirma que:

(a) $[r(\cos \alpha + i \sin \alpha)]^n = r^n(\cos n\alpha + i \sin n\alpha)$

(b) $z^n = nz$

(c) $|z^n| = n|z|$

(d) $\arg(z^n) = \arg z/n$

Correcció:

4. Quantes arrels cinques té un complex no nul?

(a) Una

(b) Dues

(c) Cinc

(d) Infinites

Correcció:

5. Els arguments de dues arrels n -èsimes consecutives d'un complex difereixen en:

(a) π/n

(b) $2\pi/n$

(c) $n\pi$

(d) $360n^\circ$

Correcció:

6. Quina és la forma trigonomètrica de r_α ?

(a) $r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$

(b) $r + i\alpha$

(c) $\alpha(\cos r + i \sin r)$

(d) $r \cos \alpha + i \sin r$

Correcció:

7. En forma polar, la suma de dos complexos es calcula:

- (a) sumant mòduls i arguments
- (b) restant arguments
- (c) passant normalment a forma binòmica
- (d) multiplicant mòduls

Correcció:

8. Si $z = 2_{30^\circ}$, aleshores z^3 és:

- (a) 8_{90°
- (b) 6_{90°
- (c) 8_{10°
- (d) 2_{90°

Correcció:

9. Les arrels n -èsimes d'un complex no nul tenen afixos situats:

- (a) sobre una recta
- (b) en els vèrtexs d'un polígon regular
- (c) sempre sobre l'eix real
- (d) sempre en el primer quadrant

Correcció:

10. Si $z = r_\alpha$, quin és el mòdul de z^{-1} ?

- (a) r
- (b) $-r$
- (c) $1/r$
- (d) r^2

Correcció:

Test 3. Test global de nombres complexos

Instruccions. Marca una sola resposta per pregunta. En acabar, prem el botó **Corregir**. El camp **Nota** mostrarà el resultat.

Corregir Netejar **Nota:**

1. Considerem els complexos següents:

$$\begin{aligned}z_1 &= 2 - 3i \\z_2 &= -5 + i \\z_3 &= -1 - i\end{aligned}$$

aleshores:

(a)

$$z_1 \cdot \overline{z_3} + 5z_2 = 24 + 10i$$

(b)

$$\frac{z_2}{z_3} + \overline{z_1} = 4i$$

(c)

$$z_1 + z_2^2 + z_3^3 = 28 - 15i$$

(d) Cap de les anteriors

Correcció:

2. El quocient

$$\frac{3 - 2ai}{4 + 3i}$$

és:

(a) un nombre real si $a = 2$

(b) un imaginari pur si $a = \frac{9}{8}$

(c) és $3 + 3i$ si $a = -\frac{21}{2}$

(d) Cap de les anteriors

Correcció:

3. Quina de les afirmacions següents és falsa?

(a) $x = \frac{12}{5} - \frac{31}{5}i, y = \frac{7}{5} + \frac{9}{5}i$ és solució del sistema

$$\begin{cases} 2x + 2(1 + i)y = 4 - 6i \\ x + 3iy = -3 - 2i \end{cases}$$

(b) $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 5$ és un polinomi que té les arrels i i $1 - i$

(c)

$$\frac{i^{316} - i^{205}}{i^{30} + i^{187}} = i$$

(d) $\sqrt{2} \pm \sqrt{3}i$ són les solucions complexes de l'equació

$$x^2 - 2\sqrt{2}x + 5 = 0$$

Correcció:

4. Quina de les afirmacions següents és correcta?

- (a) L'expressió en forma polar del complex conjugat de $2 + 2\sqrt{3}i$ és $4\frac{\pi}{6}$
- (b) L'expressió en forma trigonomètrica de l'invers del complex $-3 + \sqrt{3}i$ és

$$\frac{\sqrt{3}}{6} (\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ)$$

- (c) Si $z = 4\frac{\pi}{4}$, aleshores l'expressió en forma binòmica del complex $-\bar{z}$ és

$$-2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$$

- (d) Cap de les anteriors

Correcció:

5. Quina de les afirmacions següents és falsa?

- (a) Perquè

$$\frac{a + 2i}{3 + bi} = (\sqrt{2})_{\frac{\pi}{4}}$$

és $a = 4$ i $b = -1$

- (b) L'equació

$$x^2 - 3x + 9 = 0$$

té com solucions $3\frac{\pi}{3}$ i $3(\cos 300^\circ + i \sin 300^\circ)$

- (c) Si

$$z = \left(\cos \frac{\pi}{13} + i \sin \frac{12\pi}{13} \right)^{13}$$

aleshores $|z| = 1$ i $\arg z = \pi$

- (d) Si z és un complex no nul, aleshores es compleix

$$\left| \frac{z^{-1}}{\bar{z}} \right| = \frac{1}{|z|^2} \quad \text{i} \quad \arg \left(\frac{z^{-1}}{\bar{z}} \right) = 2 \arg z$$

Correcció:

6. Considerem els complexos següents

$$z_1 = 2(\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ)$$

$$z_2 = 3\frac{\pi}{4}$$

$$z_3 = -1 - i$$

aleshores, quin dels següents resultats és fals?

- (a)

$$z_1^2 \cdot z_2^4 = 162\sqrt{3} - 162i$$

(b)

$$z_1^4 + z_2^2 + z_3^3 = 10 + (7 + 8\sqrt{3})i$$

(c)

$$\left(\frac{z_1}{z_3}\right)^4 \cdot z_2^2 = 18\sqrt{3} - 18i$$

(d)

$$\left(\frac{z_2 \cdot z_3}{z_1}\right)^6 = \frac{729}{8}i$$

Correcció:

7. Se sap que l'equació

$$z^3 + az^2 + 6(1 - i)z + b = 0$$

amb $a, b \in \mathbb{R}$ té la solució $1 + i$, aleshores(a) $a = -1, b = -10$ i les altres dues solucions de l'equació són $1 + 2i$ i $-1 - 3i$ (b) $a = 1, b = -10$ i les altres dues solucions de l'equació són $1 - i$ i -1 (c) $a = 1, b = 10$ i les altres dues solucions de l'equació són $1 - i$ i 1 (d) $a = -1, b = 10$ i les altres dues solucions de l'equació són $1 - i$ i 2 **Correcció:**

8. Quina de les igualtats següents és certa?

(a)

$$\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i} = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$$

(b)

$$\sqrt[3]{\sqrt{3} + i} = \begin{cases} \left(\sqrt[3]{2}\right)^{30^\circ} \\ \left(\sqrt[3]{2}\right)^{150^\circ} \\ \left(\sqrt[3]{2}\right)^{270^\circ} \end{cases}$$

(c)

$$\sqrt[3]{\frac{3_{30^\circ}}{\left(\frac{1}{9}\right)_{60^\circ}}} = \begin{cases} 3_{110^\circ} \\ 3_{230^\circ} \\ 3_{350^\circ} \end{cases}$$

(d) Cap de les anteriors

Correcció:

9. Quin dels complexos següents satisfà la condició que el cub del seu conjugat coincideix amb el seu oposat?

- (a) $\cos 30^\circ - i \sin 30^\circ$
- (b) $\cos 90^\circ - i \sin 90^\circ$
- (c) $\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ$
- (d) $\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ$

Correcció:

10. Quina de les afirmacions següents és falsa?

- (a) Si un triangle té els seus vèrtexs en els punts $(2, 0)$, $(8, 1)$ i $(4, 5)$, en girar-lo un angle recte al voltant de l'origen s'obté un altre triangle de vèrtexs $(0, 2)$, $(-1, 8)$ i $(-5, 4)$
- (b) Si $(2, 7)$ i $(6, 5)$ són dos vèrtexs oposats d'un quadrat, les coordenades dels altres dos vèrtexs són $(3, 4)$ i $(8, 5)$
- (c) Si $(1, 1)$ és un vèrtex d'un triangle equilàter el qual baricentre és en $(0, 3)$, aleshores les coordenades d'un altre dels seus vèrtexs són

$$\left(-\frac{1}{2} + \sqrt{3}, 4 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

- (d) Si $(0, 1)$ és un vèrtex d'un hexàgon regular centrat en el origen, aleshores les coordenades d'un altre dels seus vèrtexs són

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Correcció: