Conjunts, Relacions i Aplicacions

Miquel Àngel Perelló

9 de setembre de 2025

Índex

Prefaci

Aquests apunts de Conjunts, Relacions i Aplicacions han estat elaborats amb la finalitat de servir de guia i suport als estudiants de batxillerat que volen aprofundir en els fonaments de la teoria de conjunts i les seves aplicacions en matemàtiques. El seu objectiu principal és oferir una base sòlida per comprendre i aplicar els conceptes bàsics de conjunts, relacions i funcions, eines essencials per a qualsevol estudiant que vulgui enfocar-se en disciplines científiques o tecnològiques.

El text s'estructura de manera progressiva, començant pels conceptes més bàsics de conjunts i les seves operacions, passant per les relacions binàries i les relacions d'equivalència i d'ordre, fins a arribar a les aplicacions (funcions) i les seves propietats. Cada capítol inclou exemples pràctics i exercicis resolts per facilitar la comprensió i l'aprenentatge.

Es recomana als estudiants que abans de començar amb aquesta unitat, facin una lectura compresiva dels apunts "Lògica, Raonament i Demostració", ja que els conceptes i les tècniques que s'hi desenvolupen són fonamentals per a una correcta assimilació dels continguts que aquí es presenten.

Aquests apunts no només pretenen ser un recurs per a l'estudi, sinó també una eina per a la reflexió i el desenvolupament del raonament lògic i matemàtic. Esperem que resultin útils i enriquidors per a tots els que s'apropen a aquests temes.

Introducció

La teoria de conjunts és la base sobre la qual es construeixen les matemàtiques modernes. Des de les operacions més simples fins als conceptes més abstractes, els conjunts són presents en totes les branques del saber matemàtic. En aquesta introducció, ens aproparem a la noció intuïtiva de conjunt, entès com una col·lecció d'objectes, i començarem a familiaritzar-nos amb el llenguatge i les notacions bàsiques que ens acompanyaran al llarg de tot el text.

Els objectius d'aquesta unitat són:

- Comprendre les nocions bàsiques de conjunt, element i pertinença.
- Aprendre a definir conjunts per extensió i per comprensió.
- Entendre les relacions d'igualtat i inclusió entre conjunts.
- Dominar les operacions bàsiques amb conjunts: unió, intersecció, diferència i complementari.
- Introduir el concepte de parell ordenat i producte cartesià.
- Estudiar les relacions entre conjunts, especialment les relacions binàries, d'equivalència i d'ordre.
- Definir el concepte d'aplicació (funció) i les seves propietats: injectivitat, exhaustivitat i bijectivitat.
- Aprendre a calcular el cardinal d'un conjunt i entendre les seves propietats bàsiques.

A mesura que avancem, descobrirem com aquests conceptes no són només abstractes, sinó que tenen aplicacions pràctiques en la resolució de problemes i en la formalització de molts aspectes de les matemàtiques i d'altres disciplines.

Esperem que aquest viatge pels fonaments de la teoria de conjunts sigui clar, estimulant i, sobretot, útil per a la teva formació matemàtica.

Capítol 1

Teoria

1.1 Conjunts

Partint de la noció intuïtiva de conjunt, en aquesta secció desenvoluparem les propietats bàsiques dels conjunts. L'objectiu d'aquesta breu exposició serà aconseguir que et familiaritzis amb la terminologia i les notacions que s'introdueixen i que s'empraran en totes les altres unitats didàctiques. Es recomanable abans de seguir fer abans una lectura compresiva dels apunts "Lògica, Raonament i Demostració".

1.1.1 Les nocions d'element, conjunt i pertinença

Una caixa de boles, un raïm, o un àlbum de fotos són tots exemples de conjunts de coses o col · leccions d'objectes. La noció de conjunt és fonamental en totes les branques de les matemàtiques. Per exemple:

- En geometria plana es diu circumferència el conjunt de punts que són equidistants d'un punt fix donat.
- En àlgebra es parla del conjunt dels nombres parells que està format per tots els enters que són divisibles per 2.
- En càlcul s'anomena domini d'una funció real de variable real el conjunt de nombres reals pels quals hi ha ben definida la seva imatge.

Emprarem la paraula **conjunt** com a sinònim de col · lecció d'objectes. Els objectes que formen un conjunt es diuen **elements** del conjunt. D'aquesta manera, direm que un conjunt està format per elements o que uns determinats elements formen un conjunt.

Ara bé, un conjunt estarà ben definit si és possible donar un criteri que permeti decidir si un element donat qualsevol pertany o no al conjunt. Per exemple, les boles vermelles d'aquesta caixa o les fotos d'en Miquel en aquest àlbum són conjunts ben definits. En el primer cas, una bola de la caixa és del conjunt si és vermella i, en el segon, una foto és del conjunt si en ella apareix en Miquel. Observa ambdós casos, però que abans de definir els conjunts anteriors, tenim els elements, o sigui les boles de la caixa i les fotos de l'àlbum.

Si ara simbolitzem per U una determinada col · lecció d'objectes, llavors diem que uns determinats objectes d'U formen un conjunt A i si x simbolitza un element d'A, aleshores direm que l'element x **pertany** al conjunt A i escriurem

$$x \in A.$$

Si x és un element d'U, però no és un element de A, direm que l'element x no pertany al conjunt A i escriurem

$$x \notin A.$$

El símbol matemàtic $\in$ s'interpreta com la relació de pertinença que s'estableix entre elements i conjunts. Per consegüent, un conjunt està determinat per una relació de pertinença a ell. Tot i això, com veurem més endavant (quan parlem del conjunt de parts d'un conjunt donat), un element pot ser alhora un conjunt i un conjunt pot ser un element d'un altre conjunt.

Per cursos anteriors, tenim coneixement de l'existència d'alguns conjunts numèrics l'ús dels quals és molt freqüent en les matemàtiques i que es designen amb símbols especials. Així, tenim

Conjunts numèrics	Símbol
Naturals	$\mathbb{N}$
Enters	$\mathbb{Z}$
Racionals	$\mathbb{Q}$
Reals	$\mathbb{R}$
Complexos	$\mathbb{C}$

Exemple 1.1. Pel coneixement que d'ells ja tenim, podem escriure les següents relacions:

$$-2 \notin \mathbb{N} \qquad -3 \in \mathbb{Z} \qquad \sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \qquad \sqrt[3]{5} \in \mathbb{R}$$

$$1 \in \mathbb{N} \qquad \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z} \qquad 2.3555... \in \mathbb{Q} \qquad 1 + i \notin \mathbb{R}$$

1.1.2 Formes de definir conjunts

Direm que un conjunt està determinat per **extensió** si donem una llista de tots els seus elements. En tal cas, escriurem als elements entre claus separats per comes. Per exemple, el conjunt A format pels números

$$1, 2, 3$$

l'escriurem per

$$A = \{1, 2, 3\}.$$

Un conjunt està determinat per **comprensió** si donem una condició que satisfan tots els seus elements. Així, el conjunt anterior el podem definir per comprensió dient que A és el conjunt format pels nombres enters positius menors que quatre. En aquest últim cas escriurem

$$A = \{x \in \mathbb{Z} : 0 < x < 4\}$$

i es llegeix com "A és el conjunt de nombres enters que són majors que 0 i menors que 4". En general, si $P(x)$ expressa una condició o propietat que depèn d'una variable x, llavors

$$B = \{x \in U : P(x)\}$$

designa el conjunt dels elements d'U que satisfan la propietat $P(x)$.

Pot ocórrer que per a una certa propietat no hi hagi cap element d'un conjunt atès que la satisfaci. Per aquesta raó, admetem l'existència d'un conjunt que no conté elements i al qual denominem **conjunt buit**, designant-ho pel símbol $\emptyset$. D'aquesta manera, per a tot x la relació

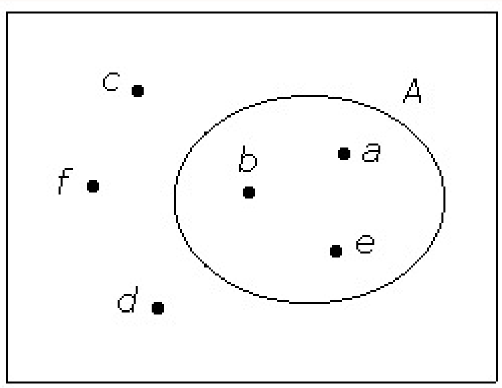
$$x \in \emptyset$$

és sempre falsa, i

$$x \notin \emptyset$$

és sempre vertadera.

És instructiu representar gràficament un conjunt mitjançant una regió tancada del pla de manera que tots els elements del conjunt estiguin tancats en aquesta regió. Es diuen **diagrames de Venn** i es construeixen com s'indica en el següent gràfic, on hem representat el conjunt $A = \{a, b, e\}$.



Observació 1.1. Observa que no hem definit els conceptes de conjunt i element. En el seu lloc, hem intentat donar una idea intuïtiva clara de totes dues nocions. En cursos més avançats es pot veure que en la construcció axiomàtica d'una teoria de conjunts, els termes "conjunt" i "pertinença" no es defineixen i s'empren sense explicar el seu significat. Un conjunt serà qualsevol cosa que satisfaci els axiomes de la teoria. D'aquesta manera, no hi ha dubte que la intuïció sobre la qual es basa la teva noció de conjunt pot estar equivocada, però del que es tracta no és tant de saber què són els conjunts sinó que podem fer amb ells correctament. Això últim és el que volem fer aquí.

Observació 1.2. Podria semblar natural admetre que tota condició $P(x)$ defineix un conjunt

$$\{x : x \text{ compleix } P(x)\}, \tag{1.1.1}$$

però, d'aquesta manera, resulta que hi ha condicions "rares" que donen lloc a "conjunts" contradictoris sobre els quals no és possible raonar. Per exemple , si considerem la condició $x \notin x$ (tots els conjunts que no són elements de si mateixos) i denotem per B al "conjunt" d'elements que satisfan aquesta condició, és a dir,

$$B = \{x : x \notin x\}$$

llavors es compleix

$$(\forall x)\,(x \in B \Longleftrightarrow x \notin x)$$

i, en particular, també es compleix

$$B \in B \Longleftrightarrow B \notin B$$

el que, evidentment, constitueix una contradicció. Per a evitar aquests absurds, és preferible limitar la condició als elements d'algun conjunt ja conegut U. Per aquest motiu hem escrit

$$\{x \in U : x \text{ compleix } P(x)\}$$

en lloc de (1.1.1).

1.1.3 Igualtat i inclusió entre conjunts

Direm que dos conjunts A i B són **iguals** si contenen els mateixos elements, és a dir, si per a cada x, $x \in A$ equival a $x \in B$. En símbols

$$(\forall x)\,(x \in A \Longleftrightarrow x \in B)$$

i es llegeix "per a tot x, x és de A si i només si x és de B". Si els conjunts A i B són iguals, escriurem

$$A = B$$

i la seva negació per a

$$A \neq B.$$

El símbol matemàtic $=$ s'interpreta com la relació d'igualtat que s'estableix entre conjunts. A partir de la definició, és immediat comprovar que aquesta relació satisfà les següents propietats:

1. Per a tot conjunt A, $A = A$.

   Demostració: Sabem que $x \in A \Longleftrightarrow x \in A$ és una equivalència lògica. Com x és un element arbitrari d'A, aleshores es compleix $(\forall x)\,(x \in A \Longleftrightarrow x \in A)$ i, com a conseqüència, $A = A$. ■

2. Donats dos conjunts A i B, si $A = B$ llavors $B = A$.

   Demostració: Sabem que per a tot x, es té que $x \in A \longleftrightarrow x \in B$ és equivalent a $x \in B \longleftrightarrow x \in A$ i, per tant, si $A = B$, llavors $B = A$. ■

3. Donats tres conjunts A, B i C, si $A = B$ i $B = C$, llavors $A = C$.

   Demostració: Sabem que per a tot x, es té que $x \in A \longleftrightarrow x \in B$ i $x \in B \longleftrightarrow x \in C$. Llavors, per la propietat transitiva del bicondicional es té $x \in A \longleftrightarrow x \in C$ i, per tant, si $A = B$ i $B = C$, llavors $A = C$. ■

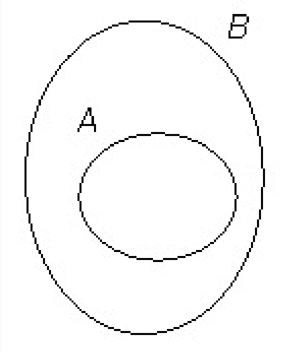
Si A i B són dos conjunts tals que tot element d'A és també un element de B, és a dir,

$$(\forall x)\,(x \in A \Longrightarrow x \in B)\,,$$

llavors es diu que A és un **subconjunt** de B o que A està **inclòs** en B i se simbolitza per a

$$A \subset B \qquad \text{o} \qquad B \supset A.$$

Mitjançant diagrames de Venn, representem aquest fet així



Si $A \subset B$ i $A \neq B$ es diu que A és un **subconjunt propi** de B. El símbol matemàtic $\subset$ s'interpreta com la relació d'inclusió que s'estableix entre conjunts; en particular, simbolitzem per $A \subsetneq B$ el fet que A és un subconjunt propi de B. A partir de la definició i regles de deducció lògica, és immediat comprovar que aquesta relació satisfà les següents propietats:

1. Per a tot conjunt A, $A \subset A$.
2. Donats dos conjunts A i B, si $A \subset B$ i $A \supset B$, llavors $A = B$.
3. Donats tres conjunts A, B i C, si $A \subset B$ i $B \subset C$, llavors $A \subset C$.

Exemple 1.2. Observa que es compleixen les següents relacions:

- $\emptyset \subset A$
- $\{1\} \subset \{1, 2, 3\}$
- $\{2, 4\} \subset \{x \in \mathbb{N} : x \text{ és parell}\}$
- $\{x \in \mathbb{Z} : 0 < x < 4\} \subsetneq \{x \in \mathbb{Z} : x^2 - 3x + 2 = 0\}$

1.1.4 Operacions amb conjunts

En aquest apartat veurem com podem construir nous conjunts a partir d'uns altres ja donats. Suposem que existeix un conjunt U que anomenem **univers** i del qual prendrem tots els subconjunts.

1.1.4.1 Parts d'un conjunt

Si A és un conjunt, es diu **conjunt de parts** d'A el conjunt els elements del qual són tots els subconjunts d'A i es designa per $\mathcal{P}(A)$. Així, tenim

$$\mathcal{P}(A) = \{x \subset U : x \subset A\}.$$

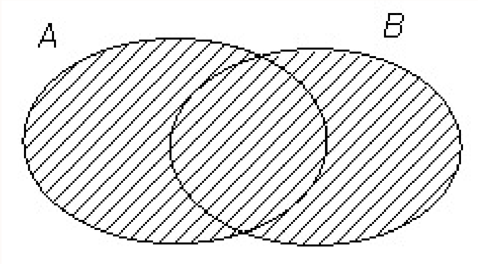
Observa que $\mathcal{P}(A)$ és un conjunt els elements del qual són alhora conjunts.

Exemple 1.3. Observa que si $A = \{a, b, c\}$, llavors

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, A\}.$$

1.1.4.2 Unió de dos conjunts

Si A i B són conjunts, es diu **unió** d'A i B al conjunt simbolitzat per $A \cup B$ que té per elements tots els que pertanyen a A o a B o als dos alhora. Mitjançant diagrames de Venn, representem aquest fet així



Simbòlicament, escrivim

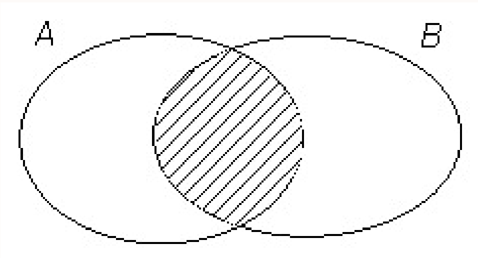
$$A \cup B = \{x \in U : x \in A \quad \text{o} \quad x \in B\}$$

Exemple 1.4. Observa que si $A = \{1, 2, 3\}$ i $B = \{3, 4, 5\}$, llavors

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\} \, .$$

1.1.4.3 Intersecció de dos conjunts

Si A i B són conjunts, es diu **intersecció** d'A i B al conjunt denotat per $A \cap B$ que té per elements tots els que pertanyen tant a A com a B. El diagrama de Venn que representa aquest fet és el següent:



Simbòlicament, escrivim

$$A \cap B = \{x \in U : x \in A \quad \text{i} \quad x \in B\}$$

Si $A \cap B = \emptyset$, llavors es diu que els conjunts A i B són **disjunts**, o sigui que no tenen res en comú.

Exemple 1.5. Observa que si $A = \{1, 2, 3\}$ i $B = \{3, 4, 5\}$, llavors

$$A \cap B = \{3\} \, .$$

1.1.4.4 Propietats de la unió i de la intersecció de conjunts

Donats tres conjunts qualssevol A, B i C es compleixen les següents relacions:

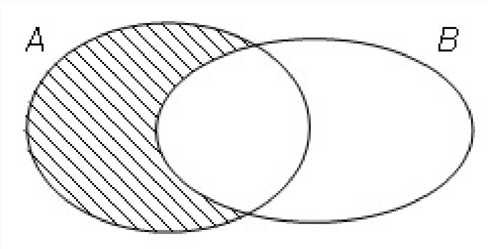
1. $A \cup A = A$ i $A \cap A = A$
2. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ i $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

3. $A \cup B = B \cup A$ i $A \cap B = B \cap A$
4. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup B)$ i $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
5. $A \cup (B \cap A) = A$ i $A \cap (B \cup A) = A$
6. $A \cup \emptyset = A$ i $A \cap \emptyset = \emptyset$

Les demostracions d'aquestes propietats les trobaràs en els exercicis resolts.

1.1.4.5 Diferència entre dos conjunts

Si A i B són conjunts, es diu **diferència** entre A i B al conjunt denotat per $A \setminus B$ i que té per elements tots els que pertanyen a A i que no són de B. El diagrama de Venn en aquest cas és:



Simbòlicament, escrivim

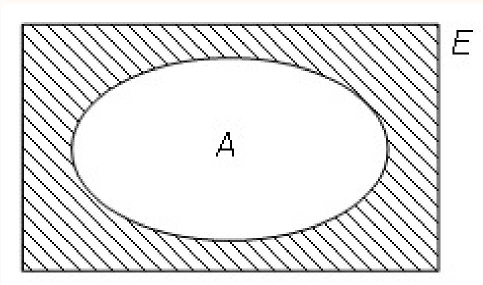
$$A - B = \{x \in U : x \in A \ \text{ i } \ x \notin B\}$$

Exemple 1.6. Si $A = \{1, 2, 3\}$ i $B = \{3, 4, 5\}$, llavors es té

$$A - B = \{1, 2\}\,.$$

1.1.4.6 Complementari d'un conjunt

Donat un conjunt A, es diu **complementari** d'A al conjunt denotat per $\complement A$ i que té per elements tots els que són de l'univers E i no pertanyen a A.



En altres paraules, es té

$$\complement A = \{x \in E : x \notin A\}.$$

És evident que es compleix

$$\complement A = E - A.$$

Exemple 1.7. Si $E = \mathbb{R}$ i $A = \{x \in \mathbb{R} : |x| = 1\}$, llavors es té

$$\complement_E A = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

1.1.4.7 Propietats del complementari d'un conjunt

Si U és l'univers, llavors es compleixen les següents propietats:

1. $\complement U = \emptyset$ i $\complement \emptyset = U$
2. $\complement\left(\complement A\right) = A$
3. Lleis de De Morgan: $\complement\left(A \cup B\right) = \complement A \cap \complement B$ i $\complement\left(A \cap B\right) = \complement A \cup \complement B$

Les demostracions d'aquestes propietats les trobaràs en els exercicis resolts.

1.1.5 Parell ordenat i producte cartesià de dos conjunts

Es diu **parell ordenat** de dos elements x i y al conjunt denotat per (x, y) que té per elements els conjunts $\{x\}$ i $\{x, y\}$, és a dir,

$$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}.$$

Llavors, diem que x és la **primera component** i y és la **segona component** del parell ordenat (x, y). Per la definició d'igualtat de conjunts, és fàcil deduir que es compleix

$$\{a, b\} = \{c, d\} \iff a = c \text{ i } b = d \text{ o bé } a = d \text{ i } b = c$$

mentre que

$$(a, b) = (c, d) \iff a = c \text{ i } b = d$$

Per tant, l'única diferència entre els conjunts $\{x, y\}$ i (x, y) resideix en l'ordre. Si x i y són dos elements diferents, llavors $\{x, y\} = \{y, x\}$ i, en canvi, $(x, y) \neq (y, x)$.

Donats dos conjunts A i B, es diu **producte cartesià** d'A i B al conjunt denotat per $A \times B$ que té per elements tots els parells ordenats la primera component dels quals és un element d'A i la segona component és un element de B, simbòlicament escrivim

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A \text{ i } y \in B\}.$$

Exemple 1.8. Si $A = \{1, 2\}$ i $B = \{a, b\}$, llavors es té

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b)\}$$

Observa que

$$B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2)\}$$

i és evident que $A \times B \neq B \times A$.

1.2 Relacions

Identifiquem les relacions amb conjunts de parells ordenats i, per tant, amb subconjunts del producte cartesià de dos conjunts donats. Que un parell ordenat pertanyi a una relació significa que la relació en qüestió es dona entre el primer component del parell i el segon.

1.2.1 Relacions entre dos conjunts

Donats dos conjunts A i B, es diu **relació** entre A i B a tot subconjunt de $A \times B$. Si $R \subset A \times B$ és una relació entre A i B, llavors quan es compleix que $(a, b) \in R$ diem que la relació **es dona** entre a i b, o simplement, que a **està relacionat amb** b.

Exemple 1.9. Si $A = \{1, 2\}$ i $B = \{a, b\}$, llavors $R = \{(1, a), (2, b)\}$, $S = \{(1, a)\}$ i $T = \{(2, a), (2, b)\}$ són relacions entre A i B i, en canvi, $J = \{(a, 2), (2, 1)\}$ no ho és.

Per ser conjunts, si R i S són relacions entre A i B, llavors $R = S$ si i només si R i S contenen els mateixos parells ordenats. Es diu **domini** d'una relació R entre A i B al conjunt denotat per $\mathcal{D}(R)$ que té per elements les primeres components dels parells ordenats de R. Es diu **recorregut** de R el conjunt denotat per $\mathcal{R}(R)$ que té per elements les segones components dels parells ordenats de R. Així, tenim

$$\mathcal{D}(R) = \{x : x \in A \text{ i existeix } y \in B \text{ tal que } (x, y) \in R\}$$

i

$$\mathcal{R}(R) = \{y : y \in B \text{ i existeix } x \in A \text{ tal que } (x, y) \in R\}.$$

Exemple 1.10. Si $A = \{1, 2\}$, $B = \{a, b\}$ i $R = \{(2, a), (2, b)\}$ és una relació entre A i B, llavors $\mathcal{D}(R) = \{2\}$ i $\mathcal{R}(R) = \{a, b\} = B$.

1.2.2 Relacions binàries en un conjunt

Si A és un conjunt, diem que R és una **relació binària** en A si $R \subset A \times A$. En tot conjunt A sempre podem definir les relacions binàries següents:

1. Relació d'identitat en A: $I_A = \{(x, x) : x \in A\}$
2. Relació nul · la en A: $\emptyset$
3. Relació total en A: $A \times A$

Considerem un conjunt A i una relació binària $R \subset A \times A$. Distingim les següents propietats de R:

1. R és **reflexiva**: per a tot $x \in A$, $(x, x) \in R$
2. R és **irreflexiva**: per a tot $x \in A$, $(x, x) \notin R$
3. R és **simètrica**: per a tot $x, y \in A$, si $(x, y) \in R$ llavors $(y, x) \in R$
4. R és **asimètrica**: per a tot $x, y \in A$, si $(x, y) \in R$ llavors $(y, x) \notin R$
5. R és **antisimètrica**: per a tot $x, y \in A$, si $(x, y) \in R$ i $(y, x) \in R$, llavors $x = y$
6. R és **transitiva**: per a tot $x, y, z \in A$, si $(x, y) \in R$ i $(y, z) \in R$, llavors $(x, z) \in R$

Exemple 1.11. Si $A = \{1, 2, 3\}$ i $R = \{(1, 2), (2, 3), (2, 2), (1, 3)\}$, llavors es compleix:

- R no és reflexiva, doncs $(1, 1) \notin R$.
- R no és irreflexiva, doncs $(2, 2) \in R$.

- R no és simètrica, perquè $(1, 2) \in R$ i $(2, 1) \notin R$.
- R no és asimètrica, doncs $(2, 2) \in R$.
- R és antisimètrica, perquè no hi ha cap parell d'elements diferents x, y tals que $(x, y) \in R$ i $(y, x) \in R$.
- R és transitiva, perquè no hi ha tres elements x, y, z tals que $(x, y) \in R$ i $(y, z) \in R$ i $(x, z) \notin R$.

1.2.3 Relacions d'equivalència

Donat un conjunt A i una relació binària R en A, diem que R és una **relació d'equivalència** si R és reflexiva, simètrica i transitiva.
Tota relació d'equivalència R en un conjunt A ens permet classificar els elements del conjunt en classes d'equivalència. Es diu **classe d'equivalència** d'un element $a \in A$ al conjunt denotat per $[a]$ que té per elements tots els elements d'A que estan relacionats amb a. Així, tenim

$$[a] = \{x \in A : (x, a) \in R\} .$$

De la definició de classe d'equivalència, deduïm de seguida que

$$[a] = [b] \iff (a, b) \in R$$

o bé,

$$[a] = [b] \iff (a \in [b] \Longleftrightarrow b \in [a])$$

Llavors es diu **conjunt quocient** de A per la relació R al conjunt denotat per A/R que té per elements les classes d'equivalència de tots els elements d'A respecte de R. Així, tenim

$$A/R = \{[a] : a \in A\}$$

Quan R és d'equivalència diem que el conjunt quocient A/R és una **partició** del conjunt A, això vol dir que és una col·lecció de subconjunts no buits d'A, disjunts dos a dos, i tals que la seva unió és A. Podem expressar això afirmant que en A/R es compleixen les següents propietats:

1. Per a tot $a \in A$, $[a] \neq \emptyset$.
2. Per a tot $a, b \in A$ i $[a] \neq [b]$, $[a] \cap [b] = \emptyset$.
3. $\bigcup A/R = A$, on $\bigcup A/R$ és la unió de totes les classes d'equivalència, doncs A/R és el conjunt els elements del qual són els que pertanyen a alguna classe de A/R, o sigui

$$x \in \bigcup A/R \iff \text{existeix alguna classe } [a] \in A/R \text{ tal que } x \in [a] .$$

És habitual usar $\sim$ o $\equiv$ com a símbols de relacions d'equivalència sobre un conjunt.

Exemple 1.12. En el conjunt dels nombres enters $\mathbb{Z}$ es defineix la següent relació binària $\equiv$

$$x \equiv y \iff x - y \text{ és múltiple de } 3$$

És immediat comprovar que $\equiv$ és una relació d'equivalència en $\mathbb{Z}$:

- $\equiv$ és reflexiva: per a tot $x \in \mathbb{Z}$, $x \equiv x$ doncs $x - x = 0$, que és un múltiple de 3.
- $\equiv$ és simètrica: per a tot $x, y \in \mathbb{Z}$, si $x \equiv y$, és a dir si $x - y$ és un múltiple de 3, llavors $-(x - y) = y - x$ també és un múltiple de 3 i, per tant, $y \equiv x$.
- $\equiv$ és transitiva: per a tot $x, y, z \in \mathbb{Z}$, si $x \equiv y$ i $x \equiv z$, és a dir, si $x - y$ i $y - z$ són múltiples de 3, també ho serà la seva suma, $(x - y) + (y - z) = x - z$ i, per tant, $x \equiv z$.

Existeixen tres classes d'equivalència per a aquesta relació:

- $[0] = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ és múltiple de } 3\} = \{..., -6, -3, 0, 3, 6, ...\}$
- $[1] = \{x \in \mathbb{Z} \mid x - 1 \text{ és múltiple de } 3\} = \{..., -5, -2, 1, 4, 7, ...\}$
- $[2] = \{x \in \mathbb{Z} \mid x - 2 \text{ és múltiple de } 3\} = \{..., -4, -1, 2, 5, 8, ...\}$

Finalment, el conjunt quocient és

$$\mathbb{Z}/\equiv\, = \{[1], [2], [3]\}.$$

1.2.4 Relacions d'ordre

Donat un conjunt A i una relació binària R en A, diem que R és una **relació d'ordre** si R és reflexiva, antisimètrica i transitiva. Un conjunt amb una relació d'ordre es diu un **conjunt ordenat**.
Una relació d'ordre R en un conjunt A es diu d'ordre **total** si per a tot $x, y \in A$ es compleix:

$$(x, y) \in R \quad \text{o bé} \quad (y, x) \in R.$$

En aquest cas es diu que A està **totalment ordenat**. En canvi, si existeixen $x, y \in A$ tals que $(x, y) \notin R$ i $(y, x) \notin R$, llavors la relació es diu d'ordre **parcial** i es diu que A està **parcialment ordenat**. És habitual usar $\leq$ com a símbol de relació d'ordre en un conjunt.

Exemple 1.13. Si $A = \{1, 2, 3\}$, la següent relació

$$R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (1, 3)\}$$

és un ordre parcial en A, mentre que la relació

$$S = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$$

és un ordre total en A.

Exemple 1.14. Si A és un conjunt qualsevol, la relació d'inclusió és un ordre parcial en el conjunt de parts d'A.

Exemple 1.15. La relació $\leq$ és un ordre total en $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$.

1.2.4.1 Elements notables d'una relació d'ordre

Si A és un conjunt ordenat per la relació $\leq$, llavors tenim les següents definicions:

1. $a \in A$ és un element **maximal** d'A si no existeix $x \in A$ i $x \neq a$ tal que $a \leq x$.
2. $a \in A$ és un element **minimal** d'A si no existeix $x \in A$ i $x \neq a$ tal que $x \leq a$.
3. $a \in A$ és el **màxim** d'A si per a tot $x \in A$, $x \leq a$, i s'escriu $a = \max A$.
4. $a \in A$ és el **mínim** d'A si per a tot $x \in A$, $a \leq x$, i s'escriu $a = \min A$.

No és difícil demostrar que en tot ordre parcial hi ha com a màxim un element màxim i un element mínim. Així mateix, un element màxim (resp. mínim), si existeix, és un element maximal (resp. minimal). Si l'ordre és total, tot element minimal és mínim i tot element maximal és màxim.

Exemple 1.16. Considerem el conjunt $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ ordenat per la relació

$$R = \{(a, b), (a, c), (b, d), (c, d), (a, d), (e, f)\} \cup \Delta_A.$$

Llavors, tenim:

- R no és un ordre total
- Els elements d, f i g són maximals
- Els elements a, e i g són minimals
- No hi ha màxim ni mínim

Exemple 1.17. Donat el conjunt $A = \{a, b\}$, considerem el conjunt de parts $\mathcal{P}(A)$ ordenat per la relació d'inclusió. Llavors es té:

- A és máximal i $\emptyset$ és mínimal
- A és màxim i $\emptyset$ és mínim

Si A és un conjunt ordenat per la relació $\leq$ i $B \subset A$, llavors:

1. $a \in A$ és una **cota superior** o **mayorante** de B si per a tot $x \in B$, $x \leq a$.
2. $a \in A$ és una **cota inferior** o **minorante** de B si per a tot $x \in B$, $a \leq x$.
3. $a \in A$ és el **suprem** o **extrem superior** de B si a és el mínim de les cotes superiors de B; en tal cas s'escriu $a = \sup B$.
4. $a \in A$ és l'**ínfim** o **extrem inferior** de B si a és el màxim de les cotes inferiors de B; en tal cas escrivim $a = \inf B$.

Exemple 1.18. Considerem el conjunt $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12\}$ ordenat per la relació $|$ definida per

$$x \mid y \iff x \text{ divideix a } y$$

Volem: (a) representar gràficament aquest ordre, (b) trobar els seus elements maximals, minimals, màxim i mínim, (c) considerant el subconjunt $B = \{4, 6, 8, 10\}$, trobar cotes superiors i inferiors, suprem i ínfim.

Solució: (a) Una possible representació gràfica d'aquest ordre és:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 8 & & 12 & & \\
 & & | & / & | & & \\
10 & & 4 & & 6 & & 9 \\
| & \backslash & | & / & & \backslash & | \\
5 & & 2 & & & & 3
\end{array}$$

(b) Els maximals són $10, 8, 12$ i 9; els minimals són $5, 2$ i 3; i no hi ha màxim ni mínim.
(c) No hi ha cotes superiors i només hi ha una cota inferior que és 2. Per tant, no hi ha suprem i $\inf B = 2$. □

1.2.4.2 Conjunts ben ordenats

Si A és un conjunt ordenat, diem que A està **ben ordenat** si tot subconjunt de A té mínim.

Exemple 1.19. El conjunt dels nombres naturals $\mathbb{N}$ està ben ordenat per la relació $\leq$.

Exemple 1.20. El conjunt dels nombres reals $\mathbb{R}$ no està ben ordenat per la relació $\leq$ perquè, per exemple, el subconjunt $(1, 2)$ no té mínim.

Exemple 1.21. Donat el conjunt $A = \{a, b, c\}$, considerem el conjunt de parts $\mathcal{P}(A)$ ordenat per la relació d'inclusió. Considerant els subconjunts $B = \{\{a\}, \{a, b\}\}$ i $C = \{\{b\}, \{c\}, \{b, c\}\}$, (a) volem saber si aquests conjunts estan o no ben ordenats. (b) Volem també trobar els elements notables d'aquesta relació en $\mathcal{P}(A)$, B i C.

Solució: (a) B està ben ordenat perquè $\{a\} \subset \{a\}$ i $\{a\} \subset \{a, b\}$; a més, observa que B està totalment ordenada per $\subset$. En canvi, C no ho està, ja que el subconjunt $\{\{b\}, \{c\}\}$ no té mínim.
(b) Els elements notables són:

	$P(A)$	B	C
Maximals	A	$\{a, b\}$	$\{b, c\}$
Minimals	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}, \{c\}$
Màxim	A	$\{a, b\}$	$\{b, c\}$
Mínim	$\emptyset$	$\{a\}$	No n'hi ha
Cotes superiors	A	$\{a, b\}, A$	$\{b, c\}, A$
Cotes inferiors	$\emptyset$	$\{a\}, \emptyset$	$\emptyset$
Suprem		$\{a, b\}$	$\{b, c\}$
Ínfim	$\emptyset$	$\{a\}$	$\emptyset$

□

1.3 Aplicacions

Donats dos conjunts A i B, i una relació R entre A i B, es diu **aplicació** d'A en B si $\mathcal{D}(R) = A$ i per a tot $a \in \mathcal{D}(R)$ existeix un únic $b \in B$ tal que $(a, b) \in R$. És habitual usar f, g o h com a símbols d'aplicacions. D'aquesta manera, per a designar una aplicació f d'A en B escriurem

$$f : A \longrightarrow B,$$

o bé

$$A \xrightarrow{f} B.$$

Considerem l'aplicació $f : A \longrightarrow B$ i sigui $a \in A$, llavors $f(a)$ es diu la **imatge** d'a per f. Si $f(a) = b$, llavors diem que a és una **antiimatge** de b per f; també simbolitzem aquest fet com $a \longmapsto f(a) = b$. Al conjunt

$$\mathcal{R}(f) = \{y \in B : \text{existeix } x \in A \text{ tal que } f(x) = y\}$$

se'n diu **imatge** o **recorregut** de l'aplicació f i també s'escriu $\operatorname{Im} f$. Observa que $\mathcal{R}(f)$ és el conjunt dels elements de B que tenen almenys una antiimatge per l'aplicació f.

Donades dues aplicacions $f : A \longrightarrow B$ i $g : A \longrightarrow B$, diem que són **iguals**, representant-ho per $f = g$, si per a tot $x \in A$ es compleix $f(x) = g(x)$. En símbols, escrivim

$$f = g \iff (\forall x)\,(x \in A \Longrightarrow f(x) = g(x))$$

Es diu **graf** de l'aplicació $f : A \longrightarrow B$ al conjunt

$$\mathcal{G}(f) = \{(x, y) \in A \times B : f(x) = y\}$$

Llavors, és evident que dues aplicacions f i g d'A en B són iguals si i només si $\mathcal{G}(f) = \mathcal{G}(g)$.

Exemple 1.22. Donats els conjunts $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ i $B = \{2, 6, 9, 12, 20, 21\}$, considerem la relació R entre A i B definida per: $x \in A$ està relacionat amb $y \in B$ si i només si $y = 3x$. (a) És aquesta relació una aplicació d'A en B? (b) Quins números s'han d'excloure de A perquè ho sigui? Calcula la imatge i el graf de l'aplicació que així s'obté.

Solució: (a) Aquesta relació no és una aplicació d'A en B, perquè el seu domini és el conjunt $\{2, 3, 4\}$ i no coincideix amb A.
(b) Si excloem 0 i 1 d'A, llavors la relació defineix una aplicació de $\mathcal{D}(R) = \{2, 3, 4\}$ en B. És clar que la imatge d'aquesta aplicació és

$$\mathcal{R}(R) = \{6, 9, 12\}$$

i el graf és

$$\mathcal{G}(R) = \{(2, 6), (3, 9), (4, 12)\}.$$

□

Exemple 1.23. Siguin $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ i considerem el següent conjunt

$$G = \{\,(x, y) \in A \times B \mid y = 2x - 1\}$$

(a) És G el graf d'una aplicació f d'A en B? (b) Si ho és, com es defineix la imatge d'un element qualsevol d'A? Quins elements de B tenen antiimatge?

Solució: (a) És immediat comprovar que

$$G = \{(1,1),(2,3),(3,5),(4,7)\}$$

És clar que G defineix una aplicació f d'A en B perquè $\mathcal{D}(f) = A$ i tot element d'A té una i només una imatge.
(b) L'aplicació f es defineix per $f(x) = 2x - 1$. Els elements de B que tenen antiimatge determinen el recorregut de l'aplicació què és

$$\mathcal{R}(f) = \{1,3,5,7\}.$$

□

Observació 1.3. Els conceptes d'aplicació i funció es consideren sovint com a sinònims. Tot i això, el concepte de funció pot considerar-se menys restrictiu que el d'aplicació. La raó està en el fet que quan tractem amb funcions és habitual no especificar des d'un principi els conjunts de sortida i d'arribada com així fem en definir el concepte d'aplicació. En general , una funció es defineix com una relació R entre dos conjunts referencials (prou amplis) que satisfà la següent propietat: per a qualssevol objectes a, b, c

$$(a,b) \in R \text{ i } (a,c) \in R \implies b = c$$

En altres paraules, una relació R entre dos conjunts referencials és una funció si i només si per a tot $a \in \mathcal{D}(R)$ existeix un únic b tal que $(a,b) \in R$. Definit d'aquesta manera el concepte de funció, aleshores diem que f és una funció d'A en B si $\mathcal{D}(f) = A$ i $\mathcal{R}(f) \subset B$. Ara, és evident que una funció d'A en B és una aplicació d'A en B. Per exemple, les funcions de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ (funcions reals de variable real) són aplicacions del seu domini en $\mathbb{R}$.

1.3.1 Classes d'aplicacions

Donats els conjunts A, B i l'aplicació $f : A \longrightarrow B$. Distingim les següents classes d'aplicacions:

1. L'aplicació es diu **injectiva** quan qualsevol parell d'elements diferents de A tenen imatges diferents, o dit d'una altra forma equivalent, si no hi ha dos elements diferents d'A amb la mateixa imatge. En símbols, escrivim

$$\begin{aligned} f \text{ és injectiva} \iff & x \neq y \implies f(x) \neq f(y) \\ \iff & f(x) = f(y) \implies x = y \end{aligned}$$

   per a tot $x, y \in A$.

2. L'aplicació es diu **exhaustiva** si tot element de B té almenys una antiimatge en A, o dit d'una altra forma equivalent, si $\mathcal{R}(f) = B$. En símbols, escrivim

$$f \text{ és exhaustiva} \iff (\forall y)\,(y \in B \implies (\exists x)\,(x \in A \text{ i } f(x) = y))$$

3. L'apliació es diu **bijectiva** quan és injectiva i exhaustiva.

Exemple 1.24. L'aplicació $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida per $f(x) = x^2$ no és injectiva ni exhaustiva. En efecte, f no és injectiva perquè, per exemple, $-1 \neq 1$ i, en canvi , $f(-1) = f(1)$. Tampoc és exhaustiva perquè -1 no té antiimatge.

Exemple 1.25. L'aplicació $f : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida per $f(x) = x^2$ és injectiva però no és exhaustiva. En efecte, f és injectiva perquè si $f(x) = f(y)$, deduïm $x^2 = y^2$. D'aquí, obtenim $|x| = |y|$, però com $x, y \in [0, +\infty)$, deduïm $x = y$. No és exhaustiva perquè, per exemple, -1 no té antiimatge.

Exemple 1.26. L'aplicació $f : \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty)$ definida per $f(x) = x^2$ no és injectiva però sí que és exhaustiva. En efecte, f no és injectiva perquè $-1 \neq 1$ i, en canvi, $f(-1) = f(1)$. Si $y \in [0, +\infty)$, llavors $\sqrt{y} \in \mathbb{R}$ i es compleix $f\left(\sqrt{y}\right) = \left(\sqrt{y}\right)^2 = y$. Per tant, qualsevol element de $[0, +\infty)$ té antiimatge i, per tant, f és exhaustiva.

Exemple 1.27. L'aplicació $f : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$ definida per $f(x) = x^2$ és bijectiva. En efecte, el raonament utilitzat en (2) prova que f és injectiva, i el raonament utilitzat en (3) prova que f és exhaustiva. Per tant, f és bijectiva.

1.3.2 Imatge i antiimatge d'un conjunt

Donats els conjunts A, B i l'aplicació $f : A \longrightarrow B$. Considerem $C \subset A$ i $D \subset B$, llavors es diu **imatge del conjunt** C al conjunt

$$f(C) = \{y \in B : \text{existeix } x \in C \text{ tal que } f(x) = y\},$$

és a dir, el conjunt $f(C)$ està format per les imatges de tots els elements de C. Es diu **antiimatge del conjunt** D al conjunt

$$f^{-1}(D) = \{x \in A : f(x) \in D\},$$

és a dir, el conjunt $f^{-1}(D)$ està format per les antiimatges de tots els elements de D.

Exemple 1.28. Considerem l'aplicació $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida per

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}.$$

Volem calcular la imatge del conjunt $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ i l'antiimatge del conjunt $\{0, 1, 2\}$.

Solució: Per a determinar $f(\{-2, -1, 0, 1, 2\})$ haurem de calcular les imatges de tots els elements del conjunt en qüestió. Així, tenim

$$\begin{aligned} f(-2) &= \tfrac{(-2)^2-1}{(-2)^2+1} = \tfrac{3}{5} \\ f(-1) &= \tfrac{(-1)^2-1}{(-1)^2+1} = 0 \\ f(0) &= \tfrac{0-1}{0+1} = -1 \\ f(1) &= \tfrac{1-1}{1+1} = 0 \\ f(2) &= \tfrac{4-1}{4+1} = \tfrac{3}{5} \end{aligned}$$

Per tant,

$$f(\{-2, -1, 0, 1, 2\}) = \left\{-1, 0, \frac{3}{5}\right\}.$$

Per a determinar $f^{-1}(\{0,1,2\})$ haurem calcular les antiimatges de tots els elements del conjunt en qüestió. Així, tenim

$$\begin{array}{lclcl} f(x)=0 & \Longrightarrow & \frac{x^2-1}{x^2+1}=0 & \Longrightarrow & x=1 \text{ o } x=-1 \\ f(x)=1 & \Longrightarrow & \frac{x^2-1}{x^2+1}=1 & \Longrightarrow & \text{No hi ha solució} \\ f(x)=2 & \Longrightarrow & \frac{x^2-1}{x^2+1}=2 & \Longrightarrow & \text{No hi ha solució} \end{array}$$

Per tant,

$$f^{-1}(\{0,1,2\})=\{-1,1\}.$$

□

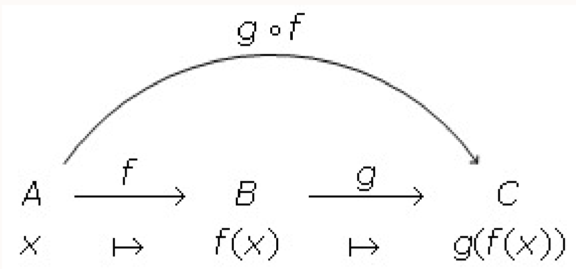
Observació 1.4. Veurem en un altre apartat que si una aplicació f és bijectiva, llavors existeix l'aplicació f^{-1} que se'n diu inversa de f. En usar la notació $f^{-1}(D)$ no s'ha de pressuposar que f és bijectiva; ara $f^{-1}(D)$ designa simplement el conjunt que té per elements totes les antiimatges dels elements de D. Tot i això, en el cas que f sigui bijectiva, la notació $f^{-1}(D)$ serà consistent amb el fet que $f^{-1}(D)$ s'interpreti també com la imatge del conjunt D per l'aplicació inversa de f.

1.3.3 Composició d'aplicacions

Donats els conjunts A, B i C, considerem les aplicacions $f: A \longrightarrow B$ i $g: B \longrightarrow C$. A l'aplicació $h: A \longrightarrow C$ definida per

$$h(x)=g(f(x))$$

se'n diu **aplicació composta** de f i g o **aplicació composició** de f amb g, i s'escriu $h=g\circ f$. El següent diagrama justifica la definició de l'aplicació composta de f amb g.



Exemple 1.29. Considerem les aplicacions $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ i $g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definides per $f(x)=x+1$ i $g(x)=1-2x$. Volem calcular l'aplicació composta de f amb g.

Solució: Segons la definició, tenim

$$\begin{aligned}(g\circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= g(x+1) \\ &= 1-2(x+1) \\ &= 1-2x-2 \\ &= -1-2x\end{aligned}$$

□

Observació 1.5. Volem fer dues observacions importants:

- És important assenyalar que la composició $g \circ f$ de dues aplicacions f i g només existeix quan el conjunt d'arribada de f coincideix amb el conjunt de sortida de g.
- Observa que en l'expressió $g \circ f$ les aplicacions apareixen escrites en ordre invers al d'actuació, que és: primer f i després g.

1.3.4 Aplicació inversa

Donada una aplicació $f : A \longrightarrow B$ bijectiva, l'aplicació $g : B \longrightarrow A$ definida per

$$g(y) = x \iff f(x) = y$$

es diu **aplicació inversa** de f i és habitual denotar-la per f^{-1}. Segons la definició, és immediat comprovar que

$$f^{-1} \circ f = I_A \quad \text{i} \quad f \circ f^{-1} = I_B$$

on les aplicacions $I_A : A \longrightarrow A$ i $I_B : B \longrightarrow B$ definides per $I_A(x) = x$ per a tot $x \in A$ i $I_B(x) = x$ per a tot $x \in B$ es diuen, respectivament, l'aplicació **identitat** d'A i l'aplicació identitat de B**.**

Exemple 1.30. Considerem l'aplicació $f : \mathbb{R} - \{1\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{2\}$ definida per

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$$

(a) Provarem que f és bijectiva i (b) calcularem l'aplicació inversa.

Solució: (a) Si $x, y \in \mathbb{R} - \{1\}$ i suposem que $f(x) = f(y)$, llavors

$$\begin{aligned} \frac{2x+1}{x-1} &= \frac{2y+1}{y-1} \\ 2xy - 2x + y - 1 &= 2xy + x - 2y - 1 \\ 3y &= 3x \\ y &= x \end{aligned}$$

i, per tant, f és injectiva. Si $y \in \mathbb{R} - \{2\}$ i fem $f(x) = y$, llavors

$$\begin{aligned} \frac{2x+1}{x-1} &= y \\ 2x + 1 &= xy - y \\ 1 + y &= xy - 2x \\ 1 + y &= x(y-2) \\ \frac{1+y}{y-2} &= x \end{aligned}$$

Per tant, donat $y \in \mathbb{R} - \{2\}$, existeix

$$\frac{1+y}{y-2} \in \mathbb{R} - \{1\}$$

i es compleix
$$f\left(\frac{1+y}{y-2}\right)=y.$$
Això vol dir que f també és exhaustiva i, en conseqüència, f és bijectiva.
(b) Com que per a tot $x\in\mathbb{R}-\{1\}$ i $y\in\mathbb{R}-\{2\}$, es compleix
$$\tfrac{1+y}{y-2}=x \iff \tfrac{2x+1}{x-1}=y$$
llavors
$$f^{-1}(y)=\frac{1+y}{y-2}$$
Substituint ara y per x, obtenim
$$f^{-1}(x)=\frac{1+x}{x-2}.$$
$\square$

1.3.5 Cardinal d'un conjunt

En aquest apartat precisarem la noció intuïtiva que tots tenim de nombre d'elements d'un conjunt finit.

Diem que dos conjunts A i B són **equipotents** quan existeix una aplicació bijectiva d'A en B. Ara podem associar a cada conjunt A el que es diu **cardinal** o **potència** d'A que es denota per $\#A$. El cardinal d'un conjunt es defineix de manera que es compleixi la següent condició: Dos conjunts tenen el mateix cardinal si i només si són equipotents.

Si U és l'univers i considerem en $\mathcal{P}(U)$ la relació de equipotència $\sim$ definida per
$$A\sim B \iff \#A=\#B,$$
és immediat comprovar que $\sim$ és una relació d'equivalència en $\mathcal{P}(U)$ i cada classe es diu un **nombre cardinal**. En altres paraules, n és un nombre cardinal si existeix un conjunt A tal que $\#A=n$.

Així, tots els conjunts equipotents a un conjunt unitari com, per exemple , $\{\emptyset\}$, direm que tenen cardinal 1, tots els conjunts equipotents a un parell com, per exemple, $\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$ tenen cardinal 2, i així successivament. Admetem que el cardinal del conjunt buit és 0, és a dir, $\#\emptyset=0$.

Intuïtivament, és clar que un conjunt finit no pot ser equipotent a un dels seus subconjunts propis. Tanmateix, això és possible per a conjunts infinits. Per exemple, el conjunt dels nombres naturals $\mathbb{N}$ és equipotent amb el següent subconjunt propi format pels parells:
$$P=\{2n : n\in\mathbb{N}\}$$
ja que l'aplicació
$$\begin{array}{ccc}\mathbb{N} & \longrightarrow & P\\ n & \longmapsto & 2n\end{array}$$

és bijectiva. Aquest fet justifica la següent definició.

Diem que un conjunt A és **infinit** si A és equipotent amb un subconjunt propi de A. Si un conjunt no és infinit, llavors diem que és **finit**. D'aquesta manera, per a dos conjunts finits A i B, evidentment tenim que A és equipotent a B si i només si A i B contenen el mateix nombre d'elements. Per als conjunts infinits, la idea "tenir el mateix nombre d'elements"és vaga, mentre que la idea que A sigui bijectable amb B conserva la seva claredat.

Finalment, diem que un conjunt A és **infinit numerable** si A és equipotent al conjunt dels nombres naturals $\mathbb{N}$, i diem simplement **numerable** si A és finit o infinit numerable.

1.3.5.1 Propietats per a conjunts finits

Les fórmules més usuals (encara que no les úniques) que relacionen els cardinals i les operacions entre conjunts són:

1. $\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$
2. $\#(A \cup B \cup C) = \#A + \#B + \#B - \#(A \cap B) - \#(A \cap C) - \#(B \cap C) + \#(A \cap B \cap C)$
3. $\#\complement A = \#U - \#A$
4. $\#(A \times B) = \#A \cdot \#B$
5. $\#\mathcal{P}(A) = 2^{\#A}$

Les demostracions d'aquestes propietats les trobaràs en els exercicis resolts.

Exemple 1.31. A un examen de Matemàtiques i Física han concorregut 100 alumnes. Sabent que Física l'han aprovat 60 alumnes, Matemàtiques 48 i que el nombre d'alumnes que han aprovat totes dues assignatures ha estat 30, volem esbrinar el nombre d'alumnes que no han aprovat cap assignatura en aquest examen.

Solució: Tenim els següents conjunts: el conjunt U d'alumnes que s'examinen, el conjunt A d'alumnes que han aprovat Física i el conjunt B d'alumnes que han aprovat Matemàtiques. Per l'enunciat del problema, se sap que $\#U = 100$, $\#A = 60$, $\#B = 48$ i $\#A \cap B = 30$. El conjunt d'alumnes que han aprovat alguna assignatura és $A \cup B$ i el nombre d'elements d'aquest conjunt és

$$\begin{aligned} \#(A \cup B) &= \#A + \#B - \#(A \cap B) \\ &= 60 + 48 - 30 \\ &= 78 \end{aligned}$$

Llavors, el nombre d'alumnes que no han aprovat cap assignatura és 22 perquè aquest nombre és el cardinal del conjunt $\complement(A \cup B)$ i es compleix que

$$\begin{aligned} \#\complement(A \cup B) &= \#U - \#(A \cup B) \\ &= 100 - 78 \\ &= 22. \end{aligned}$$

$\square$

Capítol 2

Pràctica

2.1 Conjunts

Exercici 2.1. Escriu simbòlicament els conjunts següents i determina els seus elements en cada cas:

1. El conjunt dels nombres reals tals que el seu quadrat és 12.
2. El conjunt dels nombres reals tals que el seu quadrat és -9.
3. El conjunt dels nombres reals tals que el seu quadrat és major o igual que 0.
4. El conjunt dels nombres naturals compresos entre $3/2$ i $13/3$.
5. El conjunt dels nombres reals que són solució de l'equació $3x - 1 = 10$.
6. El conjunt dels nombres enters que són solució de l'equació $3x - 1 = 10$.

Solució: (1) El conjunt dels nombres reals tals que el seu quadrat és 12 s'escriu com segueix

$$\begin{aligned} A &= \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 = 12\right\} \\ &= \left\{-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}\right\}. \end{aligned}$$

(2) El conjunt dels nombres reals tals que el seu quadrat és -9 és el conjunt buit, ja que no hi ha cap nombre real el quadrat del qual sigui negatiu.
(3) El conjunt dels nombres reals tals que el seu quadrat és major o igual que 0 s'escriu com segueix

$$\begin{aligned} C &= \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \\ &= [0, +\infty). \end{aligned}$$

(4) El conjunt dels nombres naturals compressos entre $3/2$ i $13/3$ és

$$\begin{aligned} D &= \{x \in \mathbb{N} : 3/2 \leq x \leq 13/3\} \\ &= \{2, 3, 4\}. \end{aligned}$$

(5) El conjunt dels nombres racionals que són solució de l'equació $3x - 1 = 10$ és

$$\begin{aligned} E &= \{x \in \mathbb{Q} : 3x - 1 = 10\} \\ &= \left\{\frac{11}{3}\right\}. \end{aligned}$$

(6) El conjunt dels nombres enters que són solució de l'equació $3x - 1 = 10$ és el conjunt buit perquè no existeix cap nombre enter que multiplicat per 3 doni 11. $\square$

Exercici 2.2. Defineix els següents conjunts mitjançant una condició que compleixen tots els seus elements:

1. $\{5\}$
2. $\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$
3. $\{-1, 0, 1\}$

Solució: (1) És clar que

$$\{5\} = \{x \in \mathbb{N} : 4 < x < 6\}.$$

(2) És clar que

$$\{1, 3, 5, 7, 9, 11\} = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ és senar i } x \leq 11\}.$$

(3) És clar que

$$\{-1, 0, 1\} = \left\{x \in \mathbb{R} : x^3 - x = 0\right\}$$

$\square$

Exercici 2.3. Són iguals els conjunts

$$A = \{x : x \text{ és una lletra de la paraula "matemàtica"}\}$$

i

$$B = \{a, m, i, c, t, e\}$$

Per què?

Solució: És evident que

$$A = \{m, a, t, e, i, c\}$$

i, per tant, $A = B$, ja que tenen els mateixos elements. $\square$

Exercici 2.4. Calcula el conjunt de parts dels conjunts següents: (1) $A = \{1\}$; (2) $B = \{1, 2\}$; (3) $C = \{1, 2, 3\}$.

Solució: (1) Si $A = \{1\}$, llavors

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, A\}.$$

(2) Si $B = \{1, 2\}$, llavors

$$\mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, B\}.$$

(3) Si $C = \{1, 2, 3\}$, llavors

$$\mathcal{P}(C) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, C\}.$$

$\square$

Exercici 2.5. Donat el conjunt $A = \{a, b, c\}$, quines són vertaderes de les següents expressions?

a)	$a \in A$	*b*)	$\{b\} \in A$	*c*)	$c \subset A$
d)	$\{c\} \subset A$	*e*)	$\{a, b, c\} \subset A$	*f*)	$A \in A$

Solució: a) És clar que a és element d'A i, per tant, és cert que $a \in A$.
b) $\{b\} \in A$ és falsa, ja que $\{b\}$ no és element d'A.
c) $c \subset A$ és falsa, ja que c és element d'A i no subconjunt.
d) És clar que c és element d'A i, per tant, és cert que $\{c\}$ és subconjunt d'A
e) És clar que a, b i c són elements d'A i, per tant, és cert que $\{a, b, c\}$ és subconjunt de A.
f) $A \in A$ és falsa, ja que A no és element de si mateix. $\square$

Exercici 2.6. Donat el conjunt $A = \{1, 2, 3\}$, quins de les següents relacions són vertaderes?

a)	$\{3\} \in A$	*b*)	$\{1, 2\} \subset A$	*c*)	$3 \in \mathcal{P}(A)$
d)	$\emptyset \in \mathcal{P}(A)$	*e*)	$\emptyset \subset \mathcal{P}(A)$	*f*)	$\{2, 3\} \subset \mathcal{P}(A)$
g)	$\{\emptyset\} \subset \mathcal{P}(A)$	*h*)	$\emptyset \in \{\emptyset\}$	*i*)	$\{\{1\}\} \in \mathcal{P}(A)$

Solució: a) $\{3\} \in A$ és falsa, ja que $\{3\}$ no és element d'A.
b) És clar que 1 i 2 són elements d'A i, per tant, és cert que $\{1, 2\}$ és subconjunt d'A.
c) És clar que 3 no és subconjunt d'A i, per tant, $3 \in \mathcal{P}(A)$ és falsa.
d) És clar que $\emptyset \subset A$ i, per tant, és cert que $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$.
e) És clar que $\emptyset$ és subconjunt de qualsevol conjunt i, per tant, és cert que $\emptyset \subset \mathcal{P}(A)$.
f) És clar que ni 2 ni 3 són subconjunts d'A i, per tant, és fals que $\{2, 3\} \subset \mathcal{P}(A)$.
g) És clar que $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ i, per tant, és cert que $\{\emptyset\} \subset \mathcal{P}(A)$.
h) En ser $\emptyset$ element de $\{\emptyset\}$, és cert que $\emptyset \in \{\emptyset\}$.
i) És clar que $\{\{1\}\}$ no és subconjunt d'A i, per tant, és fals que $\{\{1\}\} \in \mathcal{P}(A)$. $\square$

Exercici 2.7. Demostra que es compleixen les següents propietats de la relació d'inclusió:

1. Per a tot conjunt A, $A \subset A$.
2. Donats dos conjunts A i B, si $A \subset B$ i $A \supset B$, llavors $A = B$.
3. Donats tres conjunts A, B i C, si $A \subset B$ i $B \subset C$, llavors $A \subset C$.

Solució: (1) Donat qualsevol conjunt A, per definició, tenim

$$A \subset A \iff (\forall x)\,(x \in A \Longrightarrow x \in A)$$

Des del punt de vista lògic, la implicació

$$x \in A \Longrightarrow x \in A$$

és vertadera qualssevol que sigui x. Per tant, $A \subset A$.
(2) Donats dos conjunts qualssevol A i B, si $A \subset B$, llavors

$$(\forall x)\,(x \in A \Longrightarrow x \in B)$$

A més, si $B \subset A$, llavors

$$(\forall x)\,(x \in B \Longrightarrow x \in A)$$

Des del punt de vista lògic, de les dues implicacions anteriors es dedueix

$$x \in A \Longleftrightarrow x \in B$$

per a tot x. Per tant, per definició d'igualtat de conjunts, $A = B$.
(3) Donats tres conjunts qualssevol A, B i C, si $A \subset B$, llavors

$$x \in A \Longrightarrow x \in B$$

per a tot x. A més, si $B \subset C$, llavors

$$x \in B \Longrightarrow x \in C$$

per a tot x. Des del punt de vista lògic, de les dues implicacions anteriors es dedueix

$$x \in A \Longrightarrow x \in C$$

per a tot x, i per tant, per definició, es compleix $A \subset C$. $\square$

Exercici 2.8. Donades les següents condicions:

$$P(x): \ x \text{ és múltiple de } 6$$

i

$$Q(x): \ x \text{ és múltiple de } 3$$

(a) Demostra que per a tot $x \in \mathbb{Z}$ es compleix la següents implicació

$$P(x) \implies Q(x)$$

i (b) si

$$A = \{x \in \mathbb{Z} : P(x)\} \quad \text{i} \quad B = \{x \in \mathbb{Z} : Q(x)\}$$

quins de les següents relacions és correcte $A \subset B$ o $B \subset A$?

Solució: (a) És evident que tot nombre enter que sigui múltiple de 6 és també múltiple de 3. Per tant, la implicació lògica següent

$$P(x) \implies Q(x)$$

és certa per a tot $x \in \mathbb{Z}$.
(b) Com que, per a tot $x \in \mathbb{Z}$ es compleixen

$$x \in A \iff P(x) \quad \text{i} \quad x \in B \iff Q(x)$$

i, segons l'apartat anterior,

$$P(x) \implies Q(x)$$

llavors,

$$x \in A \Longrightarrow x \in B$$

i, com a conseqüència, $A \subset B$. $\square$

Exercici 2.9. Donats els següents intervals de la recta real

$$A = (-2, 5] \quad \text{i} \quad B = [1, 9]$$

Determina els conjunts $A \cap B$, $A \cup B$, $A - B$ i $B - A$.

Solució: Es té que $A \cap B = [1, 5]$, $A \cup B = (-2, 9]$, $A - B = (-2, 1)$ i $B - A = (5, 9]$.
$\square$

Exercici 2.10. Una companyia d'assegurances té una cartera de clients U i tracta d'estudiar algunes característiques d'aquests. Sigui A el conjunt d'adults, B el de dones i C el dels clients casats. (a) Descriu els següents conjunts: $\complement A$, $\complement B$, $\complement C$, $B \cap \complement A$, $A \cap B$, $A \cup B$ i $B \cap \complement C$. (b) Expressa mitjançant conjunts les següents enunciats: (1) Adults casats, (2) Homes menors no casats i (3) Menors o homes casats.

Solució: (a) Per definició de complementari d'un conjunt, si A és el conjunt d'adults, B el de dones i C el dels clients casats, llavors $\complement A$ és el conjunt de menors, $\complement B$ el d'homes i $\complement C$ el dels no casats. Com que

$$x \in B \cap \complement A \iff x \in B \text{ i } x \in \complement A$$

llavors $B \cap \complement A$ és el conjunt de dones menors. És clar que $A \cap B$ és el conjunt de dones adultes, i, $A \cup B$ és el conjunt de dones o homes adults. Com que

$$x \in B \cap \complement C \iff x \in B \text{ i } x \in \complement C$$

llavors $B \cap \complement C$ és el conjunt de dones no casades.
(b) Com que A és el conjunt d'adults i C el dels casats, llavors $A \cap C$ és el conjunt d'adults casats. És clar que el conjunt d'homes menors no casats és

$$\complement B \cap \complement A \cap \complement C$$

Finalment, el conjunt de menors o homes casats és

$$\complement A \cup (\complement B \cap C)$$

$\square$

Exercici 2.11. Donats tres conjunts qualssevol A, B i C, demostra que es compleixen les següents relacions:

1. $A \cup A = A$ i $A \cap A = A$
2. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ i $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
3. $A \cup B = B \cup A$ i $A \cap B = B \cap A$
4. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup B)$ i $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
5. $A \cup (B \cap A) = A$ i $A \cap (B \cup A) = A$
6. $A \cup \emptyset = A$ i $A \cap \emptyset = \emptyset$

Solució: Per a demostrar igualtats de conjunts hi ha dos mètodes. El primer consisteix a utilitzar la propietat antisimètrica de la relació d'inclusió:

$$A = B \iff A \subset B \text{ i } B \subset A$$

i, el segon, consisteix a expressar primer les igualtats com a enunciats de lògica proposicional i després comprovar que es tracten de tautologies. Utilitzarem aquí tots dos mètodes per a provar les igualtats indicades.
(1) És clar que $A \cup A = A$ i $A \cap A = A$ s'expressen com els següents enunciats

$$x \in A \text{ o } x \in A \iff x \in A$$

i

$$x \in A \text{ i } x \in A \iff x \in A$$

traduïts com a expressions formals de la lògica d'enunciats, tenim

$$p \vee p \longleftrightarrow p \quad \text{i} \quad p \wedge p \longleftrightarrow p$$

on p està en lloc de l'enunciat $x \in A$. Per a provar que són tautologies hem de construir les taules de veritat de totes dues proposicions i comprovar que en l'última columna són tots 1 (valor de veritat). Així, tenim

p	$p \wedge p$	$(p \wedge p) \longleftrightarrow p$
1	1	1
0	0	1

p	$p \vee p$	$(p \vee p) \longleftrightarrow p$
1	1	1
0	0	1

i

p	$p \wedge p$	$(p \wedge p) \longleftrightarrow p$
1	1	1
0	0	1

on 0 és el valor de falsedat. Per tant, totes dues igualtats són vertaderes.
(2) És clar que $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ i $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ s'expressen com els següents enunciats

$$x \in A \text{ o } (x \in B \text{ o } x \in C) \iff (x \in A \text{ o } x \in B) \text{ o } x \in C$$

i

$$x \in A \text{ i } (x \in B \text{ i } x \in C) \iff (x \in A \text{ i } x \in B) \text{ i } x \in C$$

que traduïts com a expressions formals de la lògica d'enunciats, tenim

$$p \vee (q \vee r) \longleftrightarrow (p \vee q) \vee r$$

i

$$p \wedge (q \wedge r) \longleftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$$

on p està en lloc de $x \in A$, q en lloc de $x \in B$, i r en lloc de $x \in C$. Per a provar que són tautologies hem de construir les taules de veritat de totes dues proposicions i comprovar que en l'última columna són tots 1. Així, tenim

p	q	r	$p \vee q$	$q \vee r$	$p \vee (q \vee r)$	$(p \vee q) \vee r$	$[p \vee (q \vee r)] \longleftrightarrow [(p \vee q) \vee r]$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	1

i

p	q	r	$p \wedge q$	$q \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$	$(p \wedge q) \wedge r$	$[p \wedge (q \wedge r)] \longleftrightarrow [(p \wedge q) \wedge r]$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0	0	1
0	1	1	0	1	0	0	1
0	1	0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	1

Per tant, totes dues igualtats són vertaderes.
(3) És clar que $A \cup B = B \cup A$ i $A \cap B = B \cap A$ s'expressen com els següents enunciats

$$x \in A \text{ o } x \in B \iff x \in B \text{ o } x \in A$$

i

$$x \in A \text{ i } x \in B \iff x \in B \text{ i } x \in A$$

traduïts com a expressions formals de la lògica d'enunciats, tenim

$$p \vee q \longleftrightarrow q \vee p \quad \text{i} \quad p \wedge q \longleftrightarrow q \wedge p$$

on p està en lloc de l'enunciat $x \in A$ i q en lloc de $x \in B$. Per a provar que són tautologies hem de construir les taules de veritat de totes dues proposicions i comprovar que en l'última columna són tots 1.

p	q	$p \vee q$	$q \vee p$	$(p \vee q) \longleftrightarrow (q \vee p)$
1	1	1	1	1
1	0	1	1	1
0	1	1	1	1
0	0	0	0	1

i

p	q	$p \wedge q$	$q \wedge p$	$(p \wedge q) \longleftrightarrow (q \wedge p)$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	0	0	1
0	0	0	0	1

Per tant, totes dues igualtats són vertaderes.
(4) Aquí, utilitzarem el primer mètode per a provar $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup B)$ i $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Així, tenim

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup B) \iff \begin{cases} A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup B) \\ (A \cup B) \cap (A \cup B) \subset A \cup (B \cap C) \end{cases}$$

Com que

$$\begin{aligned} x \in A \cup (B \cap C) &\iff x \in A \text{ o } x \in B \cap C \\ &\iff x \in A \text{ o } (x \in B \text{ i } x \in C) \\ &\iff (x \in A \text{ o } x \in B) \text{ i } (x \in A \text{ o } x \in C) \\ &\iff x \in A \cup B \text{ i } x \in A \cup C \\ &\iff x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{aligned}$$

Per tant, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup B)$.
D'altra banda, tenim

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \iff \begin{cases} A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ (A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C) \end{cases}$$

Com que

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \cup C) &\iff x \in A \text{ i } x \in B \cup C \\ &\iff x \in A \text{ i } (x \in B \text{ o } x \in C) \\ &\iff (x \in A \text{ i } x \in B) \text{ o } (x \in A \text{ i } x \in C) \\ &\iff x \in A \cap B \text{ o } x \in A \cap C \\ &\iff x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{aligned}$$

Per tant, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
(5) Com que

$$\begin{aligned} x \in A \cup (B \cap A) &\iff x \in A \text{ o } x \in B \cap A \\ &\iff x \in A \text{ o } (x \in B \text{ i } x \in A) \\ &\iff (x \in A \text{ o } x \in B) \text{ i } (x \in A \text{ o } x \in A) \\ &\iff (x \in A \text{ o } x \in B) \text{ i } x \in A \\ &\iff x \in A \end{aligned}$$

Aleshores, $A \cup (B \cap A) = A$. D'altra banda,

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \cup A) &\iff x \in A \text{ i } x \in B \cup A \\ &\iff x \in A \text{ i } (x \in B \text{ o } x \in A) \\ &\iff (x \in A \text{ i } x \in B) \text{ o } (x \in A \text{ i } x \in A) \\ &\iff (x \in A \text{ i } x \in B) \text{ o } x \in A \\ &\iff x \in A \end{aligned}$$

Per tant, $A \cap (B \cup A) = A$.
(6) Com que

$$\begin{aligned} x \in A \cup \emptyset &\iff x \in A \text{ o } x \in \emptyset \\ &\iff x \in A \end{aligned}$$

Per tant, $A \cup \emptyset = A$. D'altra banda, si fos $A \cap \emptyset$ no buit, existiria un element x tal que $x \in A$ i $x \in \emptyset$, però això no és possible, ja que $x \in \emptyset$ és una relació que sempre és falsa. Per tant, no pot haver-hi cap element en $A \cap \emptyset$ i, per tant, $A \cap \emptyset = \emptyset$. $\square$

Exercici 2.12. Prenent com univers $\mathbb{R}$, determina els complementaris dels següents conjunts: $(2, +\infty)$, $(-\infty, 0]$, $(-3, 1]$ i $[0.5, 0.7] \cup [2, 3)$.

Solució: Per definició de complementari d'un conjunt tenim

$$\begin{aligned} \complement(2, +\infty) &= (-\infty, 2] \\ \complement(-\infty, 0] &= (0, +\infty) \\ \complement(-3, 1] &= (-\infty, -3] \cup (1, +\infty) \\ \complement\left([0.5, 0.7] \cup [2, 3)\right) &= (-\infty, 0.5) \cup (0.7, 2) \cup [3, +\infty) \end{aligned}$$

$\square$

Exercici 2.13. Si E és el conjunt referencial, demostra que es compleixen les següents propietats:

1. $\complement E = \emptyset$ i $\complement\emptyset = E$
2. $\complement\left(\complement A\right) = A$
3. $\complement\left(A \cup B\right) = \complement A \cap \complement B$
4. $\complement\left(A \cap B\right) = \complement A \cup \complement B$

Solució: (1) Si $\complement E$ no fos buit, existiria un element x tal que $x \notin E$, però això no és possible perquè E és l'univers. Per tant, no pot haver-hi cap element en $\complement E$ i, com a consequència, $\complement E = \emptyset$.
Com que

$$\begin{aligned} x \in \complement\emptyset &\iff x \in E \text{ i } x \notin \emptyset \\ &\iff x \in E \end{aligned}$$

Per tant, $\complement\emptyset = E$.
(2) És clar que $\complement\left(\complement A\right) = A$ es tradueix com la següent expressió formal de la lògica d'enunciats,

$$\neg\neg p \longleftrightarrow p$$

on p està en lloc de l'enunciat $x \in A$. Per a provar que és una tautologia hem de construir la taula de veritat i comprovar que en l'última columna són tots 1. Així, tenim

p	$\neg p$	$\neg\neg p$	$\neg\neg p \longleftrightarrow p$
1	0	1	1
0	1	0	1

Per tant, la igualtat $\complement\left(\complement A\right) = A$ és certa.
(3) Com que

$$\begin{aligned} x \in \complement\left(A \cup B\right) &\iff x \in E \text{ i } x \notin A \cup B \\ &\iff x \in E \text{ i } (x \notin A \text{ i } x \notin B) \\ &\iff (x \in E \text{ i } x \notin A) \text{ i } (x \in E \text{ i } x \notin B) \\ &\iff x \in \complement A \text{ i } x \in \complement B \\ &\iff x \in \complement A \cap \complement B \end{aligned}$$

Per tant, $\complement\left(A \cup B\right) = \complement A \cap \complement B$.
(4) És clar que $\complement\left(A \cap B\right) = \complement A \cup \complement B$ es tradueix com la següent expressió formal de la lògica d'enunciats,

$$\neg(p \wedge q) \longleftrightarrow \neg p \vee \neg q$$

on p està en lloc de l'enunciat $x \in A$ i q de $x \in B$. Per a provar que és una tautologia hem de construir la taula de veritat i comprovar que en l'última columna són tots 1. Així, tenim

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p \vee \neg q$	$\neg(p \wedge q) \longleftrightarrow \neg p \vee \neg q$
1	1	0	0	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1	1

Per tant, la igualtat $\complement\left(A \cap B\right) = \complement A \cup \complement B$ és vertadera. $\square$

Exercici 2.14. Suposant que E és el conjunt referencial, simplifica les següents expressions:

1. $(A \cap \complement B) \cap (\complement A \cap \complement B)$
2. $(A \cap B \cap C) \cup (\complement A \cup \complement B \cup \complement C)$
3. $\big[A \cap (\complement A \cup B)\big] \cup [B \cap (B \cup C)] \cup B$

Solució: En tots aquests apartats aplicarem les propietats de la unió i intersecció entre conjunts i del complementari d'un conjunt.
(1) Així tenim

$$\begin{aligned}(A \cap \complement B) \cap (\complement A \cap \complement B) &= (A \cap \complement B) \cap (\complement B \cap \complement A)\\ &= A \cap (\complement B \cap \complement B) \cap \complement A\\ &= A \cap \complement B \cap \complement A\\ &= A \cap (\complement B \cap \complement A)\\ &= A \cap (\complement A \cap \complement B)\\ &= (A \cap \complement A) \cap \complement B\\ &= \emptyset \cap \complement B\\ &= \emptyset\end{aligned}$$

(2) Així, tenim

$$\begin{aligned}(A \cap B \cap C) \cup (\complement A \cup \complement B \cup \complement C) &= (A \cap B \cap C) \cup (\complement\,(A \cap B) \cup \complement C)\\ &= (A \cap B \cap C) \cup \complement\,((A \cap B) \cap C)\\ &= (A \cap B \cap C) \cup \complement\,(A \cap B \cap C)\\ &= E\end{aligned}$$

(3) Així, tenim

$$\begin{aligned}\big[A \cap (\complement A \cup B)\big] \cup [B \cap (B \cup C)] \cup B &= \big[(A \cap \complement A) \cup (A \cap B)\big] \cup [(B \cap B) \cup (B \cap C)] \cup B\\ &= \emptyset \cup (A \cap B) \cup B \cup (B \cap C) \cup B\\ &= (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup B\\ &= (A \cap B) \cup [(B \cap C) \cup B]\\ &= (A \cap B) \cup B\\ &= B\end{aligned}$$

□

Exercici 2.15. Si $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 4\}$ i $C = \{a\}$, determina els conjunts següents: (a) $A \times (B \cup C)$; (b) $(C \times A) \cap (C \times B)$.

Solució: (a) És clar que
$$B \cup C = \{2, 4, a\}$$
Llavors, segons la definició de producte cartesià de dos conjunts, obtenim

$$A \times (B \cup C) = \{(1, 2), (1, 4), (1, a), (2, 2), (2, 4), (2, a)\}$$

(b) De la mateixa manera obtenim

$$C \times A = \{(a,1),(a,2)\} \quad \text{y} \quad C \times B = \{(a,2),(a,4)\}$$

Després,

$$(C \times A) \cap (C \times B) = \{(a,2)\}$$

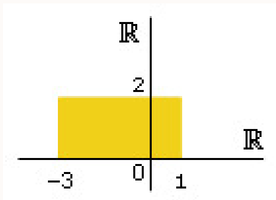
□

Exercici 2.16. Representa gràficament el conjunt $A \times B$, sabent que $A = \{x \in \mathbb{R} : -3 \leq x \leq 1\}$ i $B = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 2\}$.

Solució: Segons la definició de producte cartesià de dos conjunts, obtenim

$$A \times B = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : -3 \leq x \leq 1 \ \text{ i } \ 0 \leq y \leq 2\}$$

Gràficament, aquest conjunt representa la regió del pla assenyalada en la figura següent



□

2.2 Relacions

Exercici 2.17. Estudiar les propietats de les següents relacions:

1. "Ser divisor de" en el conjunt dels nombres naturals.
2. "Ser quadrat de" en el conjunt dels nombres naturals.
3. "Tenir igual àrea que" en el conjunt dels triangles del pla.
4. "Ser perpendicular" en el conjunt de les rectes de l'espai.
5. "Tenir el mateix color d'ulls que" en el conjunt dels habitants de la terra.

Solució: (1) En $\mathbb{N}$ considerem la relació "Ser divisor de". És evident que la relació és reflexiva (Tot nombre natural és divisor de si mateix) i, per tant, no és irreflexiva ni asimètrica. Tampoc és simètrica (Per exemple, 3 és divisor d'i, 6 en canvi, 6 no és divisor de 3). És evident que la relació és antisimètrica i transitiva.
(2) En $\mathbb{N}$ considerem la relació "Ser quadrat de". És evident que la relació no és reflexiva (Per exemple, 3 no és quadrat de 3). Tampoc és irreflexiva ja que 1 és quadrat de si mateix. No és asimètrica ni simètrica però, en canvi, sí que és antisimètrica. No és transitiva (Si $a = b^2$ i $b = c^2$, llavors $a = (c^2)^2 = c^4 \neq c^2$).
(3) En el conjunt dels triangles del pla considerem la relació "Tenir igual àrea que". És evident que aquesta relació és reflexiva, simètrica i transitiva.
(4) En el conjunt de les rectes de l'espai considerem la relació "Ser perpendicular". És evident que la relació no és reflexiva (Cap recta és perpendicular a si mateixa). És irreflexiva, simètrica i no transitiva, com pot comprovar-se de seguida.
(5) En conjunt dels habitants de la terra considerem la relació "Tenir el mateix color d'ulls que". És evident que aquesta relació és reflexiva, simètrica i transitiva. □

Exercici 2.18. De les següents relacions binàries R, esbrina quins són d'equivalència i descriu les seves classes: (a)En $\mathbb{R}$, $(x, y) \in R$ si i només si $|x - y| < 1$; (b) En $\mathbb{R} - \{0\}$, $(x, y) \in R$ si i només si $\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$.

Solució: (a) La relació és reflexiva, doncs, per a tot $x \in \mathbb{R}$ es compleix

$$|x - x| = 0 < 1$$

També és simètrica, doncs, si $|x - y| < 1$, llavors

$$|x - y| = |-(x - y)| = |y - x| < 1$$

En canvi, la relació no és transitiva, ja que $(-1, -0.5) \in R$ i $(-0.5, 0.25) \in R$ i, en canvi, $(-1, 0.25) \notin R$ perquè

$$|-1 - 0.25| = 1.25 > 1$$

Per consegüent, aquesta relació no és d'equivalència.
(b) La relació és evidentment reflexiva, simètrica i transitiva. Per tant, la relació és d'equivalència. La classe d'un element arbitrari $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ és

$$\begin{aligned}[a] &= \left\{x \in \mathbb{R} - \{0\} : \frac{x}{a} \in \mathbb{Q}\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} - \{0\} : \frac{x}{a} = q \ \text{ i } \ q \in \mathbb{Q} - \{0\}\right\} \\ &= \{a \cdot q : q \in \mathbb{Q} - \{0\}\}\end{aligned}$$

Per tant, si $b \in \mathbb{Q} - \{0\}$, llavors

$$[b] = \{b \cdot q : q \in \mathbb{Q} - \{0\}\} = \mathbb{Q} - \{0\}$$

En resum, hi ha dos tipus de classes d'equivalència: les classes de la forma $[a]$ amb $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ i la classe formada per tots els nombres racionals no nuls. □

Exercici 2.19. En $\mathbb{Z}$ es defineix la següent relació

$$x \equiv y \iff x - y \text{ és múltiple de } 5.$$

(a) Demostra que $\equiv$ és una relació d'equivalència, (b) troba el conjunt quocient $\mathbb{Z}/\equiv$; (c) calcula un representant x de la classe a la que pertany 127 que compleixi $8 < x < 15$ i un representant y a la que pertany -34 que compleixi $5 < y < 10$.

Solució: (a) La relació $\equiv$ és d'equivalència, perquè es compleixen les propietats

1. Reflexiva: $x \equiv x$, per a tot $x \in \mathbb{Z}$, ja que $x - x = 0$ és múltiple de 5.
2. Simètrica: $x \equiv y$ implica $y \equiv x$ per a tot $x, y \in \mathbb{Z}$, ja que si $x - y$ és múltiple de 5, també ho és $-(x - y) = y - x$.
3. Transitiva: $x \equiv y$ i $y \equiv z$ implica $x \equiv z$ per a tot $x, y, z \in \mathbb{Z}$, ja que si $x - y$ i $y - z$ són múltiples de 5, també ho és la seva suma $x - z$.

(b) Considerem un nombre enter arbitrari a i determinem la seva classe d'equivalència. Tenim,

$$\begin{aligned}[a] &= \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv a\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z} : x - a \ \text{ és múltiple de } 5\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z} : x - a = 5k \ \text{ i } \ k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{a + 5k : k \in \mathbb{Z}\}\,.\end{aligned}$$

Per tant, distingim 5 classes d'equivalència:

$$\begin{aligned}[0] &= \{0 + 5k : k \in \mathbb{Z}\} = \{..., -10, -5, 0, 5, 10, ...\} \\ [1] &= \{1 + 5k : k \in \mathbb{Z}\} = \{..., -9, -4, 1, 6, 11, ...\} \\ [2] &= \{2 + 5k : k \in \mathbb{Z}\} = \{..., -8, -3, 2, 7, 12, ...\} \\ [3] &= \{3 + 5k : k \in \mathbb{Z}\} = \{..., -7, -2, 3, 8, 13, ...\} \\ [4] &= \{4 + 5k : k \in \mathbb{Z}\} = \{..., -6, -1, 4, 9, 14, ...\}\end{aligned}$$

Per tant, el conjunt quocient és

$$\mathbb{Z}/\equiv\, = \{[0]\,, [1]\,, [2]\,, [3]\,, [4]\}\,.$$

(c) És clar que

$$127 = 2 + 5 \cdot 25$$

i, per tant, $127 \in [2]$. Aleshores, un representant x de la classe a la que pertany 127 que compleixi $8 < x < 15$ és 12. De la mateixa manera, observa primer que

$$-34 = -4 + 5 \cdot (-6)$$

i, per tant, $-34 \in [-4] = [1]$. Per tant, un representant y a la que pertany -34 que compleixi $5 < y < 10$ és 6. □

Exercici 2.20. Sigui $A = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ i considerem en el conjunt $A \times A$ la següent relació

$$(a, b) \sim (c, d) \iff a + d = b + c$$

(a) Demostra que $\sim$ és una relació d'equivalència i (b) troba el conjunt quocient.

Solució: (a) La relació $\sim$ és d'equivalència, doncs es compleixen les propietats:

- Reflexiva: En efecte, per a tot $(a, b) \in A \times A$, es compleix $a + b = b + a$ i, per tant, $(a, b) \sim (a, b)$.
- Simètrica: En efecte, per a tot $(a, b), (c, d) \in A \times A$, si $(a, b) \sim (c, d)$, és a dir si $a + d = b + c$, llavors $c + b = d + a$ i, per tant, $(c, d) \sim (a, b)$.
- Transitiva: En efecte, per a tot $(a, b), (c, d), (e, f) \in A \times A$, si $(a, b) \sim (c, d)$ i $(c, d) \sim (e, f)$, és a dir si

  $$\begin{aligned}a + d &= b + c \\ c + f &= d + e\end{aligned}$$

  llavors, sumant membre a membre totes dues igualtats, obtenim

  $$a + d + c + f = b + c + d + e$$

  i d'aquí, simplificant, obtenim

  $$a + f = b + e$$

  i, per tant, $(a, b) \sim (e, f)$.

(b) Considerem un element arbitrari (a, b) de $A \times A$ i determinem la seva classe d'equivalència. Observa primer que

$$(a, b) \sim (a + k, b + k)$$

per a tot $k \in A$ i, per tant,

$$[(a, b)] = [(a + k, b + k)]$$

per a tot $k \in A$. D'aquí, obtenim que

$$\begin{gathered}
[(0,0)] = \{(0,0),(1,1),(2,2),...\} \\
[(1,0)] = \{(1,0),(2,1),(3,2),...\} \\
[(0,1)] = \{(0,1),(1,2),(2,3),...\} \\
[(2,0)] = \{(2,0),(3,1),(4,2),...\} \\
[(0,2)] = \{(0,2),(1,3),(2,4),...\} \\
\vdots
\end{gathered}$$

són classes d'equivalència d'aquesta relació.
En general,

- si $a > b$, llavors es compleix
$$[(a, b)] = [(a - b, 0)]$$
- si $a = b$, llavors
$$[(a, b)] = [(0, 0)]$$
- si $a < b$, llavors
$$[(a, b)] = [(0, b - a)]$$

Per consegüent, hi ha tantes classes d'equivalència en el conjunt quocient com a nombres enters.

$$\begin{array}{ccc}
[(0,0)] & \text{es correspon amb} & 0 \\
[(1,0)] & & 1 \\
[(0,1)] & & -1 \\
[(2,0)] & & 2 \\
[(0,2)] & & -2 \\
\vdots & & \vdots
\end{array}$$

□

Exercici 2.21. En el conjunt $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\})$ es defineix la següent relació

$$(a, b) \sim (c, d) \iff ad = bc$$

(a) Demostra que $\sim$ és una relació d'equivalència i (b) Troba el conjunt quocient.

Solució: (a) La relació $\sim$ és d'equivalència, perquè es compleixen les propietats:

- Reflexiva: En efecte, per a tot $(a, b) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\})$ es compleix $ab = ba$ i, per tant, $(a, b) \sim (a, b)$.

- Simètrica: En efecte, per a tot $(a,b),(c,d) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\})$, si $(a,b) \sim (c,d)$, és a dir si $ad = bc$, llavors $cb = da$ i, per tant, $(c,d) \sim (a,b)$.
- Transitiva: En efecte, per a tot $(a,b),(c,d),(e,f) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\})$, si $(a,b) \sim (c,d)$ y $(c,d) \sim (e,f)$, o sigui si

$$\begin{aligned} ad &= bc \\ cf &= de \end{aligned}$$

  Llavors, multiplicat la primera igualtat per $f \neq 0$, s'obté

$$adf = bcf$$

  D'aquí, mitjançant la segona igualtat, obtenim

$$adf = bde$$

  Ara, dividint per $d \neq 0$, es dedueix

$$af = be$$

  i, per tant, $(a,b) \sim (e,f)$.

(b) Considerem un element arbitrari (a,b) de $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\})$ i determinem la seva classe d'equivalència. Observa primer que

$$(a,b) \sim (ak, bk)$$

per tot $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$ i, per tant,

$$[(a,b)] = [(ak, bk)]$$

per tot $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$. D'aquí, s'obté

$$\begin{aligned} [(0,1)] &= \{..., (0,-2), (0,-1), (0,1), (0,2), ...\} \\ [(1,1)] &= \{..., (-2,-2), (-1,-1), (1,1), (2,2), ...\} \\ [(1,2)] &= \{..., (-2,-4), (-1,-2), (1,2), (2,4), ...\} \\ [(2,1)] &= \{..., (-4,-2), (-2,-1), (2,1), (4,2), ...\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

són classes d'equivalència d'aquesta relació.
En general, hi ha tantes classes d'equivalència en el conjunt quocient com a números de la forma a/b, amb $a \in \mathbb{Z}$ i $b \in \mathbb{Z} - \{0\}$, és a dir, com a nombres racionals.

$$\begin{array}{lcl} [(0,1)] & \text{es correspon amb} & ... = \frac{0}{-1} = \frac{0}{1} = ... \\ [(1,1)] & & ... = \frac{-1}{-1} = \frac{1}{1} = ... \\ [(1,2)] & & ... = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2} = ... \\ [(2,1)] & & ... = \frac{-2}{-1} = \frac{2}{1} = ... \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

$\square$

Exercici 2.22. (a) Demostra que la següent relació

$$x \sim y \iff \text{existeix } n \in \mathbb{Z} \text{ tal que } x, y \in (n-1, n]$$

és d'equivalència en $\mathbb{R}$. Quines són les seves classes d'equivalència? (b) Demostra que els intervals de la forma $(n, n+1]$, amb $n \in \mathbb{Z}$, constitueixen una partició de la recta real.

Solució: (a) La relació $\sim$ és d'equivalència, perquè es compleixen les propietats:

- Reflexiva: Donat qualsevol $x \in \mathbb{R}$, si n és el menor nombre enter que és major o igual que x, llavors $x \in (n-1, n]$ i, per tant, $x \sim x$.
- Simètrica: És evident que $x \sim y$ implica $y \sim x$ per a tot $x, y \in \mathbb{R}$.
- Transitiva: En efecte, si $x \sim y$, llavors existeix $n \in \mathbb{Z}$ tal que $x, y \in (n-1, n]$. A més, si $y \sim z$, llavors també es compleix que $y, z \in (n-1, n]$. Aleshores, $x, z \in (n-1, n]$ i, per tant, $x \sim z$.

És clar que la classe d'equivalència de qualsevol $a \in \mathbb{R}$ és l'interval $(n-1, n]$ tal que $a \in (n-1, n]$. A més, qualsevol altre nombre real d'aquest interval està relacionat amb a i, per tant, la seva classe coincideix amb la de a. En definitiva, les classes del conjunt quocient són els intervals de la forma $(n-1, n]$ amb $n \in \mathbb{Z}$.
(b) En tractar-se d'una relació d'equivalència, el conjunt quocient format pels intervals de la forma $(n-1, n]$, amb $n \in \mathbb{Z}$, constitueixen una partició de $\mathbb{R}$. $\square$

Exercici 2.23. Es considera en $\mathbb{R}$ la relació "menor o igual que"designada per $\leq$. Comprova que $\leq$ és una relació d'ordre. És total o parcial? Hi ha algun element maximal? Hi ha algun element minimal?

Solució: La relació és d'ordre parcial ja que es compleixen les propietats:

- Reflexiva: Per a tot $x \in \mathbb{R}$, és evident que $x \leq x$.
- Antisimètrica: Per a tot $x, y \in \mathbb{R}$, si $x \leq y$ i $y \leq x$, és clar que $x = y$.
- Transitiva: Per a tot $x, y, z \in \mathbb{R}$, si $x \leq y$ i $y \leq z$, llavors és evident que $x \leq z$.

La relació és d'ordre total ja que per a qualsevol parell d'elements $x, y \in \mathbb{R}$ es compleix $x \leq y$ o bé $y \leq x$. És clar que no hi ha elements maximals ni minimals en aquesta relació. $\square$

Exercici 2.24. En el conjunt $\mathcal{P}(A)$ de les parts d'un conjunt donat A es considera la relació d'inclusió $\subset$. Comprova que $\subset$ és una relació d'ordre. És total o parcial? Hi ha algun element maximal? Hi ha algun element minimal?

Solució: La relació és d'ordre parcial ja que es compleixen les propietats:

- Reflexiva: Per a tot $X \in \mathcal{P}(A)$, és evident que $X \subset X$.
- Antisimètrica: Per a tot $X, Y \in \mathcal{P}(A)$, si $X \subset Y$ i $Y \subset X$, és clar que $X = Y$.
- Transitiva: Per a tot $X, Y, Z \in \mathcal{P}(A)$, si $X \subset Y$ i $Y \subset Z$, llavors és evident que $X \subset Z$.

La relació no és d'ordre total ja que, per exemple, si $X \in \mathcal{P}(A)$, llavors $A - X \in \mathcal{P}(A)$ i X no és subconjunt de $A - X$ ni $A - X$ és subconjunt de X. És evident que A és un element maximal i $\emptyset$ és un element minimal en $\mathcal{P}(A)$ segons aquesta relació. $\square$

Exercici 2.25. Es considera $\mathbb{R}$ amb l'ordre usual $\leq$ i els subconjunts següents: (1) $\mathbb{Z}$; (2) $(0,2] \cup (3,5]$; (3) $(-\infty,-2) \cup [13,19)$. Calcula (a) els extrems superiors i inferiors i (b) els màxims i mínims, si existeixen.

Solució: És clar que

	$\mathbb{Z}$	$(0,2] \cup (3,5]$	$(-\infty,-2) \cup [13,19)$
Suprem	No existeix	5	19
Ínfim	No existeix	0	No existeix
Màxim	No existeix	5	No existeix
Mínim	No existeix	No existeix	No existeix

$\square$

Exercici 2.26. En el conjunt $A = \{1,2,3,4,5,6,15,60\}$ es defineix la relació

$$a \mid b \iff a \text{ és divisor de } b$$

(a) Demostra que $\mid$ és una relació d'ordre en A. És total o parcial? (b) Troba el màxim, mínim, suprem i ínfim del conjunt $B = \{2,3,6,15\}$. (c) Calcula el màxim, mínim, suprem i ínfim de A . (d) Hi ha elements maximals i minimals en A?

Solució: (a) La relació $\mid$ és d'ordre, ja que es compleixen les propietats:

- Reflexiva: Per a tot $x \in A$ és evident que es compleix $x \mid x$.
- Antisimètrica: Per a tot $x, y \in A$, si $x \mid y$ i $y \mid x$, és clar que $x = y$.
- Transitiva: Per a tot $x, y, z \in A$, si $x \mid y$ i $y \mid z$, és també clar que $x \mid z$.

La relació no és d'ordre total ja que $4, 5 \in A$ i $4 \nmid 5$ ni $5 \nmid 4$.
(b) Una representació gràfica d'aquesta relació és

$$\begin{array}{ccccc}
 & & 60 & & \\
 & / & | & \backslash & \\
4 & & 6 & & 15 \\
| & / & | & / & | \\
2 & & 3 & & 5 \\
 & \backslash & | & / & \\
 & & 1 & &
\end{array}$$

A partir d'ella, és evident que $\sup B = 60$, $\inf B = 1$, i no existeixen màxim ni mínim de B.
(c) A partir del mateix gràfic de l'apartat anterior, és clar que $\sup A = \max A = 60$ i $\inf A = \min A = 1$.
(d) Els elements maximal i minimal de A són, respectivament, 60 i 1. $\square$

Exercici 2.27. Es considera en el conjunt $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ la següent relació

$$R = \{(6,5),(5,1),(1,2),(6,4),(4,1),(4,2),(3,2),(5,2),(6,1),(6,2)\} \cup \Delta_A$$

on Δ_A és la relació d'identitat en A. (a) Representa gràficament aquesta relació. (b) Calcula cotes inferiors i superiors de $B = \{1,4,5\}$ i determina $\sup B$ i $\inf B$. (c) Calcula els elements maximals i minimals d'A. Hi ha màxim i mínim d'A?

Solució: (a) Una representació gràfica de la relació és

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & 2 & & \\
 & / & | & \backslash & \\
1 & & | & & 3 \\
| & \backslash & | & & \\
5 & & 4 & & \\
 & \backslash & | & & \\
 & & 6 & &
\end{array}
$$

(b) Per al conjunt B només hi ha una cota inferior 6 i té 1 i 2 com a cotes superiors. Llavors, és clar que $\sup B = 1$ i $\inf B = 6$.
(c) Per al conjunt A, observant el gràfic de la relació, es té que 3 i 6 són elements minimals i només hi ha un element maximal 2. Per tant, no hi ha mínim d'A i $\max A = 2$. $\square$

Exercici 2.28. Es considera el conjunt ordenat $\mathbb{Q}$ per la relació d'ordre usual $\leq$. Quin subconjunt de $\mathbb{Q}$ està ben ordenat? (a) $\mathbb{Q}$; (b) Els nombres enters majors que 9; (c) Els nombres enters parells menors que 0; i (d) Els nombres enters positius múltiples de 5.

Solució: (a) $\mathbb{Q}$ no està ben ordenat ja que no té element mínim.
(b) El conjunt de nombres enters majors que 9 està ben ordenat perquè és un subconjunt de $\mathbb{N}$, que està ben ordenat.
(c) El conjunt de nombres enters parells menors que 0 no està ben ordenat ja que no té element mínim.
(d) El conjunt de nombres enters positius múltiples d'està 5 ben ordenat perquè és un subconjunt de $\mathbb{N}$, que està ben ordenat. $\square$

2.3 Aplicacions

Exercici 2.29. Donats $A = \{1, 2, 3\}$ i $B = \{2, 3, 4, 5\}$, és aplicació de A en B la relació entre A i B definida per

$$\{(1, 3), (2, 2), (1, 5), (3, 5)\}$$

Raona la resposta.

Solució: No és aplicació ja que $1 \in A$ està relacionat amb dos elements de B i això no pot passar. $\square$

Exercici 2.30. Estudia si les relacions binàries següents en $\mathbb{R}$ són o no aplicacions. Quan ho siguin, calcula el seu domini i imatge. (a) $R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y^2 - x = 0\}$; (b) $R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x + y = 2\}$; (c) $R_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 + y^2 = 1\}$; i (d) $R_4 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y = \sqrt{4 - x^2}\right\}$.

Solució: (a) La relació R_1 no és aplicació ja que $(1, 1), (1, -1) \in R_1$.
(b) La relació R_2 és aplicació. És clar que defineix l'aplicació $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mitjançant $f(x) = 2 - x$. El domini de R_2 és $\mathbb{R}$ i la imatge és també $\mathbb{R}$.
(c) La relació R_3 no és aplicació ja que $(0, 1), (0, -1) \in R_3$.
(d) La relació R_4 és aplicació. És clar que defineix l'aplicació $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mitjançant $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$. El domini de R_4 és $[-2, 2]$ i la imatge és $[0, 2]$. $\square$

Exercici 2.31. Es considera l'aplicació $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida per $f(x) = 3x + 1$. (a) Calcula les imatges de $-2, 0, 3$, i les antiimatges, si existeixen, de $-5, 4/5$ i 9. Quins són els elements que tenen antiimatge? (b) Contesta a les mateixa qüestions prenent com a conjunt de sortida $\mathbb{R}$ en lloc de $\mathbb{Z}$

Solució: (a) Les imatges de $-2, 0$ i 3 són:

$$\begin{aligned} &f(-2) = 3 \cdot (-2) + 1 = -5 \\ &f(0) = 3 \cdot 0 + 1 = 1 \\ &f(3) = 3 \cdot 3 + 1 = 10 \end{aligned}$$

Calculem les antiimatges de $-5, 4/5$ i 9. Com que

$$\begin{aligned} f(x) = -5 \quad &\Longrightarrow \quad 3x + 1 = -5 \\ &\Longrightarrow \quad x = -2 \end{aligned}$$

Llavors -2 és antiimatge de -5. De la mateixa manera,

$$\begin{aligned} f(x) = \tfrac{4}{5} \quad &\Longrightarrow \quad 3x + 1 = \tfrac{4}{5} \\ &\Longrightarrow \quad x = -\tfrac{1}{15} \end{aligned}$$

Per tant, no existeix antiimatge de $4/5$ ja que $-1/15 \notin \mathbb{Z}$. Finalment,

$$\begin{aligned} f(x) = 9 \quad &\Longrightarrow \quad 3x + 1 = 9 \\ &\Longrightarrow \quad x = \tfrac{8}{3} \end{aligned}$$

Per tant, tampoc existeix antiimatge de 9 ja que $8/3 \notin \mathbb{Z}$.
Observa que

$$\begin{aligned} f(x) = y \quad &\Longrightarrow \quad 3x + 1 = y \\ &\Longrightarrow \quad x = \frac{y-1}{3} \end{aligned}$$

Per tant,

$$\begin{aligned} \frac{y-1}{3} \in \mathbb{Z} \quad &\Longrightarrow \quad y - 1 \text{ és múltiple de } 3 \\ &\Longrightarrow \quad y = 1 + 3k, \text{ amb } k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Per conseqüent, els elements que tenen antiimatge són

$$\{..., -5, -2, 1, 4, 7, ...\}$$

(b) Les respostes són les mateixes que abans però amb la diferència que ara $-1/15 \in \mathbb{R}$ és antiimatge de $4/5$ i $8/3 \in \mathbb{R}$ ho és de 9. A més, els elements que tenen antiimatge és ara tot $\mathbb{R}$. □

Exercici 2.32. Donades les aplicacions $f, g, h : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ definides per $f(x) = x + 2$ $g(x) = 4x$, i $h(x) = x^2 - x$, esbrina si són injectives, exhaustives o bijectivas.

Solució: L'aplicació f és bijectiva. En efecte, és injectiva doncs

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) \quad &\Longrightarrow \quad x + 2 = y + 2 \\ &\Longrightarrow \quad x = y \end{aligned}$$

i també és exhaustiva ja que donat qualsevol $y \in \mathbb{Z}$ tenim

$$\begin{aligned} f(x) = y \quad &\Longrightarrow \quad x + 2 = y \\ &\Longrightarrow \quad x = y - 2 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

i, per tant, cada element $y \in \mathbb{Z}$ té antiimatge $y - 2 \in \mathbb{Z}$.
L'aplicació g és injectiva però no exhaustiva. En efecte, és injectiva doncs

$$\begin{aligned} g(x) = g(y) &\implies 4x = 4y \\ &\implies x = y \end{aligned}$$

En canvi, no és exhaustiva perquè qualsevol nombre enter que no sigui múltiple de 4 no té antiimatge en $\mathbb{Z}$.
Finalment, l'aplicació h no és injectiva ni exhaustiva. En efecte, ja que $h(0) = h(1) = 0$ i $0 \neq 1$, l'aplicació no és injectiva. Tampoc és exhaustiva ja que, per exemple, -1 no té antiimatge per al h no tenir solucions senceres la següent equació de segon grau

$$\begin{aligned} x^2 - x &= -1 \\ x^2 - x + 1 &= 0 \end{aligned}$$

$\square$

Exercici 2.33. Donades les aplicacions $f, g, h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definides per $f(x) = e^x$, $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$, i $h(x) = \cos x$, esbrina si són injectives, exhaustives o bijectivas.

Solució: L'aplicació f és injectiva però no exhaustiva. És injectiva ja que si $x \neq y$, llavors és evident que $e^x \neq e^y$. En canvi, no és exhaustiva ja que $e^x > 0$ per tot $x \in \mathbb{R}$ i, per tant, $\operatorname{Im} f = (0, +\infty) \neq \mathbb{R}$.
L'aplicació g no és injectiva ni exhaustiva. No és injectiva ja que, per exemple , $g(1) = g(-1) = 1/2$ i $1 \neq -1$. Tampoc és exhaustiva ja que evidentment

$$0 < \frac{1}{1 + x^2} < 1$$

per a tot $x \in \mathbb{R}$ i, per tant, $\operatorname{Im} g = (0, 1] \neq \mathbb{R}$.
L'aplicació h no és injectiva ni exhaustiva. No és injectiva ja que, per exemple , $h(0) = h(2\pi) = 1$ i $0 \neq 2\pi$. Tampoc és exhaustiva ja que $-1 \leq \cos x \leq 1$ per a tot $x \in \mathbb{R}$ i, per tant, $\operatorname{Im} h = [-1, 1]$. $\square$

Exercici 2.34. Considerem l'aplicació $f : \mathbb{R} - \{-1, 1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida per

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$$

(a) Si $A = \{-1/2, 0, 1/2\}$, calcula $f(A)$ i $f^{-1}(A)$. (b) Esbrina si f és injectiva o exhaustiva.

Solució: Com que les imatges de $-1/2, 0$ i $1/2$ són

$$\begin{aligned} &f(-\tfrac{1}{2}) = -\tfrac{1}{3} \\ &f(0) = 0 \\ &f(\tfrac{1}{2}) = -\tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

llavors $f(A) = \{-1/3, 0\}$.
Calculem les antiimatges de $-1/2, 0$ i $1/2$. Com que

$$\begin{aligned} f(x) = -\tfrac{1}{2} &\implies \frac{x^2}{x^2 - 1} = -\tfrac{1}{2} \\ &\implies 3x^2 = 1 \\ &\implies x = \pm\tfrac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

deduïm que $-1/\sqrt{3}$ i $1/\sqrt{3}$ són antiimatges de $-1/2$. De la mateixa manera ,

$$\begin{aligned} f(x)=0 &\Longrightarrow \tfrac{x^2}{x^2-1}=0 \\ &\Longrightarrow x^2=0 \\ &\Longrightarrow x=0 \end{aligned}$$

Per tant, 0 és antiimatge de 0. Finalment,

$$\begin{aligned} f(x)=\tfrac{1}{2} &\Longrightarrow \tfrac{x^2}{x^2-1}=\tfrac{1}{2} \\ &\Longrightarrow x^2=-1 \end{aligned}$$

al no tenir solucions reals aquesta última equació de segon grau, deduïm que $1/2$ no té antiimatges.
Dels resultats obtinguts, deduïm també que f no és injectiva (Hem vist que $f(-1/2)=f(-1/2)$) ni exhaustiva (Hem vist que 0 no té antiimatge). $\square$

Exercici 2.35. Donada una aplicació f de A en B, considerem $X,Y\subset A$ i $Z,T\subset B$. Demostra que es compleixen les següents propietats: (a) $X\subset Y$ implica $f(X)\subset f(Y)$; (b) $Z\subset T$ implica $f^{-1}(Z)\subset f^{-1}(T)$; (c) $f(X\cup Y)=f(X)\cup f(Y)$; (d) $f(X\cap Y)\subset f(X)\cap f(Y)$; (e) $f^{-1}(Z\cup T)=f^{-1}(Z)\cup f^{-1}(T)$; (f) $f^{-1}(Z\cap T)=f^{-1}(Z)\cap f^{-1}(T)$; (g) $X\subset f^{-1}(f(X))$; (h) $f(f^{-1}(Z))\subset Z$; (i) $f^{-1}\left(\complement_B Z\right)=\complement_A(f^{-1}(Z))$.

Solució: (a) Considerem qualsevol element $b\in f(X)$. Llavors, existeix $a\in X$ tal que $f(a)=b$. Ara bé, per hipòtesi, $X\subset Y$, després $a\in Y$ i $f(a)=b\in f(Y)$. D'aquesta manera hem demostrat que $f(X)\subset f(Y)$.
(b) Considerem qualsevol element $a\in f^{-1}(Z)$. Llavors, $f(a)\in Z$ i com, per hipòtesi, $Z\subset T$, deduïm que $f(a)\in T$. Després, $a\in f^{-1}(T)$. Per tant, $f^{-1}(Z)\subset f^{-1}(T)$.
(c) Provarem (1) $f(X\cup Y)\subset f(X)\cup f(Y)$ i (2) $f(X)\cup f(Y)\subset f(X\cup Y)$. Llavors, de (1) i (2), deduirem la igualtat. (1) Considerem qualsevol element $b\in f(X\cup Y)$. Llavors, existeix $a\in X\cup Y$ tal que $f(a)=b$. Ara bé, si $a\in X\cup Y$, llavors $a\in X$ o $a\in Y$. Si $a\in X$, llavors $f(a)=b\in f(X)$ i, per tant, $b\in f(X)\cup f(Y)$. De la mateixa manera, si $a\in Y$, llavors $f(a)=b\in f(Y)$ i, per tant, $b\in b\in f(X)\cup f(Y)$. En qualsevol cas $b\in f(X)\cup f(Y)$, amb el que deduïm que $f(X\cup Y)\subset f(X)\cup f(Y)$.
(2) Considerem qualsevol element $b\in f(X)\cup f(Y)$. Llavors, $b\in f(X)$ o $b\in f(Y)$. Si $b\in f(X)$, llavors existeix $a\in X$ tal que $f(a)=b$. Ara bé, si $a\in X$, llavors $a\in X\cup Y$ i, per tant, $f(a)=b\in f(X\cup Y)$. Si $b\in f(Y)$, llavors existeix $c\in Y$ tal que $f(c)=b$. De la mateixa manera que abans, si $c\in Y$, llavors $c\in X\cup Y$ i, per tant, $f(c)=b\in f(X\cup Y)$. En qualsevol cas $b\in f(X\cup Y)$, amb el que deduïm que $f(X)\cup f(Y)\subset f(X\cup Y)$.
(d) Considerem qualsevol element $b\in f(X\cap Y)$. Llavors, existeix $a\in X\cap Y$ tal que $f(a)=b$. Ara bé, si $a\in X\cap Y$, llavors $a\in X$ i $a\in Y$. Per tant, $f(a)=b\in f(X)\cap f(Y)$, amb el que deduïm que $f(X\cap Y)\subset f(X)\cap f(Y)$.
(e) Considerem qualsevol element $a\in f^{-1}(Z\cup T)$. Llavors,

$$\begin{aligned} a\in f^{-1}(Z\cup T) &\Longleftrightarrow f(a)\in Z\cup T \\ &\Longleftrightarrow f(a)\in Z \ \text{ o } \ f(a)\in T \\ &\Longleftrightarrow a\in f^{-1}(Z) \ \text{ o } \ a\in f^{-1}(T) \\ &\Longleftrightarrow a\in f^{-1}(Z)\cup f^{-1}(T) \end{aligned}$$

D'aquestes equivalències s'obté directament $f^{-1}(Z\cup T)=f^{-1}(Z)\cup f^{-1}(T)$.

(f) Considerem qualsevol element $a \in f^{-1}(Z \cap T)$. Llavors,

$$\begin{aligned} a \in f^{-1}(Z \cap T) &\iff f(a) \in Z \cap T \\ &\iff f(a) \in Z \ \text{ i } \ f(a) \in T \\ &\iff a \in f^{-1}(Z) \ \text{ i } \ a \in f^{-1}(T) \\ &\iff a \in f^{-1}(Z) \cap f^{-1}(T) \end{aligned}$$

D'aquestes equivalències s'obté directament $f^{-1}(Z \cap T) = f^{-1}(Z) \cap f^{-1}(T)$.
(g) Considerem qualsevol element $a \in X$. Llavors $f(a) \in f(X)$ i, per tant, $a \in f^{-1}(f(X))$. Com a conseqüència, $X \subset f^{-1}(f(X))$.
(h) Considerem qualsevol element $b \in f(f^{-1}(Z))$. Llavors, existeix $a \in f^{-1}(Z)$ tal que $f(a) = b$. Ara bé, si $a \in f^{-1}(Z)$, llavors $f(a) = b \in Z$. Com a conseqüència, $f(f^{-1}(Z)) \subset Z$.
(i) Considerem qualsevol element $a \in f^{-1}\left(\complement_B Z\right)$. Llavors,

$$\begin{aligned} a \in f^{-1}\left(\complement_B Z\right) &\iff f(a) \in \complement_B Z \\ &\iff f(a) \notin Z \\ &\iff a \notin f^{-1}(Z) \\ &\iff a \in \complement_A (f^{-1}(Z)) \end{aligned}$$

D'aquestes equivalències s'obté directament $f^{-1}\left(\complement_B Z\right) = \complement_A (f^{-1}(Z))$. $\square$

Exercici 2.36. Si $f : A \longrightarrow B$ és injectiva i $X, Y \subset A$, demostra que (a) $X = f^{-1}(f(X))$ i (b) $f(X \cap Y) \subset f(X) \cap f(Y)$.

Solució: (a) Per l'exercici anterior, només cal provar que $f^{-1}(f(X)) \subset X$. Considerem qualsevol element $a \in f^{-1}(f(X))$. Llavors, $f(a) \in f(X)$ i, per tant, existeix $c \in X$ tal que $f(c) = f(a)$. Ara bé, per hipòtesi, f és injectiva i, per tant, deduïm $c = a$. Després, $a \in X$ i, com a conseqüència, $f^{-1}(f(X)) \subset X$.
(b) Per l'exercici anterior, només cal provar que $f(X) \cap f(Y) \subset f(X \cap Y)$. Considerem qualsevol element $b \in f(X) \cap f(Y)$. Llavors, $b \in f(X)$ i $b \in f(Y)$. Per tant, existeixen $a \in X$ i $c \in Y$ tals que $f(a) = f(c) = b$. Ara bé, per hipòtesi, f és injectiva i, per tant, deduïm $a = c$. Com conseqüència, $a \in X \cap Y$ i, per tant, $f(a) = b \in f(X \cap Y)$. Així, hem demostrat que $f(X) \cap f(Y) \subset f(X \cap Y)$. $\square$

Exercici 2.37. Si $f : A \longrightarrow B$ és exhaustiva i $Z \subset B$, demostra que $f(f^{-1}(Z)) = Z$.

Solució: Per l'exercici anterior, només cal provar que $Z \subset f(f^{-1}(Z))$. Considerem qualsevol element $b \in Z$. Per hipòtesi, f és exhaustiva i, per tant, existeix $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Després, $f(a) \in Z$ i, per tant, $a \in f^{-1}(Z)$. D'aquí, deduïm que $f(a) = b \in f(f^{-1}(Z))$. Com a conseqüència, $Z \subset f(f^{-1}(Z))$. $\square$

Exercici 2.38. Donades les aplicacions $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definides per $f(x) = x^2$ $g(x) = 2x + 1$i . Calcula (a) $g \circ f$, (b) $f \circ g$, (c) $f \circ (g \circ f)$ i (d) $(f \circ f) \circ g$.

Solució: (a)

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= g(x^2) \\ &= 2x^2 + 1 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}(f\circ g)(x) &= f\left(g(x)\right)\\ &= f(2x+1)\\ &= (2x+1)^2\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\left(f\circ(g\circ f)\right)(x) &= f\left((g\circ f)(x)\right)\\ &= f\left(2x^2+1\right)\\ &= (2x^2+1)^2\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}\left((f\circ f)\circ g\right)(x) &= (f\circ f)\left(g(x)\right)\\ &= f\left(f\left(g(x)\right)\right)\\ &= f\left((2x+1)^2\right)\\ &= \left[(2x+1)^2\right]^2\\ &= (2x+1)^4\end{aligned}$$

$\square$

Exercici 2.39. Sean $f : A \longrightarrow B$ i $g : B \longrightarrow C$ dues aplicacions. Demostra que es compleixen les següents propietats: (a) Si f i g són injectives, llavors $g\circ f$ és injectiva; (b) Si f i g són exhaustives, llavors $g\circ f$ és exhaustiva; (c) Si f i g són bijectivas, llavors $g\circ f$ és bijectiva i, a més, $(g\circ f)^{-1} = f^{-1}\circ g^{-1}$; (d) Si $g\circ f$ és injectiva, llavors f és injectiva; (e) Si $g\circ f$ és exhaustiva, llavors g és exhaustiva; (f) Si $g\circ f$ és injectiva i f és exhaustiva, llavors g és injectiva; (g) Si $g\circ f$ és exhaustiva i g és injectiva, llavors f és exhaustiva.

Solució: (a) Suposem que $x, y \in A$ tals que $(g\circ f)(x) = (g\circ f)(y)$. Llavors,

$$\begin{aligned}g\left(f(x)\right) = g\left(f(y)\right) &\implies f(x) = f(y)\\ &\implies x = y\end{aligned}$$

i, per tant, $g\circ f$ és injectiva.
(b) Donat qualsevol $z \in C$ hem de provar que existeix $x \in A$ tal que $(g\circ f)(x) = z$. Per ser g exhaustiva, existeix $u \in B$ tal que $g(u) = z$. Ara, per ser f exhaustiva, existeix $x \in A$ tal que $f(x) = u$. Per tant,

$$\begin{aligned}(g\circ f)(x) &= g\left(f(x)\right)\\ &= g(u)\\ &= z\end{aligned}$$

i, com a conseqüència, $g\circ f$ és exhaustiva.
(c) Pels dos apartats anteriors, és clar que si f i g són bijectivas, llavors $g\circ f$ és bijectiva. En ser f, g bijectivas, existeixen les aplicacions inverses f^{-1} i g^{-1} de f i g, respectivament. Llavors,

$$\begin{aligned}(g\circ f)(x) = g\left(f(x)\right) = z &\iff f(x) = g^{-1}(z)\\ &\iff x = f^{-1}\left(g^{-1}(z)\right) = (f^{-1}\circ g^{-1})(z)\end{aligned}$$

Per tant,

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

(d) Suposem que $x, y \in A$. Llavors,

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) &\implies g(f(x)) = g(f(y)) \\ & (g \circ f)(x) = (g \circ f)(y) \\ &\implies x = y \end{aligned}$$

i, per tant, f és injectiva.
(e) Donat qualsevol $z \in C$ hem de provar que existeix $u \in B$ tal que $g(u) = z$. Per ser $g \circ f$ exhaustiva, existeix $x \in A$ tal que $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = z$. Prenent $u = f(x) \in B$, llavors tenim que $g(u) = g(f(x)) = z$ i, per tant, g és exhaustiva.
(f) Suposem que $u, v \in B$ tals que $g(u) = g(v)$. Per ser f exhaustiva, existeixen $x, y \in A$ tals que $f(x) = u$ i $f(y) = v$. Llavors, $g(f(x)) = g(u)$ i $g(f(y)) = g(v)$ i, per tant, $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$. Ara bé, per hipòtesi, $g \circ f$ és injectiva, amb el que deduïm que $x = y$. Després, $f(x) = f(y)$, és a dir, $u = v$. En conseqüència, g és injectiva.
(g) Donat qualsevol $u \in B$ hem de provar que existeix $x \in A$ tal que $f(x) = u$. És clar que $g(u) \in C$. Per ser $g \circ f$ exhaustiva, existeix $x \in A$ tal que $(g \circ f)(x) = g(u)$, és a dir, $g(f(x)) = g(u)$. Ara bé, per hipòtesi, g és injectiva, amb el que deduïm que $f(x) = u$. En conseqüència, f és exhaustiva. $\square$

Exercici 2.40. Demostra que l'aplicació $f : \mathbb{R} - \{-1/2\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{1/2\}$ definida per

$$f(x) = \frac{x+3}{1+2x}$$

és bijectiva. Calcula l'aplicació inversa f^{-1}.

Solució: Vegem que f és injectiva. Per a això, suposem que $x, y \in \mathbb{R} - \{-1/2\}$ i $f(x) = f(y)$. Llavors,

$$\begin{aligned} \frac{x+3}{1+2x} = \frac{y+3}{1+2y} &\implies (x+3)(1+2y) = (1+2x)(y+3) \\ &\implies x + 2xy + 3 + 6y = y + 3 + 2xy + 6x \\ &\implies 5y = 5x \\ &\implies x = y \end{aligned}$$

i, per tant, f és injectiva.
Vegem que f és exhaustiva. Per a això, donat qualsevol $y \in \mathbb{R} - \{1/2\}$ hem de provar que existeix $x \in \mathbb{R} - \{-1/2\}$ tal que $f(x) = y$. En efecte, suposem que x existís i vegem quin és. Llavors,

$$\begin{aligned} f(x) = y &\implies \tfrac{x+3}{1+2x} = y \\ &\implies x + 3 = (1+2x)y \\ &\implies x - 2xy = y - 3 \\ &\implies x(1-2y) = y - 3 \\ &\implies x = \tfrac{y-3}{1-2y} \end{aligned}$$

és a dir, hauria de ser

$$x = \frac{y-3}{1-2y}$$

Ara bé, com $y \neq 1/2$ tenim que $1 - 2y \neq 0$ i, a més,

$$\frac{y-3}{1-2y} \neq -\frac{1}{2}$$

per a tot $y \neq 1/2$. Per tant,

$$x = \frac{y-3}{1-2y} \in \mathbb{R} - \{-1/2\}$$

i f és exhaustiva. En ser f injectiva i exhaustiva, també és bijectiva. Per tant, f té aplicació inversa f^{-1}. Com que es compleix

$$\frac{x+3}{1+2x} = y \iff x = \frac{y-3}{1-2y}$$

obtenim que

$$f^{-1}(x) = \frac{x-3}{1-2x}$$

□

Exercici 2.41. Donades les aplicacions $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definides per

$$f(x) = x^3 + 1 \qquad \text{y} \qquad g(x) = \sqrt[3]{x-1}$$

calcula $g \circ f$ i $g^{-1} \circ f^{-1}$, si existeixen.

Solució: Les aplicacions f i g són bijectivas com pot comprovar-se de seguida. Per tant, existeixen les aplicacions inverses f^{-1} i g^{-1} d'i f g, respectivament.
Calcularem ara $g \circ f$ i $f \circ g$. Així, tenim

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g\left(f(x)\right)\\ &= g(x^3+1)\\ &= \sqrt[3]{x^3+1-1}\\ &= \sqrt[3]{x^3}\\ &= x\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f\left(g(x)\right)\\ &= f\left(\sqrt[3]{x-1}\right)\\ &= \left(\sqrt[3]{x-1}\right)^3 + 1\\ &= x - 1 + 1\\ &= x\end{aligned}$$

D'aquests resultats, deduïm que $f^{-1} = g$ ja que $f \circ g = g \circ f = I_{\mathbb{R}}$. Per consegüent,

$$g^{-1} \circ f^{-1} = g^{-1} \circ g = I_{\mathbb{R}}$$

és a dir, $g^{-1} \circ f^{-1}$ és l'aplicació identitat en $\mathbb{R}$. □

2.4 Cardinal d'un conjunt

Exercici 2.42. Sigui E un conjunt referencial i considerem dos conjunts finits A i B. Demostra les següents propietats: (a) Si $A \subset B$, llavors $\#A \leq \#B$; (b) $\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$; (c) $\#(A \cup B \cup C) = \#A + \#B + \#C - \#(A \cap B) - \#(A \cap C) - \#(B \cap C) + \#(A \cap B \cap C)$; (d) $\#\complement A = \#E - \#A$; (e) $\#(A \times B) = \#A \cdot \#B$; (f) $\#\mathcal{P}(A) = 2^{\#A}$.

Solució: És clar que si A i B són disjunts, llavors

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B$$

(a) Com que $\left\{A \cap B, \complement A \cap B\right\}$ és una partició de B, llavors

$$\#B = \#(A \cap B) + \#\left(\complement A \cap B\right)$$

Ara bé, com $A \subset B$, llavors $A \cap B = A$ i, per tant, obtenim

$$\#B = \#A + \#\left(\complement A \cap B\right)$$

En ser $\#\left(\complement A \cap B\right) \geq 0$, deduïm

$$\#A \leq \#B$$

(b) Com que $\left\{A, \complement A \cap B\right\}$, $\left\{B, A \cap \complement B\right\}$ i $\left\{A \cap \complement B, \complement A \cap B, A \cap B\right\}$ constitueixen particions del conjunt $A \cup B$, llavors

$$\#(A \cup B) = \#A + \#\left(B \cap \complement A\right)$$

i

$$\#(A \cup B) = \#A + \#\left(A \cap \complement B\right)$$

i

$$\#(A \cup B) = \#\left(A \cap \complement B\right) + \#\left(\complement A \cap B\right) + \#(A \cap B)$$

Sumant ara les dues primeres igualtats i restant la tercera, obtenim

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$$

(c) Segons l'apartat anterior, tenim

$$\begin{aligned}
\#(A \cup B \cup C) &= \#((A \cup B) \cup C) \\
&= \#(A \cup B) + \#C - \#((A \cup B) \cap C) \\
&= \#A + \#B - \#(A \cap B) + \#C - \#((A \cup B) \cap C)
\end{aligned}$$

Ara bé, $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ i, per tant,

$$\begin{aligned}
\#((A \cup B) \cap C) &= \#((A \cap C) \cup (B \cap C)) \\
&= \#(A \cap C) + \#(B \cap C) - \#((A \cap C) \cap (B \cap C)) \\
&= \#(A \cap C) + \#(B \cap C) - \#(A \cap B \cap C)
\end{aligned}$$

Per conseqüent, obtenim

$$\begin{aligned}\#\left(A\cup B\cup B\right) &= \#A+\#B+\#C-\#\left(A\cap B\right)\\ &\quad -\#\left(A\cap C\right)-\#\left(B\cap C\right)+\#\left(A\cap B\cap C\right)\end{aligned}$$

(d) Com que $\left\{A, \complement_E A\right\}$ és una partició de E , llavors

$$\#E=\#A+\#\left(\complement_E A\right)$$

i, per tant,

$$\#\left(\complement_E A\right)=\#E-\#A$$

(e) Suposem que $\#A=n$i $\#B=m$. Sigui $\varphi:\{1,2,...,n\}\longrightarrow A$una aplicació tal que $\varphi(i)=a_i\in A$i $a_i\neq a_j$si $i\neq j$. Així, podem escriure

$$A=\{a_1,a_2,...,a_n\}$$

De la mateixa manera, obtenim

$$B=\{b_1,b_2,...,b_m\}$$

Llavors, els conjunts

$$\begin{gathered}F_1=\{(a_1,b_1),(a_1,b_2),...(a_1,b_m)\}\\ F_2=\{(a_2,b_1),(a_2,b_2),...(a_2,b_m)\}\\ \vdots\\ F_n=\{(a_n,b_1),(a_n,b_2),...(a_n,b_m)\}\end{gathered}$$

constitueixen una partició de $A\times B$ i, per tant,

$$\#\left(A\times B\right)=\#F_1+\#F_2+\cdots+\#F_n=n\cdot m$$

doncs

$$\#F_1=\#F_2=\cdots=\#F_n=m$$

Per tant,

$$\#\left(A\times B\right)=\#A\times\#B$$

(f) Suposem que $\#A=n$. Sabem que $\mathcal{P}(A)$ és el conjunt els elements del qual són subconjunts d'A. Sigui $0\leq m\leq n$, quants subconjunts de m elements té A? Aquest número és per definició el **número combinatori**

$$\binom{n}{m}$$

que es calcula mitjançant la fórmula següent

$$\binom{n}{m}=\frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

sent el **factorial d'un número** n

$$n!=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1$$

i, per definició, $0! = 1$. Així, tenim

Número d'elements del subconjunt	Número de subconjunts
0	$\binom{n}{0}$
1	$\binom{n}{1}$
2	$\binom{n}{2}$
$\vdots$	$\vdots$
$n-1$	$\binom{n}{n-1}$
n	$\binom{n}{n}$

Llavors,

$$\#\mathcal{P}(A) = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$$

Aquesta suma pot calcular-se mitjançant la fórmula de la potència del binomi de Newton

$$(A+B)^n = \binom{n}{0}A^n + \binom{n}{1}A^{n-1}B + \binom{n}{2}A^{n-2}B + \cdots + \binom{n}{n-1}AB^{n-1} + \binom{n}{n}B^n$$

Prenent $A = B = 1$, resulta

$$(1+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$$

i, per conseqüent, obtenim

$$\#\mathcal{P}(A) = 2^n = 2^{\#A}$$

$\square$

Exercici 2.43. Suposem que en Joan menja cada matí ous o cereals per esmorzar durant el mes de gener. Si en 25 matins ha menjat cereals, i en 18, ous, en quants matins ha menjat ous i cereals?

Solució: Sigui A el conjunt de dies del mes de gener que en Joan menja ous per esmorzar i B el conjunt de dies que menja cereals. Segons la informació de l'enunciat, tenim $\#A = 25$ i $\#B = 18$ i, a més, és clar que $\#(A \cup B) = 31$. Llavors,

$$\begin{aligned} \#(A \cup B) &= \#A + \#B - \#(A \cap B) \\ 31 &= 25 + 18 - \#(A \cap B) \\ \#(A \cap B) &= 12 \end{aligned}$$

Ara bé, $\#(A \cap B)$ representa els dies que en Joan menja ous i cereals per esmorzar durant el mes de gener. Per tant, en Joan menja ous i cereals en 12 matins. $\square$

Exercici 2.44. Se sap que dels 30 alumnes d'una classe 15 juguen al ping-pong i 20 al tennis. A més, no hi ha cap alumne que no practiqui algun d'aquests dos esports. Quants alumnes practiquen els dos esports alhora?

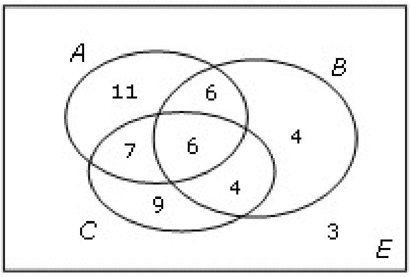
Solució: Sigui A el conjunt d'alumnes de la classe que practiquen ping-pong i B el conjunt d'alumnes que practiquen tennis. Segons l'enunciat, $\#A = 15$ i $\#B = 20$. Com sabem també que no hi ha cap alumne que no practiqui algun d'aquests dos esports, tenim que $\#(A \cup B) = 30$. Llavors,

$$\begin{aligned} \#(A \cup B) &= \#A + \#B - \#(A \cap B) \\ 30 &= 15 + 20 - \#(A \cap B) \\ \#(A \cap B) &= 5 \end{aligned}$$

i, per tant, hi ha 5 alumnes de la classe que practiquen tots dos esports. $\square$

Exercici 2.45. En una classe, 30 alumnes llegeixen el diari A, 20 llegeixen el B, 13 llegeixen l'i A el C, 10 llegeixen el B però no el C, 24 no llegeixen C, 7 llegeixen l'i A el C però no el B, 9 llegeixen el C però no el A ni el B, i 11 llegeixen el A però no el B ni el C. (a) Quants alumnes llegeixen almenys un dels tres diaris? (b) Quants alumnes hi ha en la classe?

Solució: Reunint la informació en un diagrama de Venn, obtenim



A partir d'aquest diagrama podem respondre directament les qüestions plantejades. Tot i això, aquí el farem mitjançant les fórmules estudiades sobre cardinals de conjunts finits.

Sigui E el conjunt d'alumnes de la classe, A el conjunt d'alumnes d'aquesta classe que llegeixen el diari A, B el conjunt d'alumnes que llegeixen el diari B, i C el conjunt d'alumnes que llegeixen el diari C.

Per l'enunciat, sabem que $\#A = 30$, $\#B = 20$, $\#(A \cap C) = 13$, $\#\left(B \cap \complement C\right) = 10$, $\#\complement C = 24$, $\#\left(A \cap C \cap \complement B\right) = 7$, $\#\left(C \cap \complement A \cap \complement B\right) = 9$ i $\#\left(A \cap \complement B \cap \complement C\right) = 11$.

(a) Ens demanen calcular $\#(A \cup B \cup C)$. Segons la informació que tenim, els conjunts $A \cap C \cap \complement B$, $C \cap \complement A \cap \complement B$, $A \cap \complement B \cap \complement C$ i B són disjunts i, a més, com

$$A \cup B \cup C = \left(A \cap C \cap \complement B\right) \cup \left(C \cap \complement A \cap \complement B\right) \cup \left(A \cap \complement B \cap \complement C\right) \cup B$$

s'obté

$$\begin{aligned} \#(A \cup B \cup B) &= \#\left(A \cap C \cap \complement B\right) + \#\left(C \cap \complement A \cap \complement B\right) + \#\left(A \cap \complement B \cap \complement C\right) + \#B \\ &= 7 + 9 + 11 + 20 \\ &= 47 \end{aligned}$$

Per tant, hi ha 47 alumnes que llegeixen almenys un dels tres diaris.

(b) Ens demanen en aquest cas $\#E$. Els conjunts $A \cap B \cap C$, $A \cap \complement B \cap C$ són disjunts i, a més,

$$A \cap C = (A \cap B \cap C) \cup \left(A \cap \complement B \cap C\right)$$

Per tant,

$$\begin{aligned}\#\left(A\cap C\right) &= \#\left(A\cap B\cap C\right)+\#\left(A\cap \complement B\cap C\right)\\ 13 &= \#\left(A\cap B\cap C\right)+7\end{aligned}$$

Llavors, $\#\left(A\cap B\cap C\right)=6$. D'altra banda, els conjunts $B\cap \complement C$, $A\cap B\cap C$ i $\complement A\cap B\cap C$ són disjunts i, a més,

$$B=\left(B\cap \complement C\right)\cup\left(A\cap B\cap C\right)\cup\left(\complement A\cap B\cap C\right)$$

Aleshores,

$$\begin{aligned}\#B &= \#\left(B\cap \complement C\right)+\#\left(A\cap B\cap C\right)+\#\left(\complement A\cap B\cap C\right)\\ 20 &= 10+6+\#\left(\complement A\cap B\cap C\right)\end{aligned}$$

Per tant, $\#\left(\complement A\cap B\cap C\right)=4$. Finalment, els conjunts $A\cap C$, $\complement A\cap B\cap C$ i $A\cap \complement B\cap \complement C$ són disjunts i, a més,

$$C=\left(A\cap C\right)\cup\left(\complement A\cap B\cap C\right)\cup\left(A\cap \complement B\cap \complement C\right)$$

Per tant,

$$\begin{aligned}\#C &= \#\left(A\cap C\right)+\#\left(\complement A\cap B\cap C\right)+\#\left(A\cap \complement B\cap \complement C\right)\\ &= 13+4+9\\ &= 26\end{aligned}$$

i, com

$$\#\complement C=\#E-\#C$$

deduïm que

$$\begin{aligned}\#E &= \#\complement C+\#C\\ &= 24+26\\ &= 50\end{aligned}$$

és a dir, hi ha 50 alumnes en classe. □

Exercici 2.46. En una acarnissada batalla almenys el 70 % dels combatents perden un ull, almenys un 75 % perden una orella, com a mínim un 80 % perden un braç i almenys el 85 % una cama. Quants combatents han perdut almenys les quatre coses?

Solució: Sigui A el conjunt de combatents que perden un ull, B el conjunt dels quals perden una orella, C el conjunt dels quals perden un braç i D el conjunt dels quals perden una cama. Per a simplificar els càlculs suposarem que hi ha 100 combatents en la batalla (En treballar amb tants per cent és igual el nombre inicial de combatents). Llavors, per l'enunciat, tenim que $\#A\geq 70$, $\#B\geq 75$, $\#C\geq 80$ i $\#D\geq 85$. Volem calcular el valor mínim de $\#\left(A\cap B\cap C\cap D\right)$.
Sabem que

$$\#\left(\left(A\cap B\right)\cup\left(C\cap D\right)\right)=\#\left(A\cap B\right)+\#\left(C\cap D\right)-\#\left(A\cap B\cap C\cap D\right)$$

Aleshores es té també

$$\#\left(A \cap B \cap C \cap D\right) = \#\left(A \cap B\right) + \#\left(C \cap D\right) - \#\left(\left(A \cap B\right) \cup \left(C \cap D\right)\right)$$

Ara bé, d'altra banda, sabem que

$$\begin{aligned}\#\left(A \cap B\right) &= \#A + \#B - \#\left(A \cup B\right) \\ &\geq 70 + 75 - 100 \\ &= 45\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}\#\left(C \cap D\right) &= \#C + \#D - \#\left(C \cup D\right) \\ &\geq 80 + 85 - 100 \\ &= 65\end{aligned}$$

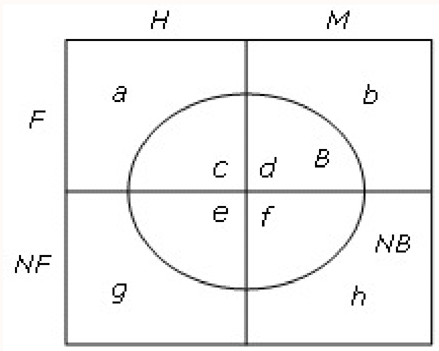
Llavors, d'aquests dos resultats deduïm que

$$\#\left(A \cap B \cap C \cap D\right) \geq 45 + 65 - 100 = 10$$

i com que $0 \leq \#\left(\left(A \cap B\right) \cup \left(C \cap C\right)\right) \leq 100$, s'obté que almenys el 10 % perd les quatre coses. □

Exercici 2.47. En una reunió hi ha més homes que dones, més dones que beuen que homes que fumen i més dones que fumen i no beuen que homes que no beuen ni fumen. Demostrar que hi ha menys dones que no beuen ni fumen que homes que beuen i no fumen.

Solució: Fem el següent diagrama per a descriure la informació de l'enunciat.



Si H és el conjunt d'homes i M el de dones, llavors per l'enunciat es compleix que

$$\#H > \#M$$

Si F és el conjunt de persones fumadores i B és el conjunt de persones que beuen, llavors per l'enunciat també es compleix

$$\#\left(M \cap B\right) > \#\left(H \cap F\right)$$

i

$$\#\left(M \cap F \cap \complement B\right) > \#\left(H \cap \complement B \cap \complement F\right)$$

Cal provar que
$$\#\left(M \cap \complement B \cap \complement F\right) < \#\left(H \cap B \cap \complement F\right)$$
Amb l'ajuda del diagrama anterior, podem escriure
$$\#H = a + c + e + g > b + d + f + h = \#M$$
$$\#\left(M \cap B\right) = d + f > a + c = \#\left(H \cap F\right)$$
$$\#\left(M \cap F\right) = b > g = \#\left(H \cap \complement B \cap \complement F\right)$$
Sumant membre a membre les tres desigualtats anteriors, obtenim
$$a + c + e + g + d + f + b > b + d + f + h + a + c + g \implies e > h$$
és a dir,
$$\#\left(M \cap \complement B \cap \complement F\right) = b < e = \#\left(H \cap B \cap \complement F\right)$$
$\square$

Capítol 3

Exercicis proposats

1. Donats els conjunts següents

$$\begin{aligned} A &= \{x : x = 2n \quad \text{i} \quad n \in \mathbb{N}\} \\ B &= \{x : x = 3n \quad \text{i} \quad n \in \mathbb{N}\} \\ C &= \{x : x = 4n - 1 \quad \text{i} \quad n \in \mathbb{N}\} \\ D &= \{x : x = 4n + 1 \quad \text{i} \quad n \in \mathbb{N}\} \end{aligned}$$

   Troba $A \cap B$, $C \cup D$, $C \cap D$, $\complement A$ i $A \cap (C \cup D)$.

   Solució: $A \cap B$ és el conjunt de múltiples de 6, $C \cup D = \{x : x = 2n + 1 \quad \text{i} \quad n \in \mathbb{N}\}$, $C \cap D = \emptyset$, $\complement A$ és el conjunt dels nombres imparells, i $A \cap (C \cup D) = \emptyset$.

2. Sigui U l'univers dels conjunts A, B i C. Simplifica les següents expressions:

   a) $(A \cap B) \cup (A \cap \complement B) \cup (\complement A \cap B) \cup (\complement A \cap \complement B)$

   b) $\left[(A \cup B) \cap \complement \left(B \cap \complement A\right)\right] \cup \left[(A \cap B) \cup \complement \left(B \cup \complement A\right)\right]$

   c) $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup \complement \left(\complement A \cup \complement B\right)$

   d) $(A \cap B) \cup (A \cap \complement B) \cup (\complement A \cap C) \cup (A \cap C)$

   Solució: a) U, b) A, c) $A \cap (B \cup C)$ i d) $A \cup C$

3. Si $\#P\left(A \cup \mathcal{P}(A)\right) = 8$, calcula $\#A$.

   Solució: $\#A = 1$

4. Una empresa ofereix places d'electricista, de mecànic i de fuster. Sabem que 12 persones sol · liciten plaça d'electricista, 12 de mecànic, 15 de fuster, 3 d'electricista i mecànic, 4 de mecànic i fuster, 5 d'electricista i fuster i, finalment, 1 solÂ · licita plaça de les tres coses. Calcula quanta gent ha fet alguna sol · licitud.

   Solució: 28 persones

5. En una reunió hi ha 25 persones que són mèdics, músics o polítics. Hi ha 20 metges, 12 músics i 17 polítics. Hi ha 8 que són mèdics i músics, 12 que són mèdics i polítics i 11 que són músics i polítics. (a) Quants polítics són músics i metges alhora? (b) Quantes persones hi ha amb una sola professió?

   Solució: (a) 7 i (b) 8

6. D'un grup de 1000 persones, 950 porten rellotge, 750 porten paraigua, 800 porten corbata i 850 porten barret. Troba el nombre mínim de persones que porten les quatre coses.

   Solució: 350

7. Comprova si les següents col · leccions de conjunts formen una partició de $\mathbb{N}$

   a) $A = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$ i $B = \{2n - 1 : n \in \mathbb{N}\}$
   b) A és el conjunt dels nombres primers entre si, $B = \{2, 4, 6, 8, 9\}$ i $C = \{x \in \mathbb{N} : x \geq 10\}$
   c) $A = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{2n - 1 : n \in \mathbb{N}\}$ i $C = B = \{5n : n \in \mathbb{N}\}$

   Solució: a) Sí, b) No, c) No

8. En el conjunt $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ es defineix la relació

$$x \; R \; y \iff y \text{ és múltiple de } x$$

   (a) Escriu el graf de la relació i (b) estudia les seves propietats.

   Solució: (a) $R = \left\{ \begin{array}{c} (1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,2), \\ (2,4),(2,6),(3,3),(3,6),(4,4),(5,5),(6,6) \end{array} \right\}$ (b) R és reflexiva, antisimètrica i transitiva.

9. Quina relació binària sobre un conjunt és simètrica i antisimètrica?

   Solució: La relació d'igualtat.

10. De les següents relacions, quines són d'equivalència? I en cas de ser-ho, quines són les seves classes?

    a) "Tenir la mateixa altura" en el conjunt dels alumnes d'una classe
    b) "Ser equipol · lent" en el conjunt dels vectors fixos del pla
    c) "Equidistar d'un punt fix donat" en el conjunt dels punts del pla
    d) "Estar alineats amb un punt fix donat" en el conjunt de parells de punts del pla sense el punt fix donat

    Solució: (a) És d'equivalència i els alumnes queden classificats segons les seves altures (b) És d'equivalència i les classes són els vectors lliures del pla (c) És d'equivalència i les classes són les circumferències de centre el punt fix donat (d) És d'equivalència i les classes són les rectes que passen pel punt fix donat sense contenir aquest punt.

11. En el conjunt dels nombres reals es defineix la relació

$$x \sim y \iff \lfloor x \rfloor = \lfloor y \rfloor$$

    on $\lfloor y \rfloor$ significa la part sencera del nombre real x. És una relació d'equivalència? Si ho és, quines són les seves classes?

    Solució: Observa que $x \sim y$ si i només si existeix un nombre enter n tal que $x, y \in [n, n + 1)$. És una relació d'equivalència i les classes són els intervals de la forma $[n, n + 1)$ amb $n \in \mathbb{Z}$.

12. Esbrina si la relació "x divideix y" és d'ordre en cadascun dels conjunts que s'indiquen a continuació, i, en el cas que ho sigui, és parcial o total? Troba els seus elements maximals i minimals.

    a) En el conjunt dels nombres naturals $\mathbb{N}$

    b) En el conjunt dels nombres enters $\mathbb{Z}$

    Solució: (a) És d'ordre parcial, 1 és minimal i no hi ha elements maximals. (b) No és d'ordre

13. En el conjunt dels nombres reals ordenat segons la relació d'ordre usual $\leq$ es consideren els següents subconjunts (a) $A = [1, 5]$, (b) $B = (-2, -1]$, (c) $C = (\pi, 2\pi)$, (d) $D = [2, +\infty)$, (e) $E = (-5, +\infty)$ i (f) $F = (-\infty, 0)$. Calcula, si existeixen, mínim, màxim, ínfim i suprem de cadascun d'ells.

    Solució: (a) $\min A = \inf A = 1$ i $\max A = \sup A = 5$, (b) $\inf B = -2$ i $\max B = \sup B = -1$, (c) $\inf C = \pi$ i $\sup C = 2\pi$, (d) $\min D = \inf D = 2$, (e) $\inf E = -5$, (f) $\sup F = 0$

14. En el conjunt $A = \{2, 3, 5, 6, 15\}$ es defineix la relació

    $$x \; R \; y \iff y \text{ és múltiple de } x$$

    (a) És una relació d'ordre? És parcial o total? (b) Troba màxim, mínim, suprem i ínfim de $B = \{2, 3, 6, 15\}$. (c) Troba màxim, mínim, suprem i ínfim de A. (d) Hi ha elements maximals i minimals d'A?

    Solució: (a) És d'ordre parcial (b) No existeixen $\max B$, $\min B$, $\sup B$, $\inf B$. (c) No existeixen $\max A$, $\min A$, $\sup A$, $\inf A$. (d) $2, 3, 5$ són minimals i $6, 15$ són maximals.

15. Es donen els conjunts $A = \{2, 3, 4, 7, 8\}$ i $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}$. Sigui $f : A \longrightarrow B$ l'aplicació definida per

    $$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{si } x \text{ és parell} \\ x & \text{si } x \text{ és senar} \end{cases}$$

    Estudia quina classe d'aplicació s'obté.

    Solució: És una aplicació injectiva

16. Donades les aplicacions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida per $f(x) = e^x$ i $g : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida per $g(x) = \sqrt{x}$. (a) De quina classe d'aplicacions són f i g? (b) Canvia els conjunts de sortida i d'arribada de l'aplicació f perquè sigui bijectiva. (c) Canvia els conjunts de sortida i d'arribada de l'aplicació g perquè sigui bijectiva. (d) Calcula les aplicacions inverses de les aplicacions de l'apartat (c). (e) Calcula si és possible $f \circ g$ i $g \circ f$.

    Solució: (a) f és injectiva però no exhaustiva i g és injectiva però no exhaustiva. (b) L'aplicació $f : \mathbb{R} \longrightarrow (0, +\infty)$ definida per $f(x) = e^x$ és bijectiva. (c) L'aplicació $g : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$ definida per $g(x) = \sqrt{x}$ és bijectiva. (d) $f^{-1} : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ amb $f^{-1}(x) = \ln x$ i $g^{-1} : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$ amb $g^{-1}(x) = x^2$. (e) $f \circ g : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ amb $(f \circ g)(x) = e^{\sqrt{x}}$ i $g \circ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ amb $(g \circ f)(x) = \sqrt{e^x}$ ja que $\operatorname{Im} f = (0, +\infty) \subset [0, +\infty)$.

17. Donada l'aplicació $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida per $f(x) = 2x + 1$, calcula $f(A)$ i $f^{-1}(A)$ en els casos següents: (a) $A = [1, 3]$, (b) $A = [-2, -1)$, (c) $A = [1, +\infty)$ i (d) $A = (-\infty, -2)$.

    Solució: (a) $f(A) = [3, 7]$ i $f^{-1}(A) = [0, 1]$, (b) $f(A) = [-3 - 1)$ i $f^{-1}(A) = [-3/2, -1)$, (c) $f(A) = [3, +\infty)$ i $f^{-1}(A) = [0, +\infty)$ i (d) $f(A) = (-\infty, -3)$ i $f^{-1}(A) = (-\infty, -3/2)$.

18. Sigui $f : \mathbb{R} - \{1\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{3\}$ definida per

    $$f(x) = \frac{3x - 1}{x - 1}$$

    Demostra que és bijectiva i calcula l'aplicació inversa.

    Solució: Cal demostrar que és injectiva i exhaustiva. L'aplicació inversa és

    $$f^{-1}(x) = \frac{x - 1}{x - 3}$$

Capítol 4

Tests

4.1 Conjunts i Relacions

1. Donat el conjunt $A = \{-1, 0, 1\}$, quin dels següents conjunts coincideix amb A?

   (a) $\{x \in \mathbb{N} : x^3 - x = 0\}$

   (b) $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 1\}$

   (c) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 = 0\}$

   (d) $\{x \in \mathbb{Z} : x^2 \leq 1\}$ *

2. Sabent que $A = \{a, \{a\}, \{a, \{a\}\}\}$ i $B = \{\{a\}\}$, quin de les següents afirmacions és falsa?

   (a) $B \subset A$

   (b) $a \in B$ *

   (c) $\{a\} \subset A$

   (d) $\{a, \{a\}\} \in A$

3. Donat el conjunt $A = \{a, \{a\}\}$, quin de les següents afirmacions és falsa?

   (a) $\{\{a\}\} \subset \mathcal{P}(A)$ *

   (b) $\{a\} \in \mathcal{P}(A)$

   (c) $\{\emptyset\} \subset \mathcal{P}(A)$

   (d) $\{a, \{a\}\} \in \mathcal{P}(A)$

4. Donat el conjunt referencial $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ i els subconjunts $A = \{x \in E : x \text{ és parell}\}$, $B = \{x \in E : x \text{ és múltiple de } 3\}$ i $C = \{x \in E : 2 \leq x \leq 6\}$, llavors

   (a) $A \cap B \cap C = \emptyset$

   (b) $(A \cup B) \cap C = C$

   (c) $\complement\,(A \cup B \cup C) = \{1\}$ *

   (d) $A \cup (B \cap C) = C$

5. Donat el conjunt referencial E i els subconjunts A, B i C. En simplificar l'expressió
$$[(A \cap B) \cap C] \cup \left[(A \cap B) \cap \complement C\right] \cup \left(\complement A \cap B\right)$$
s'obté:
   (a) A
   (b) B *
   (c) C
   (d) E

6. En el conjunt dels nombres naturals es consideren les següents relacions
$$\begin{aligned} x\ R_1\ y &\iff x + y = 10 \\ x\ R_2\ y &\iff x < y \\ x\ R_3\ y &\iff x, y \text{ són primers entre si} \end{aligned}$$
Quin de les següents afirmacions és certa?
   (a) R_1 i R_3 són transitives
   (b) R_1 és simètrica i R_3 és antisimètrica
   (c) R_1 i R_3 són reflexives
   (d) R_2 és antisimètrica i R_3 és simètrica *

7. En el conjunt dels nombres reals es consideren les següents relacions
$$\begin{aligned} x\ R_1\ y &\iff x^2 = y^2 \\ x\ R_2\ y &\iff x(x+1) = y(y+1) \end{aligned}$$
quin de les següents afirmacions és falsa?
   (a) R_1 i R_2 són relacions d'equivalència
   (b) La classe d'equivalència de 0, segons R_1, és $[0]_1 = \{0\}$ i, segons R_2, és $[0]_2 = \{0\}$
   (c) La classe d'equivalència de 1, segons R_1, és $[1]_1 = \{1, -1\}$ i, segons R_2, és $[1]_2 = \{1, -2\}$
   (d) R_1 no és una relació d'equivalència i R_2 sí que ho és *

8. En el conjunt dels nombres naturals ordenat per la relació "ser divisor deçonsideren els conjunts $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ i $B = \{3, 4, 6, 12\}$. Llavors, quin de les següents afirmacions és falsa?
   (a) 3 i 4 són elements minimals de B
   (b) Els elements maximals de A so $6, 8$ i 9 *
   (c) $\sup A = 2520$
   (d) $\max B = 12$

9. En el conjunt dels nombres reals ordenat segons la relació d'ordre usual $\leq$ es considera el conjunt

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 + 6x + 5 < 0\right\}$$

Llavors, quin de les següents afirmacions és vertadera?

   (a) $\sup A = -1$ *
   (b) -3 és cota inferior d'A
   (c) $\max A = -1$
   (d) $\min A = -5$

10. En el conjunt dels número sencers es considera la relació següent

$$x \equiv y \iff x - y \text{ és múltiple de } 7$$

Si designem per la $[x]$ classe de l'element x segons $\equiv$, llavors quin de les següents afirmacions és veritable?

   (a) $231 \in [1]$
   (b) $[-2] = [4]$
   (c) $-5 \in [2]$ *
   (d) Cap de les anteriors

4.2 Aplicaciones i Cardinals

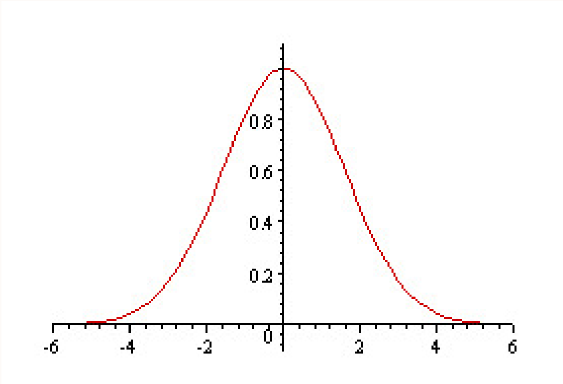
1. Quin de les següents relacions R entre A i B és una aplicació d'A en B?

   (a) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{1, 2\}$ i $R = \{(1, 1), (3, 2), (5, 1), (4, 1)\}$
   (b) $A = B = \mathbb{R}$ i $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x + y^3 = 0\}$ *
   (c) $A = B = \mathbb{R}$ i $R = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : xy = 1\}$
   (d) $A = B = \mathbb{R}$ i $R = \left\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y = \sqrt{x - 1}\right\}$

2. Es defineix l'aplicació $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mitjançant $f(x) = x^2 + 4$. Llavors,

   (a) $f^{-1}(\{0\}) = \{-2, 2\}$
   (b) $f([0, 1]) = [0, 1]$
   (c) $f^{-1}((0, 4)) = (0, 2)$
   (d) Cap de les anteriors és certa *

3. La gràfica d'una aplicació $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ és



llavors:

(a) f és injectiva
(b) f és exhaustiva
(c) $f : [0, +\infty) \longrightarrow [0, 1]$ és bijectiva *
(d) $f : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ és exhaustiva

4. Considerem les aplicacions: $f : \mathbb{R} - \{-2\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{3\}$ definida per

$$f(x) = \frac{3 + 3x}{x + 2}$$

i $g : \mathbb{R} - \{3\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida per $g(x) = x^3$. Llavors, quin de les següents afirmacions és falsa?

(a) f és bijectiva i $f^{-1}(x) = \frac{3-2x}{x-3}$
(b) g és bijectiva i $g^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ *
(c) $f \circ g$ no és aplicació
(d) $g \circ f$ és injectiva i $(g \circ f)(x) = \left(\frac{3+3x}{x+2}\right)^3$

5. Sigui $f : A \longrightarrow B$ una aplicació i suposem que $\#A = n$ i $\#B = m$. Llavors:

(a) Si f és injectiva, llavors $n \leq m$ *
(b) Si f és exhaustiva, llavors $n \leq m$
(c) Si $n = m$, llavors f és bijectiva
(d) No pot ocórrer que $n < m$

6. Si f, g són aplicacions d'en $\mathbb{R}$ $\mathbb{R}$ tals que $g(x) = x^3$ i $(g \circ f)(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$. Llavors:

(a) $f(x) = x + 1$
(b) $f(x) = 1 - x$ *
(c) $f(x) = x - 1$
(d) $f(x) = -1 - x$

7. Sigui $f : A \longrightarrow B$ una aplicació i considerem $X, Y \subset A$ i $Z, T \subset B$, llavors

(a) $f(X \cap Y) = f(X) \cap f(Y)$
(b) $f^{-1}(f(X)) = X$
(c) $f^{-1}(Z \cap T) = f^{-1}(Z) \cap f^{-1}(T)$ *
(d) $f(f^{-1}(Z)) = Z$

8. Efectuant una mostra de 1000 individus s'observa que mengen peix i carn però no ous 60, peix i ous però no carn 40, carn i ous però no pescat 30, només pescat 50, només carn 40 i només ous 30. Tots mengen carn, ous o peix. Quants mengen peix?

(a) 900 *
(b) 750
(c) 800
(d) Cap de les anteriors

9. En una classe de 100 alumnes que s'han examinat de matemàtiques i Física es coneixen els següents resultats: No han aprovat cap assignatura 20 alumnes. Han aprovat les dues assignatures 25 alumnes. Han aprovat el doble d'alumnes Matemàtiques que Física. ¿Quants alumnes han aprovat Matemàtiques?

(a) 10
(b) 20
(c) 35
(d) 45 *

10. En el conjunt dels nombres naturals menors que 500, ¿quants números cal no siguin múltiples de 2, ni de 3, ni de 5?

(a) 120
(b) 134 *
(c) 100
(d) Cap de les anteriors

4.3 Posa't a prova amb un test molt senzill!

1. Quin és el conjunt de parts de $A = \{1, 2\}$?

(a) $\{\{1\}, \{2\}\}$
(b) $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$
(c) $\{\{1, 2\}, \{1\}\}$
(d) $\{\emptyset, \{1, 2\}\}$

2. Si $A \subseteq B$ i $B \subseteq A$, llavors...

(a) $A = \emptyset$

   (b) $B = \emptyset$
   (c) $A = B$
   (d) No es pot determinar

3. La intersecció de $A = \{1, 2, 3\}$ i $B = \{3, 4, 5\}$ és:
   (a) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$
   (b) $\{3\}$
   (c) $\{1, 2\}$
   (d) $\{4, 5\}$

4. Dos conjunts són disjunts quan...
   (a) Tenen els mateixos elements
   (b) No tenen cap element en comú
   (c) Un és subconjunt de l'altre
   (d) La seva unió és buida

5. El cardinal de $\mathcal{P}(\{a, b, c\})$ és:
   (a) 3
   (b) 6
   (c) 8
   (d) 9

6. Quina de les següents relacions és d'equivalència?
   (a) "Ser més alt que"
   (b) "Ser germà de"
   (c) "Tenir la mateixa edat"
   (d) "Dividir"

7. En el conjunt $\mathbb{N}$ la relació "x divideix a y" és…
   (a) Reflexiva, simètrica i transitiva
   (b) Reflexiva, antisimètrica i transitiva
   (c) Només simètrica
   (d) Només transitiva

8. Sigui $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Quina propietat compleix?
   (a) És injectiva i exhaustiva
   (b) És injectiva però no exhaustiva
   (c) És exhaustiva però no injectiva

(d) No és injectiva ni exhaustiva

9. Si $\#A = 3$ i $\#B = 4$, quants elements té $A \times B$?

   (a) 7
   (b) 12
   (c) 24
   (d) 81

10. El conjunt dels nombres reals x tals que $x^2 + 1 = 0$ és:

    (a) $\{-1, 1\}$
    (b) $\emptyset$
    (c) $\{-i, i\}$
    (d) $\{-1\}$

Les solucions són: 1(b), 2(c), 3(b), 4(b), 5(c), 6(c), 7(b), 8(d), 9(a), 10(b).