Lògica, raonament i demostració. Exercicis proposats

Miquel Angel Perelló
aprendes.com

Versió 2021

1. Reformuleu els enunciats següents fent ús de variables i constants:
   (a) El cub d'un nombre senar és senar.
   (b) Si el quadrat de un nombre enter no és divisible per 4, aleshores aquest nombre és senar.
   (c) El producte de dos nombres consecutius és parell.

2. Quines de les expressions següents són proposicions i quines predicats?
   (a) Si $x \geq 2$, llavors $x^3 \geq 1$.
   (b) $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$.
   (c) Si $w = 3$, llavors $z^w \neq 0$.

3. Quins dels següents enunciats són predicats i quins no ho són? Justifica la teva resposta.
   (a) x és divisible per 3.
   (b) La suma dels nombres x i 2.
   (c) $x^2 - y^2$.
   (d) $x + 2 < y - 3$.

4. Considereu els enunciats següents: $p =$ "Estic content", $q =$ "Estic veient una pel·lícula" i $r =$ "Estic menjant espaguetis". Expresseu en paraules els enunciats següents: (a) $r \longrightarrow p$; (b) $p \longleftrightarrow q$; (3) $q \vee (r \longrightarrow p)$; (4) $(q \longrightarrow \neg p) \wedge (r \longrightarrow \neg p)$.

5. Considereu els enunciats següents: $p =$ "L'Eduard té els cabells vermells", $q =$ "L'Eduard té un nas gran" i $r =$ "A l'Eduard li agrada menjar crispetes". Tradueix els enunciats següents a símbols: (a) "A l'Eduard no li agrada menjar crispetes"; (b) "L'Eduard té un nas gran i els cabells vermells, o bé té un nas gran i li agrada menjar crispetes".

6. Construeix les taules de veritat de les següents expressions lògiques: (a) $p \longrightarrow (q \wedge p)$; (b) $(p \wedge q) \longleftrightarrow (p \vee \neg r)$.

7. Considerem els predicats $P(x, y) =$ "$x + y = 4$" i $Q(x, y) =$ "$x < y$". Troba els valors de veritat de les següents expressions lògiques: (a) $P(x, y) \wedge Q(x, y)$ i (b) $P(x, y) \longrightarrow \neg Q(x, y)$ quan usem els valos següents (1) $x = 3, y = 1$; (2) $x = 1, y = 2$.

8. Proveu les implicacions següents:

   (a) $(A \longrightarrow B) \wedge A \Longrightarrow B$
   (b) (i) $A \wedge B \Longrightarrow A$; (ii) $A \wedge B \Longrightarrow B$
   (c) (i) $A \Longrightarrow A \vee B$; (ii) $B \Longrightarrow A \vee B$
   (d) (i) $(A \vee B) \wedge \neg B \Longrightarrow A$; (ii) $(A \vee B) \wedge \neg A \Longrightarrow B$
   (e) (i) $A \longleftrightarrow B \Longrightarrow A \longrightarrow B$; (ii) $A \longleftrightarrow B \Longrightarrow B \longrightarrow A$
   (f) $(A \longrightarrow B) \wedge (B \longrightarrow A) \Longrightarrow A \longleftrightarrow B$

9. Proveu les equivalències lògiques següents:

   (a) $\neg(\neg A) \Longleftrightarrow A$ (llei de la doble negació)
   (b) $A \wedge B \Longleftrightarrow B \wedge A$ (llei commutativa de $\wedge$)
   (c) $A \vee B \Longleftrightarrow B \vee A$ (llei commutativa de $\vee$)
   (d) $(A \wedge B) \wedge C \Longleftrightarrow A \wedge (B \wedge C)$ (llei associativa de $\wedge$)
   (e) $(A \vee B) \vee C \Longleftrightarrow A \vee (B \vee C)$ (llei associativa de $\vee$)
   (f) $A \vee (B \wedge C) \Longleftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ (llei distributiva de $\vee$ respecte de $\wedge$)
   (g) $A \wedge (B \vee C) \Longleftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ (llei distributiva de $\wedge$ respecte de $\vee$)
   (h) $A \longrightarrow B \Longleftrightarrow \neg B \longrightarrow \neg A$ (llei del contrarecíproc)
   (i) $A \longleftrightarrow B \Longleftrightarrow (A \longrightarrow B) \wedge (B \longrightarrow A)$ (llei del bicondicional)
   (j) $(A \vee B) \longrightarrow C \Longleftrightarrow (A \longrightarrow C) \wedge (B \longrightarrow C)$
   (k) $\neg(A \wedge B) \Longleftrightarrow \neg A \vee \neg B$ (llei de De Morgan)
   (l) $\neg(A \vee B) \Longleftrightarrow \neg A \wedge \neg B$ (llei de De Morgan)

10. Simplifiqueu les afirmacions següents. Podeu fer ús de les equivalències de l'exercici 9 a més de les equivalències comentades a teoria i pràctica: (a) $\neg(X \longrightarrow \neg Y)$; (b) $(Y \wedge Z) \longrightarrow Y$; (c) $\neg(X \longrightarrow Y) \vee Y$; (d) $(X \longrightarrow Y) \vee Y$.

11. Escriu la negació dels enunciats següents: (a) $e^3 > 0$; (b) $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$ i $\tan 0 \geq 0$; (c) $y - 3 > 0$ implica $y^2 + 9 > 6y$.

12. Per a cadascun dels arguments següents, si és vàlid, doneu una deducció, i si no és vàlid, mostreu el perquè.

   (a)
   $$\begin{array}{ll} P_1: & p \longrightarrow q \\ P_2: & \neg r \longrightarrow \neg q \\ P_3: & s \longrightarrow t \\ P_4: & p \vee s \\ \hline C: & r \vee t \end{array}$$

$$
\text{(b)}\quad
\begin{array}{ll}
P_1: & p \longrightarrow q \\
P_2: & \neg r \longrightarrow (s \longrightarrow t) \\
P_3: & r \vee (p \vee t) \\
P_4: & \neg r \\
\hline
C: & q \vee s
\end{array}
$$

$$
\text{(c)}\quad
\begin{array}{ll}
P_1: & \neg p \longrightarrow (q \longrightarrow \neg r) \\
P_2: & r \longrightarrow \neg p \\
P_3: & (\neg s \vee p) \longrightarrow \neg\neg r \\
P_4: & \neg s \\
\hline
C: & \neg q
\end{array}
$$

13. Per a cadascun dels arguments següents, si és vàlid, doneu una deducció, i si no és vàlid, mostreu el perquè.

   (a) Si el rellotge està avançat, llavors en Joan va arribar abans de les deu i va veure sortir el cotxe de l'Andreu. Si l'Andreu no diu la veritat, llavors en Joan no va veure sortir el cotxe de l'Andreu. L'Andreu diu la veritat o estava en l'edifici en el moment del crim. El rellotge està avançat. Per tant, l'Andreu estava en l'edifici en el moment del crim.

   (b) Si α i β són dos angles iguals, llavors $\alpha = 45^o$. Si $\beta = 45^o$, llavors $\alpha = 90^o$. O β és recte o bé $\beta = 45^o$. β no és recte. Per tant, α i β no són iguals i cap d'ells és recte.

14. Escriviu una deducció per a cadascun dels arguments següents, tots ells són vàlids. Indiqueu si les premisses són consistents o inconsistents:

   (a) No és el cas que la roba sigui molesta o no sigui barata. La roba no és barata o no està de moda. Si la roba no està de moda, és una ximpleria. Per tant, la roba és una ximpleria.

   (b) Si al Marc li agrada la pizza, li agrada la cervesa. Si al Marc li agrada la cervesa, no li agrada l'arengada. Si al Marc li agrada la pizza, li agraden les arengades. Al Marc li agrada la pizza. Per tant, li agrada la pizza d'arengada.

15. Trobeu la fal·làcia o fal·làcies en cadascun dels arguments següents:

   (a) Si la meva tortuga menja una hamburguesa, es posa malalta. Si la meva tortuga es posa malalta, llavors no és feliç. Per tant, la meva tortuga es posa malalta.

   (b) Si Frida es menja una granota, Susana menjarà una serp. Frida no menja una granota. Per tant, Susana no menja una serp.

16. Suposem que els valors possibles de x són totes les persones. Considerem els predicats següents: $Y(x)$ = 'x té el cabell verd', $Z(x)$ = 'x li agrada les croquetes' i $W(x)$ = 'x té una granota de mascota', $L(x,y)$ ='x és tan ràpid com y', $M(x,y)$ ='x és tan car com y' i $N(x,y)$ ='x és tan vell com y'. Tradueix les expressions següents en paraules:

$$
\begin{array}{llll}
(1) & (\forall x)\, Y(x) & (3) & (\exists x)\, (Y(x) \longrightarrow Z(x)) \\
(2) & (\exists x)\, Z(x) & (4) & (\forall x)\, (W(x) \longleftrightarrow \neg Z(x))
\end{array}
$$

17. Suposem que els valors possibles de x i y són tots els vehicles. Considerem els predicats següents: $L(x,y) =$'x és tan ràpid com y', $M(x,y) =$'x és tan car com y' i $N(x,y) =$'x és tan vell com y'. Tradueix les expressions següents en paraules:

(1)	$(\exists x)\,(\forall y)\,L(x,y)$	(3)	$(\exists y)\,(\forall x)\,(L(x,y) \vee N(x,y))$
(2)	$(\forall x)\,(\exists y)\,M(x,y)$	(4)	$(\forall y)\,(\exists x)\,(\neg M(x,y) \longrightarrow L(x,y))$

18. Expresseu formalment els enunciats següents:

    (1) La gent és simpàtica.
    (2) A ningú li agraden els gelats i els embutits.
    (3) Em va agradar un dels llibres que vaig llegir l'estiu passat.
    (4) Existeix una vaca tal que, si té quatre anys, no té taques blanques.
    (5) Per a cada fruita, hi ha una fruita més madura que ella.

19. Escriu una negació de cada enunciat. No escriviu la paraula "no" davant de qualsevol dels objectes que es quantifiquen (per exemple, no escriviu "No tots els nois són bons" per a la part (1) d'aquest exercici).

    (1) Tots els nois són bons.
    (2) Hi ha ratpenats que pesen 3 kg o més.
    (3) L'equació $x^2 - 2x > 0$ val per a tots els nombres reals x.
    (4) Hi ha un nombre enter n tal que n^2 és un nombre perfecte.
    (5) Cada casa té una porta que és blanca.

20. Assumint com a domini de les variables x i y el conjunt U, escriviu una deducció per a cadascun dels arguments següents:

(a)
$$\begin{array}{ll} P_1: & (\forall x)\,(R(x) \longrightarrow C(x)) \\ P_2: & (\forall x)\,(T(x) \longrightarrow R(x)) \\ \hline C: & (\forall x)\,(\neg C(x) \longrightarrow \neg T(x)) \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{ll} P_1: & (\forall x)\,(\exists y)\,(E(x) \longrightarrow (M(x) \vee N(x))) \\ P_2: & \neg\,(\forall x)\;\; M(x) \\ P_3: & (\forall x)\;\; E(x) \\ \hline C: & (\exists x)\;\; N(x) \end{array}$$

21. Escriviu una deducció per a cadascun dels arguments següents:

    (a) Tots els peixos amb moltes espines no són agradables de menjar. Tots els peixos amb moltes espines són peixos blancs. Per tant, tots els peixos que siguin agradables de menjar són peixos blancs.

    (b) Tots els estudiants d'un institut de secundària que assisteixen a classes d'ampliació són genials. Hi ha un estudiant de l'institut que és intel·ligent i no és genial. Per tant, hi ha un estudiant de l'institut que és intel·ligent i no assisteix a classes d'ampliació.

22. Construïu definicions de 'quadrat perfecte', 'paral·lela' i 'funció real de variable real'. Quins són els dominis de les variables, quins termes s'han d'assumir com a coneguts?

23. Definiu la igualtat de dos nombres racionals, de dues rectes en el pla i de dues funcions reals de variable real.

24. Considerem dos nombres enters x i y, llavors proveu directament que

    (a) si x i y són parells, aleshores $x+y$ és parell.

    (b) si x i y són senars, aleshores $x+y$ és parell.

    (c) si un d'ells és senar i l'altre és parell, aleshores $x+y$ és senar.

25. Si n és un nombre natural imparell, proveu directament que n^2 és de la forma $8k+1$, per a algun sencer $k \geq 1$.

26. Demostreu directament que les solucions de l'equació $ax^2+bx+c=0$, on a, b i c són nombres reals, són expressades per la fórmula

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

27. Proveu cap a enrere:

    (a) Que qualsevol enter divideix zero.

    (b) Que per a tots $x, y \in \mathbb{R}$, $xy = 0$ si i només si $x = 0$ o $y = 0$.

28. Proveu per contrarecíproc:

    (a) Que per a qualssevol nombres reals a i b, $|a| < |b|$ si i només si $a^2 < b^2$.

    (b) Que per a qualssevol nombres reals x i y, $x^2+y^2 = 0$ si i només si $x = y = 0$.

29. Considerem que a és un nombre racional i b és irracional. Llavors, proveu per reducció a l'absurd:

    (a) Que $a+b$ és irracional

    (b) Si $a \neq 0$, aleshores ab és irracional.

30. Proveu per reducció a l'abssurd que hi ha infinits nombres primers.

31. Donats $a, b, c \in \mathbb{Z}$, proveu per reducció a l'absurd que si a no divideix bc, llavors a no divideix b.

32. És pot demostrar que n^3-n és múltiple de 3, n^5-n és múltiple de 5 i n^7-n és múltiple de 7, però n^k-n és múltiple de k?

33. Proveu per inducció:

    (a) Si $n \in \mathbb{N}$, llavors $1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2$.

    (b) Si $n \in \mathbb{N}$ i $n \geq 5$, $4n > n^4$.

    (c) Si n és un nombre enter no negatiu, llavors $5 \mid (n^5-n)$.

34. (Desigualtat triangular) Si $x, y \in \mathbb{R}$, proveu que $|x+y| \leq |x|+|y|$.

35. Proveu que no existeixen dos nombres enters m i n tals que $14m + 21n = 100$.

36. Considerem que $a, b \in \mathbb{N}$. Llavors hi ha un únic $d \in \mathbb{N}$ tal que: Un enter m és múltiple de d si i només si $m = ax + by$ per alguns $x, y \in \mathbb{Z}$.

37. Definim per recursió per a qualsevol enter no negatiu k :

    - $u_0 = 0$,
    - $u_{k+1} = 3u_k + 3^k$.

    Proveu que $u_n = n \cdot 3^{n-1}$ per a tot enter no negatiu n.

38. Demostreu que el principi de bona ordenació implica el principi d'inducció.

    Suggeriment: Considereu una proposició $p(n)$ sobre el nombre natural n. Suposeu que $p(1)$ és vertadera, i també que per a tots els n, $p(n) \longrightarrow p(n+1)$. Heu de demostrar que per a tot n, $p(n)$ és vertadera. Ara feu la prova per reducció a l'absurd. Suposeu que hi ha algun n pel qual $p(n)$ és falsa. Llavors, considereu el conjunt K que té com a elements els nombres naturals n que no compleixen $p(n)$. Ara heu de concloure que això és una contradicció.