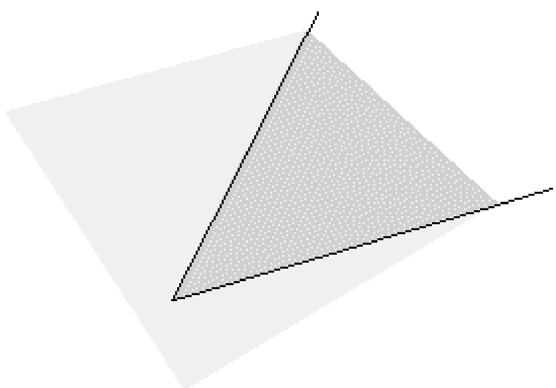
Teoría

Trigonometría

Índice

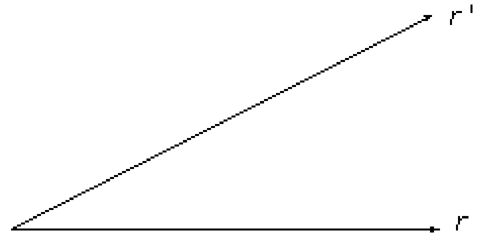
1. Ángulos

Dos semirrectas con el mismo origen, dividen al plano en dos regiones. Cada una de estas regiones recibe el nombre de **ángulo**.

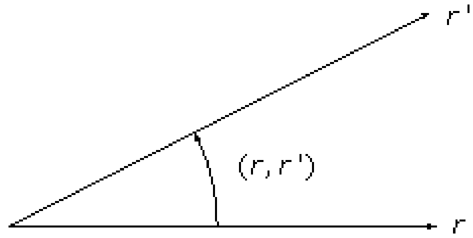


1.1. Ángulos orientados

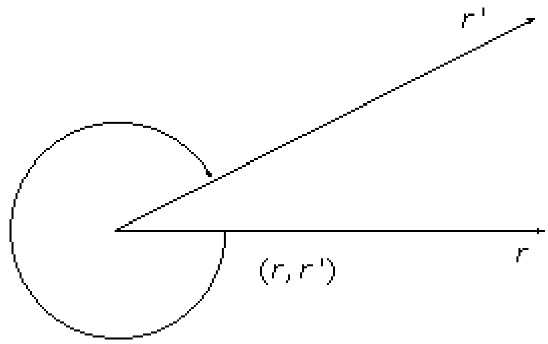
Un ángulo queda determinado por un par ordenado de semirrectas (r, r') con origen común.



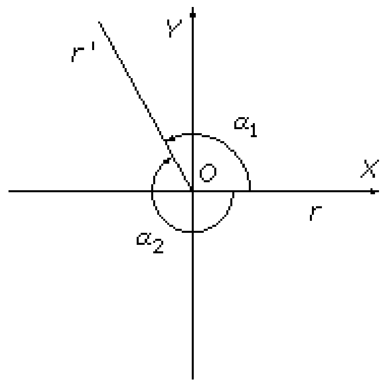
El par (r, r') significa que el ángulo va de r a r' en el sentido de un giro que lleva r sobre r'. Cuando este giro es contrario a las agujas de un reloj, el ángulo se considera **positivo**,



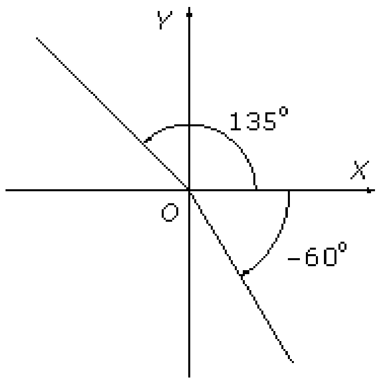
mientras que se considera **negativo** cuando es del mismo sentido.



Para representar los ángulos supondremos que hemos elegido previamente dos ejes de coordenadas perpendiculares, OX y OY, y todos los ángulos los situaremos de modo que la primera de las semirrectas del par coincida con el semieje OX positivo. De esta manera, el ángulo quedará determinado por la segunda semirrecta. Entonces, es evidente que cualquier semirrecta r' de origen O definirá exactamente dos ángulos α_1 y α_2. El primero será positivo y el segundo, negativo.



Por ejemplo, en la figura siguiente dibujamos los ángulos de 135^o y -60^o.



1.2. Medidas de ángulos

El ángulo determinado por semirrectas perpendiculares se llama **recto**. Tres sistemas suelen utilizarse para expresar la medida de un ángulo: sexagesimal, centesimal y circular.

1.2.1. Grados sexagesimales

En el sistema sexagesimal la unidad es el **grado sexagesimal**, que es el ángulo que se obtiene dividiendo un ángulo recto en 90 partes iguales. El grado, a su vez, se divide en 60 minutos y, cada minuto, en 60 segundos. Usaremos la notación siguiente

$$\begin{aligned} 1^o &= \text{1 grado sexagesimal} \\ 1' &= \text{1 minuto sexagesimal} \\ 1'' &= \text{1 segundo sexagesimal} \end{aligned}$$

De este modo, tenemos:

$$\begin{aligned} 90^o &= \text{ ángulo recto} \\ 1^o &= 60' \\ 1' &= 60'' \end{aligned}$$

1.2.2. Grados centesimales

En el sistema centesimal la unidad es el **grado centesimal**, que es el ángulo que se obtiene dividiendo un angulo recto en cien partes iguales. El grado, a su vez, se divide en 100 minutos y, cada minuto, en 100 segundos. Usaremos la siguiente notación

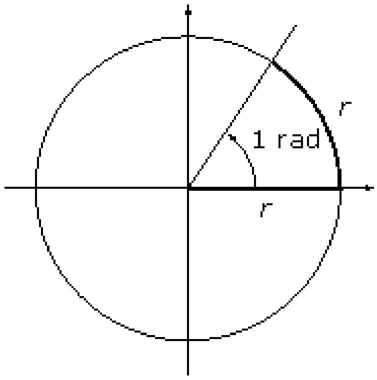
$$\begin{aligned} 1^g &= \text{1 grado centesimal} \\ 1^m &= \text{1 minuto centesimal} \\ 1^s &= \text{1 segundo centesimal} \end{aligned}$$

De este modo, tenemos:

$$\begin{aligned} 100^g &= \text{ ángulo recto} \\ 1^g &= 100^m \\ 1^m &= 100^s \end{aligned}$$

1.2.3. Radianes

Todo ángulo determina un arco sobre una circunferencia centrada en el origen y de radio r. Se llama **radián** al ángulo que intercepta sobre una circunferencia centrada en el origen un arco de longitud igual al radio de ésta.



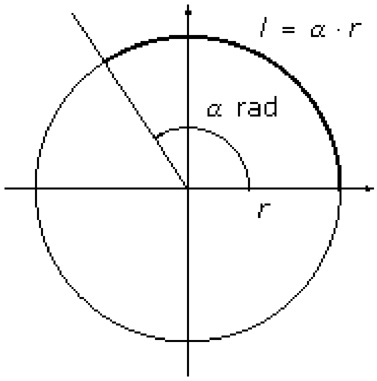
Puesto que la longitud de una circunferencia es $2\pi \cdot r$, un ángulo recto intercepta un arco de longitud

$$\frac{2\pi \cdot r}{4} = \frac{\pi}{2} \cdot r$$

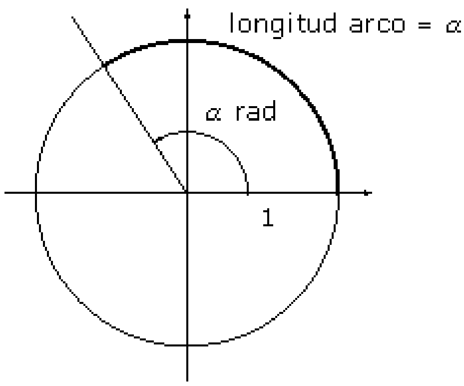
Por tanto, un ángulo recto mide $\frac{\pi}{2}$ radianes. Tomando, pues, como unidad el radián, tenemos que

$$\frac{\pi}{2} \text{ rad} = \text{ángulo recto}$$

Como consecuencia de la definición de radián tenemos que un ángulo α medido en radianes intercepta sobre una circunferencia centrada en el origen y de radio r un arco de longitud $\alpha \cdot r$.



Si tomamos ahora una circunferencia unitaria (tiene su centro en el origen de coordenadas y radio la unidad), entonces la medida en radianes de un ángulo coincidirá con la longitud del arco que intercepta sobre dicha circunferencia; dicha longitud se tomará positiva si el ángulo es positivo y negativa si el ángulo es negativo. De este modo, medir ángulos en radianes equivale a medir longitudes y, por tanto, la medida de un ángulo en radianes es un número real que se corresponde con la longitud del arco que intercepta dicho ángulo sobre la circunferencia unitaria.



Esta es la razón por la que se introduce la medida en radianes.

1.3. Relación entre las medidas de ángulos

A partir de las definiciones del apartado anterior, tenemos que

$$\begin{aligned} \text{ángulo llano} &= 180^o \\ &= 200^g \\ &= \pi \end{aligned}$$

Observa que no escribimos la unidad cuando el ángulo se expresa en radianes. Las relaciones anteriores permiten escribir las siguientes proporciones

$$\frac{180^o}{x^o} = \frac{200^g}{y^g} = \frac{\pi}{z \text{ rad}}$$

que, en la práctica, se traducen, por ejemplo, de la siguiente manera: Supongamos que tenemos un ángulo de x grados sexagesimales y queremos expresarlo en grados centesimales. Entonces, hacemos lo siguiente

$$x^o \cdot \frac{200^g}{180^o} = y^g$$

donde y es la medida del ángulo en grados centesimales. De manera similar se hace con las demás transformaciones posibles.

1.4. Medida principal de un ángulo

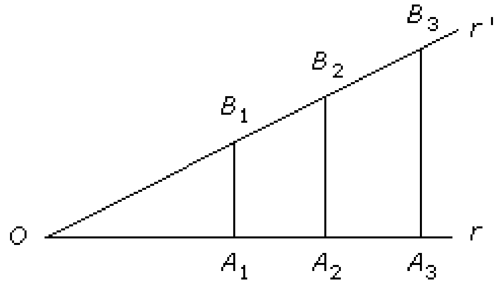
Como un ángulo completo mide 2π radianes (o -2π, si se considera negativo), cabe pensar que sólo los números reales que estén comprendidos entre 0 y 2π representarán la medida de algún ángulo. Sin embargo, se considera que cualquier número real, aunque sea mayor que 2π, es la medida de algún ángulo. Esto se hace adoptando el siguiente convenio: Los números reales α y $\alpha + k \cdot 2\pi$ dan la medida en radianes del mismo ángulo si y sólo si k es un número entero.
Es habitual decir que el ángulo $\alpha + k \cdot 2\pi$ se obtiene a partir de α añadiendo un número entero de vueltas orientadas.
Según el convenio anterior, podemos afirmar que todo ángulo tiene infinitas medidas, pero de modo que dos cualesquiera de ellas se diferencian en un número entero de vueltas.
De todas las medidas de un mismo ángulo hay una, y sólo una, comprendida entre 0 y 2π; a ésta se la llama **medida principal** (También podemos llamar medida principal de un ángulo a la que está comprendida entre π y $-\pi$).

2. Razones trigonométricas de ángulos agudos

Las razones trigonométricas relacionan las longitudes de los catetos y la hipotenusa de un triángulo rectángulo.

2.1. Definición de las razones trigonométricas

Consideremos el ángulo agudo determinado por un par ordenado de semirrectas (r, r') con origen común O. Tracemos un conjunto de rectas perpendiculares a la recta r de modo que obtengamos los segmentos A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, ... como se indica en la siguiente figura.



Por el teorema de Thales, observamos que el conjunto de triángulos rectángulos OA_1B_1, OA_2B_2, OA_3B_3, ... que se han formado son todos semejantes. Como consecuencia, dos cualesquiera de ellos tienen sus lados proporcionales. Distinguimos las siguientes razones de proporcionalidad, denominadas **razones trigonométricas** del ángulo agudo (r, r')

$$\begin{aligned} \textbf{seno} \text{ del ángulo } (r, r') &= \frac{A_1B_1}{OB_1} = \frac{A_2B_2}{OB_2} = \frac{A_3B_3}{OB_3} = \cdots \\ &= \frac{\text{cateto opuesto al ángulo}}{\text{hipotenusa}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textbf{coseno} \text{ del ángulo } (r, r') &= \frac{OA_1}{OB_1} = \frac{OA_2}{OB_2} = \frac{OA_3}{OB_3} = \cdots \\ &= \frac{\text{cateto contiguo al ángulo}}{\text{hipotenusa}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textbf{tangente} \text{ del ángulo } (r, r') &= \frac{A_1B_1}{OA_1} = \frac{A_2B_2}{OA_2} = \frac{A_3B_3}{OA_3} = \cdots \\ &= \frac{\text{cateto opuesto al ángulo}}{\text{hipotenusa}} \end{aligned}$$

Estos tres números son positivos para todo ángulo agudo y son, además, independientes del triángulo rectángulo elegido. Es evidente que también se cumple la siguiente relación

$$\textbf{tangente} \text{ del ángulo } (r, r') = \frac{\textbf{seno} \text{ del ángulo } (r, r')}{\textbf{coseno} \text{ del ángulo } (r, r')}$$

Se denomina cosecante, secante y cotangente, respectivamente, a las razones auxiliares siguientes:

$$\textbf{cosecante} \text{ del ángulo } (r, r') = \frac{1}{\textbf{seno} \text{ del ángulo } (r, r')}$$

$$\textbf{secante} \text{ del ángulo } (r, r') = \frac{1}{\textbf{coseno} \text{ del ángulo } (r, r')}$$

$$\textbf{cotangente} \text{ del ángulo } (r, r') = \frac{1}{\textbf{tangente} \text{ del ángulo } (r, r')}$$

No añaden nada de nuevo, pero abrevian la escritura de ciertas fórmulas.
Utilizaremos la notación siguiente: Dado un ángulo agudo α, indicaremos por $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$, $\csc\alpha$, $\sec\alpha$ y $\cot\alpha$, los seis números correspondientes a las seis razones trigonométricas de seno, coseno, tangente, cosecante, secante y cotangente del ángulo agudo α, respectivamente.

2.2. Cálculo de las razones trigonométricas

Para calcular las razones trigonométricas de ángulos agudos usaremos la calculadora. Primero, habrá que ponerla en modo DEG si el ángulo se da en grados sexagesimales, GRA si se da en grados centesimales, y RAD si viene dado en radianes. Después, calcularemos las razones trigonométricas de seno, coseno y tangente con las teclas

$\boxed{\text{sin}}$, $\boxed{\text{cos}}$, $\boxed{\text{tan}}$

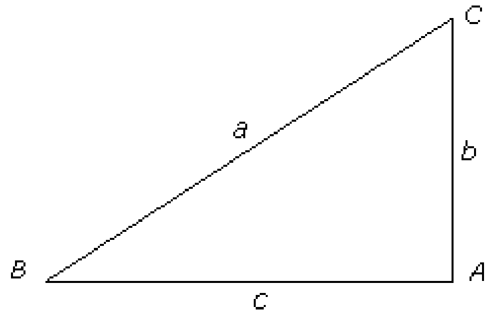
respectivamente.
Si conocemos la razón trigonométrica y queremos hallar el ángulo agudo, utilizaremos las teclas

$\boxed{\text{SHIFT}} + \boxed{\text{sin}}$, $\boxed{\text{SHIFT}} + \boxed{\text{cos}}$, $\boxed{\text{SHIFT}} + \boxed{\text{tan}}$

según sea la razón trigonométrica conocida.

2.3. Resolución de triángulos rectángulos

Una aplicación práctica del conocimiento de las razones trigonométricas es la resolución de triángulos rectángulos. **Resolver** un triángulo rectángulo significa calcular los lados y ángulos desconocidos. Por ejemplo, en el triángulo rectángulo de la siguiente figura



se cumplen las siguientes relaciones entre ángulos y lados:

$$\begin{array}{ll} \sin B = \frac{b}{a} & \sin C = \frac{c}{a} \\ \cos B = \frac{c}{a} & \cos C = \frac{b}{a} \\ \tan B = \frac{b}{c} & \tan C = \frac{c}{b} \end{array}$$

además del teorema de Pitágoras,

$$a^2 = b^2 + c^2$$

y de que

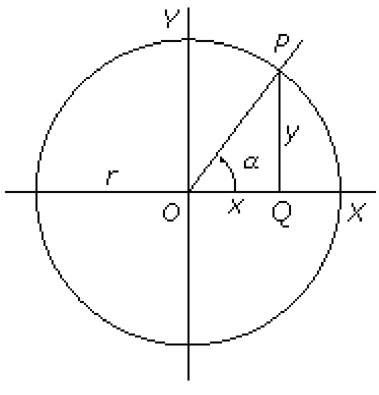
$$B + C = 90^o$$

3. Circunferencia goniométrica

Vamos a extender las definiciones de seno, coseno y tangente a ángulos arbitrarios medidos en cualquiera de los sistemas de medida angulares. Veremos también como se definen el seno, coseno y tangente de número real.

3.1. Seno y coseno de un ángulo cualquiera

Tomando como origen de ángulos el semieje positivo de abscisas, un ángulo agudo α quedará determinado por la segunda semirrecta. Ésta, a su vez, cortará a una circunferencia centrada en el origen y de radio r en un punto P de coordenadas (x, y).



Tomando el triángulo rectángulo OPQ, obtenemos que

$$\sin\alpha = \frac{y}{r} \qquad \cos\alpha = \frac{x}{r} \qquad \tan\alpha = \frac{y}{x}$$

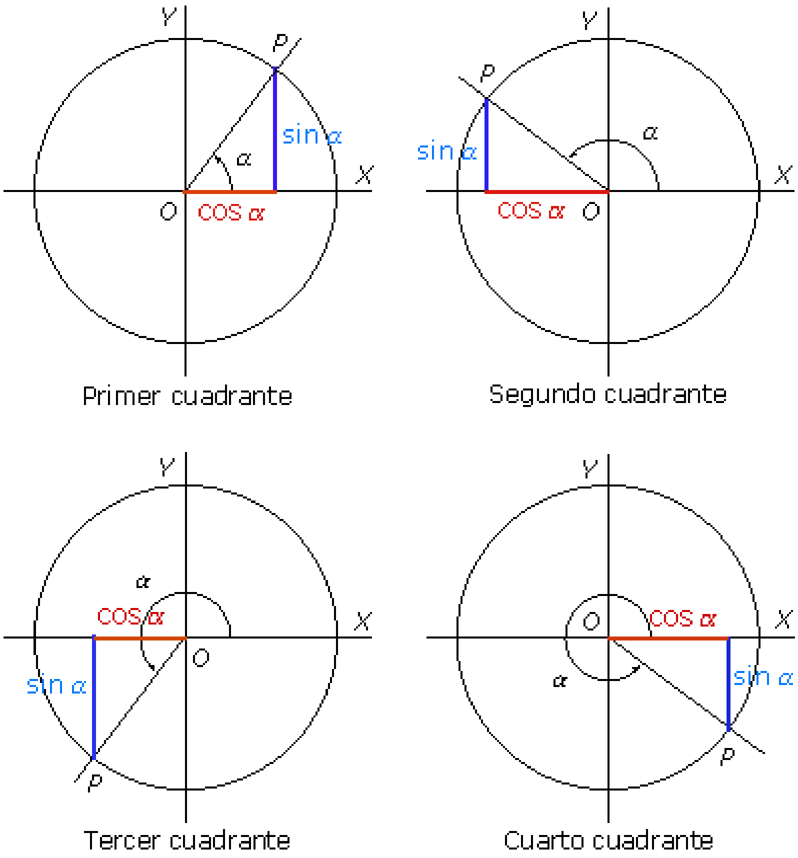
Observa que las coordenadas del punto P son entonces

$$x = r \cdot \cos\alpha \quad \text{y} \quad y = r \cdot \sin\alpha$$

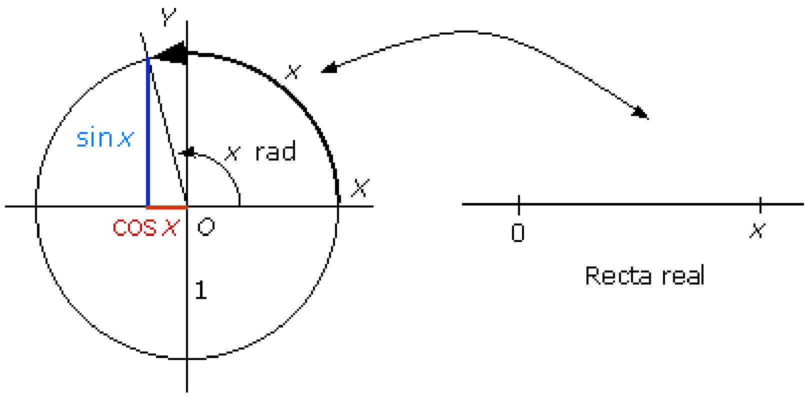
Sabemos que las razones trigonométricas de α no dependen del triángulo rectángulo que se considere para introducirlas. Esta idea se traduce aquí diciendo que dichas razones no dependen del radio de la circunferencia. Por consiguiente, podemos tomar una circunferencia de radio 1, denominada a partir de ahora como **circunferencia goniométrica**. Como ya hemos dicho en el apartado 1, la ventaja de considerar esta circunferencia es que la medida de un ángulo en radianes es un número real que se corresponde con la longitud del arco que abarca.
Si ahora consideramos el mismo ángulo agudo α sobre la circunferencia goniométrica, entonces las coordenadas del punto P son

$$x = \cos\alpha \quad \text{y} \quad y = \sin\alpha$$

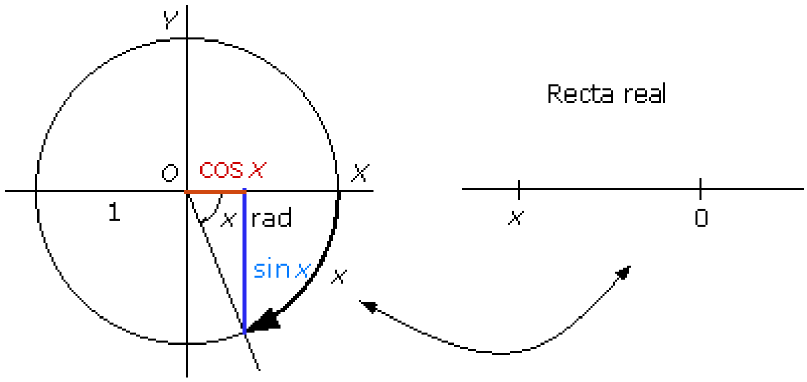
En general, tomando como origen de ángulos el semieje positivo de las abscisas, todo ángulo α (no necesariamente agudo) quedará determinado por el único punto P en el que la segunda semirrecta que forma el ángulo corta a la circunferencia goniométrica. La descripción de un ángulo como un punto de la circunferencia goniométrica junto con el hecho anterior sugiere la siguiente definición. Definimos **coseno** de α como la abscisa de P y **seno** de α como la ordenada de P. Las figuras siguientes indican el seno y el coseno de un ángulo de cada cuadrante de la circunferencia goniométrica.



Observa que no sólo hemos definido el seno y el coseno de un ángulo cualquiera sino que también hemos definido el seno y el coseno de cualquier número real, pues, sabemos que cualquier número real positivo se corresponde con la longitud de un segmento y, enrrollando este segmento sobre la circunfertencia goniométrica en el sentido antihorario (positivo), con la longitud de un arco y, por tanto, con un ángulo positivo de la misma medida que el número real en radianes.



Si el número real es negativo, su valor absoluto se corresponderá con la longitud de un segmento y, enrollando este segmento sobre la circunferencia goniométrica en el sentido horario (negativo), con la longitud de un arco y, por tanto, con un ángulo negativo de la misma medida que el número negativo en radianes.



Recuerda, pues, que el seno y el coseno de un número real x (positivo, cero o negativo) es el seno y el coseno del ángulo (positivo, cero o negativo) que expresado en radianes tiene una medida igual a x. Puesto que los números reales x y $x + k \cdot 2\pi$ representan la misma medida en radianes de un ángulo si $k \in \mathbb{Z}$, entonces

$$\sin x = \sin(x + k \cdot 2\pi)$$

y

$$\cos x = \cos(x + k \cdot 2\pi)$$

con tal que $k \in \mathbb{Z}$.

3.2. Tangente, cotangente, secante y cosecante de un ángulo cualquiera

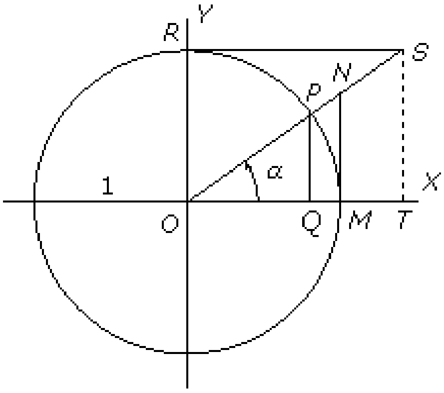
Definimos la **tangente** de un ángulo α mediante

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

Al tratarse de un cociente, la tangente no estará definida para los ángulos en los que el coseno sea cero. No obstante, ahora sólo consideraremos los casos en los que la tangente está bien definida y dejaremos para más adelante los casos en los que no lo está. Definimos la **cotangente**, **secante** y **cosecante** de un ángulo α mediante

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} \qquad \sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} \qquad \csc \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$$

Al igual que antes, ahora sólo consideraremos los casos en los que estas razones están bien definidas y dejaremos para más adelante los casos en los que no lo están.
Consideremos un ángulo α perteneciente al primer cuadrante de la circunferencia goniométrica.



Observa que los triángulos rectángulos OPQ y ONM son semejantes y, como consecuencia, tenemos

$$\overline{NM} = \frac{\overline{NM}}{1} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OQ}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$$

Los triángulos rectángulos ONM y OST son también semejantes y, por tanto, tenemos

$$\overline{RS} = \frac{\overline{RS}}{1} = \frac{\overline{OT}}{\overline{ST}} = \frac{\overline{OM}}{\overline{NM}} = \frac{1}{\tan\alpha} = \cot\alpha$$

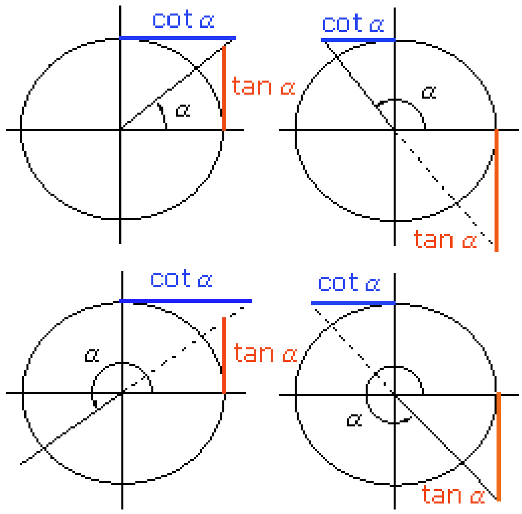
Asímismo lo son OPQ y ONM y, por tanto, tenemos

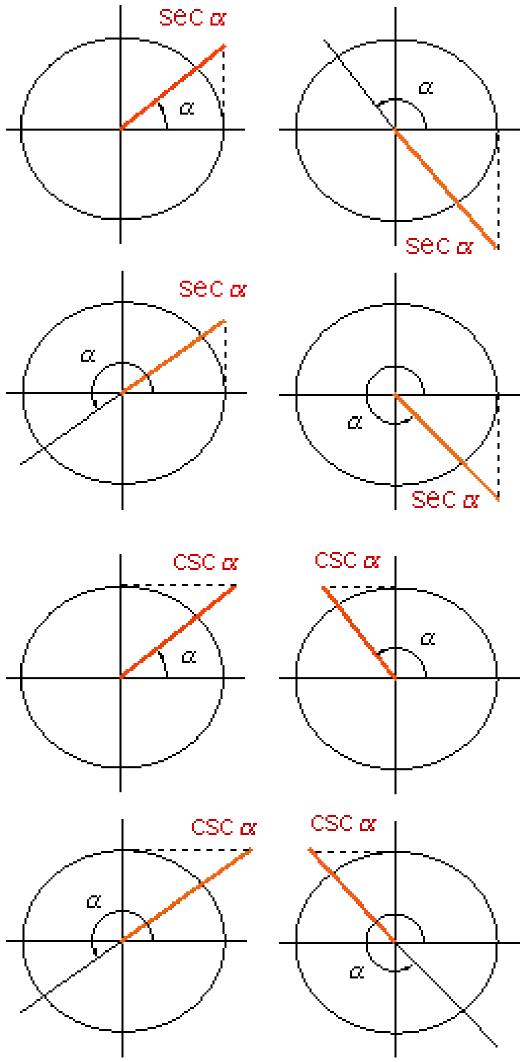
$$\overline{ON} = \frac{\overline{ON}}{1} = \frac{\overline{ON}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{OQ}} = \frac{1}{\cos\alpha} = \sec\alpha$$

y, finalmente, al ser semejantes OPQ y OST, tenemos

$$\overline{OS} = \frac{\overline{OS}}{1} = \frac{\overline{OS}}{\overline{ST}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{PQ}} = \frac{1}{\sin\alpha} = \csc\alpha$$

Del mismo modo se procede para los ángulos de los otros cuadrantes, obteniéndose los resultados que se indican en las siguientes figuras.





La tangente de un número real se define del mismo modo a como lo hemos hecho en el caso del seno y el coseno. Recuerda, pues, que la tangente de un número real x (positivo, cero o negativo) es la tangente del ángulo (positivo, cero o negativo) que expresado en radianes tiene una medida igual a x. Puesto que los números reales x y $x + k \cdot 2\pi$ representan la misma medida en radianes de un ángulo si $k \in \mathbb{Z}$, entonces

$$\tan x = \tan(x + k \cdot 2\pi)$$

con tal que $k \in \mathbb{Z}$. Sin embargo, como ya lo hemos indicado más arriba, la tangente no existe siempre y, por tanto, cuando más adelante tratemos la función tangente habrá que determinar su dominio. Lo mismo ocurre con las restantes razones trigonométricas.

3.3. Signo de las razones trigonométricas

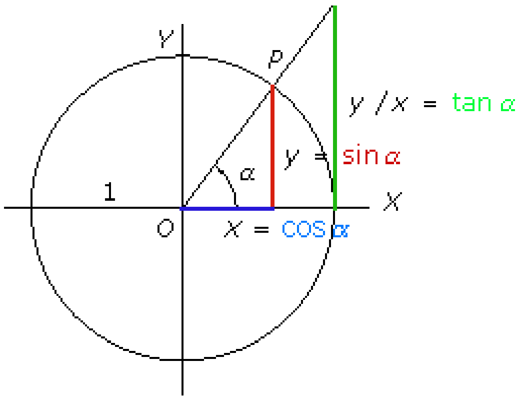
De la definición de seno y coseno sobre la circunferencia goniométrica se deduce de forma inmediata el signo de cada una de estas razones en cada cuadrante; recuerda que el coseno y el seno se describen geométricamente como la abscisa y la ordenada del punto que determina el ángulo sobre la circunferencia goniométrica. De los signos de seno y coseno se deducen los de las demás razones trigonométricas. Así ,tenemos

	I	II	III	IV
	$0 < \alpha < \pi/2$	$\pi/2 < \alpha < \pi$	$\pi < \alpha < 3\pi/2$	$3\pi/2 < \alpha < 2\pi$
Seno	$+$	$+$	$-$	$-$
Coseno	$+$	$-$	$-$	$+$
Tangente	$+$	$-$	$+$	$-$
Cosecante	$+$	$+$	$-$	$-$
Secante	$+$	$-$	$-$	$+$
Cotangente	$+$	$-$	$+$	$-$

3.4. Valores de las razones trigonométricas de algunos ángulos

3.4.1. Variación y valores extremos de las razones trigonométricas

Consideremos la circunferencia goniométrica y sobre ella el punto P que determina el ángulo α. Si el ángulo α mide 0 radianes, es evidente que el punto P tiene coordenadas $(1, 0)$.



Por tanto, $\sin 0 = 0$ y $\cos 0 = 1$. También es claro que

$$\tan 0 = \frac{0}{1} = 0$$

Si el ángulo es de $\pi/2$ radianes, entonces el punto P tiene coordenadas $(0, 1)$. Por consiguiente,

$$\begin{aligned} \sin \frac{\pi}{2} &= 1 \\ \cos \frac{\pi}{2} &= 0 \end{aligned}$$

pero este ángulo no tiene tangente, ya que el cociente $1/0$ carece de sentido.
Si el ángulo es de π radianes, entonces las coordenadas del punto P son $(-1, 0)$ y, por tanto,

$$\begin{aligned} \sin \pi &= 0 \\ \cos \pi &= -1 \end{aligned}$$

y, en consecuencia,

$$\tan \pi = \frac{0}{-1} = 0$$

Finalmente, si el ángulo es de $3\pi/2$ radianes, entonces las coordenadas de P son $(0, -1)$ y, por tanto,

$$\begin{aligned} \sin \frac{3\pi}{2} &= -1 \\ \cos \frac{3\pi}{2} &= 0 \end{aligned}$$

pero este ángulo tampoco posee tangente, ya que el cociente $-1/0$ carece de sentido.

Puesto que las ordenadas de los puntos sobre la circunferencia goniométrica están comprendidas entre -1 y 1, obtenemos que para todo ángulo α se cumple

$$-1 \leq \sin \alpha \leq 1$$

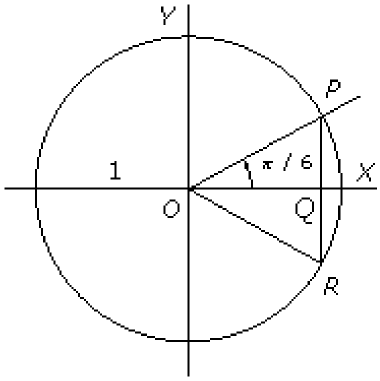
Del mismo modo, las abscisas de estos puntos están comprendidas entre -1 y 1, y, por tanto, obtenemos que para todo ángulo α se cumple

$$-1 \leq \cos \alpha \leq 1$$

En cambio, como puede observarse geométricamente, la tangente de un ángulo puede tomar cualquier valor real, pero hay dos ángulos (positivos o negativos menores que 2π) para los cuales no existe esta razón trigonométrica: son los de $\pi/2$ y de $3\pi/2$ radianes.

3.4.2. Razones trigonométricas de los ángulos 30^o, 45^o y 60^o

Consideremos el triángulo equilatero OPR de una unidad de lado y situado de modo que la altura relativa al lado PR se encuentre sobre el eje OX, como se indica en la siguiente figura.



Puesto que en todo triángulo equilatero la altura sobre un lado divide el ángulo en dos partes iguales, al igual que el lado correspondiente, vemos que el ángulo QOP es de 30^o, es decir, de $\pi/6$ radianes, y la ordenada del punto P es $1/2$. La abscisa x del punto P se obtendrá por el teorema de Pitágoras

$$\begin{aligned} x^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 &= 1 \\ x^2 &= 1 - \frac{1}{4} \\ x^2 &= \frac{3}{4} \\ x &= \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

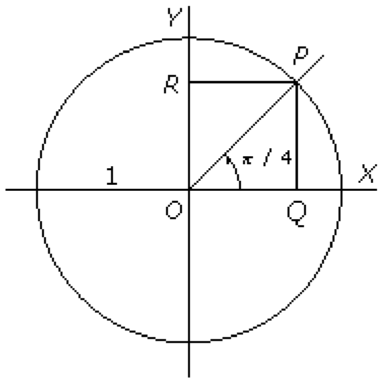
Por tanto, la abscisa del punto P es $\sqrt{3}/2$, pues P se halla en el primer cuadrante. En resumen, tenemos

$$\begin{aligned} \sin\frac{\pi}{6} &= \text{ordenada de } P = \frac{1}{2} \\ \cos\frac{\pi}{6} &= \text{abscisa de } P = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

y, como consecuencia,

$$\tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sin\pi/6}{\cos\pi/6} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Consideremos un cuadrado de vértices $OQPR$ situado con respecto a los ejes de coordenadas como se indica en la figura siguiente.



La diagonal OP mide una unidad y el ángulo QOP mide 45^o, es decir, $\pi/4$ radianes. Es evidente que la ordenada y la abscisa de P son iguales, o sea, $x = y$. Por tanto, por el teorema de Pitágoras, tenemos

$$\begin{aligned} x^2 + x^2 &= 1 \\ 2x^2 &= 1 \\ x^2 &= \frac{1}{2} \\ x &= \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

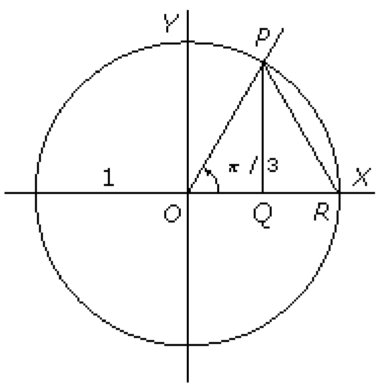
Por tanto, la abscisa del punto P es $\sqrt{2}/2$, pues P se halla en el primer cuadrante. En resumen, tenemos

$$\sin\frac{\pi}{4} = \text{ordenada de } P = \text{abscisa de } P = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

y, como consecuencia,

$$\tan\frac{\pi}{4} = \frac{\sin\pi/4}{\cos\pi/4} = 1$$

Finalmente, consideremos el triángulo equilátero ORP de una unidad de lado y situado con respecto a los ejes de coordenadas como se indica en la siguiente figura.



El ángulo ROP es de 60^o, es decir, de $\pi/3$ radiames, y la altura PR divide el lado OR en dos partes iguales. Por tanto, la abscisa de P es $1/2$ y la ordenada y de P se obtendrá por el teorema de Pitágoras sobre el triángulo rectángulo OQP,

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 &= 1 \\ y^2 &= 1 - \frac{1}{4} \\ y^2 &= \frac{3}{4} \\ y &= \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Por tanto, la ordenada del punto P es $\sqrt{2}/2$, pues P se halla en el primer cuadrante. En resumen, tenemos

$$\begin{aligned} \sin\frac{\pi}{6} &= \text{ordenada de } P = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos\frac{\pi}{6} &= \text{abscisa de } P = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

y, como consecuencia,

$$\tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sin\pi/6}{\cos\pi/6} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}$$

3.4.3. Cuadro de resumen

Grados sexagesimales	0^o	30^o	45^o	60^o	90^o	180^o	270^o
Radianes	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$
Seno	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	-1
Coseno	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1	0
Tangente	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	No existe	0	No existe

4. Relación entre las razones trigonométricas

4.1. Fórmulas fundamentales

Cualquier ángulo α determina sobre la circunferencia goniométrica un único punto P de coordenadas $(\cos\alpha, \sin\alpha)$. Por tanto, según el teorema de Pitágoras, obtenemos

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \tag{1}$$

Esta fórmula fundamental relaciona el seno de un ángulo con el coseno del mismo ángulo, de modo que si conocemos uno de estos valores podemos deducir el otro. Por ejemplo, supongamos que $\sin\alpha$ es el dato que conocemos. Entonces,

$$\begin{aligned} \sin^2\alpha + \cos^2\alpha &= 1 \\ \cos^2\alpha &= 1 - \sin^2\alpha \\ \cos\alpha &= \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha} \end{aligned}$$

Observa que el valor del coseno se obtiene como la raíz positiva o negativa de $1 - \sin^2\alpha$. Así, para dar el valor exacto de $\cos\alpha$ es necesario conocer también en qué cuadrante se encuentra el ángulo α.
Otra relación fundamental se obtiene de la misma definición de tangente de un ángulo. Así, tenemos

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

Esta relación sólo será aplicable si el ángulo α es distinto de $\pi/2$ o $3\pi/2$ radianes, si el ángulo es menor que 2π.
A partir de la fórmula (1) podemos obtener otras relaciones, como la que se obtiene al dividir por $\cos^2\alpha$ los dos miembros de la igualdad. Así, tenemos

$$\begin{aligned} \sin^2\alpha + \cos^2\alpha &= 1 \\ \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} &= \frac{1}{\cos^2\alpha} \\ \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} &= \frac{1}{\cos^2\alpha} \\ \left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^2 + 1 &= \frac{1}{\cos^2\alpha} \\ \tan^2\alpha + 1 &= \frac{1}{\cos^2\alpha} \end{aligned}$$

Por tanto, otra relación fundamental es

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \tag{2}$$

Esta relación no es aplicable cuando $\cos^2 \alpha = 0$, es decir, cuando $\cos \alpha = 0$, ya que entonces no podemos dividir por $\cos \alpha$; sabemos que esto ocurre cuando $\alpha = \pi/2$ o $\alpha = 3\pi/2$ radianes. Podemos también escribir (2) como sigue

$$1 + \tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha$$

Del mismo modo, dividiendo (1) por $\sin^2 \alpha$ y recordando que

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

se obtiene la siguiente relación

$$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

o de forma equivalente,

$$1 + \cot^2 \alpha = \csc^2 \alpha$$

Esta última relación no será aplicable cuando $\sin^2 \alpha = 0$, es decir, cuando $\sin \alpha = 0$, ya que entonces no podemos dividir por $\sin \alpha$; sabemos que esto ocurre cuando $\alpha = 0$ o $\alpha = \pi$ radianes.
La fórmula fundamental (2) relaciona el coseno de un ángulo con la tangente del mismo ángulo, de modo que si conocemos uno de estos valores podemos deducir el otro. Por ejemplo, supongamos que $\tan \alpha$ es el dato que conocemos. Entonces,

$$\begin{aligned} 1 + \tan^2 \alpha &= \frac{1}{\cos^2 \alpha} \\ \cos^2 \alpha &= \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} \\ \cos \alpha &= \pm\sqrt{\frac{1}{1 + \tan^2 \alpha}} \end{aligned}$$

Observa que el valor del coseno se obtiene como la raíz positiva o negativa de $1/1 + \tan^2 \alpha$. Así, para dar el valor exacto de $\cos \alpha$ es necesario conocer también en qué cuadrante se encuentra el ángulo α.

4.1.1. Cuadro resumen

En resumen, tenemos las siguientes fórmulas

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

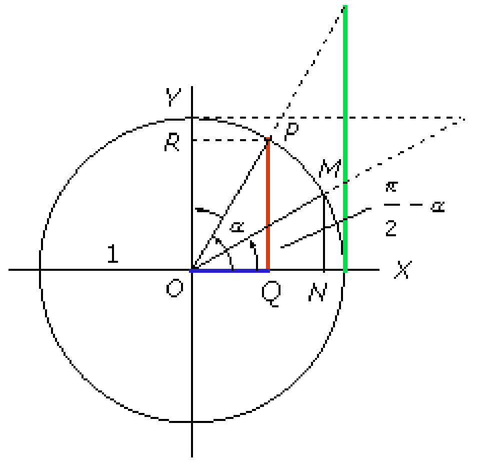
$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \sec^2 \alpha$$

$$1 + \cot^2 \alpha = \csc^2 \alpha$$

4.2. Razones trigonométricas de ángulos complementarios

De dos ángulos que suman 90^o o $\pi/2$ se dice que son **complementarios**. Cuando uno de ellos es α, el otro medirá $90^o - \alpha$ o $\frac{\pi}{2} - \alpha$. Dado un ángulo α, éste determina el punto P sobre la circunferencia goniométrica, como se indica en la siguiente figura.



El ángulo complementario $\frac{\pi}{2} - \alpha$ determina el punto M. Observa la figura y verás que los triángulos OQP, ORP y ONM son iguales. Por tanto, si las coordenadas de P son (x, y) y las de M son (x', y'), entonces es claro que se cumple

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= x \end{aligned}$$

y, como consecuencia, obtenemosse obtienen las siguientes relaciones:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot\alpha$$

pues,

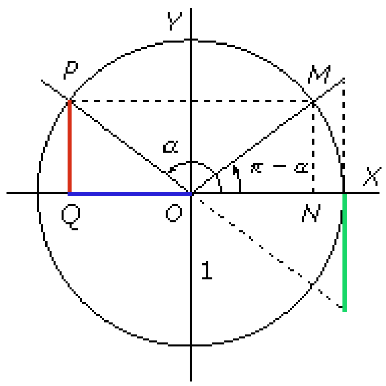
$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \cot\alpha$$

Una aplicación inmediata de estas relaciones es, por ejemplo:

$$\begin{aligned} \sin 60^o &= \sin(90^o - 30^o) = \cos 30^o \\ \cos 60^o &= \cos(90^o - 30^o) = \sin 30^o \\ \tan 60^o &= \tan(90^o - 30^o) = \cot 30^o \end{aligned}$$

4.3. Razones trigonométricas de ángulos suplementarios

De dos ángulos que suman 180^o o π se dice que son **suplementarios**. Cuando uno de ellos es α, el otro medirá $180^o - \alpha$ o $\pi - \alpha$. Dado un ángulo α, éste determina el punto P sobre la circunferencia goniométrica, como se indica en la siguiente figura.



El ángulo suplementario $\pi - \alpha$ determina el punto M. Observa la figura y verás que los triángulos OQP y ONM son iguales. Por tanto, si las coordenadas de P son (x, y) y las de M son (x', y'), entonces es claro que se cumple

$$\begin{aligned} x' &= -x \\ y' &= y \end{aligned}$$

y, como consecuencia, obtenemosse obtienen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \sin(\pi - \alpha) &= \sin\alpha \\ \cos(\pi - \alpha) &= -\cos\alpha \\ \tan(\pi - \alpha) &= -\tan\alpha \end{aligned}$$

pues,

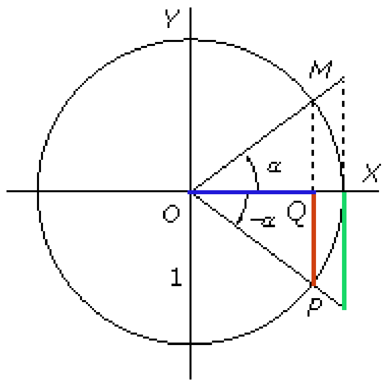
$$\tan(\pi - \alpha) = \frac{\sin(\pi - \alpha)}{\cos(\pi - \alpha)} = \frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha} = -\tan\alpha$$

Una aplicación inmediata de estas relaciones es, por ejemplo:

$$\begin{aligned} \sin 120^o &= \sin(180^o - 60^o) = \sin 60^o \\ \cos 120^o &= \cos(180^o - 60^o) = -\cos 60^o \\ \tan 120^o &= \tan(180^o - 60^o) = -\tan 60^o \end{aligned}$$

4.4. Razones trigonométricas de ángulos opuestos

Se llama **opuesto** de un ángulo al que se obtiene cambiando su orientación. Así, si α es el ángulo, entonces $-\alpha$ es el opuesto de α. Ambos ángulos miden lo mismo pero su sentido es opuesto. Dado un ángulo α, éste determina el punto M sobre la circunferencia goniométrica, como se indica en la siguiente figura.



El ángulo opuesto $-\alpha$ determina el punto P. Observa la figura y verás que los triángulos OQP y OQM son iguales. Por tanto, si las coordenadas de M son (x, y) y las de P son (x', y'), entonces es claro que se cumple

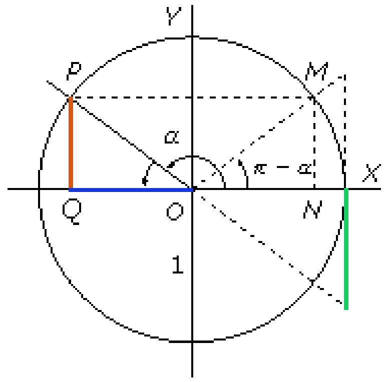
$$\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= -y \end{aligned}$$

y, como consecuencia, obtenemosse obtienen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \sin(-\alpha) &= -\sin\alpha \\ \cos(-\alpha) &= \cos\alpha \\ \tan(-\alpha) &= -\tan\alpha \end{aligned}$$

pues,

$$\tan(-\alpha) = \frac{\sin(-\alpha)}{\cos(-\alpha)} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\tan\alpha$$



Una aplicación inmediata de estas relaciones es, por ejemplo:

$$\begin{aligned}\sin 315^o &= \sin(-45^o) = -\sin 45^o\\ \cos 315^o &= \cos(-45^o) = \cos 45^o\\ \tan 315^o &= \tan(-45^o) = -\tan 45^o\end{aligned}$$

5. Reducción al primer cuadrante

Conocidas las razones de los ángulos comprendido entre 0^o y 90^o, es decir, del primer cuadrante, podemos calcular las razones trigonométricas de los ángulos de los otros cuadrantes. La técnica para hacer esto se conoce como reducción al primer cuadrante. **Reducir** significa en este contexto, hallar un ángulo del primer cuadrante cuyas razones serán, con excepción del signo, iguales a las del ángulo dado.
No hay duda que estas reducciones son actualmente innecesarias para el cálculo de una razón trigonométrica pues las calculadoras permiten hacerlo directamente. Sin embargo, conocer estas reducciones son importantes por sus aplicaciones a la resolución de ecuaciones y otros cálculos técnicos.

5.1. Ángulos del segundo cuadrante

Sea α un ángulo del segundo cuadrante, es decir, $\pi/2 < \alpha < \pi$. Este ángulo determina el punto P sobre la circunferencia goniométrica, como se indica en la siguiente figura.El ángulo suplementario $\pi - \alpha$ es del primer cuadrante y determina el punto M. Observa la figura y verás que los triángulos OQP y ONM son iguales. Por tanto, si las coordenadas de P son (x, y) y las de M son (x', y'), entonces es claro que se cumple

$$\begin{aligned}x' &= -x\\ y' &= y\end{aligned}$$

y, como consecuencia, obtenemos

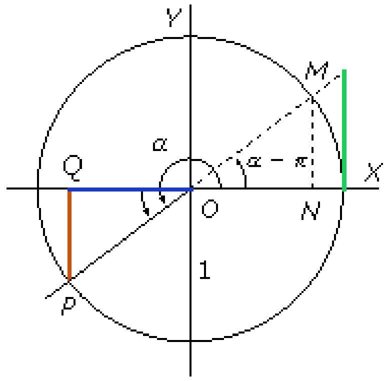
$$\begin{aligned}\sin(\pi-\alpha) &= \sin\alpha\\ \cos(\pi-\alpha) &= -\cos\alpha\\ \tan(\pi-\alpha) &= -\tan\alpha\end{aligned}$$

pues,

$$\tan(\pi-\alpha) = \frac{\sin(\pi-\alpha)}{\cos(\pi-\alpha)} = \frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha} = -\tan\alpha$$

5.2. Ángulos del tercer cuadrante

Sea α un ángulo del tercer cuadrante, es decir, $\pi < \alpha < 3\pi/2$. Este ángulo determina el punto P sobre la circunferencia goniométrica, como se indica en la siguiente figura.



El ángulo $\alpha - \pi$ es del primer cuadrante y determina el punto M. Observa la figura y verás que los triángulos OQP y ONM son iguales. Por tanto, si las coordenadas de P son (x, y) y las de M son (x', y'), entonces es claro que se cumple

$$\begin{aligned} x' &= -x \\ y' &= -y \end{aligned}$$

y, como consecuencia, obtenemos

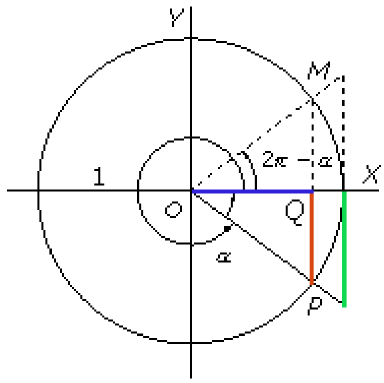
$$\begin{aligned} \sin(\alpha - \pi) &= -\sin\alpha \\ \cos(\alpha - \pi) &= -\cos\alpha \\ \tan(\alpha - \pi) &= \tan\alpha \end{aligned}$$

pues,

$$\tan(\alpha - \pi) = \frac{\sin(\alpha - \pi)}{\cos(\alpha - \pi)} = \frac{-\sin\alpha}{-\cos\alpha} = \tan\alpha$$

5.3. Ángulos del cuarto cuadrante

Sea α un ángulo del cuarto cuadrante, es decir, $3\pi/2 < \alpha < 2\pi$. Este ángulo determina el punto P sobre la circunferencia goniométrica, como se indica en la siguiente figura.



El ángulo $2\pi - \alpha$ es del primer cuadrante y determina el punto M. Observa la figura y verás que los triángulos OQP y OQM son iguales. Por tanto, si las coordenadas de P son (x, y) y las de M son (x', y'), entonces es claro que se cumple

$$\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= -y \end{aligned}$$

y, como consecuencia, obtenemos

$$\begin{aligned} \sin(2\pi - \alpha) &= -\sin\alpha \\ \cos(2\pi - \alpha) &= \cos\alpha \\ \tan(2\pi - \alpha) &= -\tan\alpha \end{aligned}$$

pues,

$$\tan(2\pi - \alpha) = \frac{\sin(2\pi - \alpha)}{\cos(2\pi - \alpha)} = \frac{-\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\tan \alpha$$

5.4. Ángulos mayores que 2π

Recuerda que los ángulos α y $\alpha + k \cdot 2\pi$ representan la misma medida en radianes de un ángulo si $k \in \mathbb{Z}$. Puesto que

$$\begin{array}{rl} \sin\alpha = \sin(\alpha + k \cdot 2\pi) & \\ \cos\alpha = \cos(\alpha + k \cdot 2\pi) & \qquad (k \in \mathbb{Z}) \\ \tan\alpha = \tan(\alpha + k \cdot 2\pi) & \end{array}$$

entonces las razones trigonométricas de un ángulo mayor que un ángulo completo son las mismas que las de su determinación principal.
Así, por ejemplo,

$$\sin 425^o = \sin(65^o + 360^o) = \sin 65^o$$

y

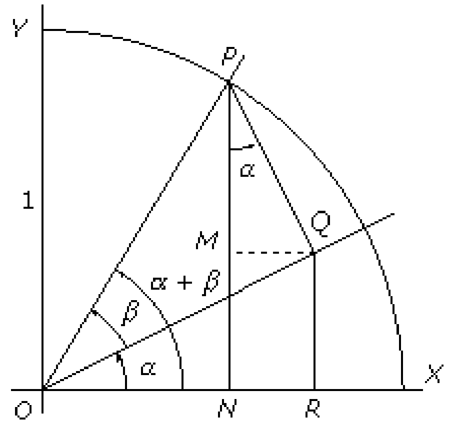
$$\cos\frac{21\pi}{5} = \cos\left(\frac{\pi}{5} + 2 \cdot 2\pi\right) = \cos\frac{\pi}{5}$$

Observa que 65^o es la medida principal del ángulo 425^o, del mismo modo que $\pi/5$ es la medida principal de $21\pi/5$.

6. Fórmulas para la adición de ángulos

6.1. Seno, coseno y tangente de la suma de ángulos

Vamos a encontrar las fórmulas que relacionan las razones trigonométricas de dos ángulos α y β con las del ángulo $\alpha + \beta$.
Observa la figura siguiente, en la que nos basaremos para obtener el valor de las razones del ángulo $\alpha + \beta$ en términos de los ángulos α y β.



Dados α y β, el ángulo $\alpha + \beta$ determina el punto P sobre la circunferencia goniométrica cuyas coordenadas (x, y) son

$$\begin{array}{rcl} x & = & \cos(\alpha + \beta) \\ y & = & \sin(\alpha + \beta) \end{array}$$

Ahora bien, según la figura, tenemos

$$\sin(\alpha + \beta) = \overline{NM} + \overline{MP} \qquad \text{y} \qquad \cos(\alpha + \beta) = \overline{ON} = \overline{OR} - \overline{NR}$$

Desde el punto P hemos trazado PQ de manera que sea perpendicular a OQ, y desde el punto Q trazamos QM y QR paralelamente a OX y a OY, respectivamente. Puesto que ángulos de lados perpendiculares son iguales o suplementarios, el ángulo MPQ es igual al ángulo α.

En el triángulo rectángulo ORQ se cumple

$$\sin\alpha = \frac{\overline{RQ}}{\overline{OQ}} = \frac{\overline{NM}}{\overline{OQ}} \quad \text{y} \quad \cos\alpha = \frac{\overline{OR}}{\overline{OQ}}$$

y, por tanto,

$$\overline{NM} = \sin\alpha \cdot \overline{OQ} \quad \text{y} \quad \overline{OR} = \cos\alpha \cdot \overline{OQ}$$

En el triángulo rectángulo PMQ se cumple

$$\cos\alpha = \frac{\overline{MP}}{\overline{PQ}} \quad \text{y} \quad \sin\alpha = \frac{\overline{MQ}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{NR}}{\overline{PQ}}$$

y, por tanto,

$$\overline{MP} = \cos\alpha \cdot \overline{PQ} \quad \text{y} \quad \overline{NR} = \sin\alpha \cdot \overline{PQ}$$

Ahora bien, en el triángulo rectángulo OQP, tenemos que

$$\overline{OQ} = \frac{\overline{OQ}}{1} = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}} = \cos\beta$$

y

$$\overline{PQ} = \frac{\overline{PQ}}{1} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OP}} = \sin\beta$$

Por consiguiente, hemos obtenido las siguientes relaciones:

$$\begin{array}{rcl} \overline{NM} = \sin\alpha \cdot \cos\beta & \qquad & \overline{OR} = \cos\alpha \cdot \cos\beta \\ \overline{MP} = \cos\alpha \cdot \sin\beta & & \overline{NR} = \sin\alpha \cdot \sin\beta \end{array}$$

y, como consecuencia, tenemos las siguientes fórmulas

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

y

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

La demostración anterior se ha basado en la figura y, por tanto, se ha hecho para un caso muy particular: tanto α como β son ángulos agudos, así como $\alpha+\beta$. En la unidad ??? se hace una prueba completamente general, es decir, se demuestra que ambas fórmulas son válidas para cualesquiera valores, positivos o negativos, de α y de β. Sin embargo, aquí asumiremos dicha demostración y, por tanto, la validez de la fórmulas obtenidas.
Finalmente, para el caso de que la tangente del ángulo $\alpha+\beta$ exista, tenemos

$$\begin{aligned} \tan(\alpha+\beta) &= \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} \\ &= \frac{\sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta} \\ &= \frac{\frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta} + \frac{\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta} - \frac{\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}} \\ &= \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1 - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \frac{\sin\beta}{\cos\beta}} \\ &= \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\beta} \end{aligned}$$

De este modo, llegamos a la siguiente fórmula

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\beta}$$

La validez de esta fórmula queda asegurada por la de las dos fórmulas anteriores.

6.2. Seno, coseno y tangente de la resta de ángulos

Puesto que $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$, aplicando las fórmulas para la suma de ángulos, obtenemos

$$\begin{aligned}\sin(\alpha - \beta) &= \sin(\alpha + (-\beta)) \\ &= \sin\alpha \cdot \cos(-\beta) + \sin(-\beta) \cdot \cos\alpha \\ &= \sin\alpha \cdot \cos\beta - \sin\beta \cdot \cos\alpha\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(\alpha - \beta) &= \cos(\alpha + (-\beta)) \\ &= \cos\alpha \cdot \cos(-\beta) - \sin\alpha \cdot \sin(-\beta) \\ &= \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tan(\alpha - \beta) &= \tan(\alpha + (-\beta)) \\ &= \frac{\tan\alpha + \tan(-\beta)}{1 - \tan\alpha \cdot \tan(-\beta)} \\ &= \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \cdot \tan\beta}\end{aligned}$$

6.3. Resumen de fórmulas

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \sin\beta \cdot \cos\alpha$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha \cdot \tan\beta}$$

7. Fórmulas del ángulo doble y mitad

7.1. Fórmulas del ángulo doble

Puesto que $2\alpha = \alpha + \alpha$, aplicando las fórmulas para la suma de ángulos, obtenemos

$$\begin{aligned}\sin 2\alpha &= \sin(\alpha + \alpha) \\ &= \sin\alpha \cdot \cos\alpha + \sin\alpha \cdot \cos\alpha \\ &= 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= \cos(\alpha + \alpha) \\ &= \cos\alpha \cdot \cos\alpha - \sin\alpha \cdot \sin\alpha \\ &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tan 2\alpha &= \tan(\alpha + \alpha) \\ &= \frac{\tan\alpha + \tan\alpha}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\alpha} \\ &= \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}\end{aligned}$$

En resumen, hemos obtenido las siguientes fórmulas

$$\sin 2\alpha = 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$$

7.2. Fórmulas del ángulo mitad

Si partimos de la fórmula del coseno del ángulo doble

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

y en ella aplicamos la relación fundamental

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \cos 2x &= 1 - \sin^2 x - \sin^2 x \\ &= 1 - 2\sin^2 x \\ 2\sin^2 x &= 1 - \cos 2x \\ \sin^2 x &= \frac{1 - \cos 2x}{2} \\ \sin x &= \pm\sqrt{\frac{1 - \cos 2x}{2}} \end{aligned}$$

Si ahora hacemos $2x = \alpha$, entonces obtenemos

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

Análogamente,

$$\begin{aligned} \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ &= \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) \\ &= 2\cos^2 x - 1 \\ 2\cos^2 x &= 1 + \cos 2x \\ \cos^2 x &= \frac{1 + \cos 2x}{2} \\ \cos x &= \pm\sqrt{\frac{1 + \cos 2x}{2}} \end{aligned}$$

y tomando $2x = \alpha$, entonces obtenemos

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

Finalmente, para la tangente del ángulo mitad, tenemos

$$\begin{aligned} \tan \frac{\alpha}{2} &= \frac{\sin \alpha/2}{\cos \alpha/2} \\ &= \left(\pm\sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}\right) : \left(\pm\sqrt{\frac{1 + \cos 2x}{2}}\right) \\ &= \pm\sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} \end{aligned}$$

Determinaremos el signo de cada una de las fórmulas si conocemos el cuadrante en el que se halla el ángulo $\alpha/2$.
En resumen, hemos obtenido las siguientes fórmulas

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

$$\tan \frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$$

8. Fórmulas de transformación de sumas en productos y viceversa

8.1. Fórmulas de transformación de sumas en productos

Si llamamos

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= A \\ \alpha - \beta &= B \end{aligned}$$

entonces, sumando miembro a miembro ambas igualdades, obtenemos

$$\begin{aligned} 2\alpha &= A + B \\ \alpha &= \frac{A + B}{2} \end{aligned}$$

y, del mismo modo pero restando, obtenemos

$$\begin{aligned} 2\beta &= A - B \\ \beta &= \frac{A - B}{2} \end{aligned}$$

A partir de las fórmulas del seno de la adición de ángulos, tenemos

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin\alpha \cdot \cos\beta + \sin\beta \cdot \cos\alpha \\ \sin(\alpha - \beta) &= \sin\alpha \cdot \cos\beta - \sin\beta \cdot \cos\alpha \end{aligned}$$

Sumando miembro a miembro ambas igualdades, obtenemos

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\beta \tag{3}$$

y, del mismo modo pero restando, obtenemos

$$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2 \cdot \sin\beta \cdot \cos\alpha \tag{4}$$

Análogamente, a partir de las fórmulas del coseno de la adición de ángulos, tenemos

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta \end{aligned}$$

Sumando miembro a miembro, obtenemos

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta \tag{5}$$

y, restando,

$$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta \tag{6}$$

Expresando ahora (3),(4),(5) y (6) en términos de A y B, obtenemos las siguientes fórmulas

$$\sin A + \sin B = 2 \cdot \sin\frac{A + B}{2} \cdot \cos\frac{A - B}{2}$$

$$\sin A - \sin B = 2 \cdot \sin\frac{A - B}{2} \cdot \cos\frac{A + B}{2}$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cdot \cos\frac{A + B}{2} \cdot \cos\frac{A - B}{2}$$

$$\cos A - \cos B = -2 \cdot \sin\frac{A + B}{2} \cdot \sin\frac{A - B}{2}$$

que permiten transformar sumas o restas de senos o cosenos en productos.

8.2. Fórmulas de transformación de productos en sumas

A partir de las fórmulas (3),(5) y (6), obtenidas en el apartado anterior, obtenemos las siguientes fórmulas

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right]$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right]$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right]$$

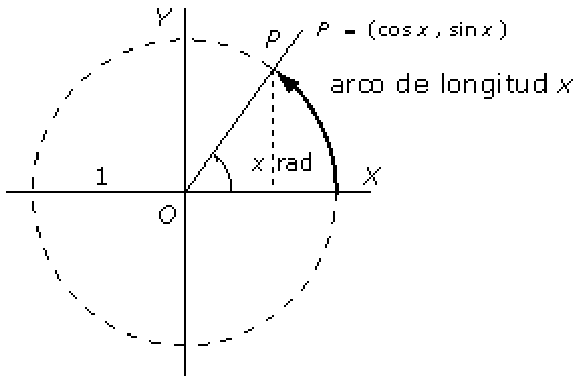
que permiten transformar producto de senos o cosenos en sumas.

9. Funciones trigonométricas

Recordemos que el seno de un número real arbitrario significa encontrar el seno del ángulo cuya medida en radianes es dicho número real. El siguiente diagrama muestra el significado de $\sin x$ para el caso en que x es un número real cualquiera.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \text{Ángulos} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x\ \text{rad} & \longmapsto & \sin x \end{array}$$

Geométricamente, dado un número real x, sobre la circunferencia goniométrica trazamos un arco de longitud x en sentido antihorario si x es positivo, o bien en sentido horario si x es negativo. Este arco determina un ángulo y éste, a su vez un punto P sobre la circunferencia goniométrica. El seno de x es la ordenada de P y el coseno de x es la abscisa de P.



Como la longitud de la circunferencia goniométrica es 2π, observa que a los números reales x y $x+k\cdot 2\pi$, con $k\in\mathbb{Z}$, les corresponde el mismo punto P y, en consecuencia, el mismo ángulo. Por tanto, tenemos

$$\sin x = \sin(x+k\cdot 2\pi)$$

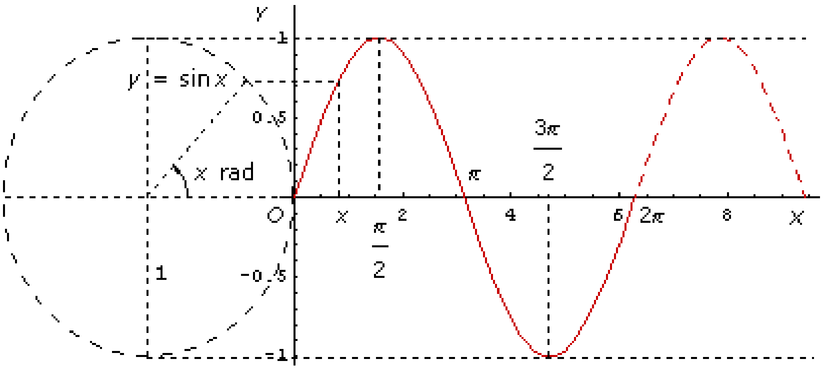
para todo $x\in\mathbb{R}$ y $k\in\mathbb{Z}$.
Lo mismo ocurre con el resto de las razones trigonométricas. Entonces, tiene sentido considerar seno, coseno, tangente, cosecante, secante y contangente como funciones reales de variable real. Estas funciones se llaman **circulares** o **trigonométricas**.

9.1. Función seno

Observa la gráfica de la función seno

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\sin} & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin x \end{array}$$

en la siguiente figura



A partir de ella, podemos obtener las propiedades de esta función.

9.1.1. Propiedades

1. Su **dominio** es $\mathbb{R}$ y su **recorrido** es $[-1, 1]$. El hecho de que $\mathrm{Im}(\sin) = [-1, 1]$ se expresa diciendo que $\sin x$ puede tomar cualquier valor real comprendido entre -1 y 1, pero no puede ser superior a 1 ni inferior a -1.

2. La función es periódica de **período** 2π, pues se cumple

$$\sin x = \sin(x + 2\pi)$$

para todo x real distinto de cero. De esto se deduce que

$$\sin x = \sin(x + k \cdot 2\pi)$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$, como era de esperar.

3. La función es **continua** en $\mathbb{R}$.

4. La función es **impar**, es decir,

$$\sin(-x) = -\sin x$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Geométricamente, esto significa que la gráfica de la función es simétrica respecto al origen de coordenadas.

5. La función cumple

x	0	$0 < x < \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < x < \pi$	π
$\sin x$	0	positiva y creciente	1	positiva y decreciente	0

y

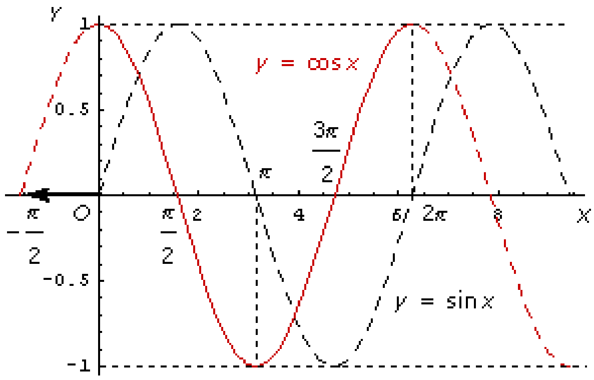
x	$\pi < x < \frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$
$\sin x$	negativa y decreciente	-1	positiva y creciente

9.2. Función coseno

Observa la gráfica de la función coseno

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\cos} & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos x \end{array}$$

en la siguiente figura



La hemos construido a partir de la gráfica de la función seno teniendo presente que se cumple

$$\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Esta última propiedad permite dibujar la gráfica de la función coseno a partir de la del seno trasladándola horizontalmente hacia la izquierda $\pi/2$ unidades.
A partir de ella, podemos obtener las propiedades de esta función.

9.2.1. Propiedades

1. Su **dominio** es $\mathbb{R}$ y su **recorrido** es $[-1, 1]$. El hecho de que $\mathrm{Im}(\cos) = [-1, 1]$ se expresa diciendo que $\cos x$ puede tomar cualquier valor real comprendido entre -1 y 1, pero no puede ser superior a 1 ni inferior a -1.

2. La función es periódica de **período** 2π, pues se cumple

$$\cos x = \cos(x + 2\pi)$$

para todo x real distinto de cero. De esto se deduce que

$$\cos x = \cos(x + k \cdot 2\pi)$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$, como era de esperar.

3. La función es **continua** en $\mathbb{R}$.

4. La función es **par**, es decir,

$$\cos(-x) = \cos x$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Geométricamente, esto significa que la gráfica de la función es simétrica respecto al eje de ordenadas.

5. La función cumple

x	0	$0 < x < \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < x < \pi$	π
$\cos x$	1	positiva y decreciente	0	negativa y decreciente	-1

y

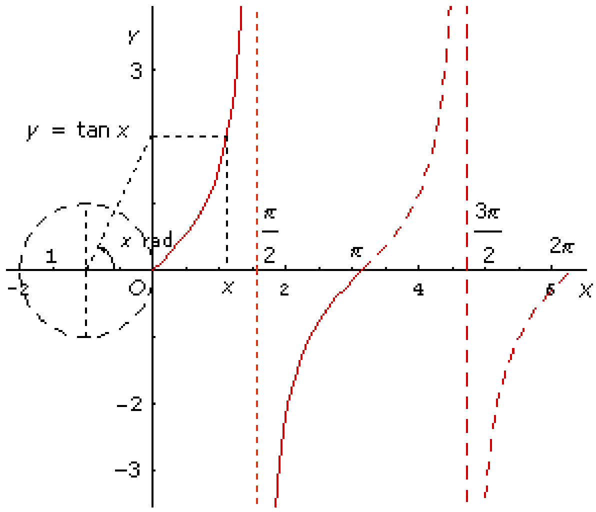
x	$\pi < x < \frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$
$\cos x$	negativa y creciente	0	positiva y creciente

9.3. Función tangente

Observa la gráfica de la función tangente

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

en la siguiente figura



A partir de ella, podemos obtener las propiedades de esta función.

9.3.1. Propiedades

1. Su **dominio** es

$$\begin{aligned} Dom(\tan) &= \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} : \cos x = 0\} \\ &= \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi : k \in \mathbb{Z} \right\} \end{aligned}$$

   y su **recorrido** es $\mathbb{R}$. El hecho de que $\mathrm{Im}(\tan) = \mathbb{R}$ se expresa diciendo que $\tan x$ puede tomar cualquier valor real.

2. La función es periódica de **período** π, pues se cumple

$$\tan x = \tan(x + \pi)$$

   para todo $x \in Dom(\tan)$. De esto se deduce que

$$\tan x = \tan(x + k \cdot \pi)$$

   para todo $k \in \mathbb{Z}$.

3. La función es **discontinua**, exactamente, en los puntos que no pertenecen a su dominio. Observa que si x se acerca a $\pi/2$ por la izquierda, $\tan x$ tiende a $+\infty$, y si x se aproxima a $\pi/2$ por la derecha, $\tan x$ tiende a $-\infty$, es decir,

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$$

   De aquí se deduce que la función tangente posee una discontinuidad asintótica en $\pi/2$, siendo entonces la recta $x = \pi/2$ una asíntota vertical de la gráfica de la función. Como la función tiene período π, lo mismo ocurre con los puntos de la forma $\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

4. La función es **impar**, es decir,

$$\tan(-x) = -\tan x$$

   para todo $x \in Dom(\tan)$. Geométricamente, esto significa que la gráfica de la función es simétrica respecto al origen.

5. La función cumple

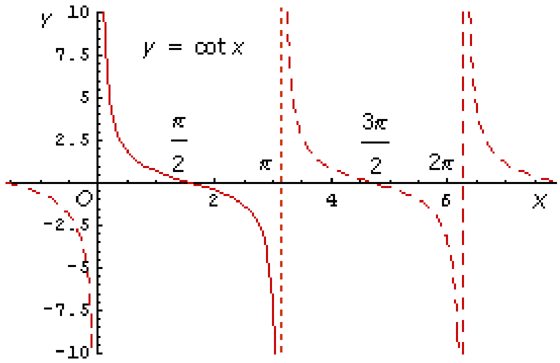
x	$0 \le x < \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < x \le \pi$
$\tan x$	crece de 0 a $+\infty$	crece de $-\infty$ a 0

9.4. Función cotangente

Observa la gráfica de la función cotangente

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \tan x$$

en la siguiente figura.



A partir de ella, podemos obtener las propiedades de esta función.

9.4.1. Propiedades

1. Su **dominio** es

$$\begin{aligned} Dom(\cot) &= \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} : \sin x = 0\} \\ &= \mathbb{R} - \{\pi + k \cdot \pi : k \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

   y su **recorrido** es $\mathbb{R}$. El hecho de que $\mathrm{Im}(\cot) = \mathbb{R}$ se expresa diciendo que $\cot x$ puede tomar cualquier valor real.

2. La función es periódica de **período** π, pues lo es la función tangente, y se cumple

$$\cot x = \cot(x + \pi)$$

   para todo $x \in Dom(\cot)$. De esto se deduce que

$$\cot x = \cot(x + k \cdot \pi)$$

   para todo $k \in \mathbb{Z}$.

3. La función es **discontinua**, exactamente, en los puntos que no pertenecen a su dominio. Observa que si x se acerca a π por la izquierda, $\cot x$ tiende a $-\infty$, y si x se aproxima a π por la derecha, $\cot x$ tiende a $+\infty$, es decir,

$$\lim_{x \to \pi^-} \cot x = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to \pi^+} \cot x = +\infty$$

   De aquí se deduce que la función cotangente posee una discontinuidad asintótica en π, siendo entonces la recta $x = \pi$ una asíntota vertical de la gráfica de la función. Como la función tiene período π, lo mismo ocurre con los puntos de la forma $\pi + k \cdot \pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

4. La función es **impar**, es decir,

$$\cot(-x) = -\cot x$$

   para todo $x \in Dom(\cot)$. Geométricamente, esto significa que la gráfica de la función es simétrica respecto al origen.

5. Observa que si x se acerca a 0 por la derecha, $\cot x$ tiende a $+\infty$, y la función cumple

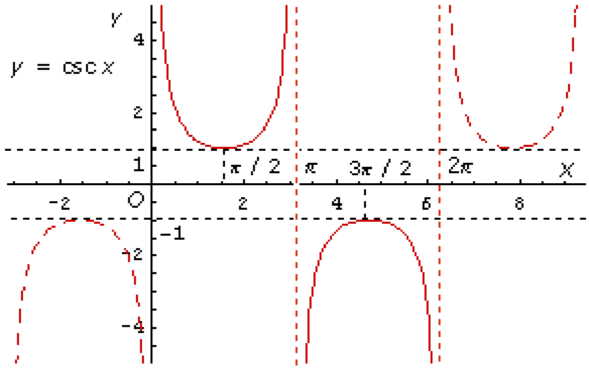
x	$0 < x \leq \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} \leq x < \pi$
$\cot x$	decrece de $+\infty$ a 0	decrece de 0 a $-\infty$

9.5. Función cosecante

Observa la gráfica de la función cosecante

$$\csc x = \frac{1}{\sin x}$$

en la siguiente figura.



A partir de ella, podemos obtener las propiedades de esta función.

9.5.1. Propiedades

1. Observa que la cosecante está definida en los mismos puntos en los que lo está la cotangente. Su **dominio** es

$$\begin{aligned} Dom(\csc) &= \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} : \sin x = 0\} \\ &= \mathbb{R} - \{\pi + k \cdot \pi : k \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

   y su **recorrido** es $\mathbb{R} - (-1, 1)$. El hecho de que $\mathrm{Im}(\csc) = \mathbb{R} - (-1, 1)$ se expresa diciendo que $\csc x$ puede tomar cualquier valor real mayor o igual que 1 y menor o igual que -1.

2. La función es periódica de **período** 2π, pues lo es la función seno, y se cumple

$$\csc x = \csc(x + 2\pi)$$

   para todo $x \in Dom(\csc)$. De esto se deduce que

$$\csc x = \csc(x + k \cdot 2\pi)$$

   para todo $k \in \mathbb{Z}$.

3. La función es **discontinua**, exactamente, en los puntos que no pertenecen a su dominio. Observa que si x se acerca a 0 por la izquierda, $\csc x$ tiende a $-\infty$, y si x se aproxima a 0 por la derecha, $\csc x$ tiende a $+\infty$, es decir,

$$\lim_{x \to 0^-} \csc x = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 0^+} \csc x = +\infty$$

   De aquí se deduce que la función cosecante posee una discontinuidad asintótica en 0, siendo entonces la recta $x = 0$ una asíntota vertical de la gráfica de la función. Observa también que se cumple

$$\lim_{x \to \pi^-} \csc x = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to \pi^+} \csc x = -\infty$$

   De aquí se deduce que la función cosecante posee también una discontinuidad asintótica en π, siendo entonces la recta $x = \pi$ una asíntota vertical de la gráfica de la función. Como la función tiene período 2π, lo mismo ocurre con los demás puntos de la forma $\pi + k \cdot \pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

4. La función es **impar**, es decir,

$$\csc(-x) = -\csc x$$

   para todo $x \in Dom(\tan)$. Geométricamente, esto significa que la gráfica de la función es simétrica respecto al origen.

5. La función cumple

$$\begin{array}{ccc} x & 0 < x \leq \frac{\pi}{2} & \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \\ \csc x & \text{decre de } +\infty \text{ a } 1 & \text{crece de } 1 \text{ a } +\infty \end{array}$$

y

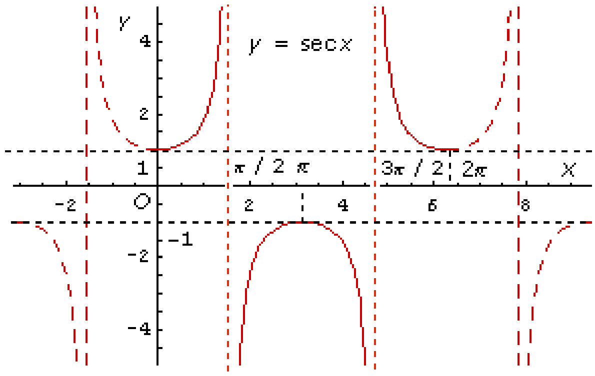
$$\begin{array}{ccc} x & \pi < x \leq \frac{3\pi}{2} & \frac{3\pi}{2} \leq x < 2\pi \\ \csc x & \text{crece de } -\infty \text{ a } -1 & \text{decrece de } -1 \text{ a } -\infty \end{array}$$

9.6. Función secante

Observa la gráfica de la función secante

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

en la siguiente figura.



A partir de ella, podemos obtener las propiedades de esta función.

9.6.1. Propiedades

1. Observa que la secante está definida en los mismos puntos en los que lo está la tangente. Su **dominio** es

$$\begin{aligned} Dom(\sec) &= \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} : \cos x = 0\} \\ &= \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi : k \in \mathbb{Z}\right\} \end{aligned}$$

y su **recorrido** es $\mathbb{R} - (-1, 1)$. El hecho de que $\mathrm{Im}(\sec) = \mathbb{R} - (-1, 1)$ se expresa diciendo que $\sec x$ puede tomar cualquier valor real mayor o igual que 1 y menor o igual que -1.

2. La función es periódica de **período** 2π, pues lo es la función coseno, y se cumple

$$\sec x = \sec(x + 2\pi)$$

para todo $x \in Dom(\sec)$. De esto se deduce que

$$\sec x = \sec(x + k \cdot 2\pi)$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$.

3. La función es **discontinua**, exactamente, en los puntos que no pertenecen a su dominio. Observa que si x se acerca a $\pi/2$ por la izquierda, $\sec x$ tiende a $+\infty$, y si x se aproxima a $\pi/2$ por la derecha, $\sec x$ tiende a $-\infty$, es decir,

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \sec x = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \sec x = -\infty$$

De aquí se deduce que la función secante posee una discontinuidad asintótica en $\pi/2$, siendo entonces la recta $x = \pi/2$ una asíntota vertical de la gráfica de la función. Observa también que se cumple

$$\lim_{x \to \frac{3\pi}{2}^-} \sec x = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to \frac{3\pi}{2}^+} \sec x = +\infty$$

De aquí se deduce que la función secante posee también una discontinuidad asintótica en $3\pi/2$, siendo entonces la recta $x = 3\pi/2$ una asíntota vertical de la gráfica de la función. Como la función tiene período 2π, lo mismo ocurre con los demás puntos de la forma $\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

4. La función es **par**, es decir,
$$\sec(-x) = \sec x$$
para todo $x \in Dom(\sec)$. Geométricamente, esto significa que la gráfica de la función es simétrica respecto al eje de ordenadas.

5. La función cumple

x	$0 \leq x < \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < x \leq \pi$
$\sec x$	cecre de 1 a $+\infty$	crece de $-\infty$ a -1

y

x	$\pi \leq x < \frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$
$\sec x$	decrece de -1 a $-\infty$	decrece de $+\infty$ a 1

9.7. Funciones trigonométricas inversas

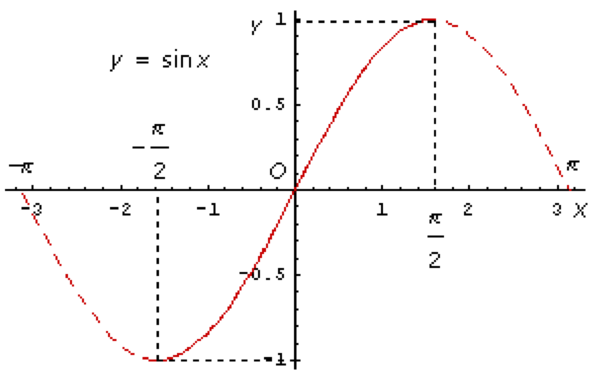
Las funciones sin, cos y tan, al ser periódicas, no son inyectivas, por lo que, propiamente hablando, no pueden tener función inversa. Por ejemplo, dado un número real x, ¿existe algún número real y tal que $\sin y = x$? Si la respuesta es afirmativa, ¿cuántos hay? Puesto que $\mathrm{Im}(\sin) = [-1, 1]$, si x está comprendido entre -1 y 1, la respuesta es sí, y no, en caso contrario. Supongamos que $x \in [-1, 1]$, entonces sabemos que sin es periódica de período 2π y, por tanto, se cumple

$$\sin(y + k \cdot 2\pi) = \sin y = x$$

con $k \in \mathbb{Z}$, lo cual nos dice que si y es una solución, lo son también todos los números de la forma $y + k \cdot 2\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. En resumen, la asignación que hace corresponder x con y tal que $\sin y = x$ no es una aplicación.
No obstante, podemos tomar sólo una parte de los dominios de sin, cos y tan en los que la función sea realmente inyectiva y tomar sólo valores reales pertenecientes a los recorridos de cada una de estas funciones. Es así como se introducen las inversas de las funciones trigonométricas.

9.7.1. Inversa de la función seno

Observa que en el intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ la función sin es inyectiva, pues, las imágenes de dos cualesquiera de los puntos de dicho intervalo son siempre distintas.



De este modo, podemos definir la función

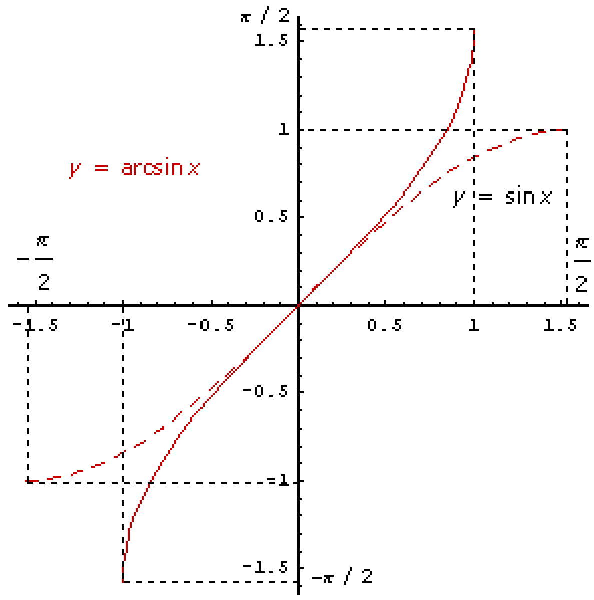
$$\begin{array}{ccc} [-1, 1] & \xrightarrow{\arcsin} & [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ x & \longmapsto & \arcsin x \end{array}$$

que se llama **arcoseno**, y escribimos
$$y = \arcsin x$$

para expresar que $\sin y = x$ e $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Vemos que esta función es la función inversa de

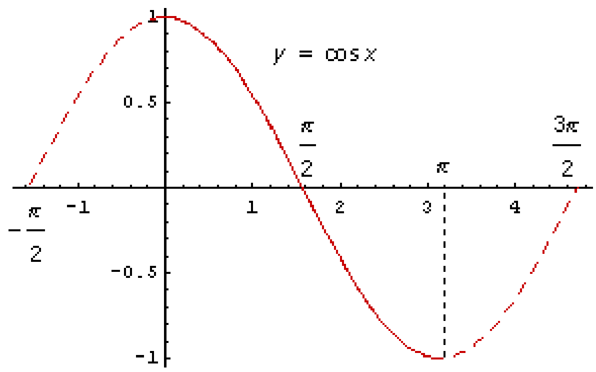
$$\begin{array}{ccc} [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] & \xrightarrow{\sin} & [-1,1] \\ x & \longmapsto & \sin x \end{array}$$

La gráfica de la función arcsin se obtendrá a partir de la gráfica de sin con sólo permutar los ejes de coordenadas. Así, tenemos



9.7.2. Inversa de la función coseno

Observa que en el intervalo $[0, \pi]$ la función cos es inyectiva, pues, las imágenes de dos cualesquiera de los puntos de dicho intervalo son siempre distintas.



De este modo, podemos definir la función

$$\begin{array}{ccc} [-1,1] & \xrightarrow{\arccos} & [0,\pi] \\ x & \longmapsto & \arccos x \end{array}$$

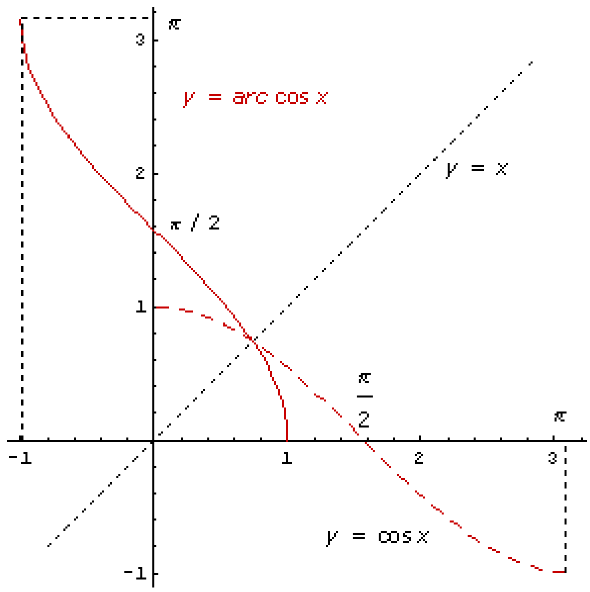
que se llama **arcocoseno**, y escribimos

$$y = \arccos x$$

para expresar que $\cos y = x$ e $y \in [0, \pi]$. Vemos que esta función es la función inversa de

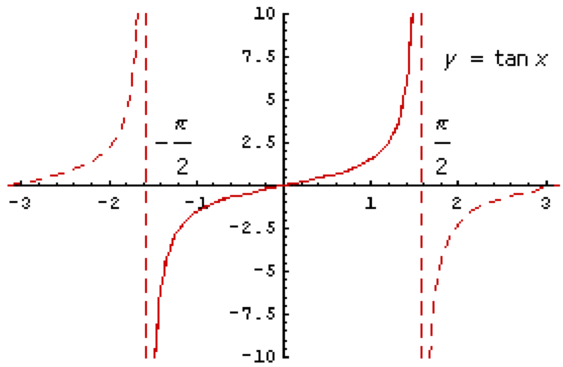
$$\begin{array}{ccc} [0,\pi] & \xrightarrow{\cos} & [-1,1] \\ x & \longmapsto & \cos x \end{array}$$

La gráfica de la función arc cos se obtendrá a partir de la gráfica de cos con sólo permutar los ejes de coordenadas. Así, tenemos



9.7.3. Inversa de la función tangente

Observa que en el intervalo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ la función tan es inyectiva, pues, las imágenes de dos cualesquiera de los puntos de dicho intervalo son siempre distintas.



De este modo, podemos definir la función

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\text{arctan}} & (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ x & \longmapsto & \arctan x \end{array}$$

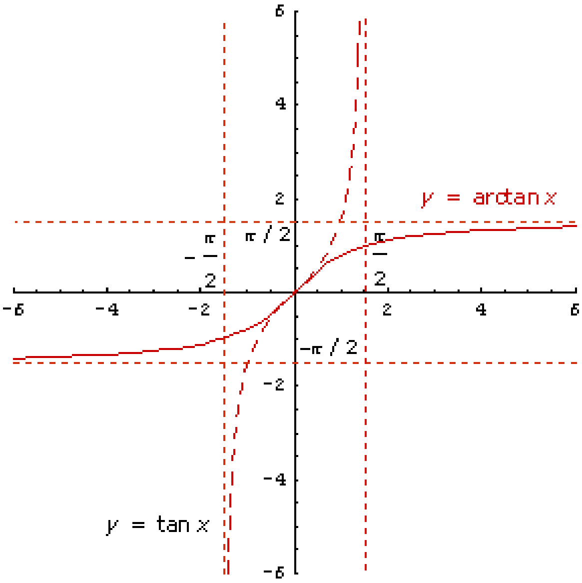
que se llama **arcotangente**, y escribimos

$$y = \arctan x$$

para expresar que $\tan y = x$ e $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Vemos que esta función es la función inversa de

$$\begin{array}{ccc} (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) & \xrightarrow{\tan} & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \tan x \end{array}$$

La gráfica de la función arctan se obtendrá a partir de la gráfica de tan con sólo permutar los ejes de coordenadas. Así, tenemos



Observa a partir de la gráfica que se cumple

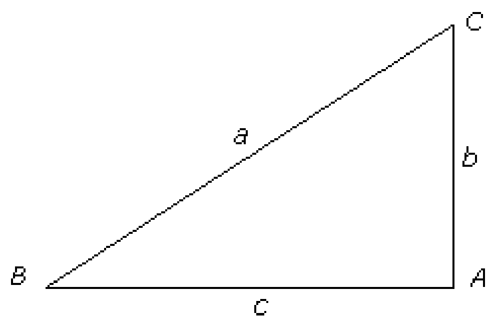
$$\lim_{x \to -\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2} \quad \text{y} \quad \lim_{x \to +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$$

10. Resolución de triángulos y cálculo de áreas

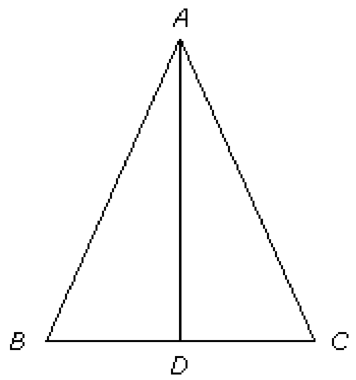
El objeto de la trigonometría es la resolución de triángulos. Por resolver un triángulo se entiende hallar sus elementos: lados y ángulos. Se demuestra en Geometría elemental que cuando se dan gráficamente tres elementos de un triángulo, es fácil construir éste con regla y compas si entre los tres hay por lo menos un lado, pues, es claro que con tres ángulos no se puede determinar un único triángulo. Después, cuando el triángulo ha sido construido, se pueden conocer las medidas de los otros tres elementos utilizando la regla y el transportador. Sin embargo, si se dan tres elementos en forma numérica y se quieren hallar los otros elementos de la misma manera, las construcciones geométricas acaban dando resultados poco exactos, debido a las imperfecciones de los instrumentos de medida. Es en estos casos cuando encontramos a faltar fórmulas que permitan el cálculo con cualquier grado de precisión. El objetivo de esta sección es resolver triángulos por medio de fórmulas trigonométricas.
Con los recursos trigonométricos de que disponemos hasta ahora sólo podemos resolver triángulos rectángulos. Por tanto, como de todo triángulo rectángulo conocemos ya un ángulo (su ángulo recto) bastarán dos datos para determinarlo.

10.1. Casos de resolución de triángulos rectángulos

Tomaremos como triángulo de referencia el que se muestra en la siguiente figura.



En el apartado ??? vimos las relaciones que hay entre los elementos de un triángulo rectángulo. Ahora distinguiremos cuatro casos de resolución de triángulos rectángulos que se corresponden con los que se distinguen cuando se hace la construcción geométrica a partir de dos datos. Esta discusión podrá aplicarse a cualquier otra figura con tal que pueda descomponerse en triángulos rectángulos. Así, por ejemplo, en un triángulo isósceles podemos distinguir los triángulos rectángulos BDA y CDA.



10.1.1. Datos: Hipotenusa y un ángulo agudo

Supongamos que tenemos como datos a y B, en cuyo caso las incógnitas son b, c y C. Para resolver este triángulo utilizaremos las siguientes fórmulas:

$$C = 90^o - B$$
$$b = a \cdot \sin B$$
$$c = a \cdot \cos B$$

10.1.2. Datos: Cateto y un ángulo agudo

Tenemos dos posibilidades:

1. Tenemos como datos b y B, en cuyo caso las incógnitas son a, c y C. Para resolver este triángulo utilizaremos las siguientes fórmulas:

$$C = 90^o - B$$
$$a = \frac{b}{\sin B}$$
$$c = \frac{b}{\tan B}$$

2. Tenemos como datos b y C, en cuyo caso las incógnitas son a, c y B. Para resolver este triángulo utilizaremos las siguientes fórmulas:

$$B = 90^o - C$$
$$a = \frac{b}{\cos C}$$
$$c = b \cdot \tan C$$

10.1.3. Datos: Hipotenusa y un cateto

Supongamos que tenemos como datos a y b, en cuyo caso las incógnitas son c, B y C. Para resolver este triángulo utilizaremos las siguientes fórmulas:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$
$$B = \arcsin\left(\frac{b}{a}\right)$$
$$C = 90^o - B$$

10.1.4. Datos: Dos catetos

Supongamos que tenemos como datos b y c, en cuyo caso las incógnitas son a, B y C. Para resolver este triángulo utilizaremos las siguientes fórmulas:

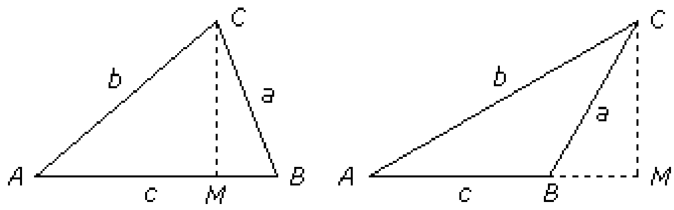
$$a = \sqrt{b^2 + c^2}$$
$$B = \arctan\left(\frac{b}{c}\right)$$
$$C = 90^o - B$$

10.2. Resolución de triángulos no rectángulos

La resolución numérica de triángulos generales (rectángulos y no rectángulos) puede hacerse utilizando los teoremas del seno y del coseno.

10.2.1. Teorema del seno

Consideremos un triángulo ABC y tracemos la altura sobre el lado AB, que denominamos CM. Podemos encontrarnos con dos tipos de triángulos, según el ángulo B sea agudo (triángulo acutángulo) u obtuso (triángulo obtusángulo). Las siguientes figuras muestran estos dos casos.



Consideremos los triángulos rectángulos ACM y BCM en ambas figuras y apliquemos la definición del seno. En el triángulo acutángulo, obtenemos

$$\begin{aligned} CM &= b \cdot \sin A \\ CM &= a \cdot \sin B \end{aligned}$$

y, por tanto,

$$b \cdot \sin A = a \cdot \sin B$$

En el triángulo obtusángulo, obtenemos

$$\begin{aligned} CM &= b \cdot \sin A \\ CM &= a \cdot \sin(180^o - B) = a \cdot \sin B \end{aligned}$$

y, por tanto,

$$b \cdot \sin A = a \cdot \sin B$$

Así pues, tanto si B es agudo como si es obtuso, vemos que la relación anterior se cumple. (Observa que esta relación también se cumple si el ángulo B es recto. En tal caso, se deduce la definición de la razón seno.) Puesto que el seno de un ángulo de un triángulo nunca es cero, podemos escribir la relación anterior como

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$$

Repitiendo el mismo proceso con la altura trazada desde el vértice A, se deducirá otra relación como la siguiente

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

y si lo hiciéramos con la tercera altura, trazada desde el vértice B, obtendríamos

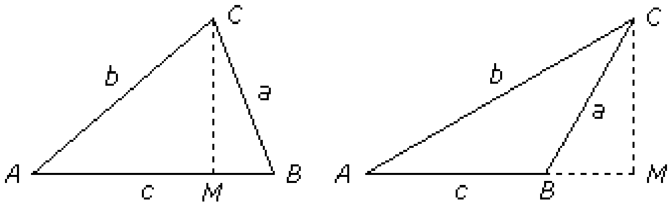
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$$

De este modo, hemos probado el **teorema del seno**: En todo triángulo, la razón de las longitudes de los lados y los senos de los ángulos opuestos respectivos es constante.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

10.2.2. Teorema del coseno

Consideremos un triángulo ABC y tracemos la altura sobre el lado AB, que denominamos MC. Podemos encontrarnos con dos tipos de triángulos, según el ángulo B sea agudo (triángulo acutángulo) u obtuso (triángulo obtusángulo). Las siguientes figuras muestran estos dos casos.



Hagamos en ambos casos que $MC = h$, $MB = m$ y $AM = n$. Consideremos los triángulos rectángulos ACM y BCM en ambas figuras y apliquemos el teorema de Pitágoras. En el triángulo acutángulo, obtenemos

$$\begin{aligned} b^2 &= n^2 + h^2 \\ a^2 &= m^2 + h^2 \end{aligned}$$

Restando miembro a miembro, tenemos

$$b^2 - a^2 = n^2 - m^2$$

Puesto que $c = n + m$, entonces $n = c - m$ y, por tanto, podemos escribir

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2 + (c-m)^2 - m^2 \\ &= a^2 + c^2 - 2cm + m^2 - m^2 \\ &= a^2 + c^2 - 2cm \end{aligned}$$

Ahora bien,

$$m = a \cdot \cos B$$

y, como consecuencia, obtenemos

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2a \cdot c \cdot \cos B$$

Procediendo del mismo modo, en el triángulo obtusángulo, obtenemos

$$\begin{aligned} b^2 &= (c+m)^2 + h^2 \\ a^2 &= m^2 + h^2 \end{aligned}$$

Restando miembro a miembro, tenemos

$$\begin{aligned} b^2 - a^2 &= (c+m)^2 - m^2 \\ b^2 &= a^2 + c^2 + 2cm + m^2 - m^2 \\ &= a^2 + c^2 + 2cm \end{aligned}$$

Ahora bien,

$$\frac{m}{a} = \cos(180^o - B) = -\cos B$$

luego,

$$m = -a \cdot \cos B$$

y, como consecuencia, también deducimos

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2a \cdot c \cdot \cos B$$

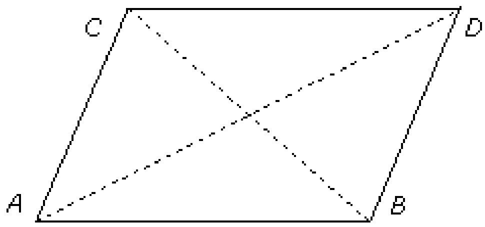
Así pues, tanto si B es agudo como si es obtuso, vemos que la relación anterior se cumple. (Observa que esta relación también se cumple si el ángulo B es recto. En tal caso, se deduce el teorema de Pitágoras.)
El mismo procedimiento nos permitiría deducir las siguientes fórmulas

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2b \cdot c \cdot \cos A \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2a \cdot b \cdot \cos C \end{aligned}$$

Estas tres fórmulas se conocen como el **teorema del coseno**: El cuadrado de un lado de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble del producto de estos dos lados por el coseno del ángulo que forman.

10.3. Casos de resolución de triángulos no rectángulos

Hay cuatro casos genéricos de resolución de triángulos, que analizaremos a continuación desde el punto de vista de la aplicación numérica de los teoremas del seno y del coseno. Esta discusión podrá aplicarse a cualquier otra figura con tal que pueda descomponerse en triángulos. Así, por ejemplo, en un paralelogramo podemos distinguir los triángulos ABC y ABD.



10.3.1. Datos: Un lado y dos ángulos

Supongamos que los datos son a, B y C, en cuyo caso las incógnitas son b, c y A. Para resolver este triángulo utilizaremos el hecho de que

$$A = 180^o - (B + C)$$

y el teorema del seno,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \implies b = \frac{a \cdot \sin B}{\sin A}$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \implies c = \frac{a \cdot \sin C}{\sin A}$$

10.3.2. Datos: Dos lados y el ángulo comprendido

Supongamos que los datos son a, b y C, en cuyo caso las incógnitas son c, A y B. Para resolver este triángulo primero utilizaremos el teorema del coseno para calcular el lado c,

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot b \cdot \cos C \implies c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2a \cdot b \cdot \cos C}$$

Luego, utilizaremos el teorema del seno para calcular el ángulo B,

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \implies \sin B = \frac{b \cdot \sin C}{c} \implies B = \arcsin\left(\frac{b \cdot \sin C}{c}\right)$$

Finalmente, calcularemos el ángulo A por la siguiente relación

$$A = 180^o - (B + C)$$

10.3.3. Datos: los tres lados

En primer lugar debemos comprobar que los datos son coherentes. Para ello, recuerda que el lado mayor ha de ser menor que la suma de los otros dos. Las incógnitas son ahora los tres ángulos. Para calcular el ángulo A utilizaremos el teorema del coseno,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b \cdot c \cdot \cos A \implies \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \implies A = \arccos\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)$$

Luego, para calcular otro ángulo podemos usar tanto el teorema del seno como el del coseno. Para evitar la duplicidad de soluciones, es preferible utilizar el teorema del coseno. Así, tenemos

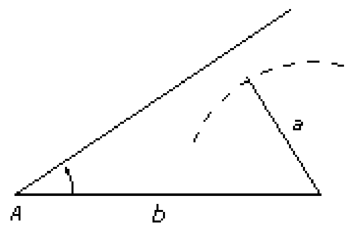
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2a \cdot c \cdot \cos B \implies \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \implies B = \arccos\left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}\right)$$

Finalmente, calculamos C mediante

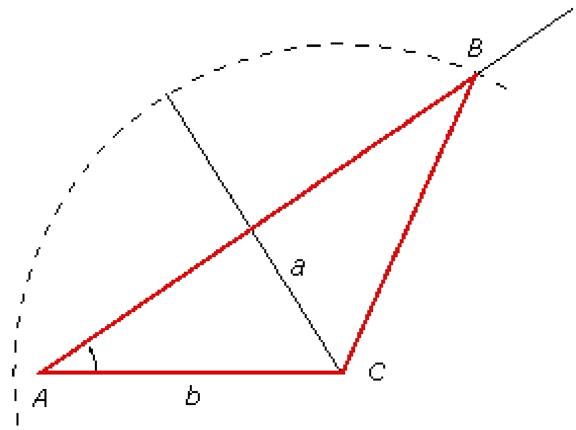
$$C = 180^o - (A + B)$$

10.3.4. Datos: dos lados y un ángulo no comprendido entre ellos

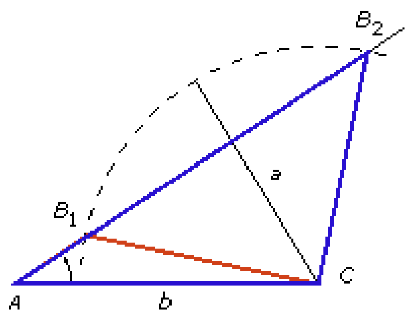
Éste es un caso en el que, con la simple observación de los datos, no podemos predecir si hay o no solución. Por ejemplo, supongamos que los datos son a, b y A. Entonces, puede ocurrir que no tengamos solución como en el caso de la siguiente figura.



Otras veces, la solución será única, como es el caso de la figura siguiente.



Finalmente, habrá casos en los que hay dos soluciones como se muestra en la siguiente figura donde construimos dos triángulos AB_1C y AB_2C como soluciones.



Desde el punto de vista numérico, utilizaremos el teorema del seno para calcular el ángulo B. Así, tenemos

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \quad \Longrightarrow \quad \sin B = \frac{b \cdot \sin A}{a}$$

En este punto, podemos encontrarnos con varios casos:

1. $b \cdot \sin A > a$, en cuyo caso no hay solución, pues el seno de un ángulo es menor o igual que 1
2. $b \cdot \sin A = a$, en cuyo caso $\sin B = 1$ y, por tanto, $B = 90^o$. Si $A < 90^o$, entonces hay una única solución y, además, el triángulo es rectángulo. En cambio, si $A \geq 90^o$, entonces no hay solución
3. $b \cdot \sin A < a$, en cuyo caso $\sin B < 1$. En este caso, hay dos posibles valores para B. Si para cada valor de B calculamos un valor consistente de C mediante $C = 180^o - (A + B)$,

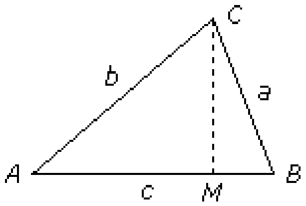
entonces hay dos soluciones. Si sólo uno de los dos valores de B nos permite calcular un valor consistente de C, entonces hay una sola solución. Finalmente, en los otros caso, ninguno de los dos valores de B permite calcular un valor consistente de C y, como consecuencia, no hay solución.

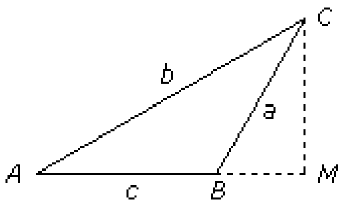
10.4. Cálculo del área de un triángulo

Resolveremos este problema distinguiendo dos casos especiales.

10.4.1. Datos: dos lados y el ángulo comprendido entre ellos

Consideremos un triángulo ABC y tracemos la altura sobre el lado AB, que denominamos CM. Podemos encontrarnos con dos tipos de triángulos, según el ángulo B sea agudo (triángulo acutángulo) u obtuso (triángulo obtusángulo). Las siguientes figuras muestran estos dos casos.





Sabemos que el área de un triángulo es

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \frac{\text{longitud de un lado} \cdot \text{longitud de la altura correspondiente}}{2} \\ &= \frac{c \cdot \overline{CM}}{2} \end{aligned}$$

Puesto que en ambos triángulos se cumple

$$\overline{CM} = b \cdot \sin A$$

entonces

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin A$$

Repitiendo el mismo proceso con las otras dos alturas, obtendríamos

$$\text{Área} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin B = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin C$$

10.4.2. Datos: los tres lados

Demostraremos la llamada **fórmula de Heron**

$$\text{Área} = \sqrt{\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2} - a\right)\left(\frac{p}{2} - b\right)\left(\frac{p}{2} - c\right)}$$

donde p es el perímetro del triángulo, es decir, la suma de los tres lados.
Según el teorema del coseno, tenemos

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

De aquí, recordando las fórmulas del ángulo mitad y que el ángulo $A/2$ es agudo, obtenemos

$$\begin{aligned}
\sin\frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{1-\cos A}{2}} \\
&= \sqrt{\frac{1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}} \\
&= \sqrt{\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{4bc}} \\
&= \sqrt{\frac{a^2-(b^2-2bc+c^2)}{4bc}} \\
&= \sqrt{\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}} \\
&= \sqrt{\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}}
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\cos\frac{A}{2} &= \sqrt{\frac{1+\cos A}{2}} \\
&= \sqrt{\frac{1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}} \\
&= \sqrt{\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{4bc}} \\
&= \sqrt{\frac{(b+c)^2-a^2}{4bc}} \\
&= \sqrt{\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc}}
\end{aligned}$$

De aquí, recordando la fórmula del seno del ángulo doble y que

$$\begin{aligned}
a+b-c &= p-2c \\
a-b+c &= p-2b \\
-a+b+c &= p-2a
\end{aligned}$$

obtenemos

$$\begin{aligned}
\sin A &= 2\cdot\sin\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{A}{2} \\
&= 2\cdot\sqrt{\frac{(p-2c)(p-2b)}{4bc}}\cdot\sqrt{\frac{p(p-2a)}{4bc}} \\
&= 2\cdot\sqrt{\frac{p(p-2a)(p-2b)(p-2c)}{16b^2c^2}} \\
&= \frac{1}{2bc}\sqrt{p(p-2a)(p-2b)(p-2c)}
\end{aligned}$$

Recordando ahora que el área del triángulo puede calcularse mediante

$$\text{Área} = \frac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot\sin A$$

obtenemos

$$\begin{aligned}
\text{Área} &= \frac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot\sin A \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{p(p-2a)(p-2b)(p-2c)} \\
&= \sqrt{\frac{p}{2}\cdot\frac{p-2a}{2}\cdot\frac{p-2b}{2}\cdot\frac{p-2c}{2}} \\
&= \sqrt{\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}-a\right)\left(\frac{p}{2}-b\right)\left(\frac{p}{2}-c\right)}
\end{aligned}$$