Lògica, raonament i demostració
Test 2 (Demostració)

Miquel Angel Perelló
aprendes.com

Versió 2021

1. Considereu l'enunciat "per a tots els nombres enters a i b, si $a + b$ és parell, aleshores a i b són parells". Llavors:

   (a) L'enunciat recíproc és "per a tots els nombres enters a i b, si a o b no és parell, aleshores $a + b$ no és parell".

   (b) L'enunciat contrarecíproc és "per a tots els nombres enters a i b, si a i b són parells, aleshores $a + b$ és parell".

   (c) El contrarecíproc és fals i un contraexemple és, per exemple, $a = 4$ i $b = 7$.

   (d) L'enunciat contrari és "Hi ha nombres a i b tals que $a + b$ és parell però a i b no són parells" i és vertader.

2. Suposem que a i b són nombres reals. Volem provar que si $0 < a < b$ aleshores $a^2 < b^2$. Llavors, quina de les següents afirmacions és falsa:

   (a) La prova directa consisteix en prendre com hipòtesi $0 < a < b$ i com a tesi $a^2 < b^2$.

   (b) La prova cap enrere consisteix a prendre com a punt de partida la conclusió $a^2 < b^2$ i arribar a a deduir que $a < b$ suposant que a i b son positius, i, després, refer la prova procedint de forma directe.

   (c) La prova per contrarecíproc consisteix en prendre com hipòtesi $a^2 \geq b^2$ i com a tesi $a \geq b > 0$.

   (d) La prova per reducció a l'absurd consisteix en prendre com hipotesi $a \geq b > 0$ i $a^2 < b^2$ i com a tesi una contradicció. (*)

3. Sigui $x = \dfrac{y}{y^2+1}$. Llavors

$$y - x = y - \frac{y}{y^2+1} = \frac{y^3}{y^2+1} = \frac{y}{y^2+1} \cdot y^2 = xy^2.$$

   i, per tant, l'enunciat: $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\ xy^2 = y - x$ és un teorema.

   (a) La prova del teorema és correcte.

(b) La prova correspon al teorema: $\forall y \in \mathbb{R}\ \exists x \in \mathbb{R}\ x^2 y = y - x$

(c) La prova del teorema és incorrecte perquè no es pot definir x abans de y. (*)

(d) Cap de les respostes és vertadera.

4. L'enunciat: "Suposem que m és un nombre enter parell i n és un nombre enter senar. Aleshores $n^2 - m^2 = n + m$" és un teorema?

   (a) "$n^2 - m^2 = n + m$" és la condició necessària.

   (b) "m és un nombre enter parell i n és un nombre enter senar" és condició necessària i suficient.

   (c) És teorema perquè $m = 2k$ i $n = 2k + 1$, on $k \in \mathbb{Z}$, i $n^2 - m^2 = (2k+1) + 2k = m + n$.

   (d) No és teorema i, $m = 2$ i $n = 3$ és un contraexemple. (*)

5. Quina de les següents respostes és falsa?

   (a) Per demostrar que $\forall x \in \mathbb{R}\,(\exists y \in \mathbb{R}(x + y = xy) \leftrightarrow x \neq 1)$ fem la prova següent: Considerem un nombre real arbitrari x, aleshores existeix un nombre real $y = \dfrac{x}{x-1}$ si i només si $x \neq 1$ i també es compleix

   $$x + y = x + \frac{x}{x-1} = \frac{x^2}{x-1} = x \cdot \frac{x}{x-1} = xy.$$

   (b) Per demostrar que $\forall x \in \mathbb{R}\,(\exists y \in \mathbb{R}(x + y = xy) \leftrightarrow y \neq 1)$ fem la prova següent: Considerem $x = \dfrac{y}{y-1}$ que existeix si i només si $y \neq 1$. Aleshores es compleix

   $$x + y = \frac{x}{x-1} + y = \frac{xy}{x-1} = \frac{x}{x-1} \cdot y = xy. \text{ (*)}$$

   (c) Per provar que $\exists z \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}^+\,(\exists y \in \mathbb{R}\ y - x = y/x \longleftrightarrow x \neq z)$ fem: Suposem que existeix un nombre real a tal que

   $$y - a = \frac{y}{a} \Longrightarrow y = \frac{a}{\frac{a-1}{a}}$$

   aleshores y existirà si i només si $a \neq 0$ i $a \neq 1$. D'aquí s'obté que per a qualsevol $x \in \mathbb{R}^+$ existeix $y \in \mathbb{R}$ si i només si existeix $z = 1$ i $x \neq 1$.

   (d) Per demostrar que per a cada nombre enter n, $6 \mid n$ sii $2 \mid n$ i $3 \mid n$ fem la prova següent: Sigui n qualsevol nombre enter. La condició $2 \mid n$ i $3 \mid n$ és necessària perquè $n = 2p$ i $n = 3q$ i $p, q \in \mathbb{Z}$. Llavors $n = 3\,(2p) - 2\,(3q) = 6\,(p - q)$ i $6 \mid n$. La condició $6 \mid n$ és suficient perquè $n = 6k = 3(2k)$, $k \in \mathbb{Z}$, i, per tant, $3 \mid n$, i $n = 2\,(3k)$ i així $2 \mid n$.

6. Quina de les següents respostes és correcte?

(a) Sabem que hi han nombres primers; per exemple, 2 és primer. Suposem ara que només hi ha un nombre finit de nombres primers $p_1, p_2, ..., p_n$, $n \in \mathbb{Z}^+$. Llavors $q = p_1 p_2 \cdots p_n + 1$ és primer. En efecte, si suposem que q no és primer aleshores la seva descomposició factorial en primers segur que existeix k tal que p_k divideix q, $1 \leq k \leq n$, o sigui

$$q = p_k r$$

D'aquí

$$\begin{aligned} p_1 p_2 \cdots p_n + 1 &= p_k r \\ p_k \left(r - p_1 \cdots p_{k-1} p_{k+1} \cdots p_n\right) &= 1 \end{aligned}$$

i, per tant, p_k divideix 1, però això és una contradicció perquè p_k és primer. Per consegüent, q és primer i això torna a ser una contradicció perquè només hi havia n primers. Per tant, hem demostrat per reducció a l'absurd que hi ha infinit nombres primers. (*)

(b) Sigui n qualsevol nombre enter. Si n és senar, aleshores $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{Z}$. Llavors,

$$n^2 = (2k+1)^2 = 2\left(2k^2 + 2k\right) + 1$$

i, per tant, n^2 és senar perquè $2k^2 + 2k \in \mathbb{Z}$. D'aquesta manera hem demostrat per contrarecíproc que per qualsevol enter n, si n és parell aleshores n^2 també ho és.

(c) Considerem dos nombres reals qualssevol x i y. Suposem que xy és irracional i x és racional. Llavors $x = p/q$, on $p, q \in \mathbb{Z}$ i $q \neq 0$. Suposem ara també que y és racional, llavors $y = r/s$, on $r, s \in \mathbb{Z}$ i $s \neq 0$. Per tant, es té $xy = pr/qs$ i $qs \neq 0$. Aleshores xy és racional i això és una contradicció. Per consegüent, y és irracional. D'aquesta manera hem demostrat per contrarecíproc que si x o y és racional, aleshores xy és racional.

(d) Sigui n un nombre enter senar qualsevol. Aleshores $n = 2s + 1$, $s \in \mathbb{Z}$. Suposem que s és parell, aleshores $s = 2p$, $p \in \mathbb{Z}$. Llavors $n^2 = (2s+1)^2 = (4p+1)^2 = 8\left(2p^2 + p\right) + 1$ i, per tant, $n^2 = 8k + 1$, $k = 2p^2 + p \in \mathbb{Z}$. D'aquesta manera hem demostrar per casos que si n és un nombre enter senar qualsevol, aleshores existeix un enter k tal que $n^2 = 2k + 1$.

7. Quina de les següents respostes és falsa?

(a) Considerem x un nombre real arbitrari, i suposem que $x \neq 2$. Ara considerem $y = \dfrac{x}{2-x}$, que existeix ja que $x \neq 2$. Aleshores es té

$$\frac{2y}{y+1} = \frac{\dfrac{2x}{2-x}}{\dfrac{x}{2-x} + 1} = \frac{\dfrac{2x}{2-x}}{\dfrac{2}{2-x}} = \frac{2x}{x} = x.$$

Per veure que aquesta solució és única, suposem que existeix z tal que $2z/(z+1) = x$. Aleshores $2z = x(z+1)$, i d'aquí surt $z(2-x) = x$.

Com que $x \neq 2$ podem dividir els dos costats per $2 - x$ per obtenir $z = x/(2-x) = y$. D'aquesta manera hem demostrat que per a cada nombre real x, si $x \neq 2$, hi ha un nombre real únic y tal que $2y/(y+1) = x$.

(b) Sabem que $\sqrt{2}$ és irracional. Aleshores $\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}}$ és racional o bé irracional. Si $\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}}$ és racional, prenem $a = b = \sqrt{2}$ es té que hi ha dos irracionals tal que $a^b = \left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}}$ és racional. Per altra banda, si $\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}}$ és irracional, prenem $a = \left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}}$ i $b = \sqrt{2}$ es té que hi ha dos irracionals tals que $a^b = \left(\left(\sqrt{2}\right)^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$ és racional. D'aquesta manera hem demostrat que hi ha nombres irracionals a i b tals que a^b és racional.

(c) Suposem que mn és múltiple de 3 i que n no és múltiple de 3. Llavors, $mn = 3k$, $k \in \mathbb{Z}$, i d'aquí, surt que m necessàriament és múltiple de 3 perquè n no ho és. Així hem provat que m o n és múltiple de 3 és condició necessària perquè mn és múltiple de 3. Suposem ara que m és múltiple de 3; es prova anàlogament si n és múltiple de 3. Llavors, $m = 3p$, $p \in \mathbb{Z}$, i d'aquí surt que $mn = 3pn$ i, per tant, mn és mútiple de 3 perquè $pn \in \mathbb{Z}$. Això prova que m o n és múltiple de 3 és condició suficient. Per tant, mn és múltiple de 3 sii m o n és múltiple de 3 és un teorema.

(d) Sigui n el nombre enter més gran. Aleshores, com que 1 és un nombre enter, és clar que $1 \leq n$. D'altra banda, com que n^2 també és un nombre enter també es compleix $n^2 \leq n$ i d'aquí s'obté que $n \leq 1$. D'aquesta manera, com que es compleix $n \leq 1$ i $n \geq 1$, aleshores es té $n = 1$, i, per tant, 1 és l'enter més gran. (*)

8. Examina la següent fal·làcia:

   (i) Considerem l'equació $\frac{x+5}{x-7} - 5 = \frac{4x-40}{13-x}$, suposant que $x \neq 7$ i $x \neq 13$.

   (ii) Operant en el terme de l'esquerra, es pot comprovar que $\frac{x+5}{x-7} - 5 = \frac{4x-40}{7-x}$.

   (iii) De (i) i (ii) es dedueix que $\frac{4x-40}{13-x} = \frac{4x-40}{7-x}$.

   (iv) Atès que els numeradors són iguals, els denominadors també ho han de ser. És a dir, de (iii) es dedueix que $7 - x = 13 - x$.

   (v) De (iv) es dedueix que $7 = 13$. Absurd!

   En algun dels passos (i)–(v) hi ha d'haver un error. Quin és ? Per què ?

   (a) pas (ii) perquè es dedueix $\frac{x+5}{x-7} - 5 = \frac{40-4x}{x-7}$.
   (b) pas (iv) perquè es dedueix $(4x-40)(7-x) = (4x-40)(13-x)$ i, d'aquí no s'obté $7 - x = 13 - x$ llevat que $x \neq 10$ (*)
   (c) pas (iv) perquè es dedueix $13 - x = x - 7$
   (d) pas (v) perquè es dedueix $2x = 20$ i, per tant, $x = 10$.

9. Una fal·làcia: En qualsevol bossa de bales, totes les bales són del mateix color.

   Demostració per inducció: Sigui n el nombre de bales de la bossa. Si $n = 1$, és evidentment cert. Suposem que és cert per a totes les bosses de n bales, i considerem una bossa de $n + 1$ bales. N'apartem una, i així tenim una bossa de n bales, que per la hipòtesi d'inducció seran totes del mateix color. Ens falta provar que la bala apartada també és del mateix color. L'afegim a la bossa de n bales que havíem format, i n'apartem una altra. Tornem a tenir una bossa de n bales, que per hipòtesi d'inducció seran totes del mateix color, i en particular la darrera bala serà del mateix color que les altres en la bossa. Així doncs, totes les $n + 1$ bales són del mateix color.

(a) L'error és que desconeixem el color de les n bales de la bossa formada i, per tant, no sabem distingir si la bola escollida per segon cop és o no la mateixa que la que havíem apartat.

(b) No podem fer una prova per inducció perquè la propietat no està relacionada amb objectes matemàtics.

(c) No podem aplicar la hipòtesi d'inducció en el segon cas perquè n no és qualsevol sinó el que teníem al principi. (*)

(d) Cap de les anteriors respostes es correcte.

10. Per a tots els $n \geq 3$, si n punts diferents d'una circumferència estan connectats de manera consecutiva amb rectes, llavors els angles interiors del polígon resultant sumen $(n - 2)\,180^o$. Quin dels passos següents en la prova per inducció hi ha error?

(a) Cas base: Suposem que $n = 3$. Aleshores el polígon és un triangle i es compleix perquè se sap que els angles interiors d'un triangle sumen 180^o.

(b) Hipòtesi d'inducció: Donats n punts diferents d'una circumferència estan connectats de manera consecutiva amb rectes, llavors els angles interiors del polígon resultant sumen $(n - 2)\,180^o$. (*)

(c) Considerem ara el polígon P format per la connexió de $n+1$ punts diferents $A_1, A_2, ..., A_{n+1}$ en un cercle, com podeu veure a la figura 1. Si ens saltem l'últim punt A_{n+1}, llavors obtenim un polígon P amb només n vèrtexs, i per la hipòtesi d'inducció, els angles interiors d'aquest polígon sumen $(n - 2)\,180^o$.

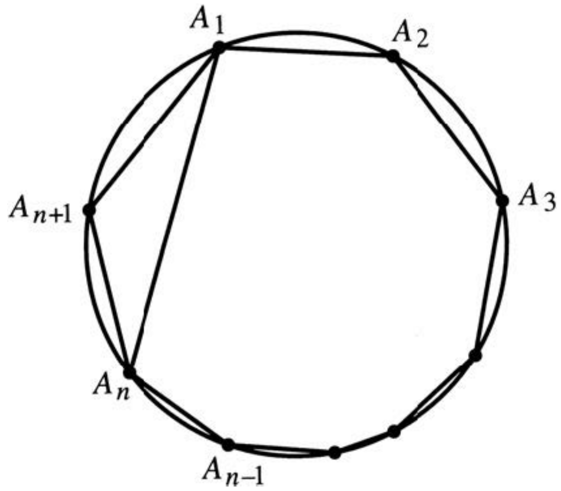
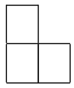


Figura 1

(d) Però la suma dels angles interiors de P és igual a la suma dels angles interiors de P més la suma dels angles interiors del triangle $A_1A_nA_{n+1}$. Com que la suma dels angles interiors del triangle és 180^o, podem concloure que la suma dels angles interiors de P és $(n-2)180^o+180^o = ((n+1)-2)180^o$.

11. Per a qualsevol nombre enter positiu n, una graella quadrada de $2^n \times 2^n$ amb qualsevol quadrat eliminat es pot cobrir amb rajoles en forma de L, com



La figura 2 mostra un exemple per al cas $n = 2$. En aquest cas $2^n = 4$, i per tant tenim una graella de 4×4 i el quadrat que s'ha eliminat està ombrejat. Les línies pesades mostren com es poden cobrir els quadrats restants amb cinc rajoles en forma de L.

Figura 2

Quin dels passos següents en la prova per inducció hi ha error?

(a) Cas base: Suposem que $n = 1$. Aleshores la quadrícula és una quadrícula de 2×2 amb un quadrat eliminat, que es pot cobrir clarament amb una rajola en forma de L.

(b) Hipòtesi d'inducció: Sigui n un nombre enter positiu arbitrari, i suposem que la graella $2^n \times 2^n$ amb qualsevol quadrat eliminat es pot cobrir amb rajoles en forma de L.

(c) Considerem ara una graella $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ amb un quadrat eliminat, com es veu a la figura 3. Tallem la graella per la meitat tant verticalment com horitzontalment, dividint-la en quatre quadrícules $2^n \times 2^n$.

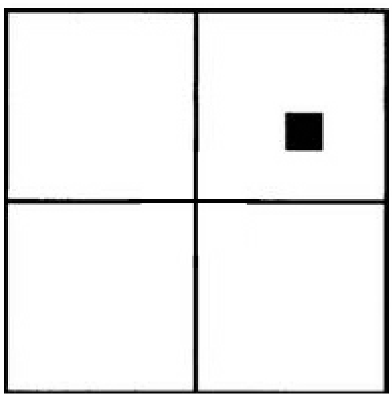


Figura 3

El quadrat que s'ha eliminat està dins d'una d'aquestes quadrícules i, per tant, per la hipòtesi d'inducció la resta d'aquesta quadrícula es pot cobrir amb rajoles en forma de L.

(d) Les altres quadrícules també es poden cobrir amb rajoles en forma de L perquè són del tipus $2^n \times 2^n$ i podem aplicar la hipòtesi d'inducció. (*)