Exercicis proposats

Miquel Angel Perelló

Versió 2001

1. Donats els conjunts següents

$$A = \{x : x = 2n \ \text{ i } \ n \in \mathbb{N}\}$$
$$B = \{x : x = 3n \ \text{ i } \ n \in \mathbb{N}\}$$
$$C = \{x : x = 4n - 1 \ \text{ i } \ n \in \mathbb{N}\}$$
$$D = \{x : x = 4n + 1 \ \text{ i } \ n \in \mathbb{N}\}$$

   Troba $A \cap B$, $C \cup D$, $C \cap D$, $\complement A$ i $A \cap (C \cup D)$.

   Solució: $A \cap B$ és el conjunt de múltiples de 6, $C \cup D = \{x : x = 2n + 1 \ \text{ i } \ n \in \mathbb{N}\}$, $C \cap D = \emptyset$, $\complement A$ és el conjunt dels nombres imparells, i $A \cap (C \cup D) = \emptyset$.

2. Sigui U l'univers dels conjunts A, B i C. Simplifica les següents expressions:

   a) $(A \cap B) \cup (A \cap \complement B) \cup (\complement A \cap B) \cup (\complement A \cap \complement B)$
   b) $\left[(A \cup B) \cap \complement\left(B \cap \complement A\right)\right] \cup \left[(A \cap B) \cup \complement\left(B \cup \complement A\right)\right]$
   c) $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup \complement\left(\complement A \cup \complement B\right)$
   d) $(A \cap B) \cup (A \cap \complement B) \cup (\complement A \cap C) \cup (A \cap C)$

   Solució: a) U, b) A, c) $A \cap (B \cup C)$ i d) $A \cup C$

3. Si $\#P\left(A \cup \mathcal{P}(A)\right) = 8$, calcula $\#A$.

   Solució: $\#A = 1$

4. Una empresa ofereix places d'electricista, de mecànic i de fuster. Sabem que 12 persones sol·liciten plaça d'electricista, 12 de mecànic, 15 de fuster, 3 d'electricista i mecànic, 4 de mecànic i fuster, 5 d'electricista i fuster i, finalment, 1 solÂ·licita plaça de les tres coses. Calcula quanta gent ha fet alguna sol·licitud.

   Solució: 28 persones

5. En una reunió hi ha 25 persones que són mèdics, músics o polítics. Hi ha 20 metges, 12 músics i 17 polítics. Hi ha 8 que són mèdics i músics, 12 que són mèdics i polítics i 11 que són músics i polítics. (a) Quants polítics són músics i metges alhora? (b) Quantes persones hi ha amb una sola professió?

   Solució: (a) 7 i (b) 8

6. D'un grup de 1000 persones, 950 porten rellotge, 750 porten paraigua, 800 porten corbata i 850 porten barret. Troba el nombre mínim de persones que porten les quatre coses.

   Solució: 350

7. Comprova si les següents col·leccions de conjunts formen una partició de $\mathbb{N}$

   a) $A = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$ i $B = \{2n - 1 : n \in \mathbb{N}\}$
   b) A és el conjunt dels nombres primers entre si, $B = \{2, 4, 6, 8, 9\}$ i $C = \{x \in \mathbb{N} : x \geq 10\}$
   c) $A = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{2n - 1 : n \in \mathbb{N}\}$ i $C = B = \{5n : n \in \mathbb{N}\}$

   Solució: a) Sí, b) No, c) No

8. En el conjunt $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ es defineix la relació

$$x \; R \; y \iff y \text{ és múltiple de } x$$

   (a) Escriu el graf de la relació i (b) estudia les seves propietats.

   Solució: (a) $R = \left\{ \begin{array}{c} (1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,2), \\ (2,4),(2,6),(3,3),(3,6),(4,4),(5,5),(6,6) \end{array} \right\}$ (b) R és reflexiva, antisimètrica i transitiva.

9. Quina relació binària sobre un conjunt és simètrica i antisimètrica?

   Solució: La relació d'igualtat.

10. De les següents relacions, quines són d'equivalència? I en cas de ser-ho, quines són les seves classes?

    a) "Tenir la mateixa altura" en el conjunt dels alumnes d'una classe
    b) "Ser equipol·lent" en el conjunt dels vectors fixos del pla
    c) "Equidistar d'un punt fix donat" en el conjunt dels punts del pla
    d) "Estar alineats amb un punt fix donat" en el conjunt de parells de punts del pla sense el punt fix donat

    Solució: (a) És d'equivalència i els alumnes queden classificats segons les seves altures (b) És d'equivalència i les classes són els vectors lliures del pla (c) És d'equivalència i les classes són les circumferències de centre el punt fix donat (d) És d'equivalència i les classes són les rectes que passen pel punt fix donat sense contenir aquest punt.

11. En el conjunt dels nombres reals es defineix la relació

$$x \sim y \iff \lfloor x \rfloor = \lfloor y \rfloor$$

    on $\lfloor y \rfloor$ significa la part sencera del nombre real x. És una relació d'equivalència? Si ho és, quines són les seves classes?

    Solució: Observa que $x \sim y$ si i només si existeix un nombre enter n tal que $x, y \in [n, n+1)$. És una relació d'equivalència i les classes són els intervals de la forma $[n, n+1)$ amb $n \in \mathbb{Z}$.

12. Esbrina si la relació "x divideix y" és d'ordre en cadascun dels conjunts que s'indiquen a continuació, i, en el cas que ho sigui, és parcial o total? Troba els seus elements maximals i minimals.

a) En el conjunt dels nombres naturals $\mathbb{N}$

b) En el conjunt dels nombres enters $\mathbb{Z}$

Solució: (a) És d'ordre parcial, 1 és minimal i no hi ha elements maximals. (b) No és d'ordre

13. En el conjunt dels nombres reals ordenat segons la relació d'ordre usual $\leq$ es consideren els següents subconjunts (a) $A = [1, 5]$, (b) $B = (-2, -1]$, (c) $C = (\pi, 2\pi)$, (d) $D = [2, +\infty)$, (e) $E = (-5, +\infty)$ i (f) $F = (-\infty, 0)$. Calcula, si existeixen, mínim, màxim, ínfim i suprem de cadascun d'ells.

    Solució: (a) $\min A = \inf A = 1$ i $\max A = \sup A = 5$, (b) $\inf B = -2$ i $\max B = \sup B = -1$, (c) $\inf C = \pi$ i $\sup C = 2\pi$, (d) $\min D = \inf D = 2$, (e) $\inf E = -5$, (f) $\sup F = 0$

14. En el conjunt $A = \{2, 3, 5, 6, 15\}$ es defineix la relació

$$x \; R \; y \iff y \text{ és múltiple de } x$$

    (a) És una relació d'ordre? És parcial o total? (b) Troba màxim, mínim, suprem i ínfim de $B = \{2, 3, 6, 15\}$. (c) Troba màxim, mínim, suprem i ínfim de A. (d) Hi ha elements maximals i minimals d'A?

    Solució: (a) És d'ordre parcial (b) No existeixen $\max B$, $\min B$, $\sup B$, $\inf B$. (c) No existeixen $\max A$, $\min A$, $\sup A$, $\inf A$. (d) $2, 3, 5$ són minimals i $6, 15$ són maximals.

15. Es donen els conjunts $A = \{2, 3, 4, 7, 8\}$ i $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}$. Sigui $f : A \longrightarrow B$ l'aplicació definida per

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{si } x \text{ és parell} \\ x & \text{si } x \text{ és senar} \end{cases}$$

    Estudia quina classe d'aplicació s'obté.

    Solució: És una aplicació injectiva

16. Donades les aplicacions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida per $f(x) = e^x$ i $g : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida per $g(x) = \sqrt{x}$. (a) De quina classe d'aplicacions són f i g? (b) Canvia els conjunts de sortida i d'arribada de l'aplicació f perquè sigui bijectiva. (c) Canvia els conjunts de sortida i d'arribada de l'aplicació g perquè sigui bijectiva. (d) Calcula les aplicacions inverses de les aplicacions de l'apartat (c). (e) Calcula si és possible $f \circ g$ i $g \circ f$.

    Solució: (a) f és injectiva però no exhaustiva i g és injectiva però no exhaustiva. (b) L'aplicació $f : \mathbb{R} \longrightarrow (0, +\infty)$ definida per $f(x) = e^x$ és bijectiva. (c) L'aplicació $g : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$ definida per $g(x) = \sqrt{x}$ és bijectiva. (d) $f^{-1} : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ amb $f^{-1}(x) = \ln x$ i $g^{-1} : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$ amb $g^{-1}(x) = x^2$. (e) $f \circ g : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ amb $(f \circ g)(x) = e^{\sqrt{x}}$ i $g \circ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ amb $(g \circ f)(x) = \sqrt{e^x}$ ja que $\operatorname{Im} f = (0, +\infty) \subset [0, +\infty)$.

17. Donada l'aplicació $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida per $f(x) = 2x + 1$, calcula $f(A)$ i $f^{-1}(A)$ en els casos següents: (a) $A = [1, 3]$, (b) $A = [-2, -1)$, (c) $A = [1, +\infty)$ i (d) $A = (-\infty, -2)$.

Solució: (a) $f(A) = [3, 7]$ i $f^{-1}(A) = [0, 1]$, (b) $f(A) = [-3 - 1)$ i $f^{-1}(A) = [-3/2, -1)$, (c) $f(A) = [3, +\infty)$ i $f^{-1}(A) = [0, +\infty)$ i (d) $f(A) = (-\infty, -3)$ i $f^{-1}(A) = (-\infty, -3/2)$.

18. Sigui $f : \mathbb{R} - \{1\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{3\}$ definida per

$$f(x) = \frac{3x - 1}{x - 1}$$

Demostra que és bijectiva i calcula l'aplicació inversa.

Solució: Cal demostrar que és injectiva i exhaustiva. L'aplicació inversa és

$$f^{-1}(x) = \frac{x - 1}{x - 3}$$