Pràctica

Miquel Angel Perelló

Versió 2001

1 Conjunts

Exercici 1. Escriu simbòlicament els conjunts següents i determina els seus elements en cada cas:

1. El conjunt dels nombres reals tals que el seu quadrat és 12.
2. El conjunt dels nombres reals tals que el seu quadrat és -9.
3. El conjunt dels nombres reals tals que el seu quadrat és major o igual que 0.
4. El conjunt dels nombres naturals compresos entre 3/2 i 13/3.
5. El conjunt dels nombres reals que són solució de l'equació $3x - 1 = 10$.
6. El conjunt dels nombres enters que són solució de l'equació $3x - 1 = 10$.

Solució: (1) El conjunt dels nombres reals tals que el seu quadrat és 12 s'escriu com segueix

$$\begin{aligned} A &= \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 = 12\right\} \\ &= \left\{-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}\right\}. \end{aligned}$$

(2) El conjunt dels nombres reals tals que el seu quadrat és -9 és el conjunt buit, ja que no hi ha cap nombre real el quadrat del qual sigui negatiu.
(3) El conjunt dels nombres reals tals que el seu quadrat és major o igual que 0 s'escriu com segueix

$$\begin{aligned} C &= \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \\ &= [0, +\infty). \end{aligned}$$

(4) El conjunt dels nombres naturals compressos entre 3/2 i 13/3 és

$$\begin{aligned} D &= \{x \in \mathbb{N} : 3/2 \leq x \leq 13/3\} \\ &= \{2, 3, 4\}. \end{aligned}$$

(5) El conjunt dels nombres racionals que són solució de l'equació $3x - 1 = 10$ és

$$\begin{aligned} E &= \{x \in \mathbb{Q} : 3x - 1 = 10\} \\ &= \left\{\frac{11}{3}\right\}. \end{aligned}$$

(6) El conjunt dels nombres enters que són solució de l'equació $3x - 1 = 10$ és el conjunt buit perquè no existeix cap nombre enter que multiplicat per 3 doni 11. $\square$

Exercici 2. Defineix els següents conjunts mitjançant una condició que compleixen tots els seus elements:

1. $\{5\}$
2. $\{1,3,5,7,9,11\}$
3. $\{-1,0,1\}$

Solució: (1) És clar que

$$\{5\} = \{x \in \mathbb{N} : 4 < x < 6\}.$$

(2) És clar que

$$\{1,3,5,7,9,11\} = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ és senar i } x \leq 11\}.$$

(3) És clar que

$$\{-1,0,1\} = \left\{x \in \mathbb{R} : x^3 - x = 0\right\}$$

□

Exercici 3. Són iguals els conjunts

$$A = \{x : x \text{ és una lletra de la paraula “matemàtica”}\}$$

i

$$B = \{a, m, i, c, t, e\}$$

Per què?

Solució: És evident que

$$A = \{m, a, t, e, i, c\}$$

i, per tant, $A = B$, ja que tenen els mateixos elements. □

Exercici 4. Calcula el conjunt de parts dels conjunts següents: (1) $A = \{1\}$; (2) $B = \{1,2\}$; (3) $C = \{1,2,3\}$.

Solució: (1) Si $A = \{1\}$, llavors

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, A\}.$$

(2) Si $B = \{1,2\}$, llavors

$$\mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, B\}.$$

(3) Si $C = \{1,2,3\}$, llavors

$$\mathcal{P}(C) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, C\}.$$

□

Exercici 5. Donat el conjunt $A = \{a, b, c\}$, quines són vertaderes de les següents expressions?

$a)\quad a \in A$	$b)\quad \{b\} \in A$	$c)\quad c \subset A$
$d)\quad \{c\} \subset A$	$e)\quad \{a,b,c\} \subset A$	$f)\quad A \in A$

Solució: a) És clar que a és element d'A i, per tant, és cert que $a \in A$.
b) $\{b\} \in A$ és falsa, ja que $\{b\}$ no és element d'A.
c) $c \subset A$ és falsa, ja que c és element d'A i no subconjunt.
d) És clar que c és element d'A i, per tant, és cert que $\{c\}$ és subconjunt d'A
e) És clar que a, b i c són elements d'A i, per tant, és cert que $\{a, b, c\}$ és subconjunt de A.
f) $A \in A$ és falsa, ja que A no és element de si mateix. □

Exercici 6. Donat el conjunt $A = \{1, 2, 3\}$, quins de les següents relacions són vertaderes?

a) $\{3\} \in A$	*b)* $\{1, 2\} \subset A$	*c)* $3 \in \mathcal{P}(A)$
d) $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$	*e)* $\emptyset \subset \mathcal{P}(A)$	*f)* $\{2, 3\} \subset \mathcal{P}(A)$
g) $\{\emptyset\} \subset \mathcal{P}(A)$	*h)* $\emptyset \in \{\emptyset\}$	*i)* $\{\{1\}\} \in \mathcal{P}(A)$

Solució: a) $\{3\} \in A$ és falsa, ja que $\{3\}$ no és element d'A.
b) És clar que 1 i 2 són elements d'A i, per tant, és cert que $\{1, 2\}$ és subconjunt d'A.
c) És clar que 3 no és subconjunt d'A i, per tant, $3 \in \mathcal{P}(A)$ és falsa.
d) És clar que $\emptyset \subset A$ i, per tant, és cert que $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$.
e) És clar que $\emptyset$ és subconjunt de qualsevol conjunt i, per tant, és cert que $\emptyset \subset \mathcal{P}(A)$.
f) És clar que ni 2 ni 3 són subconjunts d'A i, per tant, és fals que $\{2, 3\} \subset \mathcal{P}(A)$.
g) És clar que $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ i, per tant, és cert que $\{\emptyset\} \subset \mathcal{P}(A)$.
h) En ser $\emptyset$ element de $\{\emptyset\}$, és cert que $\emptyset \in \{\emptyset\}$.
i) És clar que $\{\{1\}\}$ no és subconjunt d'A i, per tant, és fals que $\{\{1\}\} \in \mathcal{P}(A)$.
□

Exercici 7. Demostra que es compleixen les següents propietats de la relació d'inclusió:

1. Per a tot conjunt A, $A \subset A$.
2. Donats dos conjunts A i B, si $A \subset B$ i $A \supset B$, llavors $A = B$.
3. Donats tres conjunts A, B i C, si $A \subset B$ i $B \subset C$, llavors $A \subset C$.

Solució: (1) Donat qualsevol conjunt A, per definició, tenim

$$A \subset A \iff (\forall x)\,(x \in A \Longrightarrow x \in A)$$

Des del punt de vista lògic, la implicació

$$x \in A \Longrightarrow x \in A$$

és vertadera qualssevol que sigui x. Per tant, $A \subset A$.
(2) Donats dos conjunts qualssevol A i B, si $A \subset B$, llavors

$$(\forall x)\,(x \in A \Longrightarrow x \in B)$$

A més, si $B \subset A$, llavors

$$(\forall x)\,(x \in B \Longrightarrow x \in A)$$

Des del punt de vista lògic, de les dues implicacions anteriors es dedueix

$$x \in A \Longleftrightarrow x \in B$$

per a tot x. Per tant, per definició d'igualtat de conjunts, $A = B$.
(3) Donats tres conjunts qualssevol A, B i C, si $A \subset B$, llavors

$$x \in A \Longrightarrow x \in B$$

per a tot x. A més, si $B \subset C$, llavors

$$x \in B \Longrightarrow x \in C$$

per a tot x. Des del punt de vista lògic, de les dues implicacions anteriors es dedueix

$$x \in A \Longrightarrow x \in C$$

per a tot x, i per tant, per definició, es compleix $A \subset C$. $\square$

Exercici 8. Donades les següents condicions:

$$P(x): \ x \text{ és múltiple de } 6$$

i

$$Q(x): \ x \text{ és múltiple de } 3$$

(a) Demostra que per a tot $x \in \mathbb{Z}$ es compleix la següents implicació

$$P(x) \implies Q(x)$$

i (b) si

$$A = \{x \in \mathbb{Z} : P(x)\} \quad \text{i} \quad B = \{x \in \mathbb{Z} : Q(x)\}$$

quins de les següents relacions és correcte $A \subset B$ o $B \subset A$?

Solució: (a) És evident que tot nombre enter que sigui múltiple de 6 és també múltiple de 3. Per tant, la implicació lògica següent

$$P(x) \implies Q(x)$$

és certa per a tot $x \in \mathbb{Z}$.
(b) Com que, per a tot $x \in \mathbb{Z}$ es compleixen

$$x \in A \iff P(x) \quad \text{i} \quad x \in B \iff Q(x)$$

i, segons l'apartat anterior,

$$P(x) \implies Q(x)$$

llavors,

$$x \in A \Longrightarrow x \in B$$

i, com a conseqüència, $A \subset B$. $\square$

Exercici 9. Donats els següents intervals de la recta real

$$A = (-2, 5] \quad \text{i} \quad B = [1, 9]$$

Determina els conjunts $A \cap B$, $A \cup B$, $A - B$ i $B - A$.

Solució: Es té que $A \cap B = [1,5]$, $A \cup B = (-2,9]$, $A - B = (-2,1)$ i $B - A = (5,9]$. $\square$

Exercici 10. Una companyia d'assegurances té una cartera de clients U i tracta d'estudiar algunes característiques d'aquests. Sigui A el conjunt d'adults, B el de dones i C el dels clients casats. (a) Descriu els següents conjunts: $\complement A$, $\complement B$, $\complement C$, $B \cap \complement A$, $A \cap B$, $A \cup B$ i $B \cap \complement C$. (b) Expressa mitjançant conjunts les següents enunciats: (1) Adults casats, (2) Homes menors no casats i (3) Menors o homes casats.

Solució: (a) Per definició de complementari d'un conjunt, si A és el conjunt d'adults, B el de dones i C el dels clients casats, llavors $\complement A$ és el conjunt de menors, $\complement B$ el d'homes i $\complement C$ el dels no casats. Com que

$$x \in B \cap \complement A \iff x \in B \text{ i } x \in \complement A$$

llavors $B \cap \complement A$ és el conjunt de dones menors. És clar que $A \cap B$ és el conjunt de dones adultes, i, $A \cup B$ és el conjunt de dones o homes adults. Com que

$$x \in B \cap \complement C \iff x \in B \text{ i } x \in \complement C$$

llavors $B \cap \complement C$ és el conjunt de dones no casades.
(b) Com que A és el conjunt d'adults i C el dels casats, llavors $A \cap C$ és el conjunt d'adults casats. És clar que el conjunt d'homes menors no casats és

$$\complement B \cap \complement A \cap \complement C$$

Finalment, el conjunt de menors o homes casats és

$$\complement A \cup (\complement B \cap C)$$

$\square$

Exercici 11. Donats tres conjunts qualssevol A, B i C, demostra que es compleixen les següents relacions:

1. $A \cup A = A$ i $A \cap A = A$
2. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ i $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
3. $A \cup B = B \cup A$ i $A \cap B = B \cap A$
4. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup B)$ i $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
5. $A \cup (B \cap A) = A$ i $A \cap (B \cup A) = A$
6. $A \cup \emptyset = A$ i $A \cap \emptyset = \emptyset$

Solució: Per a demostrar igualtats de conjunts hi ha dos mètodes. El primer consisteix a utilitzar la propietat antisimètrica de la relació d'inclusió:

$$A = B \iff A \subset B \text{ i } B \subset A$$

i, el segon, consisteix a expressar primer les igualtats com a enunciats de lògica proposicional i després comprovar que es tracten de tautologies. Utilitzarem aquí tots dos mètodes per a provar les igualtats indicades.

(1) És clar que $A \cup A = A$ i $A \cap A = A$ s'expressen com els següents enunciats

$$x \in A \text{ o } x \in A \iff x \in A$$

i

$$x \in A \text{ i } x \in A \iff x \in A$$

traduïts com a expressions formals de la lògica d'enunciats, tenim

$$p \vee p \longleftrightarrow p \quad \text{i} \quad p \wedge p \longleftrightarrow p$$

on p està en lloc de l'enunciat $x \in A$. Per a provar que són tautologies hem de construir les taules de veritat de totes dues proposicions i comprovar que en l'última columna són tots 1 (valor de veritat). Així, tenim

p	$p \wedge p$	$(p \wedge p) \longleftrightarrow p$
1	1	1
0	0	1

p	$p \vee p$	$(p \vee p) \longleftrightarrow p$
1	1	1
0	0	1

i

p	$p \wedge p$	$(p \wedge p) \longleftrightarrow p$
1	1	1
0	0	1

on 0 és el valor de falsedat. Per tant, totes dues igualtats són vertaderes.

(2) És clar que $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ i $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ s'expressen com els següents enunciats

$$x \in A \text{ o } (x \in B \text{ o } x \in C) \iff (x \in A \text{ o } x \in B) \text{ o } x \in C$$

i

$$x \in A \text{ i } (x \in B \text{ i } x \in C) \iff (x \in A \text{ i } x \in B) \text{ i } x \in C$$

que traduïts com a expressions formals de la lògica d'enunciats, tenim

$$p \vee (q \vee r) \longleftrightarrow (p \vee q) \vee r$$

i

$$p \wedge (q \wedge r) \longleftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$$

on p està en lloc de $x \in A$, q en lloc de $x \in B$, i r en lloc de $x \in C$. Per a provar que són tautologies hem de construir les taules de veritat de totes dues proposicions i comprovar que en l'última columna són tots 1. Així, tenim

p	q	r	$p \vee q$	$q \vee r$	$p \vee (q \vee r)$	$(p \vee q) \vee r$	$[p \vee (q \vee r)] \longleftrightarrow [(p \vee q) \vee r]$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	1

i

p	q	r	$p \wedge q$	$q \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$	$(p \wedge q) \wedge r$	$[p \wedge (q \wedge r)] \longleftrightarrow [(p \wedge q) \wedge r]$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0	0	1
0	1	1	0	1	0	0	1
0	1	0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	1

Per tant, totes dues igualtats són vertaderes.
(3) És clar que $A \cup B = B \cup A$ i $A \cap B = B \cap A$ s'expressen com els següents enunciats

$$x \in A \text{ o } x \in B \iff x \in B \text{ o } x \in A$$

i

$$x \in A \text{ i } x \in B \iff x \in B \text{ i } x \in A$$

traduïts com a expressions formals de la lògica d'enunciats, tenim

$$p \vee q \quad \longleftrightarrow \quad q \vee p \qquad \text{i} \qquad p \wedge q \quad \longleftrightarrow \quad q \wedge p$$

on p està en lloc de l'enunciat $x \in A$ i q en lloc de $x \in B$. Per a provar que són tautologies hem de construir les taules de veritat de totes dues proposicions i comprovar que en l'última columna són tots 1.

p	q	$p \vee q$	$q \vee p$	$(p \vee q) \longleftrightarrow (q \vee p)$
1	1	1	1	1
1	0	1	1	1
0	1	1	1	1
0	0	0	0	1

i

p	q	$p \wedge q$	$q \wedge p$	$(p \wedge q) \longleftrightarrow (q \wedge p)$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	0	0	1
0	0	0	0	1

Per tant, totes dues igualtats són vertaderes.
(4) Aquí, utilitzarem el primer mètode per a provar $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup B)$ i $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Així, tenim

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup B) \iff \begin{cases} A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup B) \\ (A \cup B) \cap (A \cup B) \subset A \cup (B \cap C) \end{cases}$$

Com que

$$\begin{aligned} x \in A \cup (B \cap C) &\iff x \in A \text{ o } x \in B \cap C \\ &\iff x \in A \text{ o } (x \in B \text{ i } x \in C) \\ &\iff (x \in A \text{ o } x \in B) \text{ i } (x \in A \text{ o } x \in C) \\ &\iff x \in A \cup B \text{ i } x \in A \cup C \\ &\iff x \in (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{aligned}$$

Per tant, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup B)$.
D'altra banda, tenim

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \iff \begin{cases} A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ (A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C) \end{cases}$$

Com que

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \cup C) &\iff x \in A \text{ i } x \in B \cup C \\ &\iff x \in A \text{ i } (x \in B \text{ o } x \in C) \\ &\iff (x \in A \text{ i } x \in B) \text{ o } (x \in A \text{ i } x \in C) \\ &\iff x \in A \cap B \text{ o } x \in A \cap C \\ &\iff x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{aligned}$$

Per tant, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
(5) Com que

$$\begin{aligned} x \in A \cup (B \cap A) &\iff x \in A \text{ o } x \in B \cap A \\ &\iff x \in A \text{ o } (x \in B \text{ i } x \in A) \\ &\iff (x \in A \text{ o } x \in B) \text{ i } (x \in A \text{ o } x \in A) \\ &\iff (x \in A \text{ o } x \in B) \text{ i } x \in A \\ &\iff x \in A \end{aligned}$$

Aleshores, $A \cup (B \cap A) = A$. D'altra banda,

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \cup A) &\iff x \in A \text{ i } x \in B \cup A \\ &\iff x \in A \text{ i } (x \in B \text{ o } x \in A) \\ &\iff (x \in A \text{ i } x \in B) \text{ o } (x \in A \text{ i } x \in A) \\ &\iff (x \in A \text{ i } x \in B) \text{ o } x \in A \\ &\iff x \in A \end{aligned}$$

Per tant, $A \cap (B \cup A) = A$.
(6) Com que

$$\begin{aligned} x \in A \cup \emptyset &\iff x \in A \text{ o } x \in \emptyset \\ &\iff x \in A \end{aligned}$$

Per tant, $A \cup \emptyset = A$. D'altra banda, si fos $A \cap \emptyset$ no buit, existiria un element x tal que $x \in A$ i $x \in \emptyset$, però això no és possible, ja que $x \in \emptyset$ és una relació que sempre és falsa. Per tant, no pot haver-hi cap element en $A \cap \emptyset$ i, per tant, $A \cap \emptyset = \emptyset$. $\square$

Exercici 12. Prenent com univers $\mathbb{R}$, determina els complementaris dels següents conjunts: $(2, +\infty)$, $(-\infty, 0]$, $(-3, 1]$ i $[0.5, 0.7] \cup [2, 3)$.

Solució: Per definició de complementari d'un conjunt tenim

$$\begin{aligned} \complement(2, +\infty) &= (-\infty, 2] \\ \complement(-\infty, 0] &= (0, +\infty) \\ \complement(-3, 1] &= (-\infty, -3] \cup (1, +\infty) \\ \complement\left([0.5, 0.7] \cup [2, 3)\right) &= (-\infty, 0.5) \cup (0.7, 2) \cup [3, +\infty) \end{aligned}$$

$\square$

Exercici 13. Si E és el conjunt referencial, demostra que es compleixen les següents propietats:

1. $\complement E = \emptyset$ i $\complement \emptyset = E$
2. $\complement\left(\complement A\right) = A$
3. $\complement\left(A \cup B\right) = \complement A \cap \complement B$
4. $\complement\left(A \cap B\right) = \complement A \cup \complement B$

Solució: (1) Si $\complement E$ no fos buit, existiria un element x tal que $x \notin E$, però això no és possible perquè E és l'univers. Per tant, no pot haver-hi cap element en $\complement E$ i, com a consequència, $\complement E = \emptyset$.
Com que

$$\begin{aligned} x \in \complement \emptyset &\iff x \in E \text{ i } x \notin \emptyset \\ &\iff x \in E \end{aligned}$$

Per tant, $\complement \emptyset = E$.
(2) És clar que $\complement\left(\complement A\right) = A$ es tradueix com la següent expressió formal de la lògica d'enunciats,

$$\neg\neg p \longleftrightarrow p$$

on p està en lloc de l'enunciat $x \in A$. Per a provar que és una tautologia hem de construir la taula de veritat i comprovar que en l'última columna són tots 1. Així, tenim

p	$\neg p$	$\neg\neg p$	$\neg\neg p \longleftrightarrow p$
1	0	1	1
0	1	0	1

Per tant, la igualtat $\complement\left(\complement A\right) = A$ és certa.
(3) Com que

$$\begin{aligned} x \in \complement\left(A \cup B\right) &\iff x \in E \text{ i } x \notin A \cup B \\ &\iff x \in E \text{ i } \left(x \notin A \text{ i } x \notin B\right) \\ &\iff \left(x \in E \text{ i } x \notin A\right) \text{ i } \left(x \in E \text{ i } x \notin B\right) \\ &\iff x \in \complement A \text{ i } x \in \complement B \\ &\iff x \in \complement A \cap \complement B \end{aligned}$$

Per tant, $\complement\left(A \cup B\right) = \complement A \cap \complement B$.
(4) És clar que $\complement\left(A \cap B\right) = \complement A \cup \complement B$ es tradueix com la següent expressió formal de la lògica d'enunciats,

$$\neg(p \wedge q) \longleftrightarrow \neg p \vee \neg q$$

on p està en lloc de l'enunciat $x \in A$ i q de $x \in B$. Per a provar que és una tautologia hem de construir la taula de veritat i comprovar que en l'última columna són tots 1. Així, tenim

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p \vee \neg q$	$\neg(p \wedge q) \longleftrightarrow \neg p \vee \neg q$
1	1	0	0	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1	1

Per tant, la igualtat $\complement\left(A \cap B\right) = \complement A \cup \complement B$ és vertadera. $\square$

Exercici 14. Suposant que E és el conjunt referencial, simplifica les següents expressions:

1. $(A \cap \complement B) \cap (\complement A \cap \complement B)$
2. $(A \cap B \cap C) \cup (\complement A \cup \complement B \cup \complement C)$
3. $\big[A \cap (\complement A \cup B)\big] \cup [B \cap (B \cup C)] \cup B$

Solució: En tots aquests apartats aplicarem les propietats de la unió i intersecció entre conjunts i del complementari d'un conjunt.
(1) Així tenim

$$\begin{aligned}
(A \cap \complement B) \cap (\complement A \cap \complement B) &= (A \cap \complement B) \cap (\complement B \cap \complement A)\\
&= A \cap (\complement B \cap \complement B) \cap \complement A\\
&= A \cap \complement B \cap \complement A\\
&= A \cap (\complement B \cap \complement A)\\
&= A \cap (\complement A \cap \complement B)\\
&= (A \cap \complement A) \cap \complement B\\
&= \emptyset \cap \complement B\\
&= \emptyset
\end{aligned}$$

(2) Així, tenim

$$\begin{aligned}
(A \cap B \cap C) \cup (\complement A \cup \complement B \cup \complement C) &= (A \cap B \cap C) \cup (\complement\,(A \cap B) \cup \complement C)\\
&= (A \cap B \cap C) \cup \complement\,((A \cap B) \cap C)\\
&= (A \cap B \cap C) \cup \complement\,(A \cap B \cap C)\\
&= E
\end{aligned}$$

(3) Així, tenim

$$\begin{aligned}
\big[A \cap (\complement A \cup B)\big] \cup [B \cap (B \cup C)] \cup B &= \big[(A \cap \complement A) \cup (A \cap B)\big] \cup [(B \cap B) \cup (B \cap C)] \cup B\\
&= \emptyset \cup (A \cap B) \cup B \cup (B \cap C) \cup B\\
&= (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup B\\
&= (A \cap B) \cup [(B \cap C) \cup B]\\
&= (A \cap B) \cup B\\
&= B
\end{aligned}$$

□

Exercici 15. Si $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 4\}$ i $C = \{a\}$, determina els conjunts següents: (a) $A \times (B \cup C)$; (b) $(C \times A) \cap (C \times B)$.

Solució: (a) És clar que

$$B \cup C = \{2, 4, a\}$$

Llavors, segons la definició de producte cartesià de dos conjunts, obtenim

$$A \times (B \cup C) = \{(1, 2), (1, 4), (1, a), (2, 2), (2, 4), (2, a)\}$$

(b) De la mateixa manera obtenim

$$C \times A = \{(a,1),(a,2)\} \quad \text{y} \quad C \times B = \{(a,2),(a,4)\}$$

Després,

$$(C \times A) \cap (C \times B) = \{(a,2)\}$$

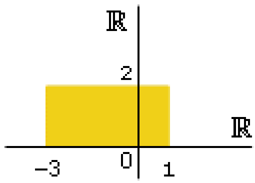
□

Exercici 16. Representa gràficament el conjunt $A \times B$, sabent que $A = \{x \in \mathbb{R} : -3 \leq x \leq 1\}$ i $B = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 2\}$.

Solució: Segons la definició de producte cartesià de dos conjunts, obtenim

$$A \times B = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : -3 \leq x \leq 1 \ \text{ i } \ 0 \leq y \leq 2\}$$

Gràficament, aquest conjunt representa la regió del pla assenyalada en la figura següent



□

2 Relacions

Exercici 17. Estudiar les propietats de les següents relacions:

1. "Ser divisor de" en el conjunt dels nombres naturals.
2. "Ser quadrat de" en el conjunt dels nombres naturals.
3. "Tenir igual àrea que" en el conjunt dels triangles del pla.
4. "Ser perpendicular" en el conjunt de les rectes de l'espai.
5. "Tenir el mateix color d'ulls que" en el conjunt dels habitants de la terra.

Solució: (1) En $\mathbb{N}$ considerem la relació "Ser divisor de". És evident que la relació és reflexiva (Tot nombre natural és divisor de si mateix) i, per tant, no és irreflexiva ni asimètrica. Tampoc és simètrica (Per exemple, 3 és divisor d'i, 6 en canvi, 6 no és divisor de 3). És evident que la relació és antisimètrica i transitiva.
(2) En $\mathbb{N}$ considerem la relació "Ser quadrat de". És evident que la relació no és reflexiva (Per exemple, 3 no és quadrat de 3). Tampoc és irreflexiva ja que 1 és quadrat de si mateix. No és asimètrica ni simètrica però, en canvi, sí que és antisimètrica. No és transitiva (Si $a = b^2$ i $b = c^2$, llavors $a = (c^2)^2 = c^4 \neq c^2$).
(3) En el conjunt dels triangles del pla considerem la relació "Tenir igual àrea que". És evident que aquesta relació és reflexiva, simètrica i transitiva.
(4) En el conjunt de les rectes de l'espai considerem la relació "Ser perpendicular". És evident que la relació no és reflexiva (Cap recta és perpendicular a si mateixa). És irreflexiva, simètrica i no transitiva, com pot comprovar-se de seguida.
(5) En conjunt dels habitants de la terra considerem la relació "Tenir el mateix color d'ulls que". És evident que aquesta relació és reflexiva, simètrica i transitiva. □

Exercici 18. De les següents relacions binàries R, esbrina quins són d'equivalència i descriu les seves classes: (a)En $\mathbb{R}$, $(x,y) \in R$ si i només si $|x-y| < 1$; (b) En $\mathbb{R} - \{0\}$, $(x,y) \in R$ si i només si $\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$.

Solució: (a) La relació és reflexiva, doncs, per a tot $x \in \mathbb{R}$ es compleix

$$|x-x| = 0 < 1$$

També és simètrica, doncs, si $|x-y| < 1$, llavors

$$|x-y| = |-(x-y)| = |y-x| < 1$$

En canvi, la relació no és transitiva, ja que $(-1,-0.5) \in R$ i $(-0.5, 0.25) \in R$ i, en canvi, $(-1, 0.25) \notin R$ perquè

$$|-1-0.25| = 1.25 > 1$$

Per consegüent, aquesta relació no és d'equivalència.
(b) La relació és evidentment reflexiva, simètrica i transitiva. Per tant, la relació és d'equivalència. La classe d'un element arbitrari $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ és

$$\begin{aligned} [a] &= \left\{x \in \mathbb{R} - \{0\} : \frac{x}{a} \in \mathbb{Q}\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} - \{0\} : \frac{x}{a} = q \;\text{ i }\; q \in \mathbb{Q} - \{0\}\right\} \\ &= \{a \cdot q : q \in \mathbb{Q} - \{0\}\} \end{aligned}$$

Per tant, si $b \in \mathbb{Q} - \{0\}$, llavors

$$[b] = \{b \cdot q : q \in \mathbb{Q} - \{0\}\} = \mathbb{Q} - \{0\}$$

En resum, hi ha dos tipus de classes d'equivalència: les classes de la forma $[a]$ amb $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ i la classe formada per tots els nombres racionals no nuls. $\square$

Exercici 19. En $\mathbb{Z}$ es defineix la següent relació

$$x \equiv y \iff x - y \text{ és múltiple de 5.}$$

(a) Demostra que $\equiv$ és una relació d'equivalència, (b) troba el conjunt quocient $\mathbb{Z}/\equiv$; (c) calcula un representant x de la classe a la que pertany 127 que compleixi $8 < x < 15$ i un representant y a la que pertany -34 que compleixi $5 < y < 10$.

Solució: (a) La relació $\equiv$ és d'equivalència, perquè es compleixen les propietats

1. Reflexiva: $x \equiv x$, per a tot $x \in \mathbb{Z}$, ja que $x - x = 0$ és múltiple de 5.

2. Simètrica: $x \equiv y$ implica $y \equiv x$ per a tot $x, y \in \mathbb{Z}$, ja que si $x - y$ és múltiple de 5, també ho és $-(x-y) = y - x$.

3. Transitiva: $x \equiv y$ i $y \equiv z$ implica $x \equiv z$ per a tot $x, y, z \in \mathbb{Z}$, ja que si $x - y$ i $y - z$ són múltiples de 5, també ho és la seva suma $x - z$.

(b) Considerem un nombre enter arbitrari a i determinem la seva classe d'equivalència. Tenim,

$$\begin{aligned}[a] &= \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv a\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z} : x - a \ \text{ és múltiple de } 5\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z} : x - a = 5k \ \text{ i } \ k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{a + 5k : k \in \mathbb{Z}\}\,.\end{aligned}$$

Per tant, distingim 5 classes d'equivalència:

$$\begin{aligned}[0] &= \{0 + 5k : k \in \mathbb{Z}\} = \{..., -10, -5, 0, 5, 10, ...\} \\ [1] &= \{1 + 5k : k \in \mathbb{Z}\} = \{..., -9, -4, 1, 6, 11, ...\} \\ [2] &= \{2 + 5k : k \in \mathbb{Z}\} = \{..., -8, -3, 2, 7, 12, ...\} \\ [3] &= \{3 + 5k : k \in \mathbb{Z}\} = \{..., -7, -2, 3, 8, 13, ...\} \\ [4] &= \{4 + 5k : k \in \mathbb{Z}\} = \{..., -6, -1, 4, 9, 14, ...\}\end{aligned}$$

Per tant, el conjunt quocient és

$$\mathbb{Z}/\equiv\; = \{[0]\,, [1]\,, [2]\,, [3]\,, [4]\}\,.$$

(c) És clar que

$$127 = 2 + 5 \cdot 25$$

i, per tant, $127 \in [2]$. Aleshores, un representant x de la classe a la que pertany 127 que compleixi $8 < x < 15$ és 12. De la mateixa manera, observa primer que

$$-34 = -4 + 5 \cdot (-6)$$

i, per tant, $-34 \in [-4] = [1]$. Per tant, un representant y a la que pertany -34 que compleixi $5 < y < 10$ és 6. □

Exercici 20. Sigui $A = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ i considerem en el conjunt $A \times A$ la següent relació

$$(a, b) \sim (c, d) \iff a + d = b + c$$

(a) Demostra que $\sim$ és una relació d'equivalència i (b) troba el conjunt quocient.

Solució: (a) La relació $\sim$ és d'equivalència, doncs es compleixen les propietats:

- Reflexiva: En efecte, per a tot $(a, b) \in A \times A$, es compleix $a + b = b + a$ i, per tant, $(a, b) \sim (a, b)$.

- Simètrica: En efecte, per a tot $(a, b), (c, d) \in A \times A$, si $(a, b) \sim (c, d)$, és a dir si $a + d = b + c$, llavors $c + b = d + a$ i, per tant, $(c, d) \sim (a, b)$.

- Transitiva: En efecte, per a tot $(a, b), (c, d), (e, f) \in A \times A$, si $(a, b) \sim (c, d)$ i $(c, d) \sim (e, f)$, és a dir si

  $$\begin{aligned} a + d &= b + c \\ c + f &= d + e \end{aligned}$$

  llavors, sumant membre a membre totes dues igualtats, obtenim

  $$a + d + c + f = b + c + d + e$$

  i d'aquí, simplificant, obtenim

  $$a + f = b + e$$

  i, per tant, $(a, b) \sim (e, f)$.

(b) Considerem un element arbitrari (a, b) de $A \times A$ i determinem la seva classe d'equivalència. Observa primer que

$$(a, b) \sim (a + k, b + k)$$

per a tot $k \in A$ i, per tant,

$$[(a, b)] = [(a + k, b + k)]$$

per a tot $k \in A$. D'aquí, obtenim que

$$\begin{array}{c} [(0,0)] = \{(0,0),(1,1),(2,2),...\} \\ [(1,0)] = \{(1,0),(2,1),(3,2),...\} \\ [(0,1)] = \{(0,1),(1,2),(2,3),...\} \\ [(2,0)] = \{(2,0),(3,1),(4,2),...\} \\ [(0,2)] = \{(0,2),(1,3),(2,4),...\} \\ \vdots \end{array}$$

són classes d'equivalència d'aquesta relació.
En general,

- si $a > b$, llavors es compleix
$$[(a, b)] = [(a - b, 0)]$$
- si $a = b$, llavors
$$[(a, b)] = [(0, 0)]$$
- si $a < b$, llavors
$$[(a, b)] = [(0, b - a)]$$

Per consegüent, hi ha tantes classes d'equivalència en el conjunt quocient com a nombres enters.

$$\begin{array}{lcc} [(0,0)] & \text{es correspon amb} & 0 \\ [(1,0)] & & 1 \\ [(0,1)] & & -1 \\ [(2,0)] & & 2 \\ [(0,2)] & & -2 \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

$\square$

Exercici 21. En el conjunt $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\})$ es defineix la següent relació

$$(a, b) \sim (c, d) \iff ad = bc$$

(a) Demostra que $\sim$ és una relació d'equivalència i (b) Troba el conjunt quocient.

Solució: (a) La relació $\sim$ és d'equivalència, perquè es compleixen les propietats:

- Reflexiva: En efecte, per a tot $(a, b) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\})$ es compleix $ab = ba$ i, per tant, $(a, b) \sim (a, b)$.

- Simètrica: En efecte, per a tot $(a,b),(c,d) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}-\{0\})$, si $(a,b) \sim (c,d)$, és a dir si $ad = bc$, llavors $cb = da$ i, per tant, $(c,d) \sim (a,b)$.
- Transitiva: En efecte, per a tot $(a,b),(c,d),(e,f) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}-\{0\})$, si $(a,b) \sim (c,d)$ y $(c,d) \sim (e,f)$, o sigui si

  $$\begin{aligned} ad &= bc \\ cf &= de \end{aligned}$$

  Llavors, multiplicat la primera igualtat per $f \neq 0$, s'obté

  $$adf = bcf$$

  D'aquí, mitjançant la segona igualtat, obtenim

  $$adf = bde$$

  Ara, dividint per $d \neq 0$, es dedueix

  $$af = be$$

  i, per tant, $(a,b) \sim (e,f)$.

(b) Considerem un element arbitrari (a,b) de $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z}-\{0\})$ i determinem la seva classe d'equivalència. Observa primer que

$$(a,b) \sim (ak,bk)$$

per tot $k \in \mathbb{Z}-\{0\}$ i, per tant,

$$[(a,b)] = [(ak,bk)]$$

per tot $k \in \mathbb{Z}-\{0\}$. D'aquí, s'obté

$$\begin{aligned} [(0,1)] &= \{...,(0,-2),(0,-1),(0,1),(0,2),...\} \\ [(1,1)] &= \{...,(-2,-2),(-1,-1),(1,1),(2,2),...\} \\ [(1,2)] &= \{...,(-2,-4),(-1,-2),(1,2),(2,4),...\} \\ [(2,1)] &= \{...,(-4,-2),(-2,-1),(2,1),(4,2),...\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

són classes d'equivalència d'aquesta relació.
En general, hi ha tantes classes d'equivalència en el conjunt quocient com a números de la forma a/b, amb $a \in \mathbb{Z}$ i $b \in \mathbb{Z}-\{0\}$, és a dir, com a nombres racionals.

$$\begin{array}{lll} [(0,1)] & \text{es correspon amb} & ... = \frac{0}{-1} = \frac{0}{1} = ... \\ [(1,1)] & & ... = \frac{-1}{-1} = \frac{1}{1} = ... \\ [(1,2)] & & ... = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2} = ... \\ [(2,1)] & & ... = \frac{-2}{-1} = \frac{2}{1} = ... \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

$\square$

Exercici 22. (a) Demostra que la següent relació

$$x \sim y \iff \text{existeix } n \in \mathbb{Z} \text{ tal que } x, y \in (n-1, n]$$

és d'equivalència en $\mathbb{R}$. Quines són les seves classes d'equivalència? (b) Demostra que els intervals de la forma $(n, n+1]$, amb $n \in \mathbb{Z}$, constitueixen una partició de la recta real.

Solució: (a) La relació $\sim$ és d'equivalència, perquè es compleixen les propietats:

- Reflexiva: Donat qualsevol $x \in \mathbb{R}$, si n és el menor nombre enter que és major o igual que x, llavors $x \in (n-1, n]$ i, per tant, $x \sim x$.
- Simètrica: És evident que $x \sim y$ implica $y \sim x$ per a tot $x, y \in \mathbb{R}$.
- Transitiva: En efecte, si $x \sim y$, llavors existeix $n \in \mathbb{Z}$ tal que $x, y \in (n-1, n]$. A més, si $y \sim z$, llavors també es compleix que $y, z \in (n-1, n]$. Aleshores, $x, z \in (n-1, n]$ i, per tant, $x \sim z$.

És clar que la classe d'equivalència de qualsevol $a \in \mathbb{R}$ és l'interval $(n-1, n]$ tal que $a \in (n-1, n]$. A més, qualsevol altre nombre real d'aquest interval està relacionat amb a i, per tant, la seva classe coincideix amb la de a. En definitiva, les classes del conjunt quocient són els intervals de la forma $(n-1, n]$ amb $n \in \mathbb{Z}$.
(b) En tractar-se d'una relació d'equivalència, el conjunt quocient format pels intervals de la forma $(n-1, n]$, amb $n \in \mathbb{Z}$, constitueixen una partició de $\mathbb{R}$. $\square$

Exercici 23. Es considera en $\mathbb{R}$ la relació "menor o igual que"designada per $\leq$. Comprova que $\leq$ és una relació d'ordre. És total o parcial? Hi ha algun element maximal? Hi ha algun element minimal?

Solució: La relació és d'ordre parcial ja que es compleixen les propietats:

- Reflexiva: Per a tot $x \in \mathbb{R}$, és evident que $x \leq x$.
- Antisimètrica: Per a tot $x, y \in \mathbb{R}$, si $x \leq y$ i $y \leq x$, és clar que $x = y$.
- Transitiva: Per a tot $x, y, z \in \mathbb{R}$, si $x \leq y$ i $y \leq z$, llavors és evident que $x \leq z$.

La relació és d'ordre total ja que per a qualsevol parell d'elements $x, y \in \mathbb{R}$ es compleix $x \leq y$ o bé $y \leq x$. És clar que no hi ha elements maximals ni minimals en aquesta relació. $\square$

Exercici 24. En el conjunt $\mathcal{P}(A)$ de les parts d'un conjunt donat A es considera la relació d'inclusió $\subset$. Comprova que $\subset$ és una relació d'ordre. És total o parcial? Hi ha algun element maximal? Hi ha algun element minimal?

Solució: La relació és d'ordre parcial ja que es compleixen les propietats:

- Reflexiva: Per a tot $X \in \mathcal{P}(A)$, és evident que $X \subset X$.
- Antisimètrica: Per a tot $X, Y \in \mathcal{P}(A)$, si $X \subset Y$ i $Y \subset X$, és clar que $X = Y$.
- Transitiva: Per a tot $X, Y, Z \in \mathcal{P}(A)$, si $X \subset Y$ i $Y \subset Z$, llavors és evident que $X \subset Z$.

La relació no és d'ordre total ja que, per exemple, si $X \in \mathcal{P}(A)$, llavors $A - X \in \mathcal{P}(A)$ i X no és subconjunt de $A - X$ ni $A - X$ és subconjunt de X. És evident que A és un element maximal i $\emptyset$ és un element minimal en $\mathcal{P}(A)$ segons aquesta relació. $\square$

Exercici 25. Es considera $\mathbb{R}$ amb l'ordre usual $\leq$ i els subconjunts següents: (1) $\mathbb{Z}$; (2) $(0, 2] \cup (3, 5]$; (3) $(-\infty, -2) \cup [13, 19)$. Calcula (a) els extrems superiors i inferiors i (b) els màxims i mínims, si existeixen.

Solució: És clar que

	$\mathbb{Z}$	$(0, 2] \cup (3, 5]$	$(-\infty, -2) \cup [13, 19)$
Suprem	No existeix	5	19
Ínfim	No existeix	0	No existeix
Màxim	No existeix	5	No existeix
Mínim	No existeix	No existeix	No existeix

$\square$

Exercici 26. En el conjunt $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 15, 60\}$ es defineix la relació

$$a \mid b \iff a \text{ és divisor de } b$$

(a) Demostra que $\mid$ és una relació d'ordre en A. És total o parcial? (b) Troba el màxim, mínim, suprem i ínfim del conjunt $B = \{2, 3, 6, 15\}$. (c) Calcula el màxim, mínim, suprem i ínfim de A . (d) Hi ha elements maximals i minimals en A?

Solució: (a) La relació $\mid$ és d'ordre, ja que es compleixen les propietats:

- Reflexiva: Per a tot $x \in A$ és evident que es compleix $x \mid x$.
- Antisimètrica: Per a tot $x, y \in A$, si $x \mid y$ i $y \mid x$, és clar que $x = y$.
- Transitiva: Per a tot $x, y, z \in A$, si $x \mid y$ i $y \mid z$, és també clar que $x \mid z$.

La relació no és d'ordre total ja que $4, 5 \in A$ i $4 \nmid 5$ ni $5 \nmid 4$.
(b) Una representació gràfica d'aquesta relació és

$$\begin{array}{ccccc} & & 60 & & \\ & / & | & \backslash & \\ 4 & & 6 & & 15 \\ | & / & | & / & | \\ 2 & & 3 & & 5 \\ & \backslash & | & / & \\ & & 1 & & \end{array}$$

A partir d'ella, és evident que $\sup B = 60$, $\inf B = 1$, i no existeixen màxim ni mínim de B.
(c) A partir del mateix gràfic de l'apartat anterior, és clar que $\sup A = \max A = 60$ i $\inf A = \min A = 1$.
(d) Els elements maximal i minimal de A són, respectivament, 60 i 1. $\square$

Exercici 27. Es considera en el conjunt $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ la següent relació

$$R = \{(6,5),(5,1),(1,2),(6,4),(4,1),(4,2),(3,2),(5,2),(6,1),(6,2)\} \cup \Delta_A$$

on Δ_A és la relació d'identitat en A. (a) Representa gràficament aquesta relació. (b) Calcula cotes inferiors i superiors de $B = \{1,4,5\}$ i determina $\sup B$ i $\inf B$. (c) Calcula els elements maximals i minimals d'A. Hi ha màxim i mínim d'A?

Solució: (a) Una representació gràfica de la relació és

```
        2
      / | \
    1   |   3
    | \ |
    5   4
      \ |
        6
```

(b) Per al conjunt B només hi ha una cota inferior 6 i té 1 i 2 com a cotes superiors. Llavors, és clar que $\sup B = 1$ i $\inf B = 6$.
(c) Per al conjunt A, observant el gràfic de la relació, es té que 3 i 6 són elements minimals i només hi ha un element maximal 2. Per tant, no hi ha mínim d'A i $\max A = 2$. $\square$

Exercici 28. Es considera el conjunt ordenat $\mathbb{Q}$ per la relació d'ordre usual $\leq$. Quin subconjunt de $\mathbb{Q}$ està ben ordenat? (a) $\mathbb{Q}$; (b) Els nombres enters majors que 9; (c) Els nombres enters parells menors que 0; i (d) Els nombres enters positius múltiples de 5.

Solució: (a) $\mathbb{Q}$ no està ben ordenat ja que no té element mínim.
(b) El conjunt de nombres enters majors que 9 està ben ordenat perquè és un subconjunt de $\mathbb{N}$, que està ben ordenat.
(c) El conjunt de nombres enters parells menors que 0 no està ben ordenat ja que no té element mínim.
(d) El conjunt de nombres enters positius múltiples d'està 5 ben ordenat perquè és un subconjunt de $\mathbb{N}$, que està ben ordenat. $\square$

3 Aplicacions

Exercici 29. Donats $A = \{1,2,3\}$ i $B = \{2,3,4,5\}$, és aplicació de A en B la relació entre A i B definida per

$$\{(1,3),(2,2),(1,5),(3,5)\}$$

Raona la resposta.

Solució: No és aplicació ja que $1 \in A$ està relacionat amb dos elements de B i això no pot passar. $\square$

Exercici 30. Estudia si les relacions binàries següents en $\mathbb{R}$ són o no aplicacions. Quan ho siguin, calcula el seu domini i imatge. (a) $R_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y^2 - x = 0\}$; (b) $R_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x + y = 2\}$; (c) $R_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 + y^2 = 1\}$; i (d) $R_4 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y = \sqrt{4 - x^2}\right\}$.

Solució: (a) La relació R_1 no és aplicació ja que $(1,1),(1,-1) \in R_1$.
(b) La relació R_2 és aplicació. És clar que defineix l'aplicació $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mitjançant $f(x) = 2 - x$. El domini de R_2 és $\mathbb{R}$ i la imatge és també $\mathbb{R}$.
(c) La relació R_3 no és aplicació ja que $(0,1),(0,-1) \in R_3$.
(d) La relació R_4 és aplicació. És clar que defineix l'aplicació $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mitjançant $f(x) = \sqrt{4-x^2}$. El domini de R_4 és $[-2,2]$ i la imatge és $[0,2]$. $\square$

Exercici 31. Es considera l'aplicació $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida per $f(x) = 3x+1$. (a) Calcula les imatges de $-2, 0, 3$, i les antiimatges, si existeixen, de $-5, 4/5$ i 9. Quins són els elements que tenen antiimatge? (b) Contesta a les mateixa qüestions prenent com a conjunt de sortida $\mathbb{R}$ en lloc de $\mathbb{Z}$

Solució: (a) Les imatges de $-2, 0$ i 3 són:

$$\begin{aligned} f(-2) &= 3 \cdot (-2) + 1 = -5 \\ f(0) &= 3 \cdot 0 + 1 = 1 \\ f(3) &= 3 \cdot 3 + 1 = 10 \end{aligned}$$

Calculem les antiimatges de $-5, 4/5$ i 9. Com que

$$\begin{aligned} f(x) = -5 &\implies 3x + 1 = -5 \\ &\implies x = -2 \end{aligned}$$

Llavors -2 és antiimatge de -5. De la mateixa manera,

$$\begin{aligned} f(x) = \tfrac{4}{5} &\implies 3x + 1 = \tfrac{4}{5} \\ &\implies x = -\tfrac{1}{15} \end{aligned}$$

Per tant, no existeix antiimatge de $4/5$ ja que $-1/15 \notin \mathbb{Z}$. Finalment,

$$\begin{aligned} f(x) = 9 &\implies 3x + 1 = 9 \\ &\implies x = \tfrac{8}{3} \end{aligned}$$

Per tant, tampoc existeix antiimatge de 9 ja que $8/3 \notin \mathbb{Z}$.
Observa que

$$\begin{aligned} f(x) = y &\implies 3x + 1 = y \\ &\implies x = \frac{y-1}{3} \end{aligned}$$

Per tant,

$$\begin{aligned} \frac{y-1}{3} \in \mathbb{Z} &\implies y - 1 \text{ és múltiple de } 3 \\ &\implies y = 1 + 3k, \text{ amb } k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Per consegüent, els elements que tenen antiimatge són

$$\{..., -5, -2, 1, 4, 7, ...\}$$

(b) Les respostes són les mateixes que abans però amb la diferència que ara $-1/15 \in \mathbb{R}$ és antiimatge de $4/5$ i $8/3 \in \mathbb{R}$ ho és de 9. A més, els elements que tenen antiimatge és ara tot $\mathbb{R}$. $\square$

Exercici 32. Donades les aplicacions $f, g, h : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ definides per $f(x) = x + 2$ $g(x) = 4x$, i $h(x) = x^2 - x$, esbrina si són injectives, exhaustives o bijectivas.

Solució: L'aplicació f és bijectiva. En efecte, és injectiva doncs

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) &\implies x + 2 = y + 2 \\ &\implies x = y \end{aligned}$$

i també és exhaustiva ja que donat qualsevol $y \in \mathbb{Z}$ tenim

$$\begin{aligned} f(x) = y &\implies x + 2 = y \\ &\implies x = y - 2 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

i, per tant, cada element $y \in \mathbb{Z}$ té antiimatge $y - 2 \in \mathbb{Z}$.
L'aplicació g és injectiva però no exhaustiva. En efecte, és injectiva doncs

$$\begin{aligned} g(x) = g(y) &\implies 4x = 4y \\ &\implies x = y \end{aligned}$$

En canvi, no és exhaustiva perquè qualsevol nombre enter que no sigui múltiple de 4 no té antiimatge en $\mathbb{Z}$.
Finalment, l'aplicació h no és injectiva ni exhaustiva. En efecte, ja que $h(0) = h(1) = 0$ i $0 \neq 1$, l'aplicació no és injectiva. Tampoc és exhaustiva ja que, per exemple, -1 no té antiimatge per al h no tenir solucions senceres la següent equació de segon grau

$$\begin{aligned} x^2 - x &= -1 \\ x^2 - x + 1 &= 0 \end{aligned}$$

$\square$

Exercici 33. Donades les aplicacions $f, g, h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definides per $f(x) = e^x$, $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$, i $h(x) = \cos x$, esbrina si són injectives, exhaustives o bijectivas.

Solució: L'aplicació f és injectiva però no exhaustiva. És injectiva ja que si $x \neq y$, llavors és evident que $e^x \neq e^y$. En canvi, no és exhaustiva ja que $e^x > 0$ per tot $x \in \mathbb{R}$ i, per tant, $\operatorname{Im} f = (0, +\infty) \neq \mathbb{R}$.
L'aplicació g no és injectiva ni exhaustiva. No és injectiva ja que, per exemple , $g(1) = g(-1) = 1/2$ i $1 \neq -1$. Tampoc és exhaustiva ja que evidentment

$$0 < \frac{1}{1 + x^2} < 1$$

per a tot $x \in \mathbb{R}$ i, per tant, $\operatorname{Im} g = (0, 1] \neq \mathbb{R}$.
L'aplicació h no és injectiva ni exhaustiva. No és injectiva ja que, per exemple , $h(0) = h(2\pi) = 1$ i $0 \neq 2\pi$. Tampoc és exhaustiva ja que $-1 \leq \cos x \leq 1$ per a tot $x \in \mathbb{R}$ i, per tant, $\operatorname{Im} h = [-1, 1]$. $\square$

Exercici 34. Considerem l'aplicació $f : \mathbb{R} - \{-1, 1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida per

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$$

(a) Si $A = \{-1/2, 0, 1/2\}$, calcula $f(A)$ i $f^{-1}(A)$. (b) Esbrina si f és injectiva o exhaustiva.

Solució: Com que les imatges de $-1/2, 0$ i $1/2$ són

$$\begin{aligned}
&f(-\tfrac{1}{2}) = -\tfrac{1}{3}\\
&f(0) = 0\\
&f(\tfrac{1}{2}) = -\tfrac{1}{3}
\end{aligned}$$

llavors $f(A) = \{-1/3, 0\}$.
Calculem les antiimatges de $-1/2, 0$ i $1/2$. Com que

$$\begin{aligned}
f(x) = -\tfrac{1}{2} &\implies \frac{x^2}{x^2-1} = -\tfrac{1}{2}\\
&\implies 3x^2 = 1\\
&\implies x = \pm\tfrac{1}{\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

deduïm que $-1/\sqrt{3}$ i $1/\sqrt{3}$ són antiimatges de $-1/2$. De la mateixa manera ,

$$\begin{aligned}
f(x) = 0 &\implies \tfrac{x^2}{x^2-1} = 0\\
&\implies x^2 = 0\\
&\implies x = 0
\end{aligned}$$

Per tant, 0 és antiimatge de 0. Finalment,

$$\begin{aligned}
f(x) = \tfrac{1}{2} &\implies \tfrac{x^2}{x^2-1} = \tfrac{1}{2}\\
&\implies x^2 = -1
\end{aligned}$$

al no tenir solucions reals aquesta última equació de segon grau, deduïm que $1/2$ no té antiimatges.
Dels resultats obtinguts, deduïm també que f no és injectiva (Hem vist que $f(-1/2) = f(-1/2)$) ni exhaustiva (Hem vist que 0 no té antiimatge). $\square$

Exercici 35. Donada una aplicació f de A en B, considerem $X, Y \subset A$ i $Z, T \subset B$. Demostra que es compleixen les següents propietats: (a) $X \subset Y$ implica $f(X) \subset f(Y)$; (b) $Z \subset T$ implica $f^{-1}(Z) \subset f^{-1}(T)$; (c) $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$; (d) $f(X \cap Y) \subset f(X) \cap f(Y)$; (e) $f^{-1}(Z \cup T) = f^{-1}(Z) \cup f^{-1}(T)$; (f) $f^{-1}(Z \cap T) = f^{-1}(Z) \cap f^{-1}(T)$; (g) $X \subset f^{-1}(f(X))$; (h) $f(f^{-1}(Z)) \subset Z$; (i) $f^{-1}\left(\complement_B Z\right) = \complement_A(f^{-1}(Z))$.

Solució: (a) Considerem qualsevol element $b \in f(X)$. Llavors, existeix $a \in X$ tal que $f(a) = b$. Ara bé, per hipòtesi, $X \subset Y$, després $a \in Y$ i $f(a) = b \in f(Y)$. D'aquesta manera hem demostrat que $f(X) \subset f(Y)$.
(b) Considerem qualsevol element $a \in f^{-1}(Z)$. Llavors, $f(a) \in Z$ i com, per hipòtesi, $Z \subset T$, deduïm que $f(a) \in T$. Després, $a \in f^{-1}(T)$. Per tant, $f^{-1}(Z) \subset f^{-1}(T)$.
(c) Provarem (1) $f(X \cup Y) \subset f(X) \cup f(Y)$ i (2) $f(X) \cup f(Y) \subset f(X \cup Y)$. Llavors, de (1) i (2), deduirem la igualtat. (1) Considerem qualsevol element $b \in f(X \cup Y)$. Llavors, existeix $a \in X \cup Y$ tal que $f(a) = b$. Ara bé, si $a \in X \cup Y$, llavors $a \in X$ o $a \in Y$. Si $a \in X$, llavors $f(a) = b \in f(X)$ i, per tant, $b \in f(X) \cup f(Y)$. De la mateixa manera, si $a \in Y$, llavors $f(a) = b \in f(Y)$ i, per tant, $b \in b \in f(X) \cup f(Y)$. En qualsevol cas $b \in f(X) \cup f(Y)$, amb el que deduïm que $f(X \cup Y) \subset f(X) \cup f(Y)$.
(2) Considerem qualsevol element $b \in f(X) \cup f(Y)$. Llavors, $b \in f(X)$ o $b \in f(Y)$. Si $b \in f(X)$, llavors existeix $a \in X$ tal que $f(a) = b$. Ara bé, si $a \in X$, llavors $a \in X \cup Y$ i, per tant, $f(a) = b \in f(X \cup Y)$. Si $b \in f(Y)$, llavors existeix $c \in Y$ tal que $f(c) = b$. De la mateixa manera que abans, si $c \in Y$, llavors $c \in X \cup Y$ i, per

tant, $f(c) = b \in f(X \cup Y)$. En qualsevol cas $b \in f(X \cup Y)$, amb el que deduïm que $f(X) \cup f(Y) \subset f(X \cup Y)$.
(d) Considerem qualsevol element $b \in f(X \cap Y)$. Llavors, existeix $a \in X \cap Y$ tal que $f(a) = b$. Ara bé, si $a \in X \cap Y$, llavors $a \in X$ i $a \in Y$. Per tant, $f(a) = b \in f(X) \cap f(Y)$, amb el que deduïm que $f(X \cap Y) \subset f(X) \cap f(Y)$.
(e) Considerem qualsevol element $a \in f^{-1}(Z \cup T)$. Llavors,

$$\begin{aligned} a \in f^{-1}(Z \cup T) &\iff f(a) \in Z \cup T \\ &\iff f(a) \in Z \ \text{ o } \ f(a) \in T \\ &\iff a \in f^{-1}(Z) \ \text{ o } \ a \in f^{-1}(T) \\ &\iff a \in f^{-1}(Z) \cup f^{-1}(T) \end{aligned}$$

D'aquestes equivalències s'obté directament $f^{-1}(Z \cup T) = f^{-1}(Z) \cup f^{-1}(T)$.
(f) Considerem qualsevol element $a \in f^{-1}(Z \cap T)$. Llavors,

$$\begin{aligned} a \in f^{-1}(Z \cap T) &\iff f(a) \in Z \cap T \\ &\iff f(a) \in Z \ \text{ i } \ f(a) \in T \\ &\iff a \in f^{-1}(Z) \ \text{ i } \ a \in f^{-1}(T) \\ &\iff a \in f^{-1}(Z) \cap f^{-1}(T) \end{aligned}$$

D'aquestes equivalències s'obté directament $f^{-1}(Z \cap T) = f^{-1}(Z) \cap f^{-1}(T)$.
(g) Considerem qualsevol element $a \in X$. Llavors $f(a) \in f(X)$ i, per tant, $a \in f^{-1}(f(X))$. Com a conseqüència, $X \subset f^{-1}(f(X))$.
(h) Considerem qualsevol element $b \in f(f^{-1}(Z))$. Llavors, existeix $a \in f^{-1}(Z)$ tal que $f(a) = b$. Ara bé, si $a \in f^{-1}(Z)$, llavors $f(a) = b \in Z$. Com a conseqüència, $f(f^{-1}(Z)) \subset Z$.
(i) Considerem qualsevol element $a \in f^{-1}\left(\complement_B Z\right)$. Llavors,

$$\begin{aligned} a \in f^{-1}\left(\complement_B Z\right) &\iff f(a) \in \complement_B Z \\ &\iff f(a) \notin Z \\ &\iff a \notin f^{-1}(Z) \\ &\iff a \in \complement_A\left(f^{-1}(Z)\right) \end{aligned}$$

D'aquestes equivalències s'obté directament $f^{-1}\left(\complement_B Z\right) = \complement_A\left(f^{-1}(Z)\right)$. □

Exercici 36. Si $f : A \longrightarrow B$ és injectiva i $X, Y \subset A$, demostra que (a) $X = f^{-1}(f(X))$ i (b) $f(X \cap Y) \subset f(X) \cap f(Y)$.

Solució: (a) Per l'exercici anterior, només cal provar que $f^{-1}(f(X)) \subset X$. Considerem qualsevol element $a \in f^{-1}(f(X))$. Llavors, $f(a) \in f(X)$ i, per tant, existeix $c \in X$ tal que $f(c) = f(a)$. Ara bé, per hipòtesi, f és injectiva i, per tant, deduïm $c = a$. Després, $a \in X$ i, com a conseqüència, $f^{-1}(f(X)) \subset X$.
(b) Per l'exercici anterior, només cal provar que $f(X) \cap f(Y) \subset f(X \cap Y)$. Considerem qualsevol element $b \in f(X) \cap f(Y)$. Llavors, $b \in f(X)$ i $b \in f(Y)$. Per tant, existeixen $a \in X$ i $c \in Y$ tals que $f(a) = f(c) = b$. Ara bé, per hipòtesi, f és injectiva i, per tant, deduïm $a = c$. Com conseqüència, $a \in X \cap Y$ i, per tant, $f(a) = b \in f(X \cap Y)$. Així, hem demostrat que $f(X) \cap f(Y) \subset f(X \cap Y)$. □

Exercici 37. Si $f : A \longrightarrow B$ és exhaustiva i $Z \subset B$, demostra que $f(f^{-1}(Z)) = Z$.

Solució: Per l'exercici anterior, només cal provar que $Z \subset f\left(f^{-1}(Z)\right)$. Considerem qualsevol element $b \in Z$. Per hipòtesi, f és exhaustiva i, per tant, existeix $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Després, $f(a) \in Z$ i, per tant, $a \in f^{-1}(Z)$. D'aquí, deduïm que $f(a) = b \in f\left(f^{-1}(Z)\right)$. Com a conseqüència, $Z \subset f\left(f^{-1}(Z)\right)$. □

Exercici 38. Donades les aplicacions $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definides per $f(x) = x^2$ $g(x) = 2x + 1$i . Calcula (a) $g \circ f$, (b) $f \circ g$, (c) $f \circ (g \circ f)$ i (d) $(f \circ f) \circ g$.

Solució: (a)

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g\left(f(x)\right)\\ &= g(x^2)\\ &= 2x^2 + 1\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f\left(g(x)\right)\\ &= f(2x+1)\\ &= (2x+1)^2\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\left(f \circ (g \circ f)\right)(x) &= f\left((g \circ f)(x)\right)\\ &= f\left(2x^2+1\right)\\ &= (2x^2+1)^2\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}\left((f \circ f) \circ g\right)(x) &= (f \circ f)\left(g(x)\right)\\ &= f\left(f\left(g(x)\right)\right)\\ &= f\left((2x+1)^2\right)\\ &= \left[(2x+1)^2\right]^2\\ &= (2x+1)^4\end{aligned}$$

□

Exercici 39. Sean $f : A \longrightarrow B$ i $g : B \longrightarrow C$ dues aplicacions. Demostra que es compleixen les següents propietats: (a) Si f i g són injectives, llavors $g \circ f$ és injectiva; (b) Si f i g són exhaustives, llavors $g \circ f$ és exhaustiva; (c) Si f i g són bijectivas, llavors $g \circ f$ és bijectiva i, a més, $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$; (d) Si $g \circ f$ és injectiva, llavors f és injectiva; (e) Si $g \circ f$ és exhaustiva, llavors g és exhaustiva; (f) Si $g \circ f$ és injectiva i f és exhaustiva, llavors g és injectiva; (g) Si $g \circ f$ és exhaustiva i g és injectiva, llavors f és exhaustiva.

Solució: (a) Suposem que $x, y \in A$ tals que $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$. Llavors,

$$\begin{aligned}g\left(f(x)\right) = g\left(f(y)\right) &\Longrightarrow f(x) = f(y)\\ &\Longrightarrow x = y\end{aligned}$$

i, per tant, $g \circ f$ és injectiva.

(b) Donat qualsevol $z \in C$ hem de provar que existeix $x \in A$ tal que $(g \circ f)(x) = z$. Per ser g exhaustiva, existeix $u \in B$ tal que $g(u) = z$. Ara, per ser f exhaustiva, existeix $x \in A$ tal que $f(x) = u$. Per tant,

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= g(u) \\ &= z\end{aligned}$$

i, com a conseqüència, $g \circ f$ és exhaustiva.
(c) Pels dos apartats anteriors, és clar que si f i g són bijectivas, llavors $g \circ f$ és bijectiva. En ser f, g bijectivas, existeixen les aplicacions inverses f^{-1} i g^{-1} de f i g, respectivament. Llavors,

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) = g(f(x)) = z &\iff f(x) = g^{-1}(z) \\ &\iff x = f^{-1}\left(g^{-1}(z)\right) = (f^{-1} \circ g^{-1})(z)\end{aligned}$$

Per tant,

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

(d) Suposem que $x, y \in A$. Llavors,

$$\begin{aligned}f(x) = f(y) &\implies g(f(x)) = g(f(y)) \\ &\quad\;\; (g \circ f)(x) = (g \circ f)(y) \\ &\implies x = y\end{aligned}$$

i, per tant, f és injectiva.
(e) Donat qualsevol $z \in C$ hem de provar que existeix $u \in B$ tal que $g(u) = z$. Per ser $g \circ f$ exhaustiva, existeix $x \in A$ tal que $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = z$. Prenent $u = f(x) \in B$, llavors tenim que $g(u) = g(f(x)) = z$ i, per tant, g és exhaustiva.
(f) Suposem que $u, v \in B$ tals que $g(u) = g(v)$. Per ser f exhaustiva, existeixen $x, y \in A$ tals que $f(x) = u$ i $f(y) = v$. Llavors, $g(f(x)) = g(u)$ i $g(f(y)) = g(v)$ i, per tant, $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$. Ara bé, per hipòtesi, $g \circ f$ és injectiva, amb el que deduïm que $x = y$. Després, $f(x) = f(y)$, és a dir, $u = v$. En conseqüència, g és injectiva.
(g) Donat qualsevol $u \in B$ hem de provar que existeix $x \in A$ tal que $f(x) = u$. És clar que $g(u) \in C$. Per ser $g \circ f$ exhaustiva, existeix $x \in A$ tal que $(g \circ f)(x) = g(u)$, és a dir, $g(f(x)) = g(u)$. Ara bé, per hipòtesi, g és injectiva, amb el que deduïm que $f(x) = u$. En conseqüència, f és exhaustiva. $\square$

Exercici 40. Demostra que l'aplicació $f : \mathbb{R} - \{-1/2\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{1/2\}$ definida per

$$f(x) = \frac{x+3}{1+2x}$$

és bijectiva. Calcula l'aplicació inversa f^{-1}.

Solució: Vegem que f és injectiva. Per a això, suposem que $x, y \in \mathbb{R} - \{-1/2\}$ i $f(x) = f(y)$. Llavors,

$$\begin{aligned}\frac{x+3}{1+2x} = \frac{y+3}{1+2y} &\implies (x+3)(1+2y) = (1+2x)(y+3) \\ &\implies x + 2xy + 3 + 6y = y + 3 + 2xy + 6x \\ &\implies 5y = 5x \\ &\implies x = y\end{aligned}$$

i, per tant, f és injectiva.
Vegem que f és exhaustiva. Per a això, donat qualsevol $y \in \mathbb{R} - \{1/2\}$ hem de provar que existeix $x \in \mathbb{R} - \{-1/2\}$ tal que $f(x) = y$. En efecte, suposem que x existís i vegem quin és. Llavors,

$$\begin{aligned} f(x) = y &\Longrightarrow \tfrac{x+3}{1+2x} = y \\ &\Longrightarrow x + 3 = (1 + 2x)y \\ &\Longrightarrow x - 2xy = y - 3 \\ &\Longrightarrow x(1 - 2y) = y - 3 \\ &\Longrightarrow x = \tfrac{y-3}{1-2y} \end{aligned}$$

és a dir, hauria de ser

$$x = \frac{y-3}{1-2y}$$

Ara bé, com $y \neq 1/2$ tenim que $1 - 2y \neq 0$ i, a més,

$$\frac{y-3}{1-2y} \neq -\frac{1}{2}$$

per a tot $y \neq 1/2$. Per tant,

$$x = \frac{y-3}{1-2y} \in \mathbb{R} - \{-1/2\}$$

i f és exhaustiva. En ser f injectiva i exhaustiva, també és bijectiva. Per tant, f té aplicació inversa f^{-1}. Com que es compleix

$$\frac{x+3}{1+2x} = y \iff x = \frac{y-3}{1-2y}$$

obtenim que

$$f^{-1}(x) = \frac{x-3}{1-2x}$$

□

Exercici 41. Donades les aplicacions $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definides per

$$f(x) = x^3 + 1 \qquad \text{y} \qquad g(x) = \sqrt[3]{x-1}$$

calcula $g \circ f$ i $g^{-1} \circ f^{-1}$, si existeixen.

Solució: Les aplicacions f i g són bijectivas com pot comprovar-se de seguida. Per tant, existeixen les aplicacions inverses f^{-1} i g^{-1} d'i f g, respectivament.
Calcularem ara $g \circ f$ i $f \circ g$. Així, tenim

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g\left(f(x)\right) \\ &= g(x^3 + 1) \\ &= \sqrt[3]{x^3 + 1 - 1} \\ &= \sqrt[3]{x^3} \\ &= x \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f\left(g(x)\right) \\ &= f\left(\sqrt[3]{x-1}\right) \\ &= \left(\sqrt[3]{x-1}\right)^3 + 1 \\ &= x - 1 + 1 \\ &= x\end{aligned}$$

D'aquests resultats, deduïm que $f^{-1} = g$ ja que $f \circ g = g \circ f = I_{\mathbb{R}}$. Per consegüent,

$$g^{-1} \circ f^{-1} = g^{-1} \circ g = I_{\mathbb{R}}$$

és a dir, $g^{-1} \circ f^{-1}$ és l'aplicació identitat en $\mathbb{R}$. $\square$

4 Cardinal d'un conjunt

Exercici 42. Sigui E un conjunt referencial i considerem dos conjunts finits A i B. Demostra les següents propietats: (a) Si $A \subset B$, llavors $\#A \leq \#B$; (b) $\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$; (c) $\#(A \cup B \cup C) = \#A + \#B + \#C - \#(A \cap B) - \#(A \cap C) - \#(B \cap C) + \#(A \cap B \cap C)$; (d) $\#\complement A = \#E - \#A$; (e) $\#(A \times B) = \#A \cdot \#B$; (f) $\#\mathcal{P}(A) = 2^{\#A}$.

Solució: És clar que si A i B són disjunts, llavors

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B$$

(a) Com que $\left\{A \cap B, \complement A \cap B\right\}$ és una partició de B, llavors

$$\#B = \#(A \cap B) + \#\left(\complement A \cap B\right)$$

Ara bé, com $A \subset B$, llavors $A \cap B = A$ i, per tant, obtenim

$$\#B = \#A + \#\left(\complement A \cap B\right)$$

En ser $\#\left(\complement A \cap B\right) \geq 0$, deduïm

$$\#A \leq \#B$$

(b) Com que $\left\{A, \complement A \cap B\right\}$, $\left\{B, A \cap \complement B\right\}$ i $\left\{A \cap \complement B, \complement A \cap B, A \cap B\right\}$ constitueixen particions del conjunt $A \cup B$, llavors

$$\#(A \cup B) = \#A + \#\left(B \cap \complement A\right)$$

i

$$\#(A \cup B) = \#A + \#\left(A \cap \complement B\right)$$

i

$$\#(A \cup B) = \#\left(A \cap \complement B\right) + \#\left(\complement A \cap B\right) + \#(A \cap B)$$

Sumant ara les dues primeres igualtats i restant la tercera, obtenim

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$$

(c) Segons l'apartat anterior, tenim

$$\begin{aligned}\#(A\cup B\cup C) &= \#((A\cup B)\cup C)\\ &= \#(A\cup B)+\#C-\#((A\cup B)\cap C)\\ &= \#A+\#B-\#(A\cap B)+\#C-\#((A\cup B)\cap C)\end{aligned}$$

Ara bé, $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$ i, per tant,

$$\begin{aligned}\#((A\cup B)\cap C) &= \#((A\cap C)\cup(B\cap C))\\ &= \#(A\cap C)+\#(B\cap C)-\#((A\cap C)\cap(B\cap C))\\ &= \#(A\cap C)+\#(B\cap C)-\#(A\cap B\cap C)\end{aligned}$$

Per conseg\"uent, obtenim

$$\begin{aligned}\#(A\cup B\cup B) = \#A+\#B+\#C-\#(A\cap B)\\ -\#(A\cap C)-\#(B\cap C)+\#(A\cap B\cap C)\end{aligned}$$

(d) Com que $\left\{A,\complement_E A\right\}$ és una partició de E , llavors

$$\#E=\#A+\#\left(\complement_E A\right)$$

i, per tant, $\#\left(\complement_E A\right)=\#E-\#A$
(e) Suposem que $\#A=n$i $\#B=m$. Sigui $\varphi:\{1,2,...,n\}\longrightarrow A$una aplicació tal que $\varphi(i)=a_i\in A$i $a_i\neq a_j$si $i\neq j$. Així, podem escriure

$$A=\{a_1,a_2,...,a_n\}$$

De la mateixa manera, obtenim

$$B=\{b_1,b_2,...,b_m\}$$

Llavors, els conjunts

$$\begin{aligned}F_1&=\{(a_1,b_1),(a_1,b_2),...(a_1,b_m)\}\\ F_2&=\{(a_2,b_1),(a_2,b_2),...(a_2,b_m)\}\\ &\vdots\\ F_n&=\{(a_n,b_1),(a_n,b_2),...(a_n,b_m)\}\end{aligned}$$

constitueixen una partició de $A\times B$ i, per tant,

$$\#(A\times B)=\#F_1+\#F_2+\cdots+\#F_n=n\cdot m$$

doncs

$$\#F_1=\#F_2=\cdots=\#F_n=m$$

Per tant,

$$\#(A\times B)=\#A\times\#B$$

(f) Suposem que $\#A=n$. Sabem que $\mathcal{P}(A)$ és el conjunt els elements del qual són subconjunts d'A. Sigui $0\leq m\leq n$, quants subconjunts de m elements té A? Aquest número és per definició el **número combinatori**

$$\binom{n}{m}$$

que es calcula mitjançant la fórmula següent

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

sent el **factorial d'un número** n

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

i, per definició, $0! = 1$. Així, tenim

Número d'elements del subconjunt	Número de subconjunts
0	$\binom{n}{0}$
1	$\binom{n}{1}$
2	$\binom{n}{2}$
$\vdots$	$\vdots$
$n-1$	$\binom{n}{n-1}$
n	$\binom{n}{n}$

Llavors,

$$\#\mathcal{P}(A) = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$$

Aquesta suma pot calcular-se mitjançant la fórmula de la potència del binomi de Newton

$$(A+B)^n = \binom{n}{0}A^n + \binom{n}{1}A^{n-1}B + \binom{n}{2}A^{n-2}B + \dots + \binom{n}{n-1}AB^{n-1} + \binom{n}{n}B^n$$

Prenent $A = B = 1$, resulta

$$(1+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$$

i, per consegüent, obtenim

$$\#\mathcal{P}(A) = 2^n = 2^{\#A}$$

□

Exercici 43. Suposem que en Joan menja cada matí ous o cereals per esmorzar durant el mes de gener. Si en 25 matins ha menjat cereals, i en 18, ous, en quants matins ha menjat ous i cereals?

Solució: Sigui A el conjunt de dies del mes de gener que en Joan menja ous per esmorzar i B el conjunt de dies que menja cereals. Segons la informació de l'enunciat, tenim $\#A = 25$ i $\#B = 18$ i, a més, és clar que $\#\,(A \cup B) = 31$. Llavors,

$$\begin{aligned}
\#\,(A \cup B) &= \#A + \#B - \#\,(A \cap B) \\
31 &= 25 + 18 - \#\,(A \cap B) \\
\#\,(A \cap B) &= 12
\end{aligned}$$

Ara bé, $\#\,(A \cap B)$ representa els dies que en Joan menja ous i cereals per esmorzar durant el mes de gener. Per tant, en Joan menja ous i cereals en 12 matins. □

Exercici 44. Se sap que dels 30 alumnes d'una classe 15 juguen al ping-pong i 20 al tennis. A més, no hi ha cap alumne que no practiqui algun d'aquests dos esports. Quants alumnes practiquen els dos esports alhora?

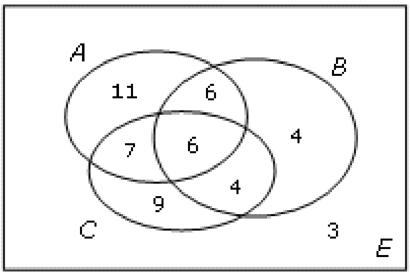
Solució: Sigui A el conjunt d'alumnes de la classe que practiquen ping-pong i B el conjunt d'alumnes que practiquen tennis. Segons l'enunciat, $\#A = 15$ i $\#B = 20$. Com sabem també que no hi ha cap alumne que no practiqui algun d'aquests dos esports, tenim que $\#(A \cup B) = 30$. Llavors,

$$\begin{aligned} \#(A \cup B) &= \#A + \#B - \#(A \cap B) \\ 30 &= 15 + 20 - \#(A \cap B) \\ \#(A \cap B) &= 5 \end{aligned}$$

i, per tant, hi ha 5 alumnes de la classe que practiquen tots dos esports. $\square$

Exercici 45. En una classe, 30 alumnes llegeixen el diari A, 20 llegeixen el B, 13 llegeixen l'i A el C, 10 llegeixen el B però no el C, 24 no llegeixen C, 7 llegeixen l'i A el C però no el B, 9 llegeixen el C però no el A ni el B, i 11 llegeixen el A però no el B ni el C. (a) Quants alumnes llegeixen almenys un dels tres diaris? (b) Quants alumnes hi ha en la classe?

Solució: Reunint la informació en un diagrama de Venn, obtenim



A partir d'aquest diagrama podem respondre directament les qüestions plantejades. Tot i això, aquí el farem mitjançant les fórmules estudiades sobre cardinals de conjunts finits.
Sigui E el conjunt d'alumnes de la classe, A el conjunt d'alumnes d'aquesta classe que llegeixen el diari A, B el conjunt d'alumnes que llegeixen el diari B, i C el conjunt d'alumnes que llegeixen el diari C.
Per l'enunciat, sabem que $\#A = 30$, $\#B = 20$, $\#(A \cap C) = 13$, $\#\left(B \cap \complement C\right) = 10$, $\#\complement C = 24$, $\#\left(A \cap C \cap \complement B\right) = 7$, $\#\left(C \cap \complement A \cap \complement B\right) = 9$ i $\#\left(A \cap \complement B \cap \complement C\right) = 11$.
(a) Ens demanen calcular $\#(A \cup B \cup C)$. Segons la informació que tenim, els conjunts $A \cap C \cap \complement B$, $C \cap \complement A \cap \complement B$, $A \cap \complement B \cap \complement C$ i B són disjunts i, a més, com

$$A \cup B \cup C = \left(A \cap C \cap \complement B\right) \cup \left(C \cap \complement A \cap \complement B\right) \cup \left(A \cap \complement B \cap \complement C\right) \cup B$$

s'obté

$$\begin{aligned} \#(A \cup B \cup B) &= \#\left(A \cap C \cap \complement B\right) + \#\left(C \cap \complement A \cap \complement B\right) + \#\left(A \cap \complement B \cap \complement C\right) + \#B \\ &= 7 + 9 + 11 + 20 \\ &= 47 \end{aligned}$$

Per tant, hi ha 47 alumnes que llegeixen almenys un dels tres diaris.
(b) Ens demanen en aquest cas $\#E$. Els conjunts $A\cap B\cap C$, $A\cap\complement B\cap C$ són disjunts i, a més,

$$A \cap C = (A \cap B \cap C) \cup \left(A \cap \complement B \cap C\right)$$

Per tant,

$$\begin{aligned}\#\left(A \cap C\right) &= \#\left(A \cap B \cap C\right) + \#\left(A \cap \complement B \cap C\right)\\ 13 &= \#\left(A \cap B \cap C\right) + 7\end{aligned}$$

Llavors, $\#\left(A \cap B \cap C\right) = 6$. D'altra banda, els conjunts $B \cap \complement C$, $A \cap B \cap C$ i $\complement A \cap B \cap C$ són disjunts i, a més,

$$B = \left(B \cap \complement C\right) \cup (A \cap B \cap C) \cup \left(\complement A \cap B \cap C\right)$$

Aleshores,

$$\begin{aligned}\#B &= \#\left(B \cap \complement C\right) + \#\left(A \cap B \cap C\right) + \#\left(\complement A \cap B \cap C\right)\\ 20 &= 10 + 6 + \#\left(\complement A \cap B \cap C\right)\end{aligned}$$

Per tant, $\#\left(\complement A \cap B \cap C\right) = 4$. Finalment, els conjunts $A \cap C$, $\complement A \cap B \cap C$ i $A \cap \complement B \cap \complement C$ són disjunts i, a més,

$$C = (A \cap C) \cup \left(\complement A \cap B \cap C\right) \cup \left(A \cap \complement B \cap \complement C\right)$$

Per tant,

$$\begin{aligned}\#C &= \#\left(A \cap C\right) + \#\left(\complement A \cap B \cap C\right) + \#\left(A \cap \complement B \cap \complement C\right)\\ &= 13 + 4 + 9\\ &= 26\end{aligned}$$

i, com

$$\#\complement C = \#E - \#C$$

deduïm que

$$\begin{aligned}\#E &= \#\complement C + \#C\\ &= 24 + 26\\ &= 50\end{aligned}$$

és a dir, hi ha 50 alumnes en classe. □

Exercici 46. En una acarnissada batalla almenys el 70 % dels combatents perden un ull, almenys un 75 % perden una orella, com a mínim un 80 % perden un braç i almenys el 85 % una cama. Quants combatents han perdut almenys les quatre coses?

Solució: Sigui A el conjunt de combatents que perden un ull, B el conjunt dels quals perden una orella, C el conjunt dels quals perden un braç i D el conjunt dels quals perden una cama. Per a simplificar els càlculs suposarem que hi ha 100 combatents en la batalla (En treballar amb tants per cent és igual el nombre inicial

de combatents). Llavors, per l'enunciat, tenim que $\#A \geq 70$, $\#B \geq 75$, $\#C \geq 80$ i $\#D \geq 85$. Volem calcular el valor mínim de $\#(A \cap B \cap C \cap D)$.
Sabem que

$$\#((A \cap B) \cup (C \cap D)) = \#(A \cap B) + \#(C \cap D) - \#(A \cap B \cap C \cap D)$$

Aleshores es té també

$$\#(A \cap B \cap C \cap D) = \#(A \cap B) + \#(C \cap D) - \#((A \cap B) \cup (C \cap D))$$

Ara bé, d'altra banda, sabem que

$$\begin{aligned} \#(A \cap B) &= \#A + \#B - \#(A \cup B) \\ &\geq 70 + 75 - 100 \\ &= 45 \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} \#(C \cap D) &= \#C + \#D - \#(C \cup D) \\ &\geq 80 + 85 - 100 \\ &= 65 \end{aligned}$$

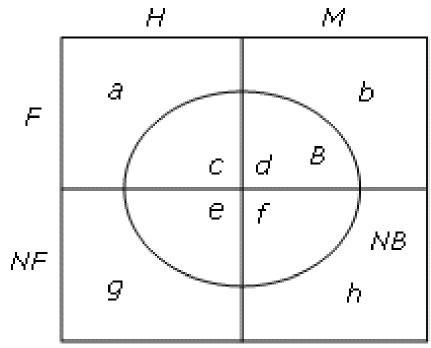
Llavors, d'aquests dos resultats deduïm que

$$\#(A \cap B \cap C \cap D) \geq 45 + 65 - 100 = 10$$

i com que $0 \leq \#((A \cap B) \cup (C \cap C)) \leq 100$, s'obté que almenys el 10 % perd les quatre coses. $\square$

Exercici 47. En una reunió hi ha més homes que dones, més dones que beuen que homes que fumen i més dones que fumen i no beuen que homes que no beuen ni fumen. Demostrar que hi ha menys dones que no beuen ni fumen que homes que beuen i no fumen.

Solució: Fem el següent diagrama per a descriure la informació de l'enunciat.



Si H és el conjunt d'homes i M el de dones, llavors per l'enunciat es compleix que

$$\#H > \#M$$

Si F és el conjunt de persones fumadores i B és el conjunt de persones que beuen, llavors per l'enunciat també es compleix

$$\#(M \cap B) > \#(H \cap F)$$

i

$$\#\left(M \cap F \cap \complement B\right) > \#\left(H \cap \complement B \cap \complement F\right)$$

Cal provar que

$$\#\left(M \cap \complement B \cap \complement F\right) < \#\left(H \cap B \cap \complement F\right)$$

Amb l'ajuda del diagrama anterior, podem escriure

$$\#H = a + c + e + g > b + d + f + h = \#M$$

$$\#\left(M \cap B\right) = d + f > a + c = \#\left(H \cap F\right)$$

$$\#\left(M \cap F\right) = b > g = \#\left(H \cap \complement B \cap \complement F\right)$$

Sumant membre a membre les tres desigualtats anteriors, obtenim

$$a + c + e + g + d + f + b > b + d + f + h + a + c + g \implies e > h$$

és a dir,

$$\#\left(M \cap \complement B \cap \complement F\right) = b < e = \#\left(H \cap B \cap \complement F\right)$$

$\square$