Teoria

Miquel Angel Perelló

Versió 2001

Índex

1 Conjunts

Partint de la noció intuïtiva de conjunt, en aquesta secció desenvoluparem les propietats bàsiques dels conjunts. L'objectiu d'aquesta breu exposició serà aconseguir que et familiaritzis amb la terminologia i les notacions que s'introdueixen i que s'empraran en totes les altres unitats didàctiques. Es recomanable abans de seguir fer abans una lectura compresiva de la unitat "Lògica, raonament i demostració a matemàtiques".

1.1 Les nocions d'element, conjunt i pertinença

Una caixa de boles, un raïm, o un àlbum de fotos són tots exemples de conjunts de coses o col·leccions d'objectes. La noció de conjunt és fonamental en totes les branques de les matemàtiques. Per exemple:

- En geometria plana es diu circumferència el conjunt de punts que són equidistants d'un punt fix donat.
- En àlgebra es parla del conjunt dels nombres parells que està format per tots els enters que són divisibles per 2.
- En càlcul s'anomena domini d'una funció real de variable real el conjunt de nombres reals pels quals hi ha ben definida la seva imatge.

Emprarem la paraula **conjunt** com a sinònim de col·lecció d'objectes. Els objectes que formen un conjunt es diuen **elements** del conjunt. D'aquesta manera, direm que un conjunt està format per elements o que uns determinats elements formen un conjunt.

Ara bé, un conjunt estarà ben definit si és possible donar un criteri que permeti decidir si un element donat qualsevol pertany o no al conjunt. Per exemple, les boles vermelles d'aquesta caixa o les fotos d'en Miquel en aquest àlbum són conjunts ben definits. En el primer cas, una bola de la caixa és del conjunt si és vermella i, en el segon, una foto és del conjunt si en ella apareix en Miquel. Observa ambdós casos, però que abans de definir els conjunts anteriors, tenim els elements, o sigui les boles de la caixa i les fotos de l'àlbum.

Si ara simbolitzem per U una determinada col·lecció d'objectes, llavors diem que uns determinats objectes d'U formen un conjunt A i si x simbolitza un element d'A, aleshores direm que l'element x **pertany** al conjunt A i escriurem

$$x \in A.$$

Si x és un element d'U, però no és un element de A, direm que l'element x no pertany al conjunt A i escriurem

$$x \notin A.$$

El símbol matemàtic $\in$ s'interpreta com la relació de pertinença que s'estableix entre elements i conjunts. Per consegüent, un conjunt està determinat per una relació de pertinença a ell. Tot i això, com veurem més endavant (quan parlem del conjunt de parts d'un conjunt donat), un element pot ser alhora un conjunt i un conjunt pot ser un element d'un altre conjunt.

Per cursos anteriors, tenim coneixement de l'existència d'alguns conjunts numèrics l'ús dels quals és molt freqüent en les matemàtiques i que es designen amb símbols especials. Així, tenim

Conjunts numèrics	Símbol
Naturals	$\mathbb{N}$
Enters	$\mathbb{Z}$
Racionals	$\mathbb{Q}$
Reals	$\mathbb{R}$
Complexos	$\mathbb{C}$

Exemple 1.1. Pel coneixement que d'ells ja tenim, podem escriure les següents relacions:

$$-2 \notin \mathbb{N} \qquad -3 \in \mathbb{Z} \qquad \sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \qquad \sqrt[3]{5} \in \mathbb{R}$$

$$1 \in \mathbb{N} \qquad \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z} \qquad 2.3555... \in \mathbb{Q} \qquad 1 + i \notin \mathbb{R}$$

1.2 Formes de definir conjunts

Direm que un conjunt està determinat per **extensió** si donem una llista de tots els seus elements. En tal cas, escriurem als elements entre claus separats per comes. Per exemple, el conjunt A format pels números

$$1, 2, 3$$

l'escriurem per

$$A = \{1, 2, 3\}.$$

Un conjunt està determinat per **comprensió** si donem una condició que satisfan tots els seus elements. Així, el conjunt anterior el podem definir per comprensió dient que A és el conjunt format pels nombres enters positius menors que quatre. En aquest últim cas escriurem

$$A = \{x \in \mathbb{Z} : 0 < x < 4\}$$

i es llegeix com "A és el conjunt de nombres enters que són majors que 0 i menors que 4". En general, si $P(x)$ expressa una condició o propietat que depèn d'una variable x, llavors

$$B = \{x \in U : P(x)\}$$

designa el conjunt dels elements d'U que satisfan la propietat $P(x)$.

Pot ocórrer que per a una certa propietat no hi hagi cap element d'un conjunt atès que la satisfaci. Per aquesta raó, admetem l'existència d'un conjunt que no conté elements i al qual denominem **conjunt buit**, designant-ho pel símbol $\emptyset$. D'aquesta manera, per a tot x la relació

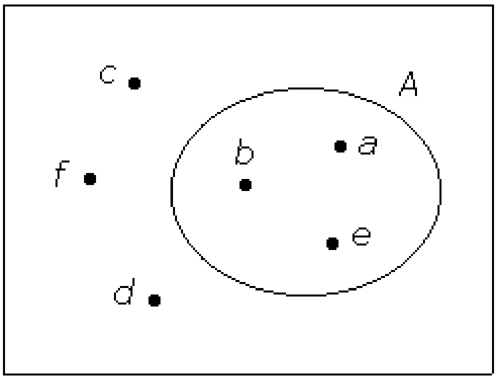
$$x \in \emptyset$$

és sempre falsa, i

$$x \notin \emptyset$$

és sempre vertadera.

És instructiu representar gràficament un conjunt mitjançant una regió tancada del pla de manera que tots els elements del conjunt estiguin tancats en aquesta regió. Es diuen **diagrames de Venn** i es construeixen com s'indica en el següent gràfic, on hem representat el conjunt $A = \{a, b, e\}$.



Observació 1.1. Observa que no hem definit els conceptes de conjunt i element. En el seu lloc, hem intentat donar una idea intuïtiva clara de totes dues nocions. En cursos més avançats es pot veure que en la construcció axiomàtica d'una teoria de conjunts, els termes "conjunt" i "pertinença" no es defineixen i s'empren sense explicar el seu significat. Un conjunt serà qualsevol cosa que satisfaci els axiomes de la teoria. D'aquesta manera, no hi ha dubte que la intuïció sobre la qual es basa la teva noció de conjunt pot estar equivocada, però del que es tracta no és tant de saber què són els conjunts sinó que podem fer amb ells correctament. Això últim és el que volem fer aquí.

Observació 1.2. Podria semblar natural admetre que tota condició $P(x)$ defineix un conjunt

$$\{x : x \text{ compleix } P(x)\}, \tag{1.1}$$

però, d'aquesta manera, resulta que hi ha condicions "rares" que donen lloc a "conjunts" contradictoris sobre els quals no és possible raonar. Per exemple , si considerem la condició $x \notin x$ (tots els conjunts que no són elements de si mateixos) i denotem per B al "conjunt" d'elements que satisfan aquesta condició, és a dir,

$$B = \{x : x \notin x\}$$

llavors es compleix

$$(\forall x)\,(x \in B \Longleftrightarrow x \notin x)$$

i, en particular, també es compleix

$$B \in B \Longleftrightarrow B \notin B$$

el que, evidentment, constitueix una contradicció. Per a evitar aquests absurds, és preferible limitar la condició als elements d'algun conjunt ja conegut U. Per aquest motiu hem escrit

$$\{x \in U : x \text{ compleix } P(x)\}$$

en lloc de (1.1).

1.3 Igualtat i inclusió entre conjunts

Direm que dos conjunts A i B són **iguals** si contenen els mateixos elements, és a dir, si per a cada x, $x \in A$ equival a $x \in B$. En símbols

$$(\forall x)\,(x \in A \Longleftrightarrow x \in B)$$

i es llegeix "per a tot x, x és de A si i només si x és de B". Si els conjunts A i B són iguals, escriurem

$$A = B$$

i la seva negació per a

$$A \neq B.$$

El símbol matemàtic $=$ s'interpreta com la relació d'igualtat que s'estableix entre conjunts. A partir de la definició, és immediat comprovar que aquesta relació satisfà les següents propietats:

1. Per a tot conjunt A, $A = A$.

   Demostració: Sabem que $x \in A \Longleftrightarrow x \in A$ és una equivalència lògica. Com x és un element arbitrari d'A, aleshores es compleix $(\forall x)\,(x \in A \Longleftrightarrow x \in A)$ i, com a consequència, $A = A$. ■

2. Donats dos conjunts A i B, si $A = B$ llavors $B = A$.

   Demostració: Sabem que per a tot x, es té que $x \in A \longleftrightarrow x \in B$ és equivalent a $x \in B \longleftrightarrow x \in A$ i, per tant, si $A = B$, llavors $B = A$. ■

3. Donats tres conjunts A, B i C, si $A = B$ i $B = C$, llavors $A = C$.

   Demostració: Sabem que per a tot x, es té que $x \in A \longleftrightarrow x \in B$ i $x \in B \longleftrightarrow x \in C$. Llavors, per la propietat transitiva del bicondicional es té $x \in A \longleftrightarrow x \in C$ i, per tant, si $A = B$ i $B = C$, llavors $A = C$. ■

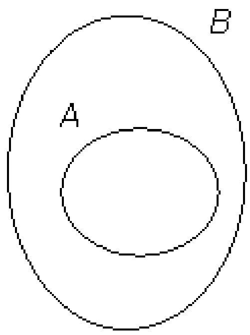
Si A i B són dos conjunts tals que tot element d'A és també un element de B, és a dir,

$$(\forall x)\,(x \in A \Longrightarrow x \in B)\,,$$

llavors es diu que A és un **subconjunt** de B o que A està **inclòs** en B i se simbolitza per a

$$A \subset B \quad \text{o} \quad B \supset A.$$

Mitjançant diagrames de Venn, representem aquest fet així



$A \subset B$

Si $A \subset B$ i $A \neq B$ es diu que A és un **subconjunt propi** de B. El símbol matemàtic $\subset$ s'interpreta com la relació d'inclusió que s'estableix entre conjunts; en particular, simbolitzem per $A \subsetneq B$ el fet que A és un subconjunt propi de B. A partir de la definició i regles de deducció lògica, és immediat comprovar que aquesta relació satisfà les següents propietats:

1. Per a tot conjunt A, $A \subset A$.
2. Donats dos conjunts A i B, si $A \subset B$ i $A \supset B$, llavors $A = B$.
3. Donats tres conjunts A, B i C, si $A \subset B$ i $B \subset C$, llavors $A \subset C$.

Exemple 1.2. Observa que es compleixen les següents relacions:

- $\emptyset \subset A$
- $\{1\} \subset \{1, 2, 3\}$
- $\{2, 4\} \subset \{x \in \mathbb{N} : x \text{ és parell}\}$
- $\{x \in \mathbb{Z} : 0 < x < 4\} \subsetneq \{x \in \mathbb{Z} : x^2 - 3x + 2 = 0\}$

1.4 Operacions amb conjunts

En aquest apartat veurem com podem construir nous conjunts a partir d'uns altres ja donats. Suposem que existeix un conjunt U que anomenem **univers** i del qual prendrem tots els subconjunts.

1.4.1 Parts d'un conjunt

Si A és un conjunt, es diu **conjunt de parts** d'A el conjunt els elements del qual són tots els subconjunts d'A i es designa per $\mathcal{P}(A)$. Així, tenim

$$\mathcal{P}(A) = \{x \subset U : x \subset A\} .$$

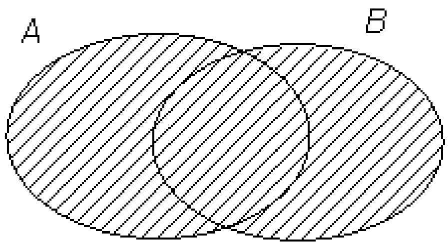
Observa que $\mathcal{P}(A)$ és un conjunt els elements del qual són alhora conjunts.

Exemple 1.3. Observa que si $A = \{a, b, c\}$, llavors

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, A\}.$$

1.4.2 Unió de dos conjunts

Si A i B són conjunts, es diu **unió** d'A i B al conjunt simbolitzat per $A \cup B$ que té per elements tots els que pertanyen a A o a B o als dos alhora. Mitjançant diagrames de Venn, representem aquest fet així



$A \cup B$

Simbòlicament, escrivim

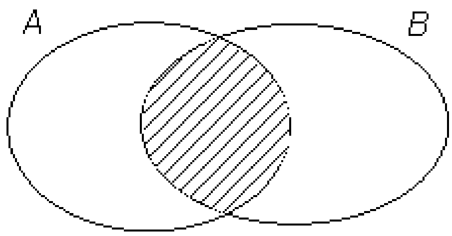
$$A \cup B = \{x \in U : x \in A \ \text{ o } \ x \in B\}$$

Exemple 1.4. Observa que si $A = \{1, 2, 3\}$ i $B = \{3, 4, 5\}$, llavors

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\} .$$

1.4.3 Intersecció de dos conjunts

Si A i B són conjunts, es diu **intersecció** d'A i B al conjunt denotat per $A \cap B$ que té per elements tots els que pertanyen tant a A com a B. El diagrama de Venn que representa aquest fet és el següent:



$A \cap B$

Simbòlicament, escrivim

$$A \cap B = \{x \in U : x \in A \;\; \text{i} \;\; x \in B\}$$

Si $A \cap B = \emptyset$, llavors es diu que els conjunts A i B són **disjunts**, o sigui que no tenen res en comú.

Exemple 1.5. Observa que si $A = \{1, 2, 3\}$ i $B = \{3, 4, 5\}$, llavors

$$A \cap B = \{3\}\,.$$

1.4.4 Propietats de la unió i de la intersecció de conjunts

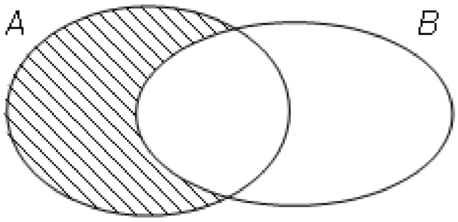
Donats tres conjunts qualssevol A, B i C es compleixen les següents relacions:

1. $A \cup A = A$ i $A \cap A = A$
2. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ i $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
3. $A \cup B = B \cup A$ i $A \cap B = B \cap A$
4. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup B)$ i $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
5. $A \cup (B \cap A) = A$ i $A \cap (B \cup A) = A$
6. $A \cup \emptyset = A$ i $A \cap \emptyset = \emptyset$

Les demostracions d'aquestes propietats les trobaràs en els exercicis resolts.

1.4.5 Diferència entre dos conjunts

Si A i B són conjunts, es diu **diferència** entre A i B al conjunt denotat per $A \setminus B$ i que té per elements tots els que pertanyen a A i que no són de B. El diagrama de Venn en aquest cas és:



$A - B$

Simbòlicament, escrivim

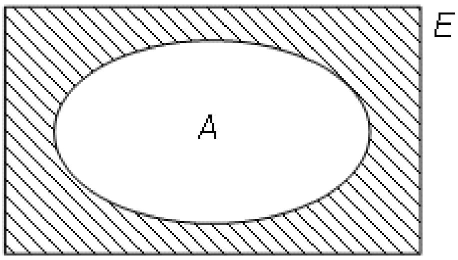
$$A - B = \{x \in U : x \in A \ \text{ i } \ x \notin B\}$$

Exemple 1.6. Si $A = \{1, 2, 3\}$ i $B = \{3, 4, 5\}$, llavors es té

$$A - B = \{1, 2\}\,.$$

1.4.6 Complementari d'un conjunt

Donat un conjunt A, es diu **complementari** d'A al conjunt denotat per $\complement A$ i que té per elements tots els que són de l'univers E i no pertanyen a A.



$\complement A$

En altres paraules, es té

$$\complement A = \{x \in E : x \notin A\}.$$

És evident que es compleix

$$\complement A = E - A.$$

Exemple 1.7. Si $E = \mathbb{R}$ i $A = \{x \in \mathbb{R} : |x| = 1\}$, llavors es té

$$\complement_E A = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

1.4.7 Propietats del complementari d'un conjunt

Si U és l'univers, llavors es compleixen les següents propietats:

1. $\complement U = \emptyset$ i $\complement \emptyset = U$
2. $\complement\left(\complement A\right) = A$
3. Lleis de De Morgan: $\complement\left(A \cup B\right) = \complement A \cap \complement B$ i $\complement\left(A \cap B\right) = \complement A \cup \complement B$

Les demostracions d'aquestes propietats les trobaràs en els exercicis resolts.

1.5 Parell ordenat i producte cartesià de dos conjunts

Es diu **parell ordenat** de dos elements x i y al conjunt denotat per (x, y) que té per elements els conjunts $\{x\}$ i $\{x, y\}$, és a dir,

$$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}.$$

Llavors, diem que x és la **primera component** i y és la **segona component** del parell ordenat (x, y). Per la definició d'igualtat de conjunts, és fàcil deduir que es compleix

$$\{a, b\} = \{c, d\} \iff a = c \text{ i } b = d \text{ o bé } a = d \text{ i } b = c$$

mentre que

$$(a, b) = (c, d) \iff a = c \text{ i } b = d$$

Per tant, l'única diferència entre els conjunts $\{x, y\}$ i (x, y) resideix en l'ordre. Si x i y són dos elements diferents, llavors $\{x, y\} = \{y, x\}$ i, en canvi, $(x, y) \neq (y, x)$.

Donats dos conjunts A i B, es diu **producte cartesià** d'A i B al conjunt denotat per $A \times B$ que té per elements tots els parells ordenats la primera component dels quals és un element d'A i la segona component és un element de B, simbòlicament escrivim

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A \text{ i } y \in B\}.$$

Exemple 1.8. Si $A = \{1, 2\}$ i $B = \{a, b\}$, llavors es té

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b)\}$$

Observa que

$$B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2)\}$$

i és evident que $A \times B \neq B \times A$.

2 Relacions

Identifiquem les relacions amb conjunts de parells ordenats i, per tant, amb subconjunts del producte cartesià de dos conjunts donats. Que un parell ordenat pertanyi a una relació significa que la relació en qüestió es dona entre el primer component del parell i el segon.

2.1 Relacions entre dos conjunts

Donats dos conjunts A i B, es diu **relació** entre A i B a tot subconjunt de $A \times B$. Si $R \subset A \times B$ és una relació entre A i B, llavors quan es compleix que $(a, b) \in R$ diem que la relació **es dona** entre a i b, o simplement, que a **està relacionat amb** b.

Exemple 2.1. Si $A = \{1, 2\}$ i $B = \{a, b\}$, llavors $R = \{(1, a), (2, b)\}$, $S = \{(1, a)\}$ i $T = \{(2, a), (2, b)\}$ són relacions entre A i B i, en canvi, $J = \{(a, 2), (2, 1)\}$ no ho és.

Per ser conjunts, si R i S són relacions entre A i B, llavors $R = S$ si i només si R i S contenen els mateixos parells ordenats. Es diu **domini** d'una relació R entre A i B al conjunt denotat per $\mathcal{D}(R)$ que té per elements les primeres components dels parells ordenats de R. Es diu **recorregut** de R el conjunt denotat per $\mathcal{R}(R)$ que té per elements les segones components dels parells ordenats de R. Així, tenim

$$\mathcal{D}(R) = \{x : x \in A \text{ i existeix } y \in B \text{ tal que } (x, y) \in R\}$$

i

$$\mathcal{R}(R) = \{y : y \in B \text{ i existeix } x \in A \text{ tal que } (x, y) \in R\}.$$

Exemple 2.2. Si $A = \{1, 2\}$, $B = \{a, b\}$ i $R = \{(2, a), (2, b)\}$ és una relació entre A i B, llavors $\mathcal{D}(R) = \{2\}$ i $\mathcal{R}(R) = \{a, b\} = B$.

2.2 Relacions binàries en un conjunt

Si A és un conjunt, diem que R és una **relació binària** en A si $R \subset A \times A$. En tot conjunt A sempre podem definir les relacions binàries següents:

1. Relació d'identitat en A: $I_A = \{(x, x) : x \in A\}$
2. Relació nul·la en A: $\emptyset$
3. Relació total en A: $A \times A$

Considerem un conjunt A i una relació binària $R \subset A \times A$. Distingim les següents propietats de R:

1. R és **reflexiva**: per a tot $x \in A$, $(x, x) \in R$
2. R és **irreflexiva**: per a tot $x \in A$, $(x, x) \notin R$
3. R és **simètrica**: per a tot $x, y \in A$, si $(x, y) \in R$ llavors $(y, x) \in R$
4. R és **asimètrica**: per a tot $x, y \in A$, si $(x, y) \in R$ llavors $(y, x) \notin R$
5. R és **antisimètrica**: per a tot $x, y \in A$, si $(x, y) \in R$ i $(y, x) \in R$, llavors $x = y$
6. R és **transitiva**: per a tot $x, y, z \in A$, si $(x, y) \in R$ i $(y, z) \in R$, llavors $(x, z) \in R$

Exemple 2.3. Si $A = \{1, 2, 3\}$ i $R = \{(1, 2), (2, 3), (2, 2), (1, 3)\}$, llavors es compleix:

- R no és reflexiva, doncs $(1, 1) \notin R$.
- R no és irreflexiva, doncs $(2, 2) \in R$.
- R no és simètrica, perquè $(1, 2) \in R$ i $(2, 1) \notin R$.
- R no és asimètrica, doncs $(2, 2) \in R$.
- R és antisimètrica, perquè no hi ha cap parell d'elements diferents x, y tals que $(x, y) \in R$ i $(y, x) \in R$.
- R és transitiva, perquè no hi ha tres elements x, y, z tals que $(x, y) \in R$ i $(y, z) \in R$ i $(x, z) \notin R$.

2.3 Relacions d'equivalència

Donat un conjunt A i una relació binària R en A, diem que R és una **relació d'equivalència** si R és reflexiva, simètrica i transitiva.
Tota relació d'equivalència R en un conjunt A ens permet classificar els elements del conjunt en classes d'equivalència. Es diu **classe d'equivalència** d'un element $a \in A$ al conjunt denotat per $[a]$ que té per elements tots els elements d'A que estan relacionats amb a. Així, tenim

$$[a] = \{x \in A : (x, a) \in R\}.$$

De la definició de classe d'equivalència, deduïm de seguida que

$$[a] = [b] \iff (a, b) \in R$$

o bé,

$$[a] = [b] \iff (a \in [b] \Longleftrightarrow b \in [a])$$

Llavors es diu **conjunt quocient** de A per la relació R al conjunt denotat per A/R que té per elements les classes d'equivalència de tots els elements d'A respecte de R. Així, tenim

$$A/R = \{[a] : a \in A\}$$

Quan R és d'equivalència diem que el conjunt quocient A/R és una **partició** del conjunt A, això vol dir que és una col·lecció de subconjunts no buits d'A, disjunts dos a dos, i tals que la seva unió és A. Podem expressar això afirmant que en A/R es compleixen les següents propietats:

1. Per a tot $a \in A$, $[a] \neq \emptyset$.
2. Per a tot $a, b \in A$ i $[a] \neq [b]$, $[a] \cap [b] = \emptyset$.
3. $\bigcup A/R = A$, on $\bigcup A/R$ és la unió de totes les classes d'equivalència, doncs A/R és el conjunt els elements del qual són els que pertanyen a alguna classe de A/R, o sigui

$$x \in \bigcup A/R \iff \text{existeix alguna classe } [a] \in A/R \text{ tal que } x \in [a].$$

És habitual usar $\sim$ o $\equiv$ com a símbols de relacions d'equivalència sobre un conjunt.

Exemple 2.4. En el conjunt dels nombres enters $\mathbb{Z}$ es defineix la següent relació binària $\equiv$

$$x \equiv y \iff x - y \text{ és múltiple de } 3$$

És immediat comprovar que $\equiv$ és una relació d'equivalència en $\mathbb{Z}$:

- $\equiv$ és reflexiva: per a tot $x \in \mathbb{Z}$, $x \equiv x$ doncs $x - x = 0$, que és un múltiple de 3.
- $\equiv$ és simètrica: per a tot $x, y \in \mathbb{Z}$, si $x \equiv y$, és a dir si $x - y$ és un múltiple de 3, llavors $-(x - y) = y - x$ també és un múltiple de 3 i, per tant, $y \equiv x$.

- $\equiv$ és transitiva: per a tot $x, y, z \in \mathbb{Z}$, si $x \equiv y$ i $x \equiv z$, és a dir, si $x - y$ i $y - z$ són múltiples de 3, també ho serà la seva suma, $(x - y) + (y - z) = x - z$ i, per tant, $x \equiv z$.

Existeixen tres classes d'equivalència per a aquesta relació:

- $[0] = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ és múltiple de } 3\} = \{..., -6, -3, 0, 3, 6, ...\}$
- $[1] = \{x \in \mathbb{Z} \mid x - 1 \text{ és múltiple de } 3\} = \{..., -5, -2, 1, 4, 7, ...\}$
- $[2] = \{x \in \mathbb{Z} \mid x - 2 \text{ és múltiple de } 3\} = \{..., -4, -1, 2, 5, 8, ...\}$

Finalment, el conjunt quocient és

$$\mathbb{Z}/\equiv \; = \{[1], [2], [3]\}.$$

2.4 Relacions d'ordre

Donat un conjunt A i una relació binària R en A, diem que R és una **relació d'ordre** si R és reflexiva, antisimètrica i transitiva. Un conjunt amb una relació d'ordre es diu un **conjunt ordenat**.
Una relació d'ordre R en un conjunt A es diu d'ordre **total** si per a tot $x, y \in A$ es compleix:

$$(x, y) \in R \quad \text{o bé} \quad (y, x) \in R.$$

En aquest cas es diu que A està **totalment ordenat**. En canvi, si existeixen $x, y \in A$ tals que $(x, y) \notin R$ i $(y, x) \notin R$, llavors la relació es diu d'ordre **parcial** i es diu que A està **parcialment ordenat**. És habitual usar $\leq$ com a símbol de relació d'ordre en un conjunt.

Exemple 2.5. Si $A = \{1, 2, 3\}$, la següent relació

$$R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (1, 3)\}$$

és un ordre parcial en A, mentre que la relació

$$S = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$$

és un ordre total en A.

Exemple 2.6. Si A és un conjunt qualsevol, la relació d'inclusió és un ordre parcial en el conjunt de parts d'A.

Exemple 2.7. La relació $\leq$ és un ordre total en $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$.

2.4.1 Elements notables d'una relació d'ordre

Si A és un conjunt ordenat per la relació $\leq$, llavors tenim les següents definicions:

1. $a \in A$ és un element **maximal** d'A si no existeix $x \in A$ i $x \neq a$ tal que $a \leq x$.
2. $a \in A$ és un element **minimal** d'A si no existeix $x \in A$ i $x \neq a$ tal que $x \leq a$.
3. $a \in A$ és el **màxim** d'A si per a tot $x \in A$, $x \leq a$, i s'escriu $a = \max A$.

4. $a \in A$ és el **mínim** d'A si per a tot $x \in A$, $a \leq x$, i s'escriu $a = \min A$.

No és difícil demostrar que en tot ordre parcial hi ha com a màxim un element màxim i un element mínim. Així mateix, un element màxim (resp. mínim), si existeix, és un element maximal (resp. minimal). Si l'ordre és total, tot element minimal és mínim i tot element maximal és màxim.

Exemple 2.8. Considerem el conjunt $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ ordenat per la relació

$$R = \{(a, b), (a, c), (b, d), (c, d), (a, d), (e, f)\} \cup \Delta_A.$$

Llavors, tenim:

- R no és un ordre total
- Els elements d, f i g són maximals
- Els elements a, e i g són minimals
- No hi ha màxim ni mínim

Exemple 2.9. Donat el conjunt $A = \{a, b\}$, considerem el conjunt de parts $\mathcal{P}(A)$ ordenat per la relació d'inclusió. Llavors es té:

- A és máximal i $\emptyset$ és mínimal
- A és màxim i $\emptyset$ és mínim

Si A és un conjunt ordenat per la relació $\leq$ i $B \subset A$, llavors:

1. $a \in A$ és una **cota superior** o **mayorante** de B si per a tot $x \in B$, $x \leq a$.
2. $a \in A$ és una **cota inferior** o **minorante** de B si per a tot $x \in B$, $a \leq x$.
3. $a \in A$ és el **suprem** o **extrem superior** de B si a és el mínim de les cotes superiors de B; en tal cas s'escriu $a = \sup B$.
4. $a \in A$ és l'**ínfim** o **extrem inferior** de B si a és el màxim de les cotes inferiors de B; en tal cas escrivim $a = \inf B$.

Exemple 2.10. Considerem el conjunt $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12\}$ ordenat per la relació $|$ definida per

$$x \mid y \iff x \text{ divideix a } y$$

Volem: (a) representar gràficament aquest ordre, (b) trobar els seus elements maximals, minimals, màxim i mínim, (c) considerant el subconjunt $B = \{4, 6, 8, 10\}$, trobar cotes superiors i inferiors, suprem i ínfim.

Solució: (a) Una possible representació gràfica d'aquest ordre és:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 8 & & 12 & & \\
 & & | & / & | & & \\
10 & & 4 & & 6 & & 9 \\
| & \diagdown & | & / & & \diagdown & | \\
5 & & 2 & & & & 3
\end{array}$$

(b) Els maximals són $10, 8, 12$ i 9; els minimals són $5, 2$ i 3; i no hi ha màxim ni mínim.

(c) No hi ha cotes superiors i només hi ha una cota inferior que és 2. Per tant, no hi ha suprem i $\inf B = 2$. $\square$

2.4.2 Conjunts ben ordenats

Si A és un conjunt ordenat, diem que A està **ben ordenat** si tot subconjunt de A té mínim.

Exemple 2.11. El conjunt dels nombres naturals $\mathbb{N}$ està ben ordenat per la relació $\leq$.

Exemple 2.12. El conjunt dels nombres reals $\mathbb{R}$ no està ben ordenat per la relació $\leq$ perquè, per exemple, el subconjunt $(1, 2)$ no té mínim.

Exemple 2.13. Donat el conjunt $A = \{a, b, c\}$, considerem el conjunt de parts $\mathcal{P}(A)$ ordenat per la relació d'inclusió. Considerant els subconjunts $B = \{\{a\}, \{a, b\}\}$ i $C = \{\{b\}, \{c\}, \{b, c\}\}$, (a) volem saber si aquests conjunts estan o no ben ordenats. (b) Volem també trobar els elements notables d'aquesta relació en $\mathcal{P}(A), B$ i C.

Solució: (a) B està ben ordenat perquè $\{a\} \subset \{a\}$ i $\{a\} \subset \{a, b\}$; a més, observa que B està totalment ordenada per $\subset$. En canvi, C no ho està, ja que el subconjunt $\{\{b\}, \{c\}\}$ no té mínim.
(b) Els elements notables són:

	$P(A)$	B	C
Maximals	A	$\{a, b\}$	$\{b, c\}$
Minimals	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}, \{c\}$
Màxim	A	$\{a, b\}$	$\{b, c\}$
Mínim	$\emptyset$	$\{a\}$	No n'hi ha
Cotes superiors	A	$\{a, b\}, A$	$\{b, c\}, A$
Cotes inferiors	$\emptyset$	$\{a\}, \emptyset$	$\emptyset$
Suprem		$\{a, b\}$	$\{b, c\}$
Ínfim	$\emptyset$	$\{a\}$	$\emptyset$

$\square$

3 Aplicacions

Donats dos conjunts A i B, i una relació R entre A i B, es diu **aplicació** d'A en B si $\mathcal{D}(R) = A$ i per a tot $a \in \mathcal{D}(R)$ existeix un únic $b \in B$ tal que $(a, b) \in R$. És habitual usar f, g o h com a símbols d'aplicacions. D'aquesta manera, per a designar una aplicació f d'A en B escriurem

$$f : A \longrightarrow B,$$

o bé

$$A \xrightarrow{f} B.$$

Considerem l'aplicació $f : A \longrightarrow B$ i sigui $a \in A$, llavors $f(a)$ es diu la **imatge** d'a per f. Si $f(a) = b$, llavors diem que a és una **antiimatge** de b per f; també simbolitzem aquest fet com $a \longmapsto f(a) = b$. Al conjunt

$$\mathcal{R}(f) = \{y \in B : \text{existeix } x \in A \text{ tal que } f(x) = y\}$$

se'n diu **imatge** o **recorregut** de l'aplicació f i també s'escriu $\operatorname{Im} f$. Observa que $\mathcal{R}(f)$ és el conjunt dels elements de B que tenen almenys una antiimatge per l'aplicació f.

Donades dues aplicacions $f : A \longrightarrow B$ i $g : A \longrightarrow B$, diem que són **iguals**, representant-ho per $f = g$, si per a tot $x \in A$ es compleix $f(x) = g(x)$. En símbols, escrivim

$$f = g \iff (\forall x)\,(x \in A \Longrightarrow f(x) = g(x))$$

Es diu **graf** de l'aplicació $f : A \longrightarrow B$ al conjunt

$$\mathcal{G}(f) = \{(x, y) \in A \times B : f(x) = y\}$$

Llavors, és evident que dues aplicacions f i g d'A en B són iguals si i només si $\mathcal{G}(f) = \mathcal{G}(g)$.

Exemple 3.1. Donats els conjunts $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ i $B = \{2, 6, 9, 12, 20, 21\}$, considerem la relació R entre A i B definida per: $x \in A$ està relacionat amb $y \in B$ si i només si $y = 3x$. (a) És aquesta relació una aplicació d'A en B? (b) Quins números s'han d'excloure de A perquè ho sigui? Calcula la imatge i el graf de l'aplicació que així s'obté.

Solució: (a) Aquesta relació no és una aplicació d'A en B, perquè el seu domini és el conjunt $\{2, 3, 4\}$ i no coincideix amb A.
(b) Si excloem 0 i 1 d'A, llavors la relació defineix una aplicació de $\mathcal{D}(R) = \{2, 3, 4\}$ en B. És clar que la imatge d'aquesta aplicació és

$$\mathcal{R}(R) = \{6, 9, 12\}$$

i el graf és

$$\mathcal{G}(R) = \{(2, 6), (3, 9), (4, 12)\}\,.$$

$\square$

Exemple 3.2. Siguin $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ i considerem el següent conjunt

$$G = \{\,(x, y) \in A \times B \mid y = 2x - 1\}$$

(a) És G el graf d'una aplicació f d'A en B? (b) Si ho és, com es defineix la imatge d'un element qualsevol d'A? Quins elements de B tenen antiimatge?

Solució: (a) És immediat comprovar que

$$G = \{(1, 1), (2, 3), (3, 5), (4, 7)\}$$

És clar que G defineix una aplicació f d'A en B perquè $\mathcal{D}(f) = A$ i tot element d'A té una i només una imatge.
(b) L'aplicació f es defineix per $f(x) = 2x - 1$. Els elements de B que tenen antiimatge determinen el recorregut de l'aplicació què és

$$\mathcal{R}(f) = \{1, 3, 5, 7\}.$$

$\square$

Observació 3.1. Els conceptes d'aplicació i funció es consideren sovint com a sinònims. Tot i això, el concepte de funció pot considerar-se menys restrictiu que el d'aplicació. La raó està en el fet que quan tractem amb funcions és habitual no especificar des d'un principi els conjunts de sortida i d'arribada com així fem en definir el concepte d'aplicació. En general , una funció es defineix com una relació R entre dos conjunts referencials (prou amplis) que satisfà la següent propietat: per a qualssevol objectes a, b, c

$$(a, b) \in R \text{ i } (a, c) \in R \implies b = c$$

En altres paraules, una relació R entre dos conjunts referencials és una funció si i només si per a tot $a \in \mathcal{D}(R)$ existeix un únic b tal que $(a, b) \in R$. Definit d'aquesta manera el concepte de funció, aleshores diem que f és una funció d'A en B si $\mathcal{D}(f) = A$ i $\mathcal{R}(f) \subset B$. Ara, és evident que una funció d'A en B és una aplicació d'A en B. Per exemple, les funcions de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ (funcions reals de variable real) són aplicacions del seu domini en $\mathbb{R}$.

3.1 Classes d'aplicacions

Donats els conjunts A, B i l'aplicació $f : A \longrightarrow B$. Distingim les següents classes d'aplicacions:

1. L'aplicació es diu **injectiva** quan qualsevol parell d'elements diferents de A tenen imatges diferents, o dit d'una altra forma equivalent, si no hi ha dos elements diferents d'A amb la mateixa imatge. En símbols, escrivim

$$\begin{aligned} f \text{ és injectiva} &\iff x \neq y \implies f(x) \neq f(y) \\ &\iff f(x) = f(y) \implies x = y \end{aligned}$$

   per a tot $x, y \in A$.

2. L'aplicació es diu **exhaustiva** si tot element de B té almenys una antiimatge en A, o dit d'una altra forma equivalent, si $\mathcal{R}(f) = B$. En símbols, escrivim

$$f \text{ és exhaustiva} \iff (\forall y)\,(y \in B \implies (\exists x)\,(x \in A \text{ i } f(x) = y))$$

3. L'apliació es diu **bijectiva** quan és injectiva i exhaustiva.

Exemple 3.3. L'aplicació $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida per $f(x) = x^2$ no és injectiva ni exhaustiva. En efecte, f no és injectiva perquè, per exemple, $-1 \neq 1$ i, en canvi , $f(-1) = f(1)$. Tampoc és exhaustiva perquè -1 no té antiimatge.

Exemple 3.4. L'aplicació $f : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida per $f(x) = x^2$ és injectiva però no és exhaustiva. En efecte, f és injectiva perquè si $f(x) = f(y)$, deduïm $x^2 = y^2$. D'aquí, obtenim $|x| = |y|$, però com $x, y \in [0, +\infty)$, deduïm $x = y$. No és exhaustiva perquè, per exemple, -1 no té antiimatge.

Exemple 3.5. L'aplicació $f : \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty)$ definida per $f(x) = x^2$ no és injectiva però sí que és exhaustiva. En efecte, f no és injectiva perquè $-1 \neq 1$ i, en canvi, $f(-1) = f(1)$. Si $y \in [0, +\infty)$, llavors $\sqrt{y} \in \mathbb{R}$ i es compleix $f\left(\sqrt{y}\right) = \left(\sqrt{y}\right)^2 = y$. Per tant, qualsevol element de $[0, +\infty)$ té antiimatge i, per tant, f és exhaustiva.

Exemple 3.6. L'aplicació $f : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$ definida per $f(x) = x^2$ és bijectiva. En efecte, el raonament utilitzat en (2) prova que f és injectiva, i el raonament utilitzat en (3) prova que f és exhaustiva. Per tant, f és bijectiva.

3.2 Imatge i antiimatge d'un conjunt

Donats els conjunts A, B i l'aplicació $f : A \longrightarrow B$. Considerem $C \subset A$ i $D \subset B$, llavors es diu **imatge del conjunt** C al conjunt

$$f(C) = \{y \in B : \text{existeix } x \in C \text{ tal que } f(x) = y\},$$

és a dir, el conjunt $f(C)$ està format per les imatges de tots els elements de C. Es diu **antiimatge del conjunt** D al conjunt

$$f^{-1}(D) = \{x \in A : f(x) \in D\},$$

és a dir, el conjunt $f^{-1}(D)$ està format per les antiimatges de tots els elements de D.

Exemple 3.7. Considerem l'aplicació $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida per

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}.$$

Volem calcular la imatge del conjunt $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ i l'antiimatge del conjunt $\{0, 1, 2\}$.

Solució: Per a determinar $f(\{-2, -1, 0, 1, 2\})$ haurem de calcular les imatges de tots els elements del conjunt en qüestió. Així, tenim

$$\begin{aligned} f(-2) &= \tfrac{(-2)^2-1}{(-2)^2+1} = \tfrac{3}{5} \\ f(-1) &= \tfrac{(-1)^2-1}{(-1)^2+1} = 0 \\ f(0) &= \tfrac{0-1}{0+1} = -1 \\ f(1) &= \tfrac{1-1}{1+1} = 0 \\ f(2) &= \tfrac{4-1}{4+1} = \tfrac{3}{5} \end{aligned}$$

Per tant,

$$f(\{-2, -1, 0, 1, 2\}) = \left\{-1, 0, \frac{3}{5}\right\}.$$

Per a determinar $f^{-1}(\{0, 1, 2\})$ haurem calcular les antiimatges de tots els elements del conjunt en qüestió. Així, tenim

$$\begin{array}{lclcl} f(x) = 0 & \Longrightarrow & \frac{x^2-1}{x^2+1} = 0 & \Longrightarrow & x = 1 \text{ o } x = -1 \\ f(x) = 1 & \Longrightarrow & \frac{x^2-1}{x^2+1} = 1 & \Longrightarrow & \text{No hi ha solució} \\ f(x) = 2 & \Longrightarrow & \frac{x^2-1}{x^2+1} = 2 & \Longrightarrow & \text{No hi ha solució} \end{array}$$

Per tant,

$$f^{-1}(\{0, 1, 2\}) = \{-1, 1\}.$$

□

Observació 3.2. Veurem en un altre apartat que si una aplicació f és bijectiva, llavors existeix l'aplicació f^{-1} que se'n diu inversa de f. En usar la notació $f^{-1}(D)$ no s'ha de pressuposar que f és bijectiva; ara $f^{-1}(D)$ designa simplement el conjunt que té per elements totes les antiimatges dels elements de D. Tot i això, en el cas que f sigui bijectiva, la notació $f^{-1}(D)$ serà consistent amb el fet que $f^{-1}(D)$ s'interpreti també com la imatge del conjunt D per l'aplicació inversa de f.

3.3 Composició d'aplicacions

Donats els conjunts A, B i C, considerem les aplicacions $f : A \longrightarrow B$ i $g : B \longrightarrow C$. A l'aplicació $h : A \longrightarrow C$ definida per

$$h(x) = g\left(f(x)\right)$$

se'n diu **aplicació composta** de f i g o **aplicació composició** de f amb g, i s'escriu $h = g \circ f$. El següent diagrama justifica la definició de l'aplicació composta de f amb g.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g \circ f"] & B \arrow[r, "g"] & C \\
x \arrow[r, mapsto] & f(x) \arrow[r, mapsto] & g(f(x))
\end{tikzcd}$$

Exemple 3.8. Considerem les aplicacions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ i $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definides per $f(x) = x + 1$ i $g(x) = 1 - 2x$. Volem calcular l'aplicació composta de f amb g.

Solució: Segons la definició, tenim

$$\begin{aligned}
(g \circ f)(x) &= g\left(f(x)\right) \\
&= g(x + 1) \\
&= 1 - 2(x + 1) \\
&= 1 - 2x - 2 \\
&= -1 - 2x
\end{aligned}$$

□

Observació 3.3. Volem fer dues observacions importants:

- És important assenyalar que la composició $g \circ f$ de dues aplicacions f i g només existeix quan el conjunt d'arribada de f coincideix amb el conjunt de sortida de g.
- Observa que en l'expressió $g \circ f$ les aplicacions apareixen escrites en ordre invers al d'actuació, que és: primer f i després g.

3.4 Aplicació inversa

Donada una aplicació $f : A \longrightarrow B$ bijectiva, l'aplicació $g : B \longrightarrow A$ definida per

$$g(y) = x \iff f(x) = y$$

es diu **aplicació inversa** de f i és habitual denotar-la per f^{-1}. Segons la definició, és immediat comprovar que

$$f^{-1} \circ f = I_A \quad \text{i} \quad f \circ f^{-1} = I_B$$

on les aplicacions $I_A : A \longrightarrow A$ i $I_B : B \longrightarrow B$ definides per $I_A(x) = x$ per a tot $x \in A$ i $I_B(x) = x$ per a tot $x \in B$ es diuen, respectivament, l'aplicació **identitat** d'A i l'aplicació identitat de B**.**

Exemple 3.9. Considerem l'aplicació $f : \mathbb{R} - \{1\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{2\}$ definida per

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$$

(a) Provarem que f és bijectiva i (b) calcularem l'aplicació inversa.

Solució: (a) Si $x, y \in \mathbb{R} - \{1\}$ i suposem que $f(x) = f(y)$, llavors

$$\begin{aligned}
\frac{2x+1}{x-1} &= \frac{2y+1}{y-1} \\
2xy - 2x + y - 1 &= 2xy + x - 2y - 1 \\
3y &= 3x \\
y &= x
\end{aligned}$$

i, per tant, f és injectiva. Si $y \in \mathbb{R} - \{2\}$ i fem $f(x) = y$, llavors

$$\begin{aligned}
\frac{2x+1}{x-1} &= y \\
2x + 1 &= xy - y \\
1 + y &= xy - 2x \\
1 + y &= x(y-2) \\
\frac{1+y}{y-2} &= x
\end{aligned}$$

Per tant, donat $y \in \mathbb{R} - \{2\}$, existeix

$$\frac{1+y}{y-2} \in \mathbb{R} - \{1\}$$

i es compleix

$$f\left(\frac{1+y}{y-2}\right) = y.$$

Això vol dir que f també és exhaustiva i, en conseqüència, f és bijectiva.
(b) Com que per a tot $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ i $y \in \mathbb{R} - \{2\}$, es compleix

$$\tfrac{1+y}{y-2} = x \iff \tfrac{2x+1}{x-1} = y$$

llavors

$$f^{-1}(y) = \frac{1+y}{y-2}$$

Substituint ara y per x, obtenim

$$f^{-1}(x) = \frac{1+x}{x-2}.$$

$\square$

3.5 Cardinal d'un conjunt

En aquest apartat precisarem la noció intuïtiva que tots tenim de nombre d'elements d'un conjunt finit.

Diem que dos conjunts A i B són **equipotents** quan existeix una aplicació bijectiva d'A en B. Ara podem associar a cada conjunt A el que es diu **cardinal** o **potència** d'A que es denota per $\#A$. El cardinal d'un conjunt es defineix de manera que es compleixi la següent condició: Dos conjunts tenen el mateix cardinal si i només si són equipotents.

Si U és l'univers i considerem en $\mathcal{P}(U)$ la relació de equipotència $\sim$ definida per

$$A \sim B \iff \#A = \#B,$$

és immediat comprovar que $\sim$ és una relació d'equivalència en $\mathcal{P}(U)$ i cada classe es diu un **nombre cardinal**. En altres paraules, n és un nombre cardinal si existeix un conjunt A tal que $\#A = n$.

Així, tots els conjunts equipotents a un conjunt unitari com, per exemple , $\{\emptyset\}$, direm que tenen cardinal 1, tots els conjunts equipotents a un parell com, per exemple, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ tenen cardinal 2, i així successivament. Admetem que el cardinal del conjunt buit és 0, és a dir, $\#\emptyset = 0$.

Intuïtivament, és clar que un conjunt finit no pot ser equipotent a un dels seus subconjunts propis. Tanmateix, això és possible per a conjunts infinits. Per exemple, el conjunt dels nombres naturals $\mathbb{N}$ és equipotent amb el següent subconjunt propi format pels parells:

$$P = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$$

ja que l'aplicació

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & P \\ n & \longmapsto & 2n \end{array}$$

és bijectiva. Aquest fet justifica la següent definició.

Diem que un conjunt A és **infinit** si A és equipotent amb un subconjunt propi de A. Si un conjunt no és infinit, llavors diem que és **finit**. D'aquesta manera, per a dos conjunts finits A i B, evidentment tenim que A és equipotent a B si i només si A i B contenen el mateix nombre d'elements. Per als conjunts infinits, la idea "tenir el mateix nombre d'elements"és vaga, mentre que la idea que A sigui bijectable amb B conserva la seva claredat.

Finalment, diem que un conjunt A és **infinit numerable** si A és equipotent al conjunt dels nombres naturals $\mathbb{N}$, i diem simplement **numerable** si A és finit o infinit numerable.

3.5.1 Propietats per a conjunts finits

Les fórmules més usuals (encara que no les úniques) que relacionen els cardinals i les operacions entre conjunts són:

1. $\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$

2. $\#(A \cup B \cup C) = \#A + \#B + \#B - \#(A \cap B) - \#(A \cap C) - \#(B \cap C) + \#(A \cap B \cap C)$

3. $\#\complement A = \#U - \#A$

4. $\#(A \times B) = \#A \cdot \#B$

5. $\#\mathcal{P}(A) = 2^{\#A}$

Les demostracions d'aquestes propietats les trobaràs en els exercicis resolts.

Exemple 3.10. A un examen de Matemàtiques i Física han concorregut 100 alumnes. Sabent que Física l'han aprovat 60 alumnes, Matemàtiques 48 i que el nombre d'alumnes que han aprovat totes dues assignatures ha estat 30, volem esbrinar el nombre d'alumnes que no han aprovat cap assignatura en aquest examen.

Solució: Tenim els següents conjunts: el conjunt U d'alumnes que s'examinen, el conjunt A d'alumnes que han aprovat Física i el conjunt B d'alumnes que han aprovat Matemàtiques. Per l'enunciat del problema, se sap que $\#U = 100$, $\#A = 60$, $\#B = 48$ i $\#A \cap B = 30$. El conjunt d'alumnes que han aprovat alguna assignatura és $A \cup B$ i el nombre d'elements d'aquest conjunt és

$$\begin{aligned} \#(A \cup B) &= \#A + \#B - \#(A \cap B) \\ &= 60 + 48 - 30 \\ &= 78 \end{aligned}$$

Llavors, el nombre d'alumnes que no han aprovat cap assignatura és 22 perquè aquest nombre és el cardinal del conjunt $\complement(A \cup B)$ i es compleix que

$$\begin{aligned} \#\complement(A \cup B) &= \#U - \#(A \cup B) \\ &= 100 - 78 \\ &= 22. \end{aligned}$$

$\square$