Lògica, raonament i demostració.
Pràctica

Miquel Angel Perelló
aprendes.com

Versió 2021

1 Lògica

Exercici 1. Reformuleu els enunciats següents fent ús de variables i constants: (a) El producte de dos nombres parells és parell; (b) Donat un nombre real no negatiu, busqueu dos nombres reals la diferència dels seus quadrats no sigui més gran que el nombre donat.

Solució: (a) Si simbolitzem per P el predicat "ser parell", aleshores podem escriure:

$$\forall x, y \left(P\left(x\right) \wedge P\left(y\right) \longrightarrow P\left(x \cdot y\right)\right).$$

Observa que també podem escriure:

$$\forall x \left(P\left(x\right) \longleftrightarrow \left(\exists k\right)\left(k \in \mathbb{Z} \wedge x = 2k\right)\right).$$

(b) Suposem donat un nombre real $\delta \geq 0$, o sigui no negatiu, aleshores podem escriure:

$$\exists x, y \left(x, y \in \mathbb{R} \wedge x^2 - y^2 \leq \delta\right).$$

□

Exercici 2. Quines de les expressions següents són proposicions i quines predicats? (a) $4 < 3$; (b) $y > 7$; (c) $x + y = z$.

Solució: (a) És una proposició perquè és un enunciat vertader; (b) És un predicat perquè és un enunciat que conté una variable y i si li assignem un valor es té una proposició; (c) És un predicat de tres variables x, y i z. Assignant valors a les tres variables s'obté una proposició. □

Exercici 3. Quins dels següents enunciats són predicats i quins no ho són? Justifica la teva resposta. (a) x és un divisor de 210; (b) El producte dels nombres x i y; (c) La suma de dos nombres es menor que 1.

Solució: (a) És un predicat de una variable x que és vertader quan, per exemple, x pren el valor 7, i fals quan, per exemple, és 8; (b) No és predicat perquè quan assignem valors a les variables x i y no s'obté una proposició. De fet, l'enunciat és l'expressió algebraica $x \cdot y$; (c) És un predicat que conté dues variables. Podem expressar-lo com $x + y < 1$. És clar que quan donme valors a x i y s'obté una proposició. □

Exercici 4. Considereu els enunciats següents: p = "Estic content", q = "Estic veient una pel·lícula" i r = "Estic menjant espagueti". Expresseu en paraules els enunciats següents: (a) $(q \vee r) \longrightarrow p$; (b) $(p \wedge \neg q) \longleftrightarrow (q \vee r)$.

Solució: (a) Estic content quan veig una pel·lícula o mengo espagueti; (b) Veig una pel·lícula o mengo espagueti només si estic content sense veure una pel·lícula. □

Exercici 5. Analitza les formes lògiques dels enunciats següents: (a) El joc es cancel·larà si plou o neva; (b) Tenir almenys deu persones és una condició necessària i suficient per a la conferència que s'està impartint; (c) Si en Miquel va anar a la botiga, llavors tenim ous a casa, si no no en tenim.

Solució: (a) Si C ="El joc serà cancel·lat", P ="Plou" i N ="Està nevant". Aleshores l'enunciat "El joc es cancel·larà si plou o neva" es la proposició $C \leftrightarrow (P \vee N)$.
(b) Si P ="Hi ha almenys deu persones" i C ="La conferència es donarà". Aleshores l'enunciat "Tenir almenys deu persones és una condició necessària i suficient per a la conferència que s'està impartint" és la proposició $P \longleftrightarrow C$.
(c) Si B ="Miquel va anar a la botiga" i C ="Hi ha ous a casa". Aleshores, l'enunciat "Si en Miquel va anar a la botiga, llavors tenim ous a casa, si no no en tenim" és la proposició $(B \to C) \wedge (\neg B \to \neg C)$. Això és equivalent a $B \longleftrightarrow C$ perquè per la llei del contrarecíproc s'obté $(B \to C) \wedge (C \to B)$, què és alhora equivalent al que hem dit. □

Exercici 6. Considereu els enunciats següents: p = "L'Eduard té els cabells vermells", q = "L'Eduard té un nas gran" i r = "A l'Eduard li agrada menjar crispetes". Tradueix els enunciats següents a símbols: (a) "L'Eduard té els cabells vermells i no té un nas gran"; (b) "No és el cas que l'Eduard tingui un nas gran o li agradi menjar crispetes".

Solució: (a) $p \wedge \neg q$; (b) $\neg(q \vee r)$. □

Exercici 7. Construeix les taules de veritat de les següents expressions lògiques: (a) $(p \wedge q) \vee \neg p$; (b) $\neg p \longrightarrow \neg(q \vee r)$.

Solució: (a)

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \vee \neg p$
V	V	F	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

(b)

p	q	r	$\neg p$	$q \wedge r$	$\neg(q \vee r)$	$\neg p \longrightarrow \neg(q \vee r)$
V	V	V	F	V	F	V
V	V	F	F	F	V	V
V	F	V	F	F	V	V
V	F	F	F	F	V	V
F	V	V	V	V	F	F
F	V	F	V	F	V	V
F	F	V	V	F	V	V
F	F	F	V	F	V	V

□

Exercici 8. Considerem els predicats $P(x,y) =$ '$x+y=4$' i $Q(x,y) =$ '$x<y$'. Troba els valors de veritat de les següents expressions lògiques: (a) $\neg P(x,y) \vee Q(x,y)$ i (b) $\neg(P(x,y) \longleftrightarrow Q(x,y))$ quan usem els valos següents (1) $x=1, y=3$; (2) $x=2, y=1$.

Solució: (a) Considerem $\neg P(x,y) \vee Q(x,y)$, aleshores es tenen les proposicions: (1) $\neg P(1,3) \vee Q(1,3)$ què és vertadera doncs $Q(1,3)$ ho és al complir-se $1<3$; (2) $\neg(P(1,3) \longleftrightarrow Q(1,3))$ què és falsa doncs $P(1,3) \longleftrightarrow Q(1,3)$ es vertadera al complir-se $1+3=4$ i $1<3$.
(b) Considerem el cas en que $x=2$ i $y=1$. Aleshores (1) $\neg P(2,1) \vee Q(2,1)$ és vertadera doncs $\neg P(2,1)$ ho és al complir-se $2+1 \neq 4$; (2) $\neg(P(2,1) \longleftrightarrow Q(2,1))$ és falsa doncs $P(2,1)$ i $Q(2,1)$ són ambdues falses. $\square$

Exercici 9. Proveu les implicacions següents: (a) $(A \longrightarrow B) \wedge \neg B \Longrightarrow \neg A$; (b) $(A \longrightarrow B) \wedge (B \longrightarrow C) \Longrightarrow A \longrightarrow C$.

Solució: (a) Per veure que $(A \longrightarrow B) \wedge \neg B \Longrightarrow \neg A$ hem de comprovar que $((A \longrightarrow B) \wedge \neg B) \longrightarrow \neg A$ és tautologia. Construïm la taula de veritat corresponent:

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \longrightarrow B$	$(A \longrightarrow B) \wedge \neg B$	$((A \longrightarrow B) \wedge \neg B) \longrightarrow \neg A$
V	V	F	F	V	F	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	F	V
F	F	V	V	V	V	V

i s'obté una tautologia doncs veiem que l'última columna només té el valor V.
(b) Per veure que $(A \longrightarrow B) \wedge (B \longrightarrow C) \Longrightarrow A \longrightarrow C$ hem de comprovar que $((A \longrightarrow B) \wedge (B \longrightarrow C)) \longrightarrow (A \longrightarrow C)$ és tautologia. Construïm la taula de veritat corresponent prenent $\alpha = A \longrightarrow B$, $\beta = B \longrightarrow C$ i $\gamma = A \longrightarrow C$:

A	B	C	α	β	γ	$\alpha \wedge \beta$	$(\alpha \wedge \beta) \longrightarrow \gamma$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	V	F	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V	F	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

i surt que és tautologia com era d'esperar. $\square$

Exercici 10. Proveu les equivalències lògiques següents: (a) $A \longrightarrow B \Longleftrightarrow \neg A \vee B$; (b) $A \longrightarrow (B \wedge C) \Longleftrightarrow (A \longrightarrow B) \wedge (A \longrightarrow C)$.

Solució: (a) Per veure que $A \longrightarrow B \Longleftrightarrow \neg A \vee B$ hem de comprovar que $(A \longrightarrow B) \longleftrightarrow (\neg A \vee B)$ és tautologia. Construïm la taula de veritat corresponent:

A	B	$\neg A$	$A \longrightarrow B$	$\neg A \vee B$	$(A \longrightarrow B) \longleftrightarrow (\neg A \vee B)$
V	V	F	V	V	V
V	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V

i s'obté una tautologia doncs veiem que l'última columna només té el valor V.
(b) Per veure que $A \longrightarrow (B \wedge C) \Longleftrightarrow (A \longrightarrow B) \wedge (A \longrightarrow C)$ hem de comprovar que $(A \longrightarrow (B \wedge C)) \longleftrightarrow ((A \longrightarrow B) \wedge (A \longrightarrow C))$ és tautologia. Construïm la taula de veritat corresponent, prenent $\alpha = A \longrightarrow B$, $\beta = A \longrightarrow C$ i $\gamma = A \longrightarrow (B \wedge C)$:

A	B	C	α	$B \wedge C$	β	γ	$\delta = \alpha \wedge \beta$	$\gamma \longleftrightarrow \delta$
V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	F	V
V	F	V	F	F	V	F	F	V
V	F	F	F	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V	V	V	V
F	F	V	V	F	V	V	V	V
F	F	F	V	F	V	V	V	V

i surt que és tautologia com era d'esperar. □

Exercici 11. Simplifiqueu les afirmacions següents. Podeu fer ús de les equivalències de l'exercici anterior a més de les equivalències comentades a teoria i pràctica: (a) $X \longrightarrow (X \wedge Y)$; (b) $\neg(X \vee Y) \wedge Y$.

Solució: (a) Aplicant la primera equivalència de l'apartat anterior es té: $X \longrightarrow (X \wedge Y) \Longleftrightarrow \neg X \vee (X \wedge Y)$. Aplicant ara la llei distributiva de $\vee$ respecte de $\wedge$ s'obté

$$\neg X \vee (X \wedge Y) \Longleftrightarrow (\neg X \vee X) \wedge (\neg X \vee Y)$$

Ara bé, $\neg X \vee X$ és tautologia. Per tant, $(\neg X \vee X) \wedge (\neg X \vee Y) \Longleftrightarrow \neg X \vee Y$. Com a consequència tenim que $X \longrightarrow (X \wedge Y) \Longleftrightarrow X \longrightarrow Y$, doncs $\neg X \vee Y \Longleftrightarrow X \longrightarrow Y$.
(b) Aplicant les lleis de De Morgan es té:

$$\neg(X \vee Y) \wedge Y \Longleftrightarrow (\neg X \wedge \neg Y) \vee Y.$$

Ara, aplicant la llei distributiva de $\vee$ respecte de $\wedge$, s'obté

$$\neg(X \vee Y) \wedge Y \Longleftrightarrow (\neg X \vee Y) \wedge (\neg Y \vee Y).$$

Finalment, com $\neg Y \vee Y$ és tautologia i $\neg X \vee Y \Longleftrightarrow X \longrightarrow Y$, es té

$$\neg(X \vee Y) \wedge Y \Longleftrightarrow X \longrightarrow Y.$$

□

Exercici 12. Escriu la negació dels enunciats següents: (a) $3 > 5$ o $7 \leq 8$; (b) Si $x = 3$, llavors $x^2 = 5$; (c) $a - b = c$ si i només si $a = b + c$.

Solució: (a) Aplicant la llei de de Morgan, $3 \leq 5$ o $7 > 8$.
(b) L'enunciat és de la forma $A \longrightarrow B$, aleshores la seva negació és $\neg(A \longrightarrow B)$. Ara bé, sabem que $A \longrightarrow B \Longleftrightarrow \neg A \vee B$ i aplicant de nou la llei de De Morgan es té $\neg(A \longrightarrow B) \Longleftrightarrow A \wedge \neg B$. Per tant, la negació de l'enunciat és $x = 3$ i $x^2 \neq 5$.
(c) Observem primer que $a - b = c$ és equivalent a $a = b + c$. Per tant, l'enunciat és tautològic i de la forma $A \longleftrightarrow A$, aleshores la seva negació és contradicció: $a - b = c$ i $a \neq b + c$. □

2 Raonament lògic

Exercici 13. Per a cadascun dels raonaments següents, si és vàlid, doneu una deducció, i si no és vàlid, mostreu el perquè.

1. Si el fre falla i el camí està gelat, llavors el cotxe no pararà. Si el cotxe es va revisar, no fallaran els frens. Però el cotxe no es va revisar. Per tant, el cotxe no pararà.

2. Si el punt d'una recta representa un enter, llavors el número es pot definir com un decimal infinit o per un parell de decimals infinits. O el número es pot definir per un decimal finit o el número pot ser definit o bé per un decimal infinit o per un parell de decimals infinits. El número no pot ser definit per un decimal finit. Per tant, el punt de la recta representa un enter.

3. Si el rellotge està avançat, llavors en Joan va arribar abans de les deu i va veure sortir el cotxe de l'Andreu. Si l'Andreu no diu la veritat, llavors en Joan no va veure sortir el cotxe de l'Andreu. L'Andreu no diu la veritat o estava en l'edifici en el moment del crim. El rellotge està avançat. Per tant, l'Andreu estava en l'edifici en el moment del crim.

Solució: (1) Les proposicions simples d'aquest raonament són: $p =$"els frens fallen", $q =$"el camí està gelat", $r =$"el cotxe pararàï $s =$"el cotxe es va revisar". Expressem ara el raonament simbòlicament:

$$\begin{array}{ll} P_1: & (p \wedge q) \longrightarrow \neg r \\ P_2: & s \longrightarrow \neg p \\ P_3: & \neg s \\ \hline C: & \neg r \end{array}$$

L'argument és fals. Prenem com interpretació: $\dfrac{p \quad q \quad r \quad s}{V \quad F \quad V \quad F}$, aleshores les premisses són vertaderes $\dfrac{(p \wedge q) \longrightarrow \neg r \quad s \longrightarrow \neg p \quad \neg s}{V \qquad\qquad V \qquad\quad V}$ i la conclusió, falsa $\dfrac{\neg r}{F}$.

(2) Les proposicions simples d'aquest raonament són: $p =$"el punt d'una recta representa un enter", $q =$"el número es pot definir com un decimal infinit", $r =$"el número es pot definir per un parell de decimals infinitsï $s =$"el número es pot definir per un decimal finit". Expressem ara el raonament simbòlicament:

$$\begin{array}{ll} P_1: & p \longrightarrow (q \vee r) \\ P_2: & \neg(s \longleftrightarrow (q \vee r)) \\ P_3: & \neg s \\ \hline C: & p \end{array}$$

L'argument és fals. Prenem com interpretació: $\dfrac{p \quad q \quad r \quad s}{F \quad V \quad V \quad F}$, aleshores les premisses són vertaderes $\dfrac{p \longrightarrow (q \vee r) \quad \neg(s \longleftrightarrow (q \vee r)) \quad \neg s}{V \qquad\qquad V \qquad\qquad V}$ i la conclusió, falsa $\dfrac{p}{F}$.

(3) Les proposicions simples d'aquest raonament són: $p =$"el rellotge està avançat", $q =$"Joan va arribar abans de les deu", $r =$"Joan va veure sortir el cotxe de l'Andreu", $s =$"l'Andreu diu la veritat" i $t =$"Andreu estava en l'edifici en el moment del crim". Expressem ara el raonament simbòlicament:

$$\begin{array}{rl} P_1: & p \longrightarrow (q \wedge r) \\ P_2: & \neg s \longrightarrow \neg r \\ P_3: & \neg s \vee t \\ P_4: & p \\ \hline C: & t \end{array}$$

Ara provarem la validesa d'aquest argument utilitzant les regles d'inferència:

$$\begin{array}{lll} 1. & p \longrightarrow (q \wedge r) & P_1 \\ 2. & \neg s \longrightarrow \neg r & P_2 \\ 3. & \neg s \vee t & P_3 \\ 4. & p & P_4 \\ 5. & q \wedge r & \text{MP}(1,4) \\ 6. & r & \text{EC } 5 \\ 7. & \neg\neg r & \text{DN } 6 \\ 8. & \neg\neg s & \text{MT}(2,7) \\ \hline 9. & t & \text{ED}(3,8) \end{array}$$

□

Exercici 14. Per a cadascun dels arguments següents, si és vàlid, doneu una deducció, i si no és vàlid, mostreu el perquè.

1. $$\begin{array}{rl} P_1: & p \longrightarrow q \\ P_2: & \neg r \longrightarrow (t \longrightarrow s) \\ P_3: & r \vee (p \vee t) \\ P_4: & \neg r \\ \hline C: & q \vee s \end{array}$$

2. $$\begin{array}{rl} P_1: & \neg p \longrightarrow (q \longrightarrow \neg r) \\ P_2: & r \longrightarrow \neg p \\ P_3: & (\neg s \vee p) \longrightarrow \neg\neg r \\ P_4: & \neg s \\ \hline C: & \neg q \end{array}$$

Solució: (1) L'argument és vàlid i una deducció és:

$$\begin{array}{lll} 1. & p \longrightarrow q & P_1 \\ 2. & \neg r \longrightarrow (t \longrightarrow s) & P_2 \\ 3. & r \vee (p \vee t) & P_3 \\ 4. & \neg r & P_4 \\ 5. & p \vee t & \text{ED}(3,4) \\ 6. & t \longrightarrow s & \text{MP}(2,4) \\ \hline 7. & q \vee s & \text{DL}(1,5,6) \end{array}$$

(2) L'argument també és vàlid i una deducció és:

1.	$\neg p \longrightarrow (q \longrightarrow \neg r)$	P_1
2.	$r \longrightarrow \neg p$	P_2
3.	$(\neg s \vee p) \longrightarrow \neg\neg r$	P_3
4.	$\neg s$	P_4
5.	$\neg s \vee p$	ID 4
6.	$\neg\neg r$	MP(3,5)
7.	r	DN 6
8.	$\neg p$	MP(2,7)
9.	$q \longrightarrow \neg r$	MP(1,8)
10.	$\neg q$	MT(6,9)

□

Exercici 15. Escriviu una deducció per el següent raonament. Indiqueu si les premisses són consistents o inconsistents:"Els ordinadors són útils i divertits i els ordinadors consumeixen molt de temps. Si els ordinadors són difícils d'utilitzar, no són divertits. Si els ordinadors no estan ben dissenyats, llavors són difícils d'utilitzar. Per tant, els ordinadors estan ben dissenyats".

Solució: (1) Les proposicions simples d'aquest raonament són: $p =$"els ordinadors són útils i divertits", $q =$"els ordinadors consumeixen molt de temps", $r =$"els ordinadors són difícils d'utilitzarï $s =$"els ordinadors estan ben dissenyats". Expressem ara el raonament simbòlicament:

$$\begin{array}{ll} P_1: & p \wedge q \\ P_2: & r \longrightarrow \neg p \\ P_3: & \neg s \longrightarrow r \\ \hline C: & s \end{array}$$

Ara provarem la validesa d'aquest argument utilitzant les regles d'inferència:

1.	$p \wedge q$	P_1
2.	$r \longrightarrow \neg p$	P_2
3.	$\neg s \longrightarrow r$	P_3
5.	p	EC(1)
6.	$\neg\neg p$	DN 5
7.	$\neg r$	MT(2,6)
8.	$\neg\neg s$	MT(3,7)
9.	s	DN 8

Podem provar la consistència de les premisses comprovant que hi ha una interpretació que faci totes les premisses vertaderes:

$$\begin{array}{ccc|ccccc|cccc} p & \wedge & q & r & \longrightarrow & \neg & p & & \neg & s & \longrightarrow & r \\ & V & & & V & & & & & & V & \\ V & V & V & F & V & F & V & & F & V & V & F \end{array}$$

□

Exercici 16. És una fal·làcia el raonament següent: "Si el poble elegeix un alcalde, s'augmentaran els impostos. Si no s'augmenten els impostos al poble, llavors no es construirà un estadi nou. El poble no tria un alcalde. Per tant, no es construirà un estadi nou".

Solució: Si formalitzem l'argument prenent: $p =$"el poble elegeix un alcalde", $q =$"augmentarà els impostos", i $r =$"es construirà un estadi nou". Aleshores, es té

$$\begin{array}{ll} P_1: & p \longrightarrow q \\ P_2: & \neg q \longrightarrow \neg r \\ P_3: & \neg p \\ \hline C: & \neg r \end{array}$$

Es clar que es tracta d'una fal·làcia perquè es pensa que pel fet de no triar un alcalde no s'augmentaran els impostos i com a conseqüència no es construirà un estadi nou. Això és fals com es pot veure a continuació:

p	$\longrightarrow$	q	$\neg$	q	$\longrightarrow$	$\neg$	r	$\neg$	p	$\neg$	r
	V				V!			V		F	
F	V	F	V	F	F!	F	V	V	F	F	V

□

Exercici 17. Formalitzeu els següents enunciats: (1) "Tots els enters que no són senars són parells"; (2) "Hi ha un nombre enter que no és parell"; (3) "Per a cada nombre real x, hi ha un nombre real y per al qual $y^3 = x$"; i (4) "Donats dos nombres racionals a i b, el producte ab és racional".

Solució: Primer identifiquem els predicats i després escrivim l'enunciat simbòlicament.

(1) Suposem que P és el predicat "ser parellï S és el predicat "ser senar", aleshores es té:

$$\forall x \in \mathbb{Z},\, \neg S(x) \longrightarrow P(x),$$

o també, més formalment,

$$(\forall x)\left((x \in \mathbb{Z} \wedge \neg S(x)) \longrightarrow P\left(x\right)\right).$$

(2) Usant la mateixa notació que l'apartat anterior, es té:

$$\exists x \in \mathbb{Z},\, \neg P\left(x\right),$$

o bé,

$$(\exists x)\left(x \in \mathbb{Z} \wedge \neg P\left(x\right)\right).$$

(3) L'enunciat simbòlicament s'escriu així:

$$\forall x \in \mathbb{R},\, \exists y \in \mathbb{R},\, y^3 = x,$$

o bé, també com

$$(\forall x)\,(\exists y)\left(x \in \mathbb{R} \wedge\, y \in \mathbb{R} \wedge\, y^3 = x\right).$$

(4) L'enunciat s'escriu així simbòlicament:

$$\forall a, b \in \mathbb{Q},\, ab \in \mathbb{Q},$$

o bé, com

$$(\forall a, b)\left(a, b \in \mathbb{Q} \longrightarrow ab \in \mathbb{Q}\right).$$

□

Exercici 18. Expresseu formalment els enunciats següents:

1. Algú no va fer els deures.
2. Tothom al dormitori té un company de pis que no li agrada.
3. Si algú al dormitori té un amic que té el xarampió, llavors tothom el dormitori s'haurà de posar en quarantena.
4. Tot en aquesta botiga té un preu excessiu o està mal fet.

Solució: (1) Si $P(x) =$"x fa els deures", aleshores l'enunciat es formalitza d'aquesta manera: $\exists x \neg P(x)$.
(2) Necessitem tres predicats per formalitzar l'enunciat: $P(x) =$"x viu en el pis", $Q(x, y) =$"x i y són company de pis" i $R(x, y) =$"x li agrada y". Aleshores es té:

$$\forall x(P(x) \longrightarrow \exists y\, (Q\,(x, y) \wedge \neg R\,(x, y))$$

(3) Introduïm quatre predicats per formalitzar l'enunciat: $P(x) =$"x viu en el pis", $Q(x, y) =$"x i y són amics", $R(x) =$"x té xarampió" i $S(x) =$"x està en quarantena". Aleshores escribim

$$\forall x\, (P(x) \longrightarrow \exists y\, ((R(y) \wedge Q\,(x, y)) \longrightarrow S(x)))$$

(4) Si considerem $P(x) =$"x està a la botiga", $Q(x) =$"x té el preu excessiu" i $R(x) =$"x està mal fet", llavors l'enunciat formalitzat s'escriu així:

$$\forall x\, (P(x) \longrightarrow (Q(x) \vee R(x)))$$

□

Exercici 19. Tradueix les expressions següents en paraules:

1. $\forall x\, ((H(x) \wedge \neg \exists y C(x, y)) \longrightarrow \neg F(x))$, si $H(x) =$"x és un home", $C(x, y) =$"x està casat amb y" i $F(x) =$"x és feliç".
2. $\forall x\, (W(x) \wedge Z(x))$, si $Z(x) =$"x li agrada les croquetes" i $W(x) =$"x té una granota de mascota".
3. $\exists x\, (N(x) \wedge \forall y\, (N(y) \longrightarrow x \leq y))$, si $N(x) =$"x es un nombre natural".

Solució: (1) "Tot home que no està casat no és feliç", o dit en unes altres paraules, "Tots els homes solters són infeliços".
(2) "A tots els que tenen una granota com a mascota els agraden les croquetes".
(3) "Existeix un nombre natural més petit o igual que qualsevol altre nombre natural". □

Exercici 20. Què signifiquen les afirmacions següents? Són vertaderes o falses? L'univers del discurs en cada cas és $\mathbb{N}$, el conjunt de tots els nombres naturals.

1. $\forall x \exists y (x < y)$.
2. $\exists y \forall x (x < y)$.

3. $\exists x \exists y (x < y)$.

4. $\exists x \forall y (x < y)$.

5. $\forall y \forall x (x < y)$.

Solució: (1) Això vol dir que per a cada nombre natural x, l'afirmació $\exists y(x < y)$ és certa. En altres paraules, per a cada nombre natural x, hi ha un nombre natural més gran que x. Això és cert. Per exemple, $x + 1$ sempre és més gran que x.
(2) Això vol dir que hi ha algun nombre natural y tal que l'enunciat $\forall x(x < y)$ és cert. En altres paraules, hi ha algun nombre natural y tal que tots els nombres naturals són més petits que y. Es clar que això és fals. No importa el nombre natural y que triem, sempre hi haurà nombres naturals més grans.
(3) Això vol dir que hi ha un nombre natural x tal que $\exists y(x < y)$ és cert. Però com hem vist al primer apartat, això és cert per a tots els nombres naturals x, de manera que en particular és cert per almenys un.
(4) Això vol dir que hi ha un nombre natural x tal que l'enunciat $\forall y(x < y)$ és cert. Podríeu tenir la temptació de dir que aquesta afirmació serà certa si $x = 0$, però això no és correcte. Com que 0 és el nombre natural més petit, l'enunciat $0 < y$ és cert per a tots els valors de y excepte $y = 0$, però si $y = 0$, llavors $0 < y$ és fals i, per tant, $\forall y(0 < y)$ és fals. Un raonament similar mostra que per a cada valor de x l'enunciat $\forall y(x < y)$ és fals, per tant $\exists x \forall y(x < y)$ és fals.
(5) Això vol dir que per a cada nombre natural x, l'enunciat $\forall y(x < y)$ és vertader. Però com hem vist a l'apartat anterior, ni tan sols hi ha un valor de x per al qual aquesta afirmació és certa. Així doncs $\forall x \forall y(x < y)$ és fals. $\square$

Exercici 21. Escriu la negació de l'enunciat següent: "per a cada nombre real $\varepsilon > 0$, hi ha un enter positiu k tal que per a tots els enters positius n, es té $|a_n - k^2| < \varepsilon$".

Solució: Considerem com univers del discurs el conjunt de tots els nombres reals i simbolitzem per $\mathbb{Z}^+$ el conjunt del enters positius. D'aquesta manera l'enunciat s'escriu formalment així:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists k \in \mathbb{Z}^+, \forall n \in \mathbb{Z}^+, \left|a_n - k^2\right| < \varepsilon.$$

Aleshores la seva negació és:

$$\exists \varepsilon > 0, \forall k \in \mathbb{Z}^+, \exists n \in \mathbb{Z}^+, \left|a_n - k^2\right| \geq \varepsilon,$$

que s'expressa en paraules com existeix un nombre real $\varepsilon > 0$ tal que per a tot nombre enter positiu k existeix un nombre enter positiu n que fa que es compleixi $|a_n - k^2| \geq \varepsilon$. $\square$

Exercici 22. Assumint com a domini de les variables x i y el conjunt U, escriviu una deducció per el següent raonament:

$$\begin{array}{ll} P_1: & \forall x\,((A(x) \longrightarrow R(x)) \vee T(x)) \\ P_2: & \exists x\,(T(x) \longrightarrow P(x)) \\ P_3: & \forall x\,(A(x) \wedge \neg P(x)) \\ \hline C: & \exists x\; R(x) \end{array}$$

Solució: Fem ara la deducció per provar la seva validesa:

1.	$\forall x\,((A(x) \longrightarrow R(x)) \vee T(x))$	P_1
2.	$\exists x\,(T(x) \longrightarrow P(x))$	P_2
3.	$\forall x\,(A(x) \wedge \neg P(x))$	P_3
4.	$T(a) \longrightarrow P(a)$	EQE 2
5.	$(A(a) \longrightarrow R(a)) \vee T(a)$	EQU 1
6.	$A(a) \wedge \neg P(a)$	EQU 3
7.	$\neg P(a)$	EC 6
8.	$\neg T(a)$	MT(4,7)
9.	$A(a) \longrightarrow R(a)$	ED(5,8)
10.	$A(a)$	EC 6
11.	$R(a)$	MP(9,10)
14.	$\exists x\ R(x)$	IQE 11

□

Exercici 23. Escriviu una deducció del argument següent: "Tota panerola intel·ligent menga escombraries. Hi ha una panerola que li agrada la brutícia i no li agrada la pols. Per a cada panerola, no és el cas que no li agradi la brutícia o mengi escombraries. Per tant, hi ha una panerola tal que no és el cas que si no és intel·ligent, li agradi la pols.".

Solució: Formalitzem els enunciats del raonament. Per facilitar l'escriptura, considerem que la variable x té per domini el conjunt de totes les paneroles. Denotem per I, E, B i P els predicats "és intel·ligent", "mengen porqueria", "agrada la brutícia", i "agrada la pols", respectivament. Aleshores, el raonament podem simbolitzar-lo d'aquesta manera:

$$\begin{array}{ll} P_1: & \forall x\ \ (I(x) \longrightarrow E(x)) \\ P_2: & \exists x\ \ (B(x) \wedge \neg P(x)) \\ P_3: & \forall x\ \neg\,(\neg B(x) \vee E(x)) \\ \hline C: & \exists x\ \neg\,(\neg I(x) \longrightarrow P(x)) \end{array}$$

Fem ara la deducció per provar la seva validesa:

1.	$\forall x\ \ (I(x) \longrightarrow E(x))$	P_1
2.	$\exists x\ \ (B(x) \wedge \neg P(x))$	P_2
3.	$\forall x\ \neg\,(\neg B(x) \vee E(x))$	P_3
4.	$B(a) \wedge \neg P(a)$	EQE 2
5.	$\neg\,(\neg B(a) \vee E(a))$	EQU 3
6.	$B(a) \wedge \neg E(a)$	DM 5
7.	$I(a) \longrightarrow E(a)$	EQU 1
8.	$\neg E(a)$	EC 6
9.	$\neg I(a)$	MT(7,8)
10.	$\neg P(a)$	EC 4
11.	$\neg I(a) \wedge \neg P(a)$	IC(9,10)
12.	$\neg\,(I(a) \vee P(a))$	DM 11
13.	$\neg\,(\neg I(a) \longrightarrow P(a))$	EQ
14.	$\exists x\ \neg\,(\neg I(x) \longrightarrow P(x))$	IQE 13

on EQ significa que hem aplicat l'equivalencia lògica: $A \longrightarrow B \Longleftrightarrow \neg A \vee B$. □

3 Demostració

Exercici 24. Donat un enter positiu n, proveu directament que $n^3 - n$ és sempre múltiple de 3.

Solució: Observa primer que $n(n^2 - 1) = n(n+1)(n-1)$. Aquest tres factors són tres nombres naturals consecutius i, per tant, un d'ells serà un múltiple de 3. Com a conseqüència $n^3 - n$ és sempre múltiple de 3. $\square$

Exercici 25. Demostreu directament que per a cada terna de nombres reals positius a, b i c es compleix que

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq 1.$$

Solució: Considerem $a > 0, b > 0$ i $c > 0$. Aleshores podem escriure les tres expressions següents:

$$\begin{aligned} M &= \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \\ N &= \frac{a}{a+c} + \frac{c}{b+c} + \frac{b}{a+b} \\ P &= \frac{c}{a+c} + \frac{b}{b+c} + \frac{a}{a+b} \end{aligned}$$

Es clar que $N + P = 3$ i $3M \geq M + N + P$. Aleshores es té $2M \geq N + P$ i, per tant, $M \geq \frac{3}{2} > 1$.
Una altra forma de provar aquesta desigualtat és aplicant el fet que la mitjana aritmètica és més gran que la hipergeomètrica. En efecte, podem escriure ara d'aquesta manera:

$$\begin{aligned} M &= \frac{a}{b+c} + \frac{a}{a+c} + \frac{a}{a+b} \\ N &= \frac{b}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{b}{a+b} \\ P &= \frac{c}{b+c} + \frac{c}{a+c} + \frac{c}{a+b} \end{aligned}$$

Sumant tenim:

$$M + N + P = \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} + 3 \tag{3.1}$$

Ara bé,

$$M + N + P = \frac{a+b+c}{b+c} + \frac{a+b+c}{a+c} + \frac{a+b+c}{a+b}$$

Aplicant el que hem dit abans:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{(b+c) + (a+c) + (a+b)}{3} \geq \frac{3}{\dfrac{1}{b+c} + \dfrac{1}{a+c} + \dfrac{1}{a+b}}.$$

Per tant, es té

$$\frac{a+b+c}{b+c} + \frac{a+b+c}{a+c} + \frac{a+b+c}{a+b} =$$

$$\frac{3}{2}\frac{(b+c)+(a+c)+(a+b)}{3}\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+b}\right)\geq$$
$$\frac{3}{2}\frac{3}{\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+b}}\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+b}\geq\frac{9}{2}.$$

D'aquí i (3.1), surt

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}+3\geq\frac{9}{2},$$

i, per tant,

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}.$$

□

Exercici 26. Proveu cap a enrere que per a qualssevol nombres reals negatius, $a<b$ implica $a^2>b^2$.

Solució: La prova cap enrere surt de la tesi, i, per tant, podem fer es següent:

$a^2>b^2$	Tesi
$\lvert a\rvert>\lvert b\rvert$	Prenent arrels quadrades
$-a>-b$	a,b són negatius
$a<b$	Multiplicant per -1 i surt l'hipòtesi

De fet, això que hem escrit s'havia d'haver pensat mentalment perquè la demostració real és una prova directa: Si $a<b$, multiplicant per -1, es té $-a>-b$ i $-a,-b$ són positius. Per tant, $(-a)^2>(-b)^2$ o sigui, $a^2>b^2$. □

Exercici 27. Proveu per contrarecíproc que per a qualssevol $n,m\in\mathbb{Z}$, si mn és senar, llavors m i n són senars.

Solució: Si fessim la prova directa seria prendre com hipòtesi que mn és senar i hem d'arribar a veure que m i n també ho són. En canvi, per contrarecíproc serà prendre com hipòtesi que no és el cas que m i n siguin senars i hem d'arribar a provar que mn no és senar.
Si no és el cas que m i n siguin senars, vol dir que m és parell o n és parell. Suposem per exemple que m és parell. Aleshores existeix $k\in\mathbb{Z}$ tal que $m=2k$. Per tant, $mn=2kn$ i $kn\in\mathbb{Z}$. Aleshores mn és parell com voliem demostrar. □

Exercici 28. Proveu per reducció a l'absurd que els únics enters consecutius no negatius a,b i c que compleixen $a^2+b^2=c^2$ són $3,4$ i 5.

Solució: Suposem que $3,4$ i 5 no són els únics enters consecutius no negatius que compleixen $a^2+b^2=c^2$. Això és equivalent a suposar que existeixen enters no negatius $n,n+1$ i $n+2$ i $n\neq3$ tals que

$$n^2+(n+1)^2=(n+2)^2$$

Ara bé, fent operacions, s'obté l'equació $n^2-2n-3=0$, què té com a solucions 3 i -1. Per tant, arribem a un absurd perquè hem suposat que $n\neq3$. Com a conseqüència, hem provat el que volíem. □

Exercici 29. Siguin a, b i c enters. Suposem que hi ha un nombre enter d que $d \mid a$ i $d \mid b$, però que d no divideix c. Demostreu per reducció a l'absurd que l'equació $ax + by = c$ no té cap solució que x i y siguin enters.

Solució: Suposem que $ax + by = c$ té una solució tal que x i y són enters. Com d divideix a i també b, aleshores existeixen enters m i n tals que $a = md$ i $b = nd$. Aleshores, es té

$$mdx + ndy = c$$

Dividint per d, s'obté

$$mx + ny = \frac{c}{d}$$

Però això és absurd perquè $mx+ny$ és enter i, per tant, també $\frac{c}{d}$ i això no és possible perquè d no divideix c. $\square$

Exercici 30. Proveu per inducció:

1. Si n és un nombre enter no negatiu, llavors $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$.
2. Si $n \in \mathbb{N}$, llavors $(1+x)^n \geq 1 + nx$ per a tot $x \in \mathbb{R}$ i $x > -1$.

Solució: (1) Construïm una prova d'inducció sobre n, sent $P(n) =$ "$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$".

Cas base: $P(1)$ és $\displaystyle\sum_{k=0}^{1} k \cdot k! = (1+1)! - 1$ i, això és veritat perquè $0 \cdot 0! + 1 \cdot 1! = 1$.

Hipòtesi d'inducció: Suposem que $P(n)$ és certa, o sigui que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$.

Tesi: Hem de demostrar que $P(n+1) =$"$\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} k \cdot k! = (n+2)! - 1$" és certa.

En efecte, aplicant l'hipòtesi d'inducció, es té

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} k \cdot k! &= \sum_{k=0}^{n} k \cdot k! + (n+1)(n+1)! \\
&= (n+1)! - 1 + (n+1)(n+1)! \\
&= (1+n+1)(n+1)! - 1 \\
&= (n+2)! - 1
\end{aligned}$$

que és el que volíem veure.

Conclusió: Pel principi d'inducció sobre n, deduïm que $P(n)$ és certa per a tot $n \in \mathbb{N}$.

(2) Construïm una prova d'inducció sobre n, sent $P(n)$ = "Si $n \in \mathbb{N}$, llavors $(1+x)^n \geq 1+nx$ per a tot $x \in \mathbb{R}$ i $x > -1$".

Cas base: $P(1)$ és evident que és vertadera.

Hipòtesi d'inducció: Suposem que $P(n)$ és certa, o sigui que si $n \in \mathbb{N}$, llavors $(1+x)^n \geq 1+nx$ per a tot $x \in \mathbb{R}$ i $x > -1$.

Tesi: Hem de demostrar que $P(n+1)$ ="Si $n \in \mathbb{N}$, llavors $(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$ per a tot $x \in \mathbb{R}$ i $x > -1$" és certa.

En efecte, aplicant l'hipòtesi d'inducció, es té

$$\begin{aligned}
(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n(1+x) \\
&= (1+nx)\,(1+x) \\
&= 1+x+nx+nx^2 \\
&= 1+(n+1)x+nx^2 \\
&\geq 1+(n+1)x
\end{aligned}$$

que és el que volíem veure.

Conclusió: Pel principi d'inducció sobre n, deduïm que $P(n)$ és certa per a tot $n \in \mathbb{N}$.

□

Exercici 31. Proveu que el residu del quadrat de qualsevol nombre enter quan es divideix per 4 és 0 o 1.

Solució: Tot nombre enter n és o parell o bé senar. Aquesta idea proporciona l'estratègia de la demostració: construïr una prova per casos:
(1) Si n és parell, aleshores $n = 2k$, on $k \in \mathbb{Z}$. Llavors, $n^2 = 4k^2$ què és múltiple de 4 i, per tant, quan es divideix per 4 el residu val 0.
(2) si n és senar, aleshores $n = 2k+1$, on $k \in \mathbb{Z}$. Llavors, $n^2 = 4k^2+4k+1 = 4\left(k^2+k\right)+1$ què quan es divideix per 4 el residu val 1. □

Exercici 32. Demostreu que per a cada nombre real x, si $|x-3| > 3$ llavors $x^2 > 6x$.

Solució: Per definició de valor absolut, $|x-3| = x-3$ si $x-3 \geq 0$, i $|x-3| = -(x-3)$ si $x-3 < 0$. Construïm una prova per casos:
(1) Si $x-3 \geq 0$, aleshores $|x-3| = x-3 > 3$ i, per tant, $x > 6$. D'aquí, s'obté $x^2 > 6x$.
(2) Si $x-3 < 0$, aleshores $|x-3| = -x+3 > 3$ i, per tant, $x < 0$. D'aquí, s'obté $x^2 > 6x$. □

Exercici 33. És cert que per a cada enter positiu n es compleix que n^2-n+17 és un nombre primer?

Solució: Si pensem que l'enunciat és fals hem de trobar un contraexemple per provar-ho. En efecte, si prenem $n = 17$, aleshores $n^2-n+17 = 289$ que no és primer. □

Exercici 34. (Algoritme de la divisió) Si $a, b \in \mathbb{N}$, proveu que existeixen enters q, r i són únics per els quals $a = bq + r$, sent $0 \leq r < b$.

Solució: Sabem que $a, b \in \mathbb{N}$. Primer hem de provar l'existència, buscant aquests nombres enters que compleixen la propietat. Considerem el conjunt de múltiples positius b: $B = \{kb : k \in \mathbb{N}\}$. Com el conjunt dels nombres naturals $\mathbb{N}$ està ben ordenat per la relació $\leq$, tot subconjunt té mínim. Per tant, existeix un natural n de B tal que $nb \leq a < (n+1)b$. Això és equivalent a $0 \leq a - nb < b$, i si ara prenem $r = a - nb$ i $q = n$ es compleix la propietat.
Finalment, hem de demostrar la unicitat. Suposem que existeixen r' i q' que compleixen $a = bq' + r'$, sent $0 \leq r' < b$. Aleshores, es té

$$\begin{aligned} bq + r &= bq' + r' \\ r - r' &= (q' - q)b \end{aligned}$$

i això vol dir que $r - r'$ és múltiple de b. Llavors, com $0 \leq r < b$ i $0 \leq r' < b$, s'obté $0 \leq |r - r'| < b$, i com a conseqüència, $|r - r'| = 0$ o sigui $r' = r$. Aleshores, també $q' = q$. $\square$