Ejercicios propuestos

Trigonometría

Índice

1. Expresa en radianes los siguientes ángulos:

   $$(a)\quad 75^o \quad (b)\quad 46^o22' \quad (c)\quad 224^o18'45'' \quad (d)\quad 857^o \quad (e)\quad -33^o50'$$

   Soluciones: $5\pi/12$ rad, 0,809 rad, 3589/2880 rad, $857\pi/180$ rad, $-0{,}590$ rad.

2. Expresa en grados, minutos y segundos sexagesimales los ángulos siguientes

   $$(a)\quad 3 \text{ rad} \quad (b)\quad 0{,}43 \text{ rad} \quad (c)\quad \tfrac{\pi}{9} \text{ rad} \quad (d)\quad 65 \text{ rad} \quad (e)\quad -\tfrac{\pi}{12} \text{ rad}$$

   Soluciones: $171^o53'14''$, $24^o38'14''$, 20^o, $3724^o13'32''$, -15^o

3. En una circunferencia de radio 6 cm se considera un arco de 4,5 cm de longitud. ¿Cuántos grados, minutos y segundos mide el ángulo central correspondiente?

   Soluciones: $42^o58'19''$

4. Con una circunferencia de 8 cm de radio dibujamos un ángulo central que mide 2,4 rad. ¿Cuál será la longitud del arco de circunferencia que corresponde a dicho ángulo?

   Soluciones: 19,2 cm

5. Expresa en grados, minutos y segundos centesimales los siguientes ángulos

   $$(a)\quad 60^o \quad (b)\quad \tfrac{5\pi}{9} \text{ rad} \quad (c)\quad 230^o$$

   Soluciones: $66^g66^m67^s$, $111^g11^m11^s$, $255^g55^m56^s$

6. Calcula sin utilizar la calculadora las razones trigonométricas de los siguientes ángulos:

   $$\begin{array}{llllllll} a) & 120^o & b) & 150^o & c) & 225^o & d) & 300^o \\ e) & -120^o & f) & 2010^o & g) & -510^o & h) & 27\pi/4 \end{array}$$

   Solución:

		sin	cos	tan
$a)$	$120^o = 180^o - 60^o$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
$b)$	$150^o = 180^o - 30^o$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$c)$	$225^o = 180^o + 45^o$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$d)$	$300 = 360^o - 60^o$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
$e)$	$240^o = 180^o + 60^o$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$f)$	$210^o = 180^o + 30^o$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$g)$	$150^o = 180^o - 30^o$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
$h)$	$135^o = 180^o - 45^o$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1

7. Calcula sin utilizar la calculadora las demás razones trigonométricas en los casos siguientes:

   a) $\sin\alpha = \frac{7}{25}$ y $\cos\alpha < 0$

   b) $\cos\alpha = -\frac{5}{13}$ y $\pi/2 < \alpha < \pi$

   c) $\tan\alpha = -5$ y α es un ángulo del segundo cuadrante

d) $\sec\alpha = 0{,}4$ y $\sin\alpha < 0$

e) $\csc\alpha = -4$

f) $\cot\alpha = -\frac{2}{3}$

Solución: (a) $\cos\alpha = -24/25$ y $\tan\alpha = -7/24$ (b) $\sin\alpha = 12/13$ y $\tan\alpha = -5/12$ (c) $\sin\alpha = 5/\sqrt{26}$ y $\cos\alpha = -1/\sqrt{26}$ (d) Imposible (e) $\sin\alpha = -1/4$, $\cos\alpha = \pm\sqrt{15}/4$ y $\tan\alpha = \mp 1/\sqrt{15}$ (f) $\sin\alpha = \pm 3/\sqrt{13}$, $\cos\alpha = \mp 2/\sqrt{13}$ y $\tan\alpha = -3/2$

8. Halla los ángulos α tales que

$$
\begin{array}{llllllll}
a) & \sin\alpha = -1/\sqrt{2} & b) & \tan\alpha = -\sqrt{3} & c) & \cos\alpha = \frac{1}{2} & d) & \cos\alpha = -\sqrt{3}/2 \\
e) & \sin\alpha = 0 & f) & \cos\alpha = 0 & g) & \sin\alpha = -1 & h) & \cos\alpha = -1
\end{array}
$$

Solución: (a) $-45^o + k\cdot 360^o$ y $225^o + k\cdot 360^o$ (b) $45^o + k\cdot 180^o$ (c) $60^o + k\cdot 360^o$ y $-60^o + k\cdot 360^o$ (d) $150^o + k\cdot 360^o$ y $210^o + k\cdot 360^o$ (e) $k\cdot 180^o$ (f) $90^o + k\cdot 180^o$ (g) $270^o + k\cdot 360^o$ (h) $180^o + k\cdot 360^o$

9. Simplifica las siguientes expresiones:

a) $\sqrt{1-\cos x}\cdot\sqrt{1+\cos x}$

b) $\frac{\sin^2 x}{1-\cos x}$

c) $\frac{\sin^2 x - \sin^2 y}{\cos^2 x - \cos^2 y}$

d) $\sqrt{\frac{1}{1+\sin x} + \frac{1}{1-\sin x}}$

Solución: (a) $\sin x$ (b) $1+\cos x$ (c) -1 (d) $\sqrt{2}/\cos x$

10. Expresar en función de $\sin x$ y $\cos x$ las expresiones siguientes:

$$
a)\ \sin(2\pi - x) \quad b)\ \cos(3\pi + x) \quad c)\ \sin\left(\tfrac{\pi}{2} - x\right) \quad d)\ \cos(-\pi - x)
$$

Solución: (a) $-\sin x$ (b) $-\cos x$ (c) $\cos x$ y (d) $-\cos x$

11. Expresa en función de $\tan x$ las expresiones siguientes:

$$
a)\ \tan(2\pi + x) \quad b)\ \tan(2\pi - x) \quad c)\ \tan(3\pi + x) \quad d)\ \tan(5\pi - x)
$$

Solución: (a) $\tan x$ (b) $-\tan x$ (c) $\tan x$ y (d) $-\tan x$

12. Si $\tan a = -3/4$ y $\pi/2 < a < \pi$, halla las razones trigonométricas de los ángulos: (a) a, (b) $\pi - a$, (c) $\pi + a$ y (d) $2\pi - a$.

Solución:

	sin	cos	tan
a)	$3/5$	$-4/5$	$-3/4$
b)	$3/5$	$4/5$	$3/4$
c)	$-3/5$	$4/5$	$-3/4$
d)	$-3/5$	$-4/5$	$3/4$

13. Usando la calculadora, halla x en cada caso:

$$
a)\ \sin 741^o 13' 45'' \quad b)\ \cos 300^o 9' 56'' \quad c)\ \tan 299^o 30' \quad d)\ \cot 54^o 46'
$$

Solución: (a) 0,3621 (b) 0,5025 (c) $-1{,}7675$ y (d) 0,7063

14. Usando la calculadora, halla el menor valor positivo de x tal que

$$
a)\ \cos x = 0{,}5931 \quad b)\ \sin x = -0{,}6 \quad c)\ \cos x = -1/3 \quad d)\ \tan x = -10{,}386
$$

Solución: (a) $x = 53^o 37' 22''$ (b) $x = 216^o 52' 12''$ (c) $x = 109^o 28' 16''$ y (d) $x = 95^o 29' 59''$

15. De las siguientes igualdades indica cuáles son identidades:

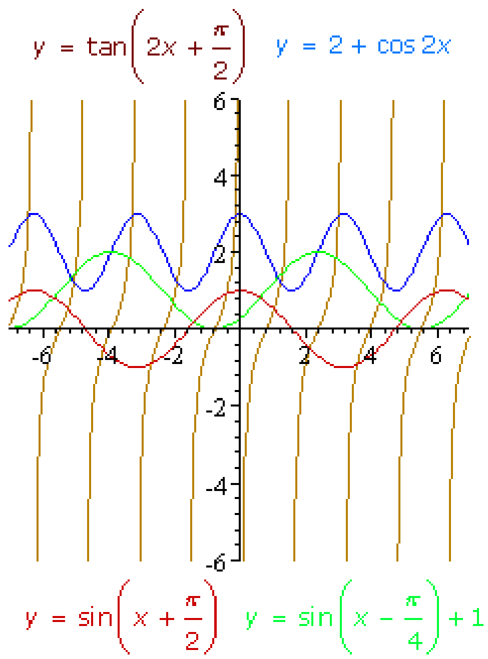
    a) $1 + \frac{\cos x \cdot \tan^2 x}{1+\cos x} = \sin x$
    b) $\cot^2 x - \tan^2 x = \frac{1-2\sin^2 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$
    c) $\tan^2 x - \sin^2 x = \tan^2 x \cdot \sin^2 x$
    d) $\sin^4 x + \cos^2 x + \sin^2 x \cdot \cos^2 x = -1$

    Solución: (a) No (b) Sí (c) Sí y (d) No

16. Dibuja la gráfica de las siguientes funciones:

    a) $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$
    b) $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1$
    c) $f(x) = 2 + \cos 2x$
    d) $f(x) = \tan\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$

    Solución: trig147.gif



17. Halla x en las siguientes ecuaciones:

$$a)\quad y = \arcsin x \qquad b)\quad y = 1 - \arctan 2x \qquad c)\quad y = 5\sin(2x+1)$$

    Solución: (a) $x = \sin y$ (b) $x = \frac{1}{2}\tan(1-y)$ y (c) $x = \frac{1}{2}(-1 + \arcsin\frac{y}{5})$

18. Halla el valor de la expresión que se indica, en caso de que la mismo tenga sentido:

$$a)\quad \arcsin(-1) \qquad b)\quad \arccos(-1) \qquad c)\quad \arctan(-\sqrt{3}) \qquad d)\quad \arcsin(\sin 2\pi/3)$$

    Solución: (a) No existe (b) π (c) $-\pi/3$ y (d) $\pi/3$

19. Calcula el dominio de las siguientes funciones:

$$\begin{array}{llllll}
a) & f(x) = \sin\left(\frac{1}{x^2-9}\right) & b) & f(x) = \tan\left(3x - \frac{5\pi}{3}\right) & c) & f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}-2\sin x} \\
d) & f(x) = \frac{1}{2-\cos(3x+4)} & e) & f(x) = \arccos(3x+5) & f) & f(x) = \arcsin(x^2+x+1) \\
g) & f(x) = \frac{1}{\sin^2 x + \tan^2 x} & h) & f(x) = \sqrt{-1+2\sin x} & i) & f(x) = \sqrt{\cos 5x}
\end{array}$$

Solución:

$$\begin{array}{ll}
a) & \mathbb{R}-\{-3,3\} \\
b) & \mathbb{R}-\{x=\frac{\pi}{18}+k\cdot\frac{\pi}{3} : k\in\mathbb{Z}\} \\
c) & \mathbb{R}-\{x : x=\frac{\pi}{4}+k\cdot 2\pi \quad \text{o} \quad x=\frac{3\pi}{4}+k\cdot 2\pi \quad \text{y} \quad k\in\mathbb{Z}\} \\
d) & \mathbb{R} \\
e) & [-2,-4/3] \\
f) & [-1,0] \\
g) & \mathbb{R}-\{k\cdot\pi : k\in\mathbb{Z}\} \\
h) & \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{6}+k\cdot 2\pi, \frac{5\pi}{6}+k\cdot 2\pi\right] \\
i) & \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{10}+k\cdot\frac{2\pi}{5}, \frac{\pi}{10}+k\cdot\frac{2\pi}{5}\right]
\end{array}$$

20. Resuelve las siguientes inecuaciones:

$$\begin{array}{llll}
a) & \sin x\geq 1/\sqrt{2} & b) & \cos x<1/2 \\
c) & \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)<\frac{1}{2} & d) & \sqrt{3}\tan 2x+1\leq 0
\end{array}$$

Solución:

$$\begin{array}{ll}
a) & \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{4}+k\cdot 2\pi, \frac{3\pi}{4}+k\cdot 2\pi\right] \\
b) & \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\frac{\pi}{3}+k\cdot 2\pi, \frac{5\pi}{3}+k\cdot 2\pi\right) \\
c) & \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\frac{7\pi}{12}+k\cdot 2\pi, \frac{23\pi}{12}+k\cdot 2\pi\right) \\
d) & \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(-\frac{\pi}{4}+k\cdot\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{12}+k\cdot\frac{\pi}{2}\right)
\end{array}$$

21. Deduce las razones trigonométricas de los ángulos 15^o, 105^o y 120^o.

Solución: Por ejemplo,

$$\begin{aligned}
\cos 15^o &= \cos(45^o-30^o)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\
\sin 105^o &= \sin(60^o+45^o)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\
\sin 120^o &= \sin(2\cdot 60^o)=\frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

y así con las demás.

22. Dados $\sin 6^o=r$ y $\sin 37^o=s$, expresa en función de r y s las siguientes razones trigonométricas:

$$\begin{array}{llllllll}
a) & \cos 84^o & b) & \sin 43^o & c) & \cos 54^o & d) & \tan 53^o \\
e) & \cos 31^o & f) & \sin 8^o & g) & \tan 39^o & h) & \sin 7^o
\end{array}$$

Solución:

$$\begin{array}{ll}
a) & r \\
b) & s\sqrt{1-r^2}+r\sqrt{1-s^2} \\
c) & \frac{1}{2}\sqrt{1-r^2}+\frac{\sqrt{3}}{2}r \\
d) & \frac{\sqrt{1-s^2}}{s} \\
e) & \sqrt{(1-s^2)(1-r^2)}+sr \\
f) & \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-s^2}-\frac{\sqrt{2}}{2}s \\
g) & \frac{\sqrt{1-r^2}-r}{\sqrt{1-r^2}+r} \\
h) & \frac{\sqrt{3}}{2}s-\frac{1}{2}\sqrt{1-s^2}
\end{array}$$

23. Calcula las razones del ángulo $\alpha-\beta$, sabiendo que α y β son agudos y $\tan\alpha=3$ y $\tan\beta=5$.

Solución:

	sin	cos	tan
$\alpha-\beta$	$-1/\sqrt{65}$	$8/\sqrt{65}$	$-1/8$

24. Calcula $\cos 5\alpha$, sabiendo que $\sin\alpha = 3/4$ y α es agudo.
Solución: $-11\sqrt{7}/64$

25. Calcula las razones trigonométricas del ángulo $\alpha/2$, sabiendo que α es agudo y $\cos\alpha = 12/13$.
Solución:

	sin	cos	tan
$\alpha/2$	$1/\sqrt{26}$	$5/\sqrt{26}$	$1/5$

26. Sin usar calculadora, halla las razones trigonométricas de (a) $67^o30'$ y (b) $112^o30'$.
Solución:

	sin	cos
$67^o30'$	$\sqrt{2+\sqrt{2}}/2$	$\sqrt{2-\sqrt{2}}/2$
$112^o30'$	$\sqrt{2+\sqrt{2}}/2$	$-\sqrt{2-\sqrt{2}}/2$

27. Calcula:

$$a)\ \frac{\sin 255^o+\sin 195^o}{\sin 255^o-\sin 195^o} \qquad b)\ \frac{\cos 255^o-\cos 195^o}{\cos 255^o+\cos 195^o}$$

Solución: (a) $\sqrt{3}$ y (b) $-1/\sqrt{3}$

28. Transforma en producto las expresiones siguientes:

$$a)\ 1-\cos x \qquad b)\ 1+\tan 25^o$$
$$c)\ \frac{\sqrt{2}}{2}-\sin 60^o \qquad d)\ \frac{\sqrt{3}}{2}+\cos x$$

Solución:

$$a)\ 2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$$
$$b)\ \sin 70^o\cdot\sec 45^o\cdot\sec 25^o$$
$$c)\ -2\sin\frac{15}{2}\cdot\cos\frac{105}{2}$$
$$d)\ 2\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{12}-\frac{x}{2}\right)$$

29. Transforma en suma cada uno de los siguientes productos:

$$a)\ \sin x\cdot\sin y \quad b)\ \cos x\cdot\cos y \quad c)\ \sin x\cdot\cos y$$

Solución:

$$a)\ \frac{1}{2}\cos(x-y)-\frac{1}{2}\cos(x+y)$$
$$b)\ \frac{1}{2}\cos(x-y)+\frac{1}{2}\cos(x+y)$$
$$c)\ \frac{1}{2}\sin(x-y)+\frac{1}{2}\sin(x+y)$$

30. Demuestra las identidades trigonométricas siguientes:

a) $\left(\tan x+\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{1}{\sin^2 x}$

b) $\frac{\sin x+\cos x-1}{\sin x-\cos x+1} = \frac{\cos x}{\sin x+1}$

c) $\frac{\tan x}{\tan 2x-\tan x} = \cos 2x$

d) $\cos(x+y)\cdot\cos(x-y) = \cos^2 x-\sin^2 y = \cos^2 y-\sin^2 x$

e) $\cos x\cdot\sin(y-z)+\cos y\cdot\sin(z-x)+\cos z\cdot\sin(x-y) = 0$

f) $(\cos x+\cos y)^2+(\sin x+\sin y)^2 = 4\cos^2\left(\frac{x-y}{2}\right)$

g) $\frac{\sin(x+y)+\sin(x-y)}{\cos(x+y)+\cos(x-y)} = \tan x$

h) $\frac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)} = \frac{\tan x\cdot\cot y+1}{\tan x\cdot\cot y-1}$

Solución: (a) Reemplaza $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ y efectúa operaciones; (b) Recuerda que $\frac{x}{y} = \frac{u}{v}$ si y sólo si $xv = yu$; (c) Reemplaza $\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$ y $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ y efectúa operaciones; (d) Aplica las fórmulas de $\cos(x+y)$ y $\cos(x-y)$ y efectúa operaciones; (e) Aplica la fórmula de $\sin(\alpha-\beta)$ y efectúa operaciones; (f) Desarrolla los cuadrados indicados, opera y transforma el resultado en producto; (g) Aplica las fórmulas de la adición de ángulos, opera y simplifica; (h) Aplica las fórmulas de $\sin(x+y)$ y $\sin(x-y)$ y después divide numerador y denominador por $\cos x\cdot\sin y$.

31. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $\sin(5x-\pi)=-1/2$

b) $\tan\left(x-\frac{\pi}{5}\right)=\sqrt{3}$

c) $\arccos(2x-1)=\frac{3\pi}{4}$

d) $\sin^2 x-\cos^2 x=1$

e) $\sin x-\cos^2 x=1$

f) $\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin(3x+\pi)$

g) $\cos x=\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)$

h) $\tan(3x+\pi)=\tan(3\pi-x)$

Solución:

$$\begin{array}{ll}
a) & x=\frac{\pi}{6}+k\cdot\frac{2\pi}{5} \text{ o } x=\frac{\pi}{30}+k\cdot\frac{2\pi}{5},\ k\in\mathbb{Z}\\
b) & x=\frac{8\pi}{15}+k\cdot\pi\\
c) & x=\frac{2-\sqrt{2}}{4}\\
d) & x=\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\pi \text{ o } x=\frac{3\pi}{2}+k\cdot 2\pi,\ k\in\mathbb{Z}\\
e) & x=\frac{\pi}{2}+k\cdot 2\pi,\ k\in\mathbb{Z}\\
f) & x=\frac{45^o}{4}+k\cdot 90^o \text{ o } x=-\frac{225^o}{2}+k\cdot 180^o,\ k\in\mathbb{Z}\\
g) & x=90^o+k\cdot 360^o \text{ o } x=30^o+k\cdot 120^o,\ k\in\mathbb{Z}\\
h) & x=90^o+k\cdot 45^o,\ k\in\mathbb{Z}
\end{array}$$

32. Resuelve las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $\sin x=1-\cos x$

b) $\cos 2x+\sin x=4\sin^2 x$

c) $4\sin(x/2)+2\cos x=3$

d) $\sin 2x+2\cos^2 x-2=0$

e) $\cos x+\sqrt{3}\sin x=0$

f) $\cot x+\frac{\sin x}{1+\cos x}=2$

g) $\cos 2x-\cos 6x=\sin 5x+\sin 3x$

h) $\sin 2x\cdot\cos x=6\sin^3 x$

i) $\cos^2 x-\sin^2 x+\tan^2 x=1$

Solución:

$$\begin{array}{ll}
a) & k\cdot 360^o \text{ y } 90^o+k\cdot 360^o,\ k\in\mathbb{Z}\\
b) & \frac{\pi}{6}+k\cdot 2\pi \text{ y } \frac{5\pi}{6}+k\cdot 2\pi,\ k\in\mathbb{Z}\\
c) & \frac{x}{2}=\frac{\pi}{6}+k\cdot 2\pi \text{ o } x=\frac{5\pi}{6}+k\cdot 2\pi,\ k\in\mathbb{Z}\\
d) & k\cdot\pi \text{ y } x=\frac{\pi}{4}+k\cdot\pi,\ k\in\mathbb{Z}\\
e) & -\frac{\pi}{6}+k\cdot\pi,\ k\in\mathbb{Z}\\
f) & x=\frac{\pi}{6}+k\cdot 2\pi \text{ o } x=\frac{5\pi}{6}+k\cdot 2\pi,\ k\in\mathbb{Z}\\
g) & k\cdot\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2}+k\cdot\pi,\ \frac{\pi}{6}+k\cdot 2\pi \text{ y } \frac{5\pi}{6}+k\cdot 2\pi,\ k\in\mathbb{Z}\\
h) & k\cdot 180^o,\ 30^o+k\cdot 180^o \text{ y } 150^o k\cdot 180^o,\ k\in\mathbb{Z}\\
i) & k\cdot 180^o \text{ y } 45^o+k\cdot 90^o,\ k\in\mathbb{Z}
\end{array}$$

33. Resolver los sistemas siguientes:

a) $\left.\begin{array}{r}\sin x+\sin y=\frac{\sqrt{3}+1}{2}\\ \sin x-\sin y=\frac{\sqrt{3}-1}{2}\end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r}\sin x+\sin y=1/2\\ x+y=2\pi/3\end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r}2\sin x=1-\cos y\\ 2\cos x=1+\cos y\end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r}\sin x+\sin y=3/2\\ \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)=\sqrt{3}/2\end{array}\right\}$

e) $\left.\begin{array}{r} \sin(x+y) - \cos x \cdot \cos y = 0 \\ \sin y = 0 \end{array}\right\}$

Solución: (a) $x = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi$ o $\frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi$, $y = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi$ o $\frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi$; (b) Las soluciones son las de los sistemas siguientes

$$\left.\begin{array}{r} x - y = \frac{\pi}{3} + k \cdot 4\pi \\ x + y = 2\pi/3 \end{array}\right\}$$

y

$$\left.\begin{array}{r} x - y = \frac{5\pi}{3} + k \cdot \pi \\ x + y = 2\pi/3 \end{array}\right\}$$

(c) $x = k \cdot 2\pi$, $y = k' \cdot 2\pi$ o bien $x = \frac{(4k+1)\pi}{2}$, $y = (2k'+1)\pi$; (d) Las soluciones se obtienen combinando las cuatro ecuaciones siguientes:

$$\begin{array}{r} x + y = \frac{2\pi}{3} + k \cdot 4\pi \\ x + y = \frac{4\pi}{3} + k \cdot 4\pi \\ x - y = \frac{\pi}{3} + k' \cdot 4\pi \\ x - y = -\frac{\pi}{3} + k' \cdot 4\pi \end{array}$$

resultando 4 sistemas lineales; (e) $x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi$, $y = k' \cdot \pi$

34. Las diagonales de un rombo miden 24 y 36 cm. Calcula con estos datos los ángulos y su perímetro.

    Solución: Los ángulos son $112^o 37' 10''$ y $67^o 22' 50''$, y su perímetro es 86,52 cm

35. En cada caso, resuelve el triángulo rectángulo (recto en A) a partir de los datos indicados:

    a) $a = 10$ cm, $\widehat{B} = 40^o$
    b) $b = 8$ cm, $\widehat{C} = 55^o$
    c) $c = 5$ cm, $\sin \widehat{B} = 0{,}25$

    Solución: (a) $\widehat{C} = 50^o$, $b = 6{,}4$ cm, $c = 7{,}6$ cm; (b) $\widehat{B} = 35^o$, $c = 11{,}4$ cm, $a = 13{,}9$ cm; (c) $a = 5{,}16$ cm, $b = 1{,}27$ cm, $\widehat{B} = 14^o 28' 39''$ y $\widehat{C} = 75^o 31' 21''$.

36. A cierta hora del día, un poste vertical de 20 m de altura proyecta una sombra de 15 m. ¿Qué ángulo formarán, a dicha hora, los rayos solares con la horizontal? ¿Qué longitud tendrá la sombra de un individuo que está en pie y mide 1.80 m?

    Solución: $53^o 8'$ y 1,35 m

37. Resuelve el triángulo ABC con los datos siguientes:

    a) $b = 3$ cm, $c = 6$ cm y $B = 55^o$
    b) $b = 3$ cm, $c = 6$ cm y $B = 30^o$
    c) $a = 7{,}5$ cm, $b = 8$ cm y $A = 40^o 38'$
    d) $b = 7{,}5$ cm, $c = 4$ cm y $A = 146^o 46' 23''$
    e) $a = 2$ cm, $b = 3$ cm y $c = 4$ cm
    f) $a = 90$ cm, $b = 47$ cm y $c = 41$ cm

    Solución: (a) $\sin C = 1{,}64 > 1$ y, por tanto, no hay solución; (b) $C = 90^o$, $A = 60^o$ y $a = 5{,}20$ cm; (c) Dos soluciones: (1) $B = 43^o 59' 51''$, $C = 95^o 22' 9''$ y $c = 11{,}47$ cm (2) $B = 136^o 9''$, $C = 3^o 21' 51''$ y $c = 0{,}68$ cm; (d) $a = 11{,}07$ cm, $C = 11^o 25' 11''$ y $B = 21^o 48' 26''$; (e) $A = 28^o 57' 18''$, $B = 46^o 34' 3''$ y $C = 104^o 28' 39''$; (f) Al ser $90 > 47 + 41$, no hay solución

38. En un tramo recto de un río dos puntos están situados a la misma orilla y a 10 m de distancia uno del otro. Desde cada uno de ellos se observa una señal situada en la otra orilla bajo ángulos de $50^o 15'$ y $42^o 45'$. Halla la anchura del río.

    Solución: 5.23 m

39. Dos móviles parten de un punto A en direcciones que forman un ángulo de 30^o, con velocidades de 60 Km/h y 45 Km/h, respectivamente. Halla la distancia que hay entre ambos al cabo de 1 hora y 45 minutos.

    Solución: 53.89 Km

40. Desde un lado de un barranco queremos medir la distancia entre los puntos A y B situados en el otro lado. Para ello, desde el punto C situado en el lado del observador medimos los ángulos $\measuredangle ACB = 30^o$ y $\measuredangle ACD = 75^o$, siendo D otro punto distante 50 m de C y en el mismo lado que C. Desde el punto D medimos los ángulos $\measuredangle ADC = 25^o$ y $\measuredangle BDC = 85^o$. ¿Cuál es la distancia entre A y B?

    Solución: 47.66 m

41. En un instante dado un observatorio da los siguientes datos: la distancia del observatorio al satélite A es de 400 Km, la distancia del observatorio al satélite B es de 520 Km, y el ángulo bajo el cual se observan los dos satélites es de $41^o28'$. Halla la distancia entre ambos satélites.

    Solución: 344.49 Km

42. A una distancia de 30 m de una torre observamos el punto más alto de la misma bajo un ángulo de 60^o. Si nos alejamos 10 m en la dirección torre-observador, ¿bajo qué ángulo observaremos el punto más alto de la torre?

    Solución: $52^o24'39''$

43. En un triángulo ABC sabemos que $A = 60^o$, $B = 45^o$ y su área es de 30 cm^2. Halla los lados de este triángulo.

    Solución: $a = 8{,}72$, $b = 7{,}12$ y $c = 9{,}73$ cm

44. Dado un triángulo ABC en el que $a = 3$ cm, $b = 5$ cm y $c = 6$ cm, halla el área mediante la fórmula de Heron. Halla también el radio de la circunferencia inscrita a dicho triángulo.

    Solución: $\sqrt{14}$ cm^2 y el radio es $\sqrt{14}/7$ cm