Trigonometría

Ejercicios resueltos

Contents

Ángulos

Ejercicio 1 *Completa el cuadro siguiente:*

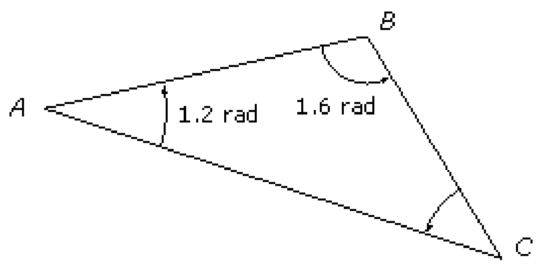
$$\begin{array}{rcll} \frac{\pi}{3} & = & ... & ^o \\ 120^o & = & ... & rad \\ 250^g & = & ... & ^o \end{array}$$

Solución: *Aplicando las fórmulas del cambio, obtenemos*

$$\begin{aligned} \tfrac{\pi}{3} &= 60^o \\ 120^o &= \tfrac{2\pi}{3}\ rad \\ 250^g &= 225^o \end{aligned}$$

■

Ejercicio 2 *¿Cuánto mide en grados sexagesimales el ángulo C del triángulo de la siguiente figura?*



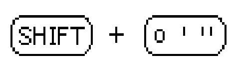
Solución: *La suma de los ángulos de un triángulo es 180^o (π radianes). Por tanto, el ángulo C mide en radianes*

$$\begin{aligned} C &= \pi - (A+B) \\ &= \pi - 2.8 \\ &= 0.3415 \end{aligned}$$

Pasando al sistema sexagesimal tenemos

$$0.3415\ rad = 19.\,567^o = 19^o 34' 1''$$

Esta última igualdad la hemos obtenido mediante calculadora, pulsando las teclas



transformando el ángulo en grados, minutos y segundos. ■

Ejercicio 3 *Si trazamos una circunferencia con radio 5 cm. ¿Cuánto mide, en radianes, el ángulo central correspondiente a un arco de 10 cm? ¿Y si el arco es de 3π cm?*

Solución: *De la definición de radián se deduce que la longitud s de un arco es*

$$s = \alpha \cdot r$$

donde α es el ángulo correspondiente al arco medido en radianes y r es el radio de la circunferencia. Por tanto, si $s = 10$ cm y $r = 5$ cm, entonces

$$\alpha = \frac{s}{r} = 2\ rad$$

Y si $s = 3\pi$ cm y $r = 5$ cm, entonces

$$\alpha = \frac{s}{r} = \frac{3\pi}{5} \ rad$$

■

Ejercicio 4 *Hallar la medida en radianes del ángulo correspondiente a un arco de longitud $4r/5$ sobre una circunferencia de radio r.*

Solución: *De la definición de radián se deduce que la longitud s de un arco es*

$$s = \alpha \cdot r$$

donde α es el ángulo correspondiente al arco medido en radianes y r es el radio de la circunferencia. Por tanto, si $s = 4r/5$, entonces

$$\alpha = \frac{s}{r} = \frac{4}{5} \ rad$$

■

Ejercicio 5 *Hallar la longitud de una circunferencia, sabiendo que un ángulo que mide 3 radianes abarca un arco de longitud $12/\pi$ cm.*

Solución: *De la definición de radián se deduce que la longitud s de un arco es*

$$s = \alpha \cdot r$$

donde α es el ángulo correspondiente al arco medido en radianes y r es el radio de la circunferencia. Por tanto, si $s = 12/\pi$ y $\alpha = 3$ radianes, entonces

$$r = \frac{s}{\alpha} = \frac{4}{\pi} \ cm$$

Como consecuencia, la longitud de la circunferencia es

$$L = 2\pi r = 8 \ cm$$

■

Ejercicio 6 *¿Cuál es la velocidad angular en vueltas por segundo de una rueda que gira a razón de 985 radianes por minuto?*

Solución: *Aplicando factores de conversión tenemos*

$$\frac{985 \ radianes}{1 \ minuto} \times \frac{1 \ vuelta}{2\pi \ radianes} \times \frac{1 \ minuto}{60 \ segundo} = \frac{2.6 \ vueltas}{1 \ segundo}$$

■

Ejercicio 7 *Convierte en radianes los siguientes ángulos: 0^o, 30^o, 45^o, 60^o, 90^o, 180^o, 270^o y 360^o.*

Solución: *Aplicando el factor de conversión, obtenemos*

$$0^o \quad = \quad 0 \ rad$$

$$
\begin{aligned}
30^o &= \tfrac{\pi}{6}\ rad\\
45^o &= \tfrac{\pi}{4}\ rad\\
60^o &= \tfrac{\pi}{3}\ rad\\
90^o &= \tfrac{\pi}{2}\ rad\\
180^o &= \pi\ rad\\
270^o &= \tfrac{3\pi}{2}\ rad\\
360^o &= 2\pi\ rad
\end{aligned}
$$

Estas equivalencias son importantes y es recomendable estudiarlas de memoria.
■

Ejercicio 8 *Mediante la calculadora, expresa en radianes los siguientes ángulos:* $49'21''$, $25^o34'56''$, $134^o12'3''$, $248^o9'32''$ *y* $325^o13''$.

Solución: *Primero pasaremos los ángulos a grados. Para hacerlo utilizaremos la calculadora de la siguiente manera: Para introducir el ángulo* $49'21''$ *seguiremos los pasos siguientes:*

$$0\ \boxed{\text{o ' ''}}\quad 49\quad \boxed{\text{o ' ''}}\quad 21\quad \boxed{\text{o ' ''}}$$

Así obtendremos el ángulo en grados, aparecerá 0.8225^o. *Para comprobar que el ángulo ha sido bien introducido pulsa las teclas*

$$\boxed{\text{SHIFT}} + \boxed{\text{o ' ''}}$$

y mira si el ángulo que aparece coincide con el dado.

Pasando primero cada ángulo a grados y aplicando después el factor de conversión obtenemos:

$$
\begin{aligned}
49'21'' &= 0.8225^o = 0.0146\ rad\\
25^o34'56'' &= 25.5822^o = 0.4465\ rad\\
134^o12'3'' &= 134.2008^o = 2.3422\ rad\\
248^o9'32'' &= 248.1589^o = 4.3312\ rad\\
325^o13'' &= 325.0036^o = 5.6724\ rad
\end{aligned}
$$

■

Ejercicio 9 *Mediante calculadora, expresa los ángulos siguientes en sentido positivo (antihorario), primero en grados, minutos y segundos, y después, en radianes:* $-49'21''$, $-25^o34'56''$, $-134^o12'3''$, $-248^o9'32''$ *y* $-325^o13''$.

Solución: *Sumando* 360^o *a cada ángulo y aplicando después la fórmula del cambio obtenemos:*

$$\begin{aligned}
-49'21'' &= 359.1775^o = 6.2688\ rad \\
-25^o34'56'' &= 334.4178^o = 5.8367\ rad \\
-134^o12'3'' &= 225.7992^o = 3.9409\ rad \\
-248^o9'32'' &= 111.8411^o = 1.9520\ rad \\
-325^o13'' &= 34.9964^o = 0.6108\ rad
\end{aligned}$$

■

Ejercicio 10 *Convierte en grados (sexagesimales) los ángulos siguientes:* $\pi/3$, $2\pi/5$, $4\pi/9$, $\pi/6$ *y* $5\pi/12$.

Solución: *Aplicando la fórmula del cambio, obtenemos:*

$$\begin{aligned}
\tfrac{\pi}{3} &= 60^o \\
\tfrac{2\pi}{5} &= 72^o \\
\tfrac{4\pi}{9} &= 80^o \\
\tfrac{\pi}{6} &= 30^o \\
\tfrac{5\pi}{12} &= 75^o
\end{aligned}$$

■

Ejercicio 11 *Mediante la calculadora, expresa en grados, minutos y segundos los ángulos siguientes:* $5.35\ rad$, $2.65\ rad$, $1.108\ rad$ *y* $0.025\ rad$.

Solución: *Aplicando el factor de conversión, obtenemos:*

$$5.35\ rad \cdot \frac{180}{\pi} = 306.5324^o = 306^o31'57''$$

y del mismo modo con los demás:

$$\begin{aligned}
2.65\ rad &= 151^o50'2'' \\
1.108\ rad &= 63^o29'1'' \\
0.025\ rad &= 1^o25'57''
\end{aligned}$$

Usa la calculadora, pulsando las teclas

SHIFT + ° ' ''

para expresar el ángulo en grados, minutos y segundos. ■

Ejercicio 12 *Calcula el complementario y el suplementario de $\pi/6$ y $2\pi/5$ en radianes y en grados.*

Solución: *Recuerda que dos ángulos complementarios suman 90^o o $\pi/2$ radianes, y dos ángulos suplementarios suman 180^o o π radianes. Primero calcularemos los ángulos pedidos en radianes y después los pasaremos a grados sexagesimales mediante el factor de conversión correspondiente. Así, para $\pi/6$ tenemos:*

$$\begin{array}{rccc} \textit{Complementario de } \frac{\pi}{6}: & \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} & = & 60^o \\ \textit{Suplementario de } \frac{\pi}{6}: & \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} & = & 150^o \end{array}$$

y para $2\pi/5$, tenemos:

$$\begin{array}{rccc} \textit{Complementario de } \frac{2\pi}{5}: & \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{5} = \frac{\pi}{10} & = & 18^o \\ \textit{Suplementario de } \frac{2\pi}{5}: & \pi - \frac{2\pi}{5} = \frac{3\pi}{5} & = & 108^o \end{array}$$

■

Ejercicio 13 *Calcula la medida del ángulo principal correspondiente a los siguientes ángulos: 375^o, 1820^o, 6π, 20.34 rad, -915^o.*

Solución: *La medida principal de un ángulo es la que se obtiene reduciéndolo a la primera vuelta. Para calcularla debemos dividir el ángulo por 360^o si está dado en grados o por 2π si viene dado en radianes. Efectuadas estas divisiones, obtenemos:*

$$375^o = 15^o + 1 \cdot 360^o \implies 15^o$$

$$1820^o = 20^o + 5 \cdot 360^o \implies 20^o$$

$$6\pi = 0 + 3 \cdot 2\pi \implies 0 \ rad$$

$$20.34 \ rad = 1.49 + 3 \cdot 2\pi \implies 1.49 \ rad$$

$$-915^o = -195^o - 2 \cdot 360^o \implies -195^o \implies 165^o$$

■

Ejercicio 14 *Halla la expresión general de todos los ángulos que coinciden con: 35^o, 720^o, $\pi/3$, 3π, -12 rad, -150^o.*

Solución: *Si α es la medida principal de un ángulo, entonces la expresión general de todos los ángulos que coinciden con él es*

$$\alpha + k \cdot 360^o \quad \textit{o bien} \quad \alpha + k \cdot 2\pi$$

donde k es un número entero cualesquiera (que indica el número de vueltas). Por tanto, primero debemos calcular la medida principal de cada ángulo y después escribiremos la expresión general de todos los ángulos que coinciden con él. De este modo, tenemos

$$35^o \implies 35^o + k \cdot 360^o$$

$$
\begin{gathered}
720^o = 0^o + 2 \cdot 360^o \quad \Longrightarrow \quad 0^o + k \cdot 360^o \\
\tfrac{\pi}{3} \quad \Longrightarrow \quad \tfrac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \\
3\pi = \pi + 1 \cdot 2\pi \quad \Longrightarrow \quad \pi + k \cdot 2\pi \\
-12 \ rad \quad \Longrightarrow \quad -12 = -5.72 - 1 \cdot 2\pi \quad \Longrightarrow \quad -5.72 \quad \Longrightarrow \quad 0.56 \quad \Longrightarrow \quad 0.56 + k \cdot 2\pi \\
-150^o \quad \Longrightarrow \quad 210^o \quad \Longrightarrow \quad 210^o + k \cdot 360^o
\end{gathered}
$$

■

Razones trigonométricas

Ejercicio 15 *Mediante calculadora, calcula las siguientes razones trigonométricas:* $\sin 32^o$, $\cos 17^o 21'$, $\tan 6^o 23' 54''$ *y* $\sin 76^o 22' 34''$.

Solución: *Primero comprueba que tu calculadora está preparada para introducir ángulos en grados; si no es así, pulsa la tecla*

MODE

y elige D o deg *(modo en grados sexagesimales). Para calcular* $\sin 32^o$ *introduce el ángulo y pulsa después la tecla*

sin

y obtendrás

$$\sin 32^o = 0.5299$$

Del mismo modo, pulsando la tecla

cos

obtendrás

$$\cos 17^o 21' = 0.9545$$

y, pulsando

tan

$$\tan 6^o 23' 54'' = 0.1121$$

Finalmente,

$$\sin 76^o 22' 34'' = 0.9719$$

■

Ejercicio 16 *Mediante calculadora, determina las siguientes razones trigonométricas (los ángulos vienen expresados en radianes):* $\sin 1.14$, $\cos 0.012$ *y* $\tan 0.899$.

Solución: *Como los ángulos vienen expresados en radianes, primero debemos cambiar el modo de introducir sus medidas en la calculadora. Para ello, pulsa la tecla*

$$\boxed{\text{MODE}}$$

y elige R o rad (modo en radianes). Para calcular $\sin 1.14$ *introduce el ángulo y pulsa después la tecla correspondiente y obtendrás*

$$\sin 1.14 = 0.9086$$

Del mismo modo, tenemos

$$\cos 0.012 = 0.9999$$

$$\tan 0.899 = 1.2576$$

■

Ejercicio 17 *Mediante calculadora, determina el ángulo agudo* α *en los siguientes casos: (a)* $\sin\alpha = 0.4163$*, (b)* $\cos\alpha = 0.8137$ *y (c)* $\tan\alpha = 0.5617$.

Solución: *Dada la razón trigonométrica, si quieres calcular el ángulo deberás primero pulsar la tecla*

$$\boxed{\text{SHIFT}}$$

y después la tecla correspondiente a la razón dada.

(a) Así, conocida $\sin\alpha = 0.4163$*, escribe el valor de la razón en la calculadora y pulsa las teclas*

$$\boxed{\text{SHIFT}} + \boxed{\text{sin}}$$

y obtendrás

$$\alpha = 24^o 36' 4''$$

una vez hayas pulsado

$$\boxed{\text{SHIFT}} + \boxed{\text{o ' ''}}$$

(b) Del mismo modo, a partir de $\cos\alpha = 0.8137$*, pulsando*

$$\boxed{\text{SHIFT}} + \boxed{\text{cos}}$$

obtendrás

$$\alpha = 35^o 32' 26''$$

(c) Finalmente, de $\tan\alpha = 0.5617$*, pulsando*

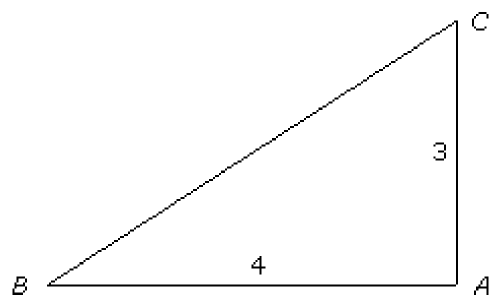
$$\boxed{\text{SHIFT}} + \boxed{\text{tan}}$$

obtendrás

$$\alpha = 29^o 19' 23''$$

■

Ejercicio 18 *En el triángulo rectángulo de la figura, halla todas las razones trigonométricas de los ángulos B y C.*



Solución: *Por Pitágoras, primero calculamos la hipotenusa del triángulo*

$$a = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

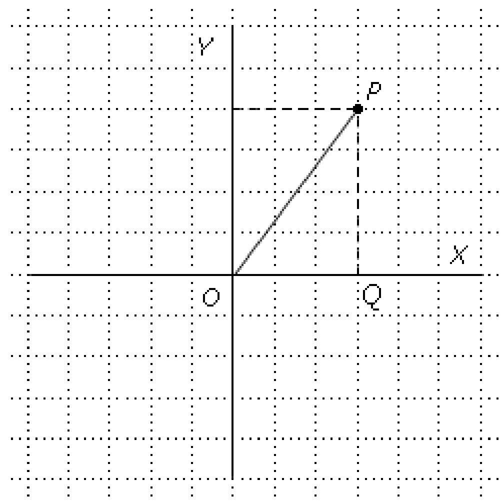
Recordando las definiciones de las tres razones trigonométricas fundamentales, obtenemos

$$\begin{aligned} \sin B &= \tfrac{b}{a} = \tfrac{3}{5} \\ \cos B &= \tfrac{c}{a} = \tfrac{4}{5} \\ \tan B &= \tfrac{b}{c} = \tfrac{3}{4} \\ \sin C &= \tfrac{c}{a} = \tfrac{4}{5} \\ \cos C &= \tfrac{b}{a} = \tfrac{3}{5} \\ \tan C &= \tfrac{c}{b} = \tfrac{4}{3} \end{aligned}$$

■

Ejercicio 19 *El punto P de coordenadas $(3,4)$ se une con el origen de coordenadas O determinando la recta PO. Halla las razones trigonométricas del ángulo α que forma la recta PO con el semieje positivo de abscisas.*

Solución: *En un sistema de coordenadas cartesiano dibujamos el punto y el ángulo.*



Tomando el triángulo de vértices OPQ, cuya hipotenusa es

$$OP = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

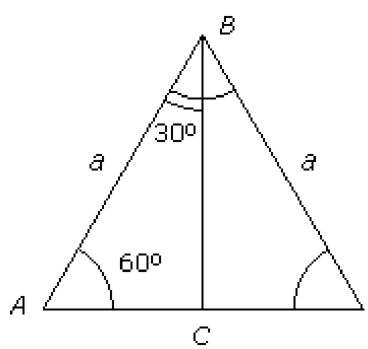
tenemos

$$\begin{aligned} \sin\alpha &= \tfrac{4}{5} \\ \cos\alpha &= \tfrac{3}{5} \\ \tan\alpha &= \tfrac{4}{3} \end{aligned}$$

■

Ejercicio 20 *Dibuja un triángulo equilatero de lado a. Calcula su altura en función del lado. Deduce el valor de las razones trigonométricas de los ángulos 60^o y 30^o.*

Solución: *Consideremos el triángulo equilatero de lado a, dibujado en la siguiente figura*



Al sumar 180^o *los tres ángulos de un triángulo, cada uno de los ángulos de un triángulo equilatero mide* 60^o*. Consideremos el triángulo rectángulo de vértices* ABC *que se obtiene del triángulo dado. Es claro que* $A = 60^o$, $B = 30^o$, $C = 90^o$, $\overline{AB} = a$ *y* $\overline{AC} = a/2$*. Por Pitágoras, obtenemos*

$$\begin{aligned} \overline{CB} &= \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{4a^2 - a^2}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{3a^2}{4}} \\ &= \frac{a\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

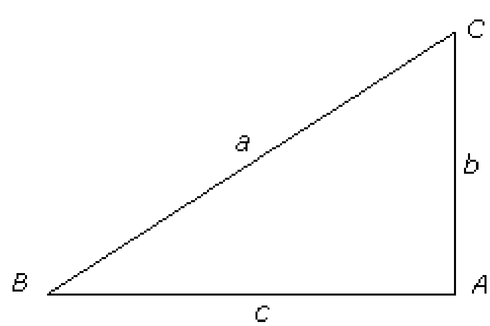
que es la altura del triángulo equilatero en función del lado. A partir de esta información y de las definiciones de las razones trigonométricas obtenemos

$$\begin{aligned} \sin 60^o &= \frac{\overline{CB}}{\overline{AB}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos 60^o &= \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2} \\ \tan 60^o &= \frac{\overline{CB}}{\overline{AC}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \frac{2a\sqrt{3}}{2a} = \sqrt{3} \\ \sin 30^o &= \frac{\overline{CA}}{\overline{BA}} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2} \\ \cos 30^o &= \frac{\overline{BC}}{\overline{BA}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \tan 30^o &= \frac{\overline{CA}}{\overline{BC}} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{2a}{2a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

■

Ejercicio 21 *En un triángulo rectángulo* ABC*, recto en* A*, el área vale* 864 cm^2 *y el cateto* AB *mide* 48 *cm. Halla todas las razones trigonométricas de los ángulos* B *y* C*.*

Solución: *Consideremos el triángulo rectángulo de la figura*



del cual conocemos su área y $c = 48$ *cm. A partir de esta información podemos escribir*

$$864 = \frac{48b}{2} \quad \Longrightarrow \quad b = 36$$

Por Pitagoras, deducimos la medida de la hipotenusa

$$\begin{aligned} a &= \sqrt{c^2 + b^2} \\ &= \sqrt{48^2 + 36^2} \\ &= 60 \end{aligned}$$

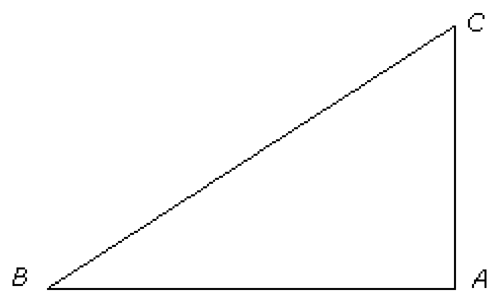
Con toda esta información que acabamos de obtener ya podemos calcular las razones trigonométricas de los ángulos B *y* C*.*

$$\begin{aligned} \sin B &= \tfrac{b}{a} = \tfrac{36}{60} = \tfrac{3}{5} \\ \cos B &= \tfrac{c}{a} = \tfrac{48}{60} = \tfrac{4}{5} \\ \tan B &= \tfrac{b}{c} = \tfrac{36}{48} = \tfrac{3}{4} \\ \sin C &= \tfrac{c}{a} = \tfrac{48}{60} = \tfrac{4}{5} \\ \cos C &= \tfrac{b}{a} = \tfrac{36}{60} = \tfrac{3}{5} \\ \tan C &= \tfrac{c}{b} = \tfrac{48}{36} = \tfrac{4}{3} \end{aligned}$$

■

Ejercicio 22 *En un triángulo rectángulo la longitud de la hipotenusa es el doble que la de uno de los catetos. Halla las razones trigonométricas de los ángulos agudos de este triángulo.*

Solución: *Consideremos el triángulo rectángulo de la siguiente figura*



y supongamos que $\overline{AC} = x$ *y* $\overline{BC} = 2x$*. Entonces podemos escribir*

$$\sin B = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$$

y, por tanto,

$$B = 30^o$$

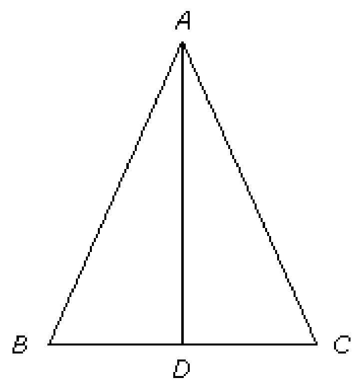
y, como consecuencia,

$$C = 60^o$$

Las razones trigonométricas de estos ángulos las hemos obtenido en el ejercicio 20. ∎

Ejercicio 23 *En un triángulo isósceles ABC, los ángulos B y C son iguales, el lado $\overline{BC}$ mide 24 cm y el área vale 216 cm^2. Halla $\sin A/2$ y $\cos C$.*

Solución: *Consideremos el triángulo isósceles de la figura siguiente*



del cual conocemos su área y $\overline{BC} = 24$ cm. Con esta información podemos escribir

$$216 = \tfrac{24 \cdot \overline{DA}}{2} \implies \overline{DA} = 18$$

En el triángulo de vértices ABD, obtenido del triángulo dado, conocemos $\overline{DA} = 18$ y $\overline{BD} = 12$. Con esta información podemos aplicar la razón trigonométrica de tangente respecto del ángulo B

$$\tan B = \frac{\overline{DA}}{\overline{BD}} = \frac{18}{12} = 1.5$$

de donde

$$B = 56^o 18' 36''$$

y, por tanto,

$$\begin{aligned} A &= 180^o - (B + C) \\ &= 180^o - 112^o 37' 12'' \\ &= 67^o 22' 48'' \end{aligned}$$

Luego

$$\sin \frac{A}{2} = \sin 33^o 41' 24'' = 0.5547$$

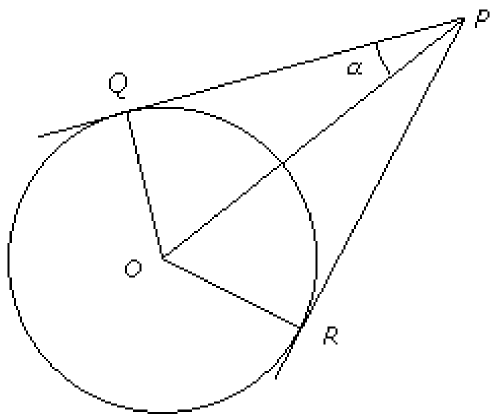
y

$$\cos C = \cos 56^o 18' 36'' = 0.5547$$

∎

Ejercicio 24 *El área de un círculo es 25π cm^2. Desde un punto exterior que dista 18 cm del centro se trazan las dos tangentes a la circunferencia. Halla la longitud de dichas tangentes y el coseno de la mitad del ángulo que forman dichas tangentes.*

Solución: *En la figura hemos trazado dos tangentes a la circunferencia desde un punto exterior P.*



Si O es el centro de la circunferencia, entonces las rectas OP y OR son perpendiculares a las tangentes y, por tanto, los ángulos formados por estas rectas en Q y R son rectos. Al conocer el área del círculo, podemos escribir

$$25\pi = \pi \cdot \overline{OQ}^2$$

de donde obtenemos el radio de la circunferencia

$$\overline{OQ} = \sqrt{25} = 5$$

Consideremos ahora el triángulo rectángulo de vértices OPQ del cual conocemos $\overline{OP} = 18$ y $\overline{OQ} = 5$. Con esta información podemos escribir

$$\sin \alpha = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}} = \frac{5}{18}$$

de donde

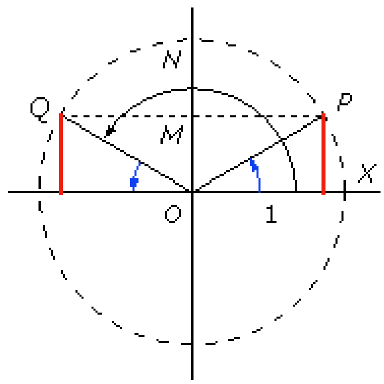
$$\alpha = 16^o 7' 39''$$

■

Circunferencia goniométrica

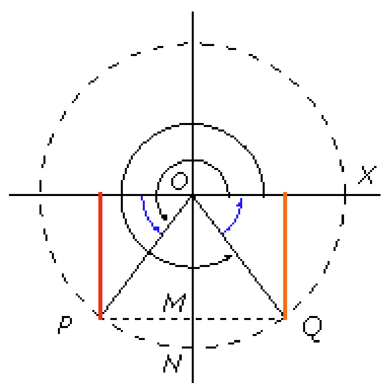
Ejercicio 25 *Sobre la circunferencia goniométrica construye dos ángulos para los que el seno vale (a) $1/2$ y (b) -0.8.*

Solución: *(a) Por el punto medio M de ON trazamos una paralela al eje de abscisas (eje OX), obteniendo los puntos P y Q como intersección de esta* *recta con la circunferencia. Las semirrectas OP y OQ forman con el semieje positivo de abscisas dos ángulos que tienen por seno $1/2$. Mira la construcción y estos dos ángulos en la siguiente figura*



verás que hemos trazado en rojo el seno de ambos ángulos.

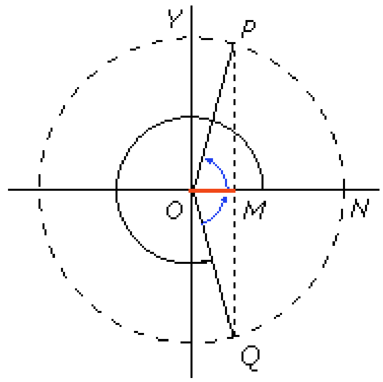
(b) Del mismo modo, por el punto M del segmento ON, situado a 0.8 de O, trazamos una paralela al eje de abscisas, obteniendo los puntos P y Q como intersección de esta recta con la circunferencia. Las semirrectas OP y OQ forman con el semieje positivo de abscisas dos ángulos que tienen por seno -0.8. Mira la construcción y estos dos ángulos en la siguiente figura



verás que hemos trazado en rojo el seno de ambos ángulos. ■

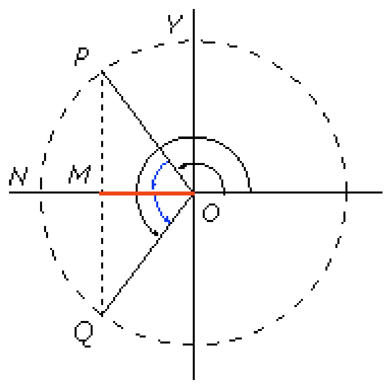
Ejercicio 26 *Sobre la circunferencia goniométrica construye dos ángulos para los que el coseno vale (a) $1/4$ y (b) $-3/5$.*

Solución: *(a) Por el punto medio M del segmento ON, situado a 0.25 de O, trazamos una paralela al eje de ordenadas (eje OY), obteniendo los puntos P y Q como intersección de esta recta con la circunferencia. Las semirrectas OP y OQ forman con el semieje positivo de abscisas dos ángulos que tienen por coseno $1/4$. Mira la construcción y estos dos ángulos en la siguiente figura*



verás que hemos trazado en rojo el coseno de ambos ángulos.

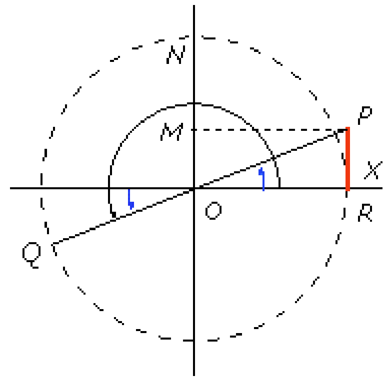
(b) Del mismo modo, por el punto medio M del segmento ON, situado a 0.6 *de O, trazamos una paralela al eje de ordenadas (eje OY), obteniendo los puntos P y Q como intersección de esta recta con la circunferencia. Las semirrectas OP y OQ forman con el semieje positivo de abscisas dos ángulos que tienen por coseno* $-3/5$. *Mira la construcción y estos dos ángulos en la siguiente figura*



verás que hemos trazado en rojo el coseno de ambos ángulos. ■

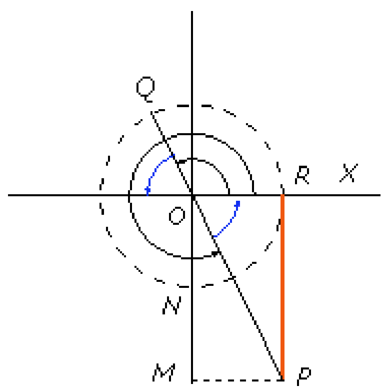
Ejercicio 27 *Sobre la circunferencia goniométrica construye dos ángulos para los que la tangente vale (a)* 0.4 *y (b)* -2.

Solución: *(a) Por el punto M del segmento ON, situado a* 0.4 *de O, trazamos una paralela al eje de abscisas (eje OX), obteniendo el punto P como intersección de esta recta con la recta tangente a la circunferencia trazada por R. Obtenemos el punto Q, prolongando la recta OP hasta cortar a la circunferencia por el otro lado. Las semirrectas OP y OQ forman con el semieje positivo de abscisas dos ángulos que tienen por tangente* 0.4. *Mira la construcción y estos dos ángulos en la siguiente figura*



verás que hemos trazado en rojo la tangente de ambos ángulos.

(b) Del mismo modo, por el punto M del semieje negativo de ordenadas, situado a 2 de O, trazamos una paralela al eje de abscisas, obteniendo el punto P como intersección de esta recta con la recta tangente a la circunferencia trazada por R. Obtenemos el punto Q, prolongando la recta OP hasta cortar a la circunferencia por el otro lado. Las semirrectas OP y OQ forman con el semieje positivo de abscisas dos ángulos que tienen por tangente -2. Mira la construcción y estos dos ángulos en la siguiente figura



verás que hemos trazado en rojo la tangente de ambos ángulos. ∎

Ejercicio 28 *Utiliza la calculadora para dar las medidas de los ángulos que has dibujado en los tres ejercicios anteriores.*

Solución: *Si* $\sin\alpha = 1/2$*, mediante calculadora*

SHIFT + sin

obtenemos

$$\alpha = 30^o$$

observando la primera figura del ejercicio 25, vemos que el otro ángulo β *es el suplementario de* α

$$\beta = 180^o - \alpha = 180^o - 30^o = 150^o$$

Del mismo modo, si $\sin\alpha = -0.8$*, mediante calculadora, obtenemos*

$$\alpha = -53^o 7' 48'' \Longrightarrow 306^o 52' 12''$$

y, por tanto,

$$\beta = 180 - \alpha = 180^o + 53.1301^o = 233^o 7' 48''$$

Si $\cos\alpha = 1/4$*, mediante calculadora*

$$\boxed{\text{SHIFT}} + \boxed{\text{cos}}$$

obtenemos

$$\alpha = 75^o 31' 21''$$

observando la primera figura del ejercicio 26, vemos que el otro ángulo β *es el opuesto de* α

$$\beta = -\alpha = -75^o 31' 21'' \Longrightarrow 284^o 28' 39''$$

Del mismo modo, si $\cos\alpha = -3/5$*, mediante calculadora, obtenemos*

$$\alpha = 126^o 52' 12''$$

y, por tanto,

$$\beta = -\alpha = -126^o 52' 12'' \Longrightarrow 233^o 7' 48''$$

Si $\tan\alpha = 0.4$*, mediante calculadora*

$$\boxed{\text{SHIFT}} + \boxed{\text{tan}}$$

obtenemos

$$\alpha = 21^o 48' 5''$$

observando la primera figura del ejercicio 27, vemos que el otro ángulo β *es tal que su diferencia con* α *es* 180^o*. Por tanto,*

$$\beta = \alpha + 180^o = 21^o 48' 5'' + 180^o = 201^o 48' 5'$$

Del mismo modo, si $\tan\alpha = -2$*, mediante calculadora, obtenemos*

$$\alpha = -63^o 26' 6''$$

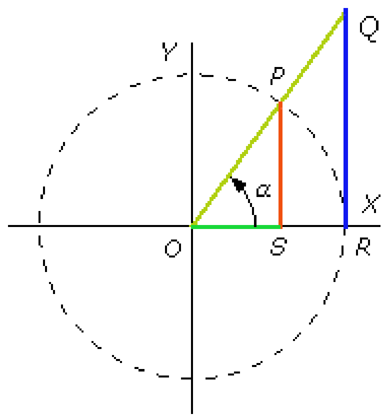
y, por tanto,

$$\beta = \alpha + 180^o = -63^o 26' 6'' + 180^o = 116^o 33' 54''$$

■

Ejercicio 29 *Dibuja la circunferencia goniométrica, un ángulo α cualquiera del primer cuadrante y deduce las relaciones siguientes: (a)* $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, *(b)* $\tan\alpha = \sin\alpha/\cos\alpha$ *y (c)* $1 + \tan^2\alpha = \sec^2\alpha$.

Solución: *Consideremos el ángulo α dibujado en la siguiente figura*



Hemos representado algunas razones trigonométricas de este ángulo con trazos de colores. Así, en rojo aparece $\sin\alpha$, *en verde,* $\cos\alpha$, *en azul,* $\tan\alpha$, *y en oliva,* $\sec\alpha$.

(a) Aplicando Pitágoras al triángulo rectángulo OPS, obtenemos

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

pues, $\overline{OP} = 1$ al tratarse de la circunferencia goniométrica.

(b) Puesto que los triángulos OPS y OQR son semejantes, tienen sus lados proporcionales, es decir,

$$\tan\alpha = \frac{\tan\alpha}{1} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

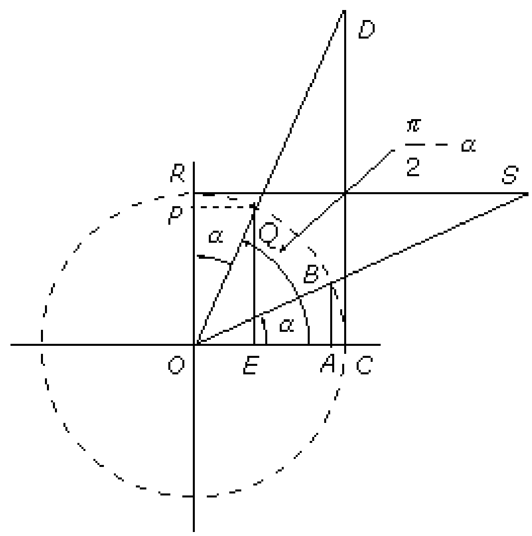
(c) Finalmente, aplicando de nuevo Pitágoras al triángulo rectángulo OQR, obtenemos

$$1 + \tan^2\alpha = \sec^2\alpha$$

pues $\overline{OR} = 1$. ■

Ejercicio 30 *Sobre la circunferencia goniométrica dibuja un ángulo α cualquiera en el primer cuadrante y estudia la relación que hay entre las razones trigonométricas de α y su complementario.*

Solución: *Sobre la circunferencia goniométrica dibujamos un ángulo α y su complementario $\frac{\pi}{2} - \alpha$*



A partir de la figura, es claro que

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \overline{EQ} = \overline{OP} = \overline{OA} = \cos\alpha$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \overline{OE} = \overline{PQ} = \overline{AB} = \sin\alpha$$
$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \overline{CD} = \overline{RS} = \cot\alpha$$

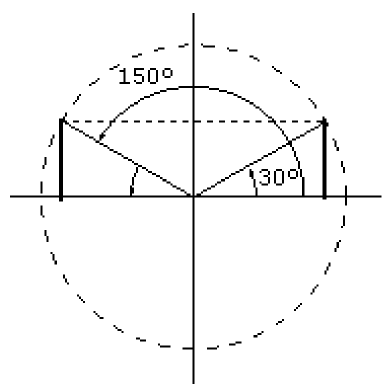
■

Ejercicio 31 *Sin usar la calculadora, halla dos ángulos α y β para los cuales el seno vale (a) $1/2$ y (b) $-\sqrt{2}/3$. ¿Qué relación hay entre α y β?*

Solución: *(a) Debemos saber que*

$$\sin 30^o = \frac{1}{2}$$

y, por tanto, $\alpha = 30^o$. Para hallar β, consideremos la siguiente construcción sobre la circunferencia goniométrica



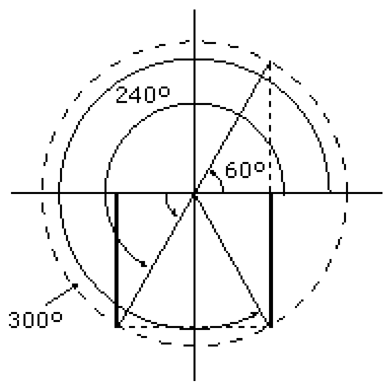
A partir de esta figura se deduce que β es el suplementario de α. Por tanto,

$$\beta = 180^o - 30^o = 150^o$$

(b) Debemos saber que

$$\sin 60^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Para hallar α y β, consideremos la siguiente construcción sobre la circunferencia goniométrica



A partir de esta figura vemos que $\alpha = 240^o$ y $\beta = 180^o - 240^o = -60^o$, o sea, $\beta = 300^o$.

Como conclusión, podemos afirmar que si α y β son dos ángulos distintos tales que

$$\sin \alpha = \sin \beta$$

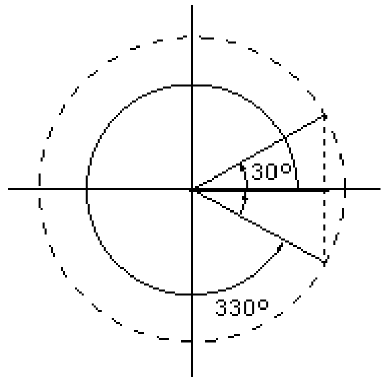
entonces $\beta = 180^o - \alpha$, es decir, α y β son suplementarios. ■

Ejercicio 32 *Sin usar la calculadora, halla dos ángulos α y β para los cuales el coseno vale (a) $\sqrt{3}/2$ y (b) $-1/2$. ¿Qué relación hay entre α y β?*

Solución: *(a) Debemos saber que*

$$\cos 30^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

y, por tanto, $\alpha = 30^o$. Para hallar β, consideremos la siguiente construcción sobre la circunferencia goniométrica



A partir de esta figura se deduce que β *es el opuesto de* α*. Por tanto,*

$$\beta = -30^o$$

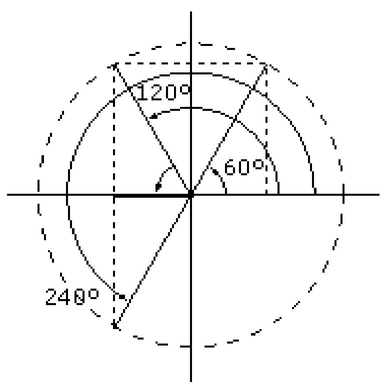
es decir,

$$\beta = 330^o$$

(b) Debemos saber que

$$\cos 60^o = \frac{1}{2}$$

Para hallar α *y* β*, consideremos la siguiente construcción sobre la circunferencia goniométrica*



A partir de esta figura vemos que $\alpha = 120^o$ *y* $\beta = -120^o$*, o sea,* $\beta = 240^o$*.*

Como conclusión, podemos afirmar que si α *y* β *son dos ángulos distintos tales que*

$$\cos\alpha = \cos\beta$$

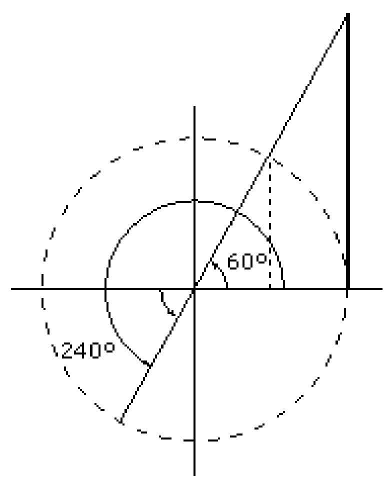
entonces $\beta = -\alpha$*, es decir,* α *y* β *son opuestos.* ■

Ejercicio 33 *Sin usar la calculadora, halla dos ángulos α y β para los cuales la tangente vale (a) $\sqrt{3}$ y (b) $-\sqrt{3}/3$. ¿Qué relación hay entre α y β?*

Solución: *(a) Debemos saber que*

$$\tan 60^o = \sqrt{3}$$

y, por tanto, $\alpha = 60^o$. Para hallar β, consideremos la siguiente construcción sobre la circunferencia goniométrica



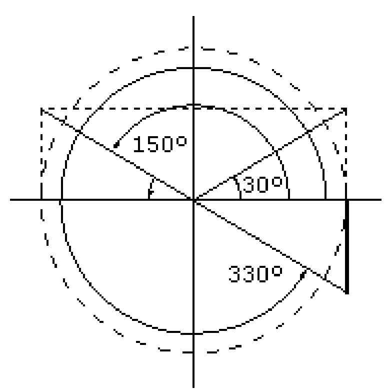
A partir de esta figura se deduce que β es tal que $\beta - \alpha = 180^o$, es decir, $\beta = 180^o + \alpha$. Por tanto,

$$\beta = 180^o + 60^o = 240^o$$

(b) Debemos saber que

$$\tan 30^o = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Para hallar α y β, consideremos la siguiente construcción sobre la circunferencia goniométrica



A partir de esta figura vemos que $\alpha = 150^o$ *y* $\beta = 180^o + 150^o = 330^o$*.*

Como conclusión, podemos afirmar que si α *y* β *son dos ángulos distintos tales que*

$$\tan\alpha = \tan\beta$$

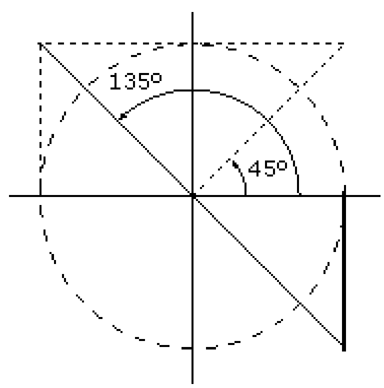
entonces $\beta = \alpha + 180^o$*.* ■

Ejercicio 34 *Deduce la medida del ángulo* α*, sabiendo que pertenece: (a) Al segundo cuadrante y que* $\tan\alpha = -1$*. (b) Al tercer cuadrante y que* $\sin\alpha = -1/2$*. (c) Al cuarto cuadrante y que* $\cos\alpha = \sqrt{2}/2$*. Observa que los resultados obtenidos en los tres casos no coinciden con los que se obtendrían directamente mediante una calculadora.*

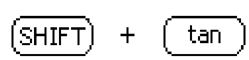
Solución: *(a) Debemos saber que*

$$\tan 45^o = 1$$

Consideremos ahora la siguiente construcción sobre la circunferencia goniométrica



A partir de la figura, obtenemos que $\alpha = 135^o$*. Mediante calculadora, partiendo de* $\tan\alpha = -1$ *y pulsando las teclas*



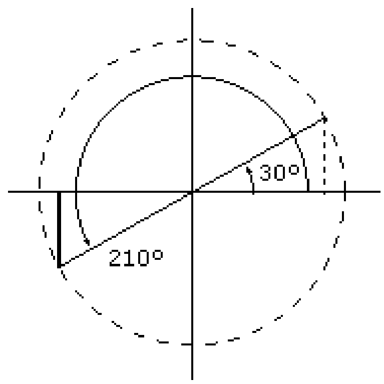
obtenemos $\alpha = -45^o$*, es decir,* $\alpha = 315^o$*, que no coincide con la medida que hemos obtenido a partir de la construcción realizada. Como consecuencia, deberemos ir con cuidado a la hora de obtener medidas de ángulos con la calculadora. En particular, cuando tengamos que calcular la medida de un ángulo conocida su tangente, la calculadora nos dará la medida en el primer cuadrante, si la razón es positiva, y en el cuarto cuadrante (en sentido horario o negativo), si la razón es negativa. Si lo que nos interesa es encontrar la medida del ángulo en el primer cuadrante, sabiendo que la razón es positiva, la calculadora nos la da directamente; lo mismo ocurre, si la medida del ángulo es en el cuarto cuadrante y la razón es negativa. El problema se encuentra cuando la razón es positiva y queremos buscar la medida del ángulo en el tercer cuadrante, o bien,* *cuando la razón es negativa y queremos buscar la medida del ángulo en el segundo cuadrante. En estos casos la calculadora no da directamente las medidas que queremos. Para encontrarlas deberemos sumar* 180^o. *Así, en nuestro caso anterior bastará hacer*

$$\alpha = -45^o + 180^o = 135^o$$

(b) Debemos saber que

$$\sin 30^o = \frac{1}{2}$$

Consideremos ahora la siguiente construcción sobre la circunferencia goniométrica



A partir de la figura, obtenemos que $\alpha = 210^o$. *Mediante calculadora, partiendo de* $\sin\alpha = -1/2$ *y pulsando las teclas*

SHIFT + sin

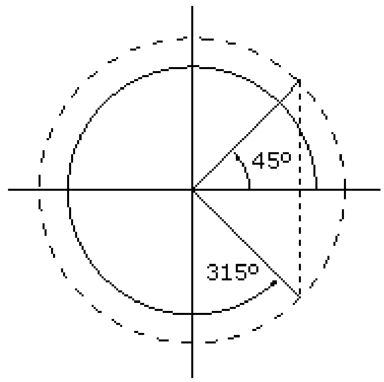
obtenemos $\alpha = -30^o$, *o sea,* $\alpha = 330^o$, *que no coincide con la medida que hemos obtenido a partir de la construcción realizada. Como consecuencia, deberemos ir con cuidado a la hora de obtener medidas de ángulos con la calculadora. En particular, cuando tengamos que calcular la medida de un ángulo conocido su seno, la calculadora nos dará la medida en el primer cuadrante, si la razón es positiva, y en el cuarto cuadrante (en sentido horario o negativo), si la razón es negativa. Si lo que nos interesa es encontrar la medida del ángulo en el primer cuadrante, sabiendo que la razón es positiva, la calculadora nos la da directamente; lo mismo ocurre, si la medida del ángulo es en el cuarto cuadrante y la razón es negativa. El problema se encuentra cuando la razón es positiva y queremos buscar la medida del ángulo en el segundo cuadrante, o bien, cuando la razón es negativa y queremos buscar la medida del ángulo en el tercer cuadrante. En estos casos la calculadora no da directamente las medidas que queremos. Para encontrarlas deberemos cambiarle el signo y sumarle después* 180^o. *Así, en nuestro caso anterior bastará hacer*

$$\alpha = 30^o + 180^o = 210^o$$

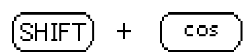
(c) Debemos saber que

$$\cos 45^o = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Consideremos ahora la siguiente construcción sobre la circunferencia goniométrica



A partir de la figura, obtenemos que $\alpha = 315^o$. *Mediante calculadora, partiendo de* $\cos\alpha = \sqrt{2}/2$ *y pulsando las teclas*



obtenemos $\alpha = 45^o$, *que no coincide con la medida que hemos obtenido a partir de la construcción realizada. Como consecuencia, deberemos ir con cuidado a la hora de obtener medidas de ángulos con la calculadora. En particular, cuando tengamos que calcular la medida de un ángulo conocido su coseno, la calculadora nos dará la medida en el primer cuadrante, si la razón es positiva, y en el segundo cuadrante, si la razón es negativa. Si lo que nos interesa es encontrar la medida del ángulo en el primer cuadrante, sabiendo que la razón es positiva, la calculadora nos la da directamente; lo mismo ocurre, si la medida del ángulo es en el segundo cuadrante y la razón es negativa. El problema se encuentra cuando la razón es positiva y queremos buscar la medida del ángulo en el cuarto cuadrante, o bien, cuando la razón es negativa y queremos buscar la medida del ángulo en el tercer cuadrante. En estos casos la calculadora no da directamente las medidas que queremos. Para encontrarlas deberemos cambiarle el signo y sumarle después* 360^o. *Así, en nuestro caso anterior bastará hacer*

$$\alpha = -45^o + 360^o = 315^o$$

■

Relación entre las razones trigonométricas

Ejercicio 35 *Si* α *es un ángulo que cumple la condición* $\pi/2 < \alpha < \pi$ *y además* $\tan\alpha = -2$, *calcula las demás razones trigonométricas sin usar la calculadora.*

Solución: *Vemos que el ángulo se encuentra en el segundo cuadrante y, por tanto, el signo de las razones* $\sin\alpha$ *y* $\cos\alpha$ *son positivo y negativo, respectivamente. Se cumple la relación*

$$1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

Por la información que tenemos, podemos escribir

$$1+(-2)^2=\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

luego,

$$\begin{aligned}5\cos^2\alpha &= 1\\ \cos^2\alpha &= \frac{1}{5}\\ \cos\alpha &= -\sqrt{\frac{1}{5}}\\ &= -\frac{1}{\sqrt{5}}\\ &= -\frac{\sqrt{5}}{5}\end{aligned}$$

Puesto que

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

entonces

$$\sin\alpha=\tan\alpha\cdot\cos\alpha$$

Luego,

$$\begin{aligned}\sin\alpha &= (-2)\cdot\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)\\ &= \frac{2\sqrt{5}}{5}\end{aligned}$$

Las otras razones se derivan de las fundamentales:

$$\csc\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}=\frac{1}{\frac{2\sqrt{5}}{5}}=\frac{5}{2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}=\frac{1}{-\frac{1}{\sqrt{5}}}=-\sqrt{5}$$

$$\cot\alpha=\frac{1}{\tan\alpha}=\frac{1}{-2}=-\frac{1}{2}$$

■

Ejercicio 36 *Si* $\pi < \alpha < 3\pi/2$ *y* $\cos\alpha = -1/4$, *halla las demás razones trigonométricas sin usar la calculadora.*

Solución: *Vemos que el ángulo se encuentra en el tercer cuadrante y, por tanto, el signo de las razones* $\sin\alpha$ *y* $\tan\alpha$ *son negativo y positivo, respectivamente. Se cumple la relación*

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Por la información que tenemos, podemos escribir

$$\begin{aligned}
\sin^2\alpha + \left(-\frac{1}{4}\right)^2 &= 1 \\
\sin^2\alpha + \frac{1}{16} &= 1 \\
\sin^2\alpha &= 1 - \frac{1}{16} \\
\sin^2\alpha &= \frac{15}{16} \\
\sin\alpha &= -\sqrt{\frac{15}{16}} \\
&= -\frac{\sqrt{15}}{4}
\end{aligned}$$

También se cumple que

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

Luego,

$$\tan\alpha = \frac{-\frac{\sqrt{15}}{4}}{-\frac{1}{4}} = \frac{4\sqrt{15}}{4} = \sqrt{15}$$

Las otras razones se derivan de las fundamentales:

$$\begin{aligned}
\csc\alpha &= \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{15}}{4}} = -\frac{4}{\sqrt{15}} = -\frac{4\sqrt{15}}{15} \\
\sec\alpha &= \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1}{-\frac{1}{4}} = -4 \\
\cot\alpha &= \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{1}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{15}
\end{aligned}$$

■

Ejercicio 37 *¿Existe algún ángulo tal que su seno vale* $1/3$ *y su tangente* 5*? Razona la respuesta sin utilizar la calculadora.*

Solución: *Supongamos por un momento que este ángulo existiera y fuera* α. *Según la información proporcionada tenemos:* $\sin\alpha = 1/3$ *y* $\tan\alpha = 5$. *Entonces, al cumplirse que*

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

obtenemos que

$$\cos\alpha = \tan\alpha \cdot \sin\alpha = \frac{5}{3}$$

Ahora bien, sabemos que también se cumple que

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Por tanto, según la información de que disponemos, deberá cumplirse que la expresión

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{5}{3}\right)^2$$

ha de ser igual a 1*, pero*

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} + \frac{25}{9} = \frac{26}{9} \neq 1$$

Como consecuencia, no es posible que exista un ángulo que satisfaga las condiciones del enunciado. ■

Ejercicio 38 *Halla las razones trigonométricas del ángulo α sabiendo que: (a)* $\sin\alpha = -3/4$ *y* $\tan\alpha < 0$*. (b)* $\csc\alpha = 4$ *y* $\cos\alpha > 0$*. (c)* $\tan\alpha = -5/12$ *y* $\sin\alpha > 0$*. En ningún caso se puede utilizar la calculadora.*

Solución: *(a) Al ser* $\sin\alpha < 0$ *y* $\tan\alpha < 0$*, α está en el cuarto cuadrante y, por tanto,* $\cos\alpha > 0$*. Como conocemos* $\sin\alpha$ *utilizaremos la relación*

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

para calcular $\cos\alpha$*. Así, tenemos*

$$\begin{aligned}
\left(-\frac{3}{4}\right)^2 + \cos^2\alpha &= 1 \\
\frac{9}{16} + \cos^2\alpha &= 1 \\
\cos^2\alpha &= 1 - \frac{9}{16} \\
\cos^2\alpha &= \frac{7}{16} \\
\cos\alpha &= \sqrt{\frac{7}{16}} \\
&= \frac{\sqrt{7}}{4}
\end{aligned}$$

Entonces, conociendo $\sin\alpha$ *y* $\cos\alpha$*, la relación*

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

permitirá calcular $\tan\alpha$*. Así, obtenemos*

$$\tan\alpha = \frac{-\frac{3}{4}}{\frac{\sqrt{7}}{4}} = -\frac{12}{4\sqrt{7}} = -\frac{3}{\sqrt{7}} = -\frac{3\sqrt{7}}{7}$$

Del conocimiento de estas razones obtenemos todas las demás:

$$\csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{1}{-\frac{3}{4}} = -\frac{4}{3}$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1}{\frac{\sqrt{7}}{4}} = \frac{4}{\sqrt{7}} = \frac{4\sqrt{7}}{7}$$

$$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{1}{-\frac{3}{\sqrt{7}}} = -\frac{\sqrt{7}}{3}$$

(b) Al ser $\csc\alpha > 0$*, deducimos que* $\sin\alpha > 0$*. Al ser* $\sin\alpha > 0$ *y* $\cos\alpha > 0$*,* α *está en el primer cuadrante y, por tanto,* $\tan\alpha > 0$*. Por definición,*

$$\csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$$

y como $\csc\alpha = 4$*, obtenemos que*

$$\sin\alpha = \frac{1}{\csc\alpha} = \frac{1}{4}$$

Por la relación

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

tenemos

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \cos^2\alpha &= 1 \\
\cos^2\alpha &= 1 - \frac{1}{16} \\
\cos^2\alpha &= \frac{15}{16} \\
\cos\alpha &= \sqrt{\frac{15}{16}} \\
&= \frac{\sqrt{15}}{4}
\end{aligned}$$

Entonces, de la relación

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

obtenemos

$$\tan\alpha = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{15}}{4}} = \frac{4}{4\sqrt{15}} = \frac{1}{\sqrt{15}} = \frac{\sqrt{15}}{15}$$

Del conocimiento de estas razones obtenemos todas las demás:

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1}{\frac{\sqrt{15}}{4}} = \frac{4}{\sqrt{15}} = \frac{4\sqrt{15}}{15}$$

$$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{15}}} = \sqrt{15}$$

(c) Al ser $\tan\alpha < 0$ *y* $\sin\alpha > 0$*, deducimos que* α *se halla en el segundo cuadrante y, por tanto,* $\cos\alpha < 0$*. Como conocemos* $\tan\alpha$*, utilizaremos la relación*

$$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

para calcular $\cos\alpha$*. Así, tenemos*

$$\begin{aligned}
1 + \left(-\frac{5}{12}\right)^2 &= \frac{1}{\cos^2\alpha} \\
1 + \frac{25}{144} &= \frac{1}{\cos^2\alpha} \\
\frac{169}{144} &= \frac{1}{\cos^2\alpha} \\
\cos^2\alpha &= \frac{144}{169} \\
\cos\alpha &= -\sqrt{\frac{144}{169}} \\
&= -\frac{12}{13}
\end{aligned}$$

Entonces, conociendo $\tan\alpha$ *y* $\cos\alpha$*, la relación*

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

permitirá calcular $\sin\alpha$*. Así, obtenemos que*

$$\begin{aligned}
\sin\alpha &= \tan\alpha \cdot \cos\alpha \\
&= \left(-\frac{5}{12}\right) \cdot \left(-\frac{12}{13}\right) \\
&= \frac{5}{13}
\end{aligned}$$

Del conocimiento de estas razones deducimos todas las demás:

$$\csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha} = \frac{1}{\frac{5}{13}} = \frac{13}{5}$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{1}{-\frac{12}{13}} = -\frac{13}{12}$$

$$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{1}{-\frac{5}{12}} = -\frac{12}{5}$$

■

Ejercicio 39 *Recordando las relaciones entre las razones trigonométricas de dos ángulos complementarios, calcula sin usar la calculadora el valor de la siguiente expresión*

$$\sin^2 20^o + \cos^2 40 + \sin^2 70^o + \cos^2 50^o$$

Solución: *Las relaciones entre las razones trigonométricas de dos ángulos complementarios vienen dadas por:*

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$$

Si ahora las aplicamos a la información de que disponemos por el enunciado podemos escribir las siguientes igualdades:

$$\sin 20^o = \cos(90^o - 20^o) = \cos 70^o$$

y

$$\cos 40^o = \sin(90^o - 40^o) = \sin 50^o$$

Por tanto, tenemos que

$$\begin{aligned}
\sin^2 20^o + \cos^2 40 + \sin^2 70^o + \cos^2 50^o &= \cos^2 70^o + \sin^2 50^o + \sin^2 70^o + \cos^2 50^o \\
&= \sin^2 50^o + \cos^2 50^o + \sin^2 70^o + \cos^2 70^o \\
&= 1 + 1 \\
&= 2
\end{aligned}$$

■

Ejercicio 40 *Expresa en función de* $\tan x$ *la siguiente expresión*

$$\cos^4 x - \sin^4 x$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\cos^4 x - \sin^4 x &= (\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x) \\
&= 1 \cdot (\cos^2 x - \sin^2 x) \\
&= \cos^2 x - \sin^2 x \\
&= \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) \\
&= 2\cos^2 x - 1 \\
&= \frac{2}{1 + \tan^2 x} - 1
\end{aligned}$$

■

Ejercicio 41 *Expresa en función de* $\sin x$ *la siguiente expresión*

$$\frac{\cos^2 x - 1}{\cot x} \cdot \frac{\cos x}{\sec^2 x}$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\frac{\cos^2 x - 1}{\cot x} \cdot \frac{\cos x}{\sec^2 x} &= \frac{-(1-\cos^2 x)}{\frac{\cos x}{\sin x}} \cdot \frac{\cos x}{\frac{1}{\cos^2 x}} \\
&= \frac{-\sin^3 x}{\cos x} \cdot \cos^3 x \\
&= -\sin^3 x \cdot \cos^2 x \\
&= -\sin^3 x \cdot (1-\sin^2 x) \\
&= -\sin^3 x + \sin^5 x
\end{aligned}$$

■

Ejercicio 42 *Reduce al máximo cada una de las siguientes expresiones:*

(a)

$$\sqrt{1-\cos x} \cdot \sqrt{1+\cos x}$$

(b)

$$\cos^3 x + \cos x \cdot \sin^2 x$$

(c)

$$\frac{\cos^4 x - \sin^4 x}{\sin^2 x - \cos^2 x}$$

Solución: *(a)*

$$\begin{aligned}
\sqrt{1-\cos x} \cdot \sqrt{1+\cos x} &= \sqrt{1-\cos^2 x} \\
&= \sqrt{\sin^2 x} \\
&= |\sin x|
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\cos^3 x + \cos x \cdot \sin^2 x &= \cos x \cdot (\cos^2 x + \sin^2 x) \\
&= \cos x \cdot 1 \\
&= \cos x
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\frac{\cos^4 x - \sin^4 x}{\sin^2 x - \cos^2 x} &= \frac{(\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x)}{\sin^2 x - \cos^2 x} \\
&= \frac{-(\sin^2 x - \cos^2 x)}{\sin^2 x - \cos^2 x} \\
&= -1
\end{aligned}$$

■

Reducción al primer cuadrante

Ejercicio 43 *Sin utilizar la calculadora halla las razones trigonométricas fundamentales de los ángulos siguientes:*

(a) 150^o, 240^o *y* 315^o

(b) $2\pi/3$, $7\pi/6$ *y* $5\pi/3$

Solución: *(a)* 150^o *es un ángulo del segundo cuadrante y podemos expresarlo como*

$$150^o = 180^o - 30^o$$

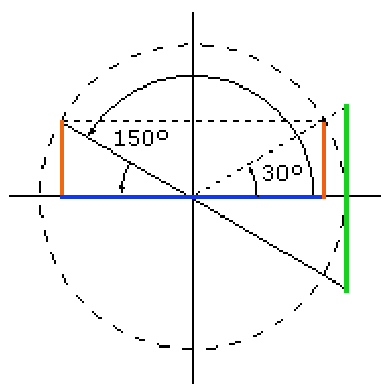
Teniendo ahora en cuenta las razones trigonométricas de ángulos suplementarios, podemos escribir:

$$\sin 150^o = \sin (180^o - 30^o) = \sin 30^o = \frac{1}{2}$$

$$\cos 150^o = \cos (180^o - 30^o) = -\cos 30^o = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 150^o = \tan (180^o - 30^o) = -\tan 30^o = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

A partir de la circunferencia goniométrica también podemos deducir estas relaciones mediante la siguiente construcción:



El ángulo 240^o *es del tercer cuadrante y podemos escribirlo como sigue:*

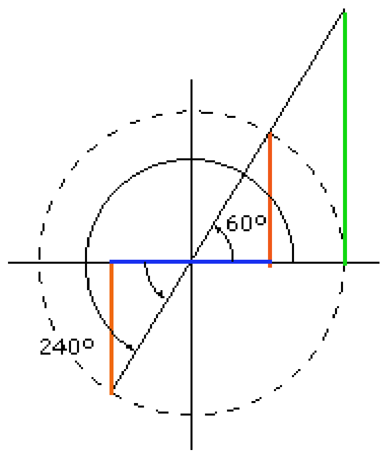
$$240^o = 180^o + 60^o$$

Teniendo en cuenta las razones trigonométricas de ángulos que se diferencian en 180^o*, podemos escribir:*

$$\sin 240^o = \sin (180^o + 60^o) = -\sin 60^o = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 240^o = \cos(180^o + 60^o) = -\cos 60^o = -\frac{1}{2}$$
$$\tan 240^o = \tan(180^o + 60^o) = \tan 60^o = \sqrt{3}$$

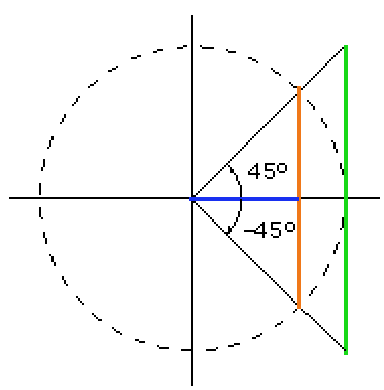
A partir de la circunferencia goniométrica también podemos deducir estas relaciones mediante la siguiente construcción:



El ángulo 315^o *es del cuarto cuadrante y podemos escribirlo como* -45^o*. Teniendo en cuenta ahora las razones trigonométricas de ángulos opuestos, podemos escribir:*

$$\sin 315^o = \sin(-45^o) = -\sin 45^o = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\cos 315^o = \cos(-45^o) = \cos 45^o = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\tan 315^o = \tan(-45^o) = -\tan 45^o = -1$$

A partir de la circunferencia goniométrica también podemos deducir estas relaciones mediante la siguiente construcción:



(b) El ángulo $2\pi/3$ es en grados 120^o y como pertenece al segundo cuadrante puede escribirse

$$\frac{2\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{3}$$

Teniendo en cuenta las razones trigonométricas de ángulos suplementarios, podemos escribir:

$$\sin\frac{2\pi}{3} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{2\pi}{3} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$\tan\frac{2\pi}{3} = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\tan\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

El ángulo $7\pi/6$ es en grados 210^o y como pertenece al tercer cuadrante puede escribirse

$$\frac{7\pi}{6} = \pi + \frac{\pi}{6}$$

Teniendo en cuenta las razones trigonométricas de ángulos que se diferencian en π, podemos escribir:

$$\sin\frac{7\pi}{6} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$$

$$\cos\frac{7\pi}{6} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan\frac{7\pi}{6} = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

El ángulo $5\pi/3$ es en grados 300^o y como pertenece al cuarto cuadrante puede escribirse $-\pi/3$. Teniendo en cuenta ahora las razones trigonométricas de ángulos opuestos, podemos escribir:

$$\sin\frac{5\pi}{3} = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{5\pi}{3} = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\tan\frac{5\pi}{3} = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\tan\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

Naturalmente, igual que en el apartado (a), podíamos haber deducido estas equivalencias mediante construcciones geométricas sobre la circunferencia goniométrica. ■

Ejercicio 44 *Si* $\cos x = -1/\sqrt{3}$ *y* $\pi < x < 3\pi/2$, *hallar las razones trigonométricas fundamentales de los ángulos:* $\pi + x$ *y* $-x$ *sin usar la calculadora.*

Solución: *Al ser* $\pi < x < 3\pi/2$, x *es un ángulo del tercer cuadrante y, por tanto,* $\sin x < 0$ *y* $\tan x > 0$. *De la relación*

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

tenemos

$$\begin{aligned}
\sin^2 x + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 &= 1 \\
\sin^2 x + \frac{1}{3} &= 1 \\
\sin^2 x &= 1 - \frac{1}{3} \\
\sin^2 x &= \frac{2}{3} \\
\sin x &= -\sqrt{\frac{2}{3}} \\
&= -\frac{\sqrt{6}}{3}
\end{aligned}$$

y de

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

obtenemos

$$\tan x = \frac{-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}{-\frac{1}{\sqrt{3}}} = \sqrt{2}$$

Con el conocimiento de las razones fundamentales de x *podemos deducir las de los ángulos* $\pi + x$ *y* $-x$. *En efecto, recordando las razones trigonométricas de ángulos que se diferencian en* π, *obtenemos*

$$\sin(\pi + x) = -\sin x = -\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right) = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\cos(\pi + x) = -\cos x = -\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\tan(\pi + x) = \tan x = \sqrt{2}$$

Recordando ahora las razones trigonométricas de ángulos opuestos, obtenemos

$$\sin(-x) = -\sin x = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\cos(-x) = \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\tan(-x) = -\tan x = -\sqrt{2}$$

■

Ejercicio 45 *Si* $\tan x = -3/4$ *y* $\pi/2 < x < \pi$*, hallar las razones trigonométricas de los ángulos:* $\frac{\pi}{2} - x$*,* $\pi - x$*,* $\pi + x$ *y* $-x$ *sin usar la calculadora.*

Solución: *Al ser* $\pi/2 < x < \pi$*,* x *es un ángulo del segundo cuadrante y, por tanto,* $\sin x > 0$ *y* $\cos x < 0$*. De la relación*

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

tenemos

$$\begin{aligned} 1 + \left(-\frac{3}{4}\right)^2 &= \frac{1}{\cos^2 x} \\ 1 + \frac{9}{16} &= \frac{1}{\cos^2 x} \\ \frac{25}{16} &= \frac{1}{\cos^2 x} \\ \cos^2 x &= \frac{16}{25} \\ \cos x &= -\sqrt{\frac{16}{25}} \\ &= -\frac{4}{5} \end{aligned}$$

y de

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

obtenemos que

$$\begin{aligned} \sin x &= \tan x \cdot \cos x \\ &= \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) \\ &= \frac{3}{5} \end{aligned}$$

Con el conocimiento de las razones fundamentales de x *podemos deducir las de los ángulos* $\frac{\pi}{2} - x$*,* $\pi - x$*,* $\pi + x$ *y* $-x$*. En efecto, recordando las razones trigonométricas de ángulos complementarios, obtenemos*

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x = -\frac{4}{5}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x = \frac{3}{5}$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{1}{-\frac{3}{4}} = -\frac{4}{3}$$

Recordando ahora las razones trigonométricas de ángulos suplementarios, obtenemos

$$\sin(\pi - x) = \sin x = \frac{3}{5}$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos x = \frac{4}{5}$$

$$\tan(\pi - x) = -\tan x = \frac{3}{4}$$

Recordando ahora las razones trigonométricas de ángulos que se diferencian en π*, obtenemos*

$$\sin(\pi + x) = -\sin x = -\frac{3}{5}$$

$$\cos(\pi + x) = -\cos x = \frac{4}{5}$$

$$\tan(\pi + x) = \tan x = -\frac{3}{4}$$

Finalmente, recordando las razones trigonométricas de ángulos opuestos, obtenemos

$$\sin(-x) = -\sin x = -\frac{3}{5}$$

$$\cos(-x) = \cos x = -\frac{4}{5}$$

$$\tan(-x) = -\tan x = \frac{3}{4}$$

■

Ejercicio 46 *Simplifica las siguientes expresiones:*

(a)

$$\frac{\sin^2(\pi - x) \cdot \cos(\frac{\pi}{2} - x)}{\sin x \cdot (1 - \cos^2 x)}$$

(b)

$$\frac{\tan(\frac{\pi}{2} - x) \cdot \tan(\pi - x)}{\sin(\frac{\pi}{2} - x)} \cdot \cos x$$

(c)

$$\frac{\sin(\pi + x) \cdot \cos(\pi - x)}{\sin(\pi - x) \cdot \cos(\pi + x)}$$

Solución: *(a)*

$$\begin{aligned} \frac{\sin^2(\pi - x) \cdot \cos(\frac{\pi}{2} - x)}{\sin x \cdot (1 - \cos^2 x)} &= \frac{\sin^2 x \cdot \sin x}{\sin x \cdot \sin^2 x} \\ &= 1 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\frac{\tan(\frac{\pi}{2}-x)\cdot\tan(\pi-x)}{\sin(\frac{\pi}{2}-x)}\cdot\cos x &= \frac{\cot x\cdot(-\tan x)}{\cos x}\cdot\cos x\\
&= -\frac{1}{\cos x}\cdot\cos x\\
&= -1
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\frac{\sin(\pi+x)\cdot\cos(\pi-x)}{\sin(\pi-x)\cdot\cos(\pi+x)} &= \frac{(-\sin x)\cdot(-\cos x)}{\sin x\cdot(-\cos x)}\\
&= -1
\end{aligned}$$

■

Fórmulas de adición de ángulos

Ejercicio 47 *Sin utilizar la calculadora, calcula los valores de las siguientes razones trigonométricas: (a)* $\sin 75^o$ *(b)* $\cos 15^o$ *(c)* $\cos 105^o$ *(d)* $\tan 195^o$ *(e)* $\sin 195^o$ *y (f)* $\tan 285^o$*.*

Solución: *(a)*

$$\begin{aligned}
\sin 75^o &= \sin(30^o+45^o)\\
&= \sin 30^o\cdot\cos 45^o+\sin 45^o\cdot\cos 30^o\\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}}{4}\\
&= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\cos 15^o &= \cos(45^o-30^o)\\
&= \cos 45^o\cdot\cos 30^o+\sin 45^o\cdot\sin 30^o\\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}\\
&= \frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}\\
&= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}
\end{aligned}$$

Observa que

$$\cos 15^o=\sin 75^o$$

(c)

$$\begin{aligned}
\cos 105^o &= \cos(60^o + 45^o) \\
&= \cos 60^o \cdot \cos 45^o - \sin 60^o \cdot \sin 45^o \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4} \\
&= \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}
\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
\tan 195^o &= \tan(180^o + 15^o) \\
&= \tan 15^o \\
&= \tan(45^o - 30^o) \\
&= \frac{\tan 45^o - \tan 30^o}{1 + \tan 45^o \cdot \tan 30^o} \\
&= \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}} \\
&= \frac{3 - \sqrt{3}}{3} : \frac{3 + \sqrt{3}}{3} \\
&= \frac{3 - \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} \\
&= 2 - \sqrt{3}
\end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}
\sin 195^o &= \sin(180^o + 15^o) \\
&= -\sin 15^o \\
&= -\sin(45^o - 30^o) \\
&= -(\sin 45^o \cdot \cos 30^o - \sin 30^o \cdot \cos 45^o) \\
&= -\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \\
&= -\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} \\
&= \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}
\end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned}
\tan 285^o &= \tan(-75^o) \\
&= -\tan 75^o \\
&= -\tan(30^o + 45^o) \\
&= -\frac{\tan 30^o + \tan 45^o}{1 - \tan 30^o \cdot \tan 45^o} \\
&= -\frac{\frac{\sqrt{3}}{3} + 1}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 1} \\
&= \left(-\frac{\sqrt{3}+3}{3}\right) : \frac{3-\sqrt{3}}{3} \\
&= -\frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} \\
&= -2 - \sqrt{3}
\end{aligned}$$

■

Ejercicio 48 *Sin utilizar la calculadora, calcula el valor de las siguientes expresiones:*

(a)

$$(\cos 147^o \cdot \cos 123^o - \sin 147^o \cdot \sin 123^o)^2$$

(b)

$$\frac{1 + \tan 69^o \cdot \tan 24^o}{\tan 69^o - \tan 24^o}$$

(c)

$$\sin 35^o(\cos 10^o + \sin 35^o) + \sin 10^o(\cos 35^o - \sin 10^o) + \cos^2 35^o - \cos^2 10^o$$

Solución: *(a)*

$$\begin{aligned}
(\cos 147^o \cdot \cos 123^o - \sin 147^o \cdot \sin 123^o)^2 &= \cos^2(147^o + 123^o) \\
&= \cos^2 270^o \\
&= 0
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\frac{1 + \tan 69^o \cdot \tan 24^o}{\tan 69^o - \tan 24^o} &= \cot(69^o - 24^o) \\
&= \cot 45^o \\
&= 1
\end{aligned}$$

(c) Efectuando las operaciones indicadas en la expresión dada

$$\sin 35^o(\cos 10^o + \sin 35^o) + \sin 10^o(\cos 35^o - \sin 10^o) + \cos^2 35^o - \cos^2 10^o$$

obtenemos

$$\sin 35^o \cdot \cos 10^o + \sin^2 35^o + \sin 10^o \cdot \cos 35^o - \sin^2 10 + \cos^2 35^o - \cos^2 10^o$$

De aquí, recordando que

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

la expresión anterior se reduce a

$$\sin 35^o \cdot \cos 10^o + \sin 10^o \cdot \cos 35^o$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} \sin 35^o \cdot \cos 10^o + \sin 10^o \cdot \cos 35^o &= \sin(35^o + 10^o) \\ &= \sin 45^o \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

■

Ejercicio 49 *Sabiendo que* $\sin\alpha = 3/4$, $\cos\beta = -1/4$ *y* $\pi/2 < \alpha, \beta < \pi$, *calcula los valores exactos de:* $\sin(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha-\beta)$ *y* $\tan(\alpha+\beta)$.

Solución: *Como* $\sin\alpha = 3/4$, *utilizaremos*

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

para calcular $\cos\alpha$ *que será negativo porque* α *está en el segundo cuadrante. Así, tenemos*

$$\begin{aligned} \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \cos^2\alpha &= 1 \\ \frac{9}{16} + \cos^2\alpha &= 1 \\ \cos^2\alpha &= 1 - \frac{9}{16} \\ \cos^2\alpha &= \frac{7}{16} \\ \cos\alpha &= -\sqrt{\frac{7}{16}} \\ &= -\frac{\sqrt{7}}{4} \end{aligned}$$

Entonces podemos calcular $\tan\alpha$ *mediante la relación*

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

Así, tenemos

$$\tan\alpha = \frac{\frac{3}{4}}{-\frac{\sqrt{7}}{4}} = -\frac{3}{\sqrt{7}} = -\frac{3\sqrt{7}}{7}$$

Del mismo modo, como $\cos\beta = -1/4$, *entonces*

$$\begin{aligned}
\sin^2\beta + \left(-\frac{1}{4}\right)^2 &= 1 \\
\sin^2\beta + \frac{1}{16} &= 1 \\
\sin^2\beta &= 1 - \frac{1}{16} \\
\sin^2\beta &= \frac{15}{16} \\
\sin\beta &= \sqrt{\frac{15}{16}} \\
&= \frac{\sqrt{15}}{4}
\end{aligned}$$

Observa que $\sin\beta$ *es positivo ya que* β *está también en el segundo cuadrante. Con esta información, tenemos que*

$$\tan\beta = \frac{\frac{\sqrt{15}}{4}}{-\frac{1}{4}} = -\sqrt{15}$$

Ahora ya podemos calcular los valores exactos de: $\sin(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha-\beta)$ *y* $\tan(\alpha+\beta)$. *En efecto, tenemos*

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cdot\cos\beta + \sin\beta\cdot\cos\alpha \\
&= \frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{1}{4}\right) + \frac{\sqrt{15}}{4}\cdot\left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right) \\
&= -\frac{3}{16} - \frac{\sqrt{105}}{16} \\
&= -\frac{3+\sqrt{105}}{16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta \\
&= \left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right) + \frac{3}{4}\cdot\frac{\sqrt{15}}{4} \\
&= \frac{\sqrt{7}}{16} + \frac{3\sqrt{15}}{16} \\
&= \frac{\sqrt{7}+3\sqrt{15}}{16}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\tan(\alpha+\beta) &= \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta} \\
&= \frac{-\frac{3\sqrt{7}}{7}-\sqrt{15}}{1-\left(-\frac{3\sqrt{7}}{7}\right)\cdot\left(-\sqrt{15}\right)} \\
&= \frac{-3\sqrt{7}-7\sqrt{15}}{7} : \frac{7-3\sqrt{105}}{7} \\
&= \frac{-3\sqrt{7}-7\sqrt{15}}{7-3\sqrt{105}}
\end{aligned}
$$

■

Ejercicio 50 *Sabiendo que* $\tan\alpha = 2$*,* $\tan\beta = 3$ *y* $0 < \alpha, \beta < \pi/2$*, calcula los valores exactos de:* $\sin(\alpha-\beta)$*,* $\cos(\alpha+\beta)$ *y* $\tan(\alpha-\beta)$*.*

Solución: *Como* $\tan\alpha = 2$*, utilizaremos*

$$1+\tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

para calcular $\cos\alpha$ *que será positivo porque* α *está en el primer cuadrante. Así, tenemos*

$$
\begin{aligned}
1+2^2 &= \frac{1}{\cos^2\alpha} \\
5 &= \frac{1}{\cos^2\alpha} \\
\cos^2\alpha &= \frac{1}{5} \\
\cos\alpha &= \sqrt{\frac{1}{5}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \\
&= \frac{\sqrt{5}}{5}
\end{aligned}
$$

Entonces podemos calcular $\sin\alpha$ *mediante la relación*

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

Así, tenemos

$$\sin\alpha = 2\cdot\frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Del mismo modo, como $\tan\beta = 3$, *entonces*

$$\begin{aligned}
1+3^2 &= \frac{1}{\cos^2\beta} \\
10 &= \frac{1}{\cos^2\beta} \\
\cos^2\beta &= \frac{1}{10} \\
\cos\beta &= \sqrt{\frac{1}{10}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{10}} \\
&= \frac{\sqrt{10}}{10}
\end{aligned}$$

Observa que $\cos\beta$ *es positivo ya que* β *está también en el primer cuadrante. Con esta información, tenemos que*

$$\begin{aligned}
\sin\beta &= \tan\beta\cdot\cos\beta \\
&= 3\cdot\frac{\sqrt{10}}{10} \\
&= \frac{3\sqrt{10}}{10}
\end{aligned}$$

Ahora ya podemos calcular los valores exactos de: $\sin(\alpha-\beta)$, $\cos(\alpha+\beta)$ *y* $\tan(\alpha-\beta)$. *En efecto, tenemos*

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cdot\cos\beta - \sin\beta\cdot\cos\alpha \\
&= \frac{2\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{\sqrt{10}}{10} - \frac{3\sqrt{10}}{10}\cdot\frac{\sqrt{5}}{5} \\
&= \frac{2\sqrt{50}}{50} - \frac{3\sqrt{50}}{50} \\
&= -\frac{\sqrt{50}}{50} \\
&= -\frac{5\sqrt{2}}{50} \\
&= -\frac{\sqrt{2}}{10}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta \\
&= \frac{\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{\sqrt{10}}{10} - \frac{2\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{3\sqrt{10}}{10} \\
&= \frac{\sqrt{50}}{50} - \frac{6\sqrt{50}}{50} \\
&= -\frac{5\sqrt{50}}{50} \\
&= -\frac{5\sqrt{2}}{10} \\
&= -\frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tan(\alpha-\beta) &= \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta} \\
&= \frac{2-3}{1+2\cdot 3} \\
&= -\frac{1}{7}
\end{aligned}
$$

■

Ejercicio 51 *Calcula los valores exactos de* $\sin(\alpha+\beta+\gamma)$ *y* $\cos(\alpha+\beta+\gamma)$*, si* α*,* β *y* γ *son ángulos agudos tales que* $\sin\alpha = 1/2$*,* $\sin\beta = 1/3$ *y* $\sin\gamma = 1/4$*.*

Solución: *Primero debemos calcular* $\cos\alpha$*,* $\cos\beta$ *y* $\cos\gamma$*. Para ello utilizaremos*

$$
\begin{aligned}
\sin^2 x + \cos^2 x &= 1 \\
\cos^2 x &= 1 - \sin^2 x \\
\cos x &= \sqrt{1-\sin^2 x}
\end{aligned}
$$

Observa que hemos tomado $\cos x > 0$ *porque los ángulos dados son todos agudos. Por tanto, tenemos*

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\beta = \sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\cos\gamma = \sqrt{1-\left(\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{15}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

Ahora ya podemos calcular $\sin(\alpha+\beta+\gamma)$ *y* $\cos(\alpha+\beta+\gamma)$*. En efecto,*

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta+\gamma) &= \sin\left[(\alpha+\beta)+\gamma\right] \\ &= \sin(\alpha+\beta)\cdot\cos\gamma+\sin\gamma\cdot\cos(\alpha+\beta)\end{aligned}$$

pero sabemos que

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cdot\cos\beta+\sin\beta\cdot\cos\alpha \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{6}+\frac{\sqrt{3}}{6} \\ &= \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{6}\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} \\ &= \frac{2\sqrt{6}}{6}-\frac{1}{6} \\ &= \frac{2\sqrt{6}-1}{6}\end{aligned}$$

Entonces, tenemos

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta+\gamma) &= \sin(\alpha+\beta)\cdot\cos\gamma+\sin\gamma\cdot\cos(\alpha+\beta) \\ &= \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{6}\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{2\sqrt{6}-1}{6} \\ &= \frac{2\sqrt{30}+\sqrt{45}}{24}+\frac{2\sqrt{6}-1}{24} \\ &= \frac{2\sqrt{30}+3\sqrt{5}+2\sqrt{6}-1}{24}\end{aligned}$$

Por otro lado, tenemos

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta+\gamma) &= \cos\left[(\alpha+\beta)+\gamma\right] \\ &= \cos(\alpha+\beta)\cdot\cos\gamma-\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin\gamma \\ &= \frac{2\sqrt{6}-1}{6}\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}-\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{6}\cdot\frac{1}{4} \\ &= \frac{2\sqrt{90}-\sqrt{15}}{24}-\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{24} \\ &= \frac{6\sqrt{10}-\sqrt{15}-2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{24}\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Fórmulas del ángulo doble y mitad

Ejercicio 52 *Sin utilizar la calculadora, calcula los valores de las siguientes razones trigonométricas: (a)* $\tan 22^o 30'$ *(b)* $\sin 120^o$ *(c)* $\cos 15^o$ *(d)* $\tan 67^o 30'$ *y (e)* $\sin 112^o 30'$.

Solución: *(a)*

$$\begin{aligned} \tan 22^o 30' &= \tan \frac{45^o}{2} \\ &= \sqrt{\frac{1-\cos 45^o}{1+\cos 45^o}} \\ &= \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}} \\ &= \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}} \\ &= \sqrt{3-2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \sin 120^o &= \sin 2 \cdot 60^o \\ &= 2 \sin 60^o \cdot \cos 60^o \\ &= 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} \cos 15^o &= \cos \frac{30^o}{2} \\ &= \sqrt{\frac{1+\cos 30^o}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} \tan 67^o 30' &= \tan \frac{135^o}{2} \\ &= \sqrt{\frac{1-\cos 135^o}{1+\cos 135^o}} \end{aligned}$$

pero

$$\cos 135^o = \cos(180^o - 45^o) = -\cos 45^o = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

luego

$$\begin{aligned}
\tan 67^o 30' &= \sqrt{\frac{1-\cos 135^o}{1+\cos 135^o}} \\
&= \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}} \\
&= \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}} \\
&= \sqrt{3+2\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}
\sin 112^o 30' &= \sin \frac{225^o}{2} \\
&= \sqrt{\frac{1-\cos 225^o}{2}}
\end{aligned}$$

pero

$$\cos 225^o = \cos(180^o + 45^o) = -\cos 45^o = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

luego

$$\begin{aligned}
\sin 112^o 30' &= \sqrt{\frac{1-\cos 225^o}{2}} \\
&= \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} \\
&= \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}
\end{aligned}$$

■

Ejercicio 53 *Expresa* $\sin 3x$, $\cos 3x$ *y* $\tan 3x$ *en función de* $\sin x$, $\cos x$ *y* $\tan x$.

Solución:

$$\begin{aligned}
\sin 3x &= \sin(2x + x) \\
&= \sin 2x \cdot \cos x + \sin x \cdot \cos 2x \\
&= 2\sin x \cdot \cos^2 x + \sin x \cdot (\cos^2 x - \sin^2 x) \\
&= 2\sin x \cdot \cos^2 x + \sin x \cdot \cos^2 x - \sin^3 x \\
&= 3\sin x \cdot \cos^2 x - \sin^3 x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cos 3x &= \cos(2x+x) \\
&= \cos 2x \cdot \cos x - \sin 2x \cdot \sin x \\
&= (\cos^2 x - \sin^2 x) \cdot \cos x - 2\sin^2 x \cdot \cos x \\
&= \cos^3 x - \sin^2 x \cdot \cos x - 2\sin^2 x \cdot \cos x \\
&= \cos^3 x - 3\sin^2 x \cdot \cos x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tan 3x &= \tan(2x+x) \\
&= \frac{\tan 2x + \tan x}{1 - \tan 2x \cdot \tan x} \\
&= \frac{\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} + \tan x}{1 - \frac{2\tan^2 x}{1-\tan^2 x}} \\
&= \frac{2\tan x + \tan x - \tan^3 x}{1-\tan^2 x} : \frac{1 - \tan^2 x - 2\tan^2 x}{1-\tan^2 x} \\
&= \frac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x}
\end{aligned}$$

■

Ejercicio 54 *Calcula el valor exacto de* $\tan\alpha$*, sabiendo que* $\tan 2\alpha = 4/3$ *y* $\pi < \alpha < 3\pi/2$.

Solución: *Al ser* $\pi < \alpha < 3\pi/2$*,* α *está en el tercer cuadrante y, por tanto,* $\tan\alpha > 0$*. Puesto que* $\tan 2\alpha = 4/3$*, entonces podemos escribir*

$$\begin{aligned}
\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} &= \frac{4}{3} \\
6\tan\alpha &= 4 - 4\tan^2\alpha \\
2\tan^2\alpha + 3\tan\alpha - 2 &= 0
\end{aligned}$$

Resolviendo esta ecuación de segundo grado en $\tan\alpha$*, obtenemos*

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \frac{-3 \pm 5}{4}$$

luego,

$$\tan\alpha = \frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2}$$

■

Ejercicio 55 *Sean* α *y* β *dos ángulos tales que* $\pi < \alpha < 3\pi/2$*,* $3\pi/2 < \beta < 2\pi$*,* $\sin\alpha = -3/5$ *y* $\cos\beta = 4/5$*. Calcula los valores exactos de las siguientes razones trigonométricas: (a)* $\cos 2\beta$ *(b)* $\sin\frac{\alpha}{2}$ *(c)* $\tan(2\alpha - \frac{\beta}{2})$ *(d)* $\cos(\alpha - 2\beta)$ *y (e)* $\sin(2\alpha + \beta)$.

Solución: *Primero calcularemos todas las razones fundamentales de* α *y* β. *Al ser* $\pi < \alpha < 3\pi/2$, α *está en el tercer cuadrante y, por tanto,* $\cos\alpha < 0$ *y* $\tan\alpha > 0$. *Para calcular* $\cos\alpha$ *utilizaremos la relación*

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

de donde se obtiene

$$\cos\alpha = -\frac{4}{5}$$

y de la relación

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

obtenemos

$$\tan\alpha = \frac{3}{4}$$

Del mismo modo, al ser $3\pi/2 < \beta < 2\pi$, β *está en el cuarto cuadrante y, por tanto,* $\sin\beta < 0$ *y* $\tan\beta < 0$. *Para calcular* $\sin\beta$ *utilizaremos la relación*

$$\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$$

de donde se obtiene

$$\sin\beta = -\frac{3}{5}$$

y de la relación

$$\tan\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta}$$

obtenemos

$$\tan\beta = -\frac{3}{4}$$

(a)

$$\begin{aligned}\cos 2\beta &= \cos^2\beta - \sin^2\beta \\ &= \left(\frac{4}{5}\right)^2 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2 \\ &= \frac{16}{25} - \frac{9}{25} \\ &= \frac{7}{25}\end{aligned}$$

(b) Al ser $\pi < \alpha < 3\pi/2$, *tenemos que* $\pi/2 < \alpha/2 < 3\pi/4$ *y, por tanto,* $\alpha/2$

está en el segundo cuadrante y, en consecuencia, $\sin\alpha/2 > 0$. *Por tanto,*

$$\begin{aligned}
\sin\frac{\alpha}{2} &= \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \\
&= \sqrt{\frac{1-(-4/5)}{2}} \\
&= \sqrt{\frac{9/5}{2}} \\
&= \sqrt{\frac{9}{10}} \\
&= \frac{3\sqrt{10}}{10}
\end{aligned}$$

(c)

$$\tan\left(2\alpha - \frac{\beta}{2}\right) = \frac{\tan 2\alpha - \tan(\beta/2)}{1+\tan 2\alpha \cdot \tan(\beta/2)}$$

pero

$$\begin{aligned}
\tan 2\alpha &= \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} \\
&= \frac{2\,(-3/4)}{1-(-3/4)^2} \\
&= \left(-\frac{3}{2}\right) : \frac{7}{16} \\
&= -\frac{24}{7}
\end{aligned}$$

y, como $3\pi/2 < \beta < 2\pi$, *entonces* $3\pi/4 < \beta < \pi$, β *está en el segundo cuadrante y, por tanto,*

$$\begin{aligned}
\tan\frac{\beta}{2} &= -\sqrt{\frac{1-\cos\beta}{1+\cos\beta}} \\
&= -\sqrt{\frac{1-\frac{4}{5}}{1+\frac{4}{5}}} \\
&= -\sqrt{\frac{1}{9}} \\
&= -\frac{1}{3}
\end{aligned}$$

Por consiguiente, tenemos

$$\begin{aligned}\tan\left(2\alpha-\frac{\beta}{2}\right) &= \frac{-\frac{24}{7}-\left(-\frac{1}{3}\right)}{1+\left(-\frac{24}{7}\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)} \\ &= \left(-\frac{65}{21}\right):\frac{45}{21} \\ &= -\frac{13}{9}\end{aligned}$$

(d) Por el apartado (a) sabemos que $\cos 2\beta = 7/25$. *Además,*

$$\begin{aligned}\sin 2\beta &= 2\sin\beta\cdot\cos\beta \\ &= 2\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\frac{4}{5} \\ &= -\frac{24}{25}\end{aligned}$$

Por tanto, tenemos que

$$\begin{aligned}\cos(\alpha-2\beta) &= \cos\alpha\cdot\cos 2\beta+\sin\alpha\cdot\sin 2\beta \\ &= \left(-\frac{4}{5}\right)\cdot\frac{7}{25}+\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\left(-\frac{24}{25}\right) \\ &= -\frac{28}{125}+\frac{72}{125} \\ &= \frac{44}{125}\end{aligned}$$

(e) Tenemos

$$\begin{aligned}\sin 2\alpha &= 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha \\ &= 2\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\left(-\frac{4}{5}\right) \\ &= \frac{24}{25}\end{aligned}$$

y además,

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= \cos^2\alpha-\sin^2\alpha \\ &= \left(-\frac{4}{5}\right)^2-\left(-\frac{3}{5}\right)^2 \\ &= \frac{16}{25}-\frac{9}{25} \\ &= \frac{7}{25}\end{aligned}$$

Por tanto, tenemos

$$\begin{aligned}\sin(2\alpha+\beta) &= \sin 2\alpha\cdot\cos\beta+\sin\beta\cdot\cos 2\alpha\\ &= \frac{24}{25}\cdot\frac{4}{5}+\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\frac{7}{25}\\ &= \frac{96}{125}-\frac{21}{125}\\ &= \frac{3}{5}\end{aligned}$$

■

Ejercicio 56 *(a) Prueba las fórmulas siguientes:*

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}\qquad y\qquad \cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$$

(b) Como consecuencia, deduce las fórmulas siguientes:

$$1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}\qquad y\qquad 1+\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}$$

Solución: *(a) Sabemos que*

$$\begin{array}{ccccc}\cos^2 x & + & \sin^2 x & = & 1\\ \cos^2 x & - & \sin^2 x & = & \cos 2x\end{array}$$

Si sumamos miembro a miembro los términos de las dos igualdades anteriores, tenemos

$$2\cos^2 x=1+\cos 2x$$

de donde se obtiene

$$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$$

Si ahora en lugar de sumar, restamos la primera de la segunda, tenemos

$$2\sin^2 x=1-\cos 2x$$

de donde se obtiene

$$\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$$

(b) Si en lugar de x tomamos $x/2$ en las fórmulas deducidas anteriormente, tenemos

$$\begin{aligned}\cos^2\frac{x}{2} &= \frac{1+\cos\left(2\cdot\frac{x}{2}\right)}{2}\\ 2\cos^2\frac{x}{2} &= 1+\cos x\end{aligned}$$

y del mismo modo, tenemos

$$\begin{aligned}\sin^2\frac{x}{2} &= \frac{1-\cos\left(2\cdot\frac{x}{2}\right)}{2}\\ 2\sin^2\frac{x}{2} &= 1-\cos x\end{aligned}$$

■

Ejercicio 57 *(a) Prueba que si* $\tan\frac{x}{2}=t$*, entonces*

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2}\qquad y\qquad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

(b) Como aplicación, expresa la expresión

$$\sqrt{\frac{1-\cos x}{2(1+\sin x)}}$$

en función de t.

Solución: *(a) A partir de la fórmula*

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

tomando $\alpha=x/2$*, tenemos*

$$\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\sin x &= \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}\\ &= \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}\\ &= \frac{2t}{1+t^2}\end{aligned}$$

Por otra parte, sabemos que

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$

y tomando ahora $\alpha=x/2$*, tenemos*

$$\cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\cos x &= \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}}\\ &= \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{\tan^2\frac{x}{2}+1}\\ &= \frac{1-t^2}{1+t^2}\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{1-\cos x}{2(1+\sin x)}} &= \sqrt{\frac{1-\frac{1-t^2}{1+t^2}}{2\left(1+\frac{2t}{1+t^2}\right)}} \\
&= \sqrt{\frac{\frac{1+t^2-1+t^2}{1+t^2}}{2\cdot\frac{1+t^2+2t}{1+t^2}}} \\
&= \sqrt{\frac{2t^2}{2(1+t)^2}} \\
&= \frac{t}{1+t}
\end{aligned}$$

■

Ejercicio 58 *Prueba que si α y β son complementarios, entonces se cumple la siguiente relación*

$$(\sin\alpha+\sin\beta)(\cos\alpha+\cos\beta)=1+\sin 2\alpha$$

Solución: *Si α y β son complentarios se cumplen las siguientes relaciones:*

$$\sin\beta=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$$

$$\cos\beta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$$

Por tanto, tenemos

$$\begin{aligned}
(\sin\alpha+\sin\beta)(\cos\alpha+\cos\beta) &= (\sin\alpha+\cos\alpha)(\cos\alpha+\sin\alpha) \\
&= (\sin\alpha+\cos\alpha)^2 \\
&= \sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha \\
&= 1+\sin 2\alpha
\end{aligned}$$

■

Transformación de sumas en productos y viceversa

Ejercicio 59 *Sin usar la calculadora, calcula el valor de las siguientes expresiones:*

(a)

$$\sin 105^o+\sin 15^o$$

(b)

$$\sin 105^o - \sin 15^o$$

(c)

$$\frac{\cos 255^o - \cos 195^o}{\cos 255^o + \cos 195^o}$$

(d)

$$\frac{\sin 40^o + \sin 20^o}{\cos 40^o + \cos 20^o}$$

Solución: *(a)*

$$\begin{aligned}
\sin 105^o + \sin 15^o &= 2\sin\frac{105^o + 15^o}{2}\cos\frac{105^o - 15^o}{2} \\
&= 2\sin 60^o \cos 45^o \\
&= 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} \\
&= \frac{\sqrt{6}}{2}
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\sin 105^o - \sin 15^o &= 2\sin\frac{105^o - 15^o}{2}\cos\frac{105^o + 15^o}{2} \\
&= 2\sin 45^o \cos 60^o \\
&= 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\frac{\cos 255^o - \cos 195^o}{\cos 255^o + \cos 195^o} &= \frac{-\cos 75^o + \cos 15^o}{-\cos 75^o - \cos 15^o} \\
&= \frac{\cos 75^o - \cos 15^o}{\cos 75^o + \cos 15^o} \\
&= \frac{-2\sin 45^o \sin 30^o}{2\cos 45^o \cos 30^o} \\
&= -\frac{\sqrt{2}/2\cdot 1/2}{\sqrt{2}/2\cdot\sqrt{3}/2} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{3}} \\
&= -\frac{\sqrt{3}}{3}
\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}\frac{\sin 40^o + \sin 20^o}{\cos 40^o + \cos 20^o} &= \frac{2\sin 30^o \cos 10^o}{2\cos 30^o \cos 10^o}\\ &= \tan 30^o\\ &= \frac{\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

■

Ejercicio 60 *Transforma en producto las siguientes expresiones:*

(a)
$$1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(b)
$$1 + \sin x$$

(c)
$$\frac{\sqrt{3}}{2} + \cos x$$

(d)
$$\frac{\sqrt{2}}{2} - \cos\frac{\pi}{3}$$

Solución: (a)

$$\begin{aligned}1 - \frac{\sqrt{2}}{2} &= \sin\frac{\pi}{2} - \sin\frac{\pi}{4}\\ &= 2\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{3\pi}{8}\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}1 + \sin x &= \sin\frac{\pi}{2} + \sin x\\ &= 2\sin\frac{\pi + 2x}{4}\cos\frac{\pi - 2x}{4}\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{3}}{2} + \cos x &= \cos\frac{\pi}{6} + \cos x\\ &= 2\cos\frac{\pi + 6x}{12}\cos\frac{\pi - 6x}{12}\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{2}}{2} - \cos\frac{\pi}{3} &= \cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{3} \\
&= -2\sin\frac{7\pi}{24}\sin\left(-\frac{\pi}{24}\right) \\
&= 2\sin\frac{7\pi}{24}\sin\frac{\pi}{24}
\end{aligned}$$

■

Ejercicio 61 *Transforma en suma las siguientes expresiones:*

(a)
$$\sin 4x \cdot \cos x$$

(b)
$$\cos 5x \cdot \cos 6x$$

(c)
$$\sin 6x \cdot \sin x$$

Solución: *Sabemos que*

$$\sin a + \sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$$

es decir,

$$\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2} = \frac{1}{2}(\sin a + \sin b) \tag{1}$$

Si ahora hacemos

$$\frac{a+b}{2} = A$$
$$\frac{a-b}{2} = B$$

tenemos el siguiente sistema en a y b:

$$\begin{array}{ccccc} a & + & b & = & 2A \\ a & - & b & = & 2B \end{array}$$

Sumando miembro a miembro, obtenemos

$$2a = 2A + 2B$$

o sea

$$a = A + B$$

Si ahora restamos miembro a miembro, obtenemos

$$2b = 2A - 2B$$

o sea

$$b = A - B$$

Por consiguiente, de (1) deducimos la fórmula siguiente

$$\sin A \cdot \cos B = \frac{1}{2}\left[\sin(A+B) + \sin(A-B)\right]$$

Del mismo modo se obtienen las siguientes fórmulas de transformación de productos a sumas:

$$\cos A \cdot \cos B = \frac{1}{2}\left[\cos(A+B) + \cos(A-B)\right]$$

$$\sin A \cdot \sin B = \frac{1}{2}\left[\cos(A-B) - \cos(A+B)\right]$$

Ahora, con estas fórmulas, podemos resolver el ejercicio de forma inmediata.
(a)

$$\sin 4x \cdot \cos x = \frac{1}{2}\left(\sin 5x + \sin 3x\right)$$

(b)

$$\begin{aligned}
\cos 5x \cdot \cos 6x &= \frac{1}{2}\left[\cos 11x + \cos(-x)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left(\cos 11x + \cos x\right)
\end{aligned}$$

(c)

$$\sin 6x \cdot \sin x = \frac{1}{2}\left(\cos 5x - \cos 7x\right)$$

■

Ejercicio 62 *Transforma en suma de senos el producto* $2\sin 5x \cos 7x$. *Transforma también dicho producto en suma de cosenos.*

Solución: *En el ejercicio ??? hemos visto que*

$$\sin A \cos B = \frac{1}{2}\left[\sin(A+B) + \sin(A-B)\right]$$

Aplicando esta fórmula, tenemos

$$\begin{aligned}
2\sin 5x \cos 7x &= 2 \cdot \frac{1}{2}\left[\sin 12x + \sin(-2x)\right] \\
&= \sin 12x - \sin 2x
\end{aligned}$$

Para transformar el producto dado en suma de cosenos será suficiente recordar que

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$$

Por tanto, tenemos

$$\begin{aligned}
2\sin 5x \cos 7x &= \sin 12x - \sin 2x \\
&= \cos\left(\frac{\pi}{2} - 12x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)
\end{aligned}$$

■

Ejercicio 63 *Transforma en producto de diversos factores:*

(a)

$$\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x$$

(b)

$$\sin x + \sin 3x + 2\sin 2x$$

Solución: *(a)*

$$\begin{aligned}
\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x &= (\cos x + \cos 3x) + (\cos 5x + \cos 7x) \\
&= 2\cos 2x \cdot \cos(-x) + 2\cos 6x \cdot \cos(-x) \\
&= 2\cos 2x \cdot \cos x + 2\cos 6x \cdot \cos x \\
&= 2\cos x \cdot (\cos 2x + \cos 6x) \\
&= 2\cos x \cdot 2\cos 4x \cdot \cos(-2x) \\
&= 4\cos x \cdot \cos 4x \cdot \cos 2x
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\sin x + \sin 3x + 2\sin 2x &= (\sin x + \sin 3x) + 2\sin 2x \\
&= 2\sin 2x \cdot \cos(-x) + 2\sin 2x \\
&= 2\sin 2x \cdot \cos x + 2\sin 2x \\
&= 2\sin 2x \cdot (\cos x + 1) \\
&= 2\sin x \cdot (\cos x + \cos 0) \\
&= 2\sin x \cdot 2\cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} \\
&= 4\sin x \cdot \cos^2 \frac{x}{2}
\end{aligned}$$

■

Simplificación e identidades trigonométricas

Ejercicio 64 *Simplifica las siguientes expresiones:*

(a)

$$\frac{\sin 2x - \sin x}{\cos 2x - \cos x}$$

(b)

$$\frac{\sin x(\cos y + \sin x) + \cos x(\sin y + \cos x) - 1}{\cos y(\cos x + \cos y) + \sin y(\sin y - \sin x) - 1}$$

(c)

$$\frac{\cos 132^o - \cos 80^o}{\sin 132^o + \sin 80^o}$$

(d)

$$\tan(\frac{\pi}{4}+x)\cdot\tan(\frac{\pi}{4}-x)$$

Solución: *(a)*

$$\begin{aligned}\frac{\sin 2x-\sin x}{\cos 2x-\cos x} &= \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}}{-2\sin\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2}}\\ &= -\cot\frac{3x}{2}\end{aligned}$$

(b) Eliminando los paréntesis de la expresión

$$\frac{\sin x(\cos y+\sin x)+\cos x(\sin y+\cos x)-1}{\cos y(\cos x+\cos y)+\sin y(\sin y-\sin x)-1}$$

tenemos

$$\frac{\sin x\cos y+\sin^2 x+\cos x\sin y+\cos^2 x-1}{\cos y\cos x+\cos^2 y+\sin^2 y-\sin y\sin x-1}$$

Puesto que

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

de la expresión anterior, obtenemos

$$\frac{\sin x\cos y+\cos x\sin y}{\cos y\cos x-\sin y\sin x}$$

De aquí, tenemos

$$\begin{aligned}\frac{\sin x\cos y+\cos x\sin y}{\cos y\cos x-\sin y\sin x} &= \frac{\sin(x+y)}{\cos(x+y)}\\ &= \tan(x+y)\end{aligned}$$

En resumen, tenemos que

$$\frac{\sin x(\cos y+\sin x)+\cos x(\sin y+\cos x)-1}{\cos y(\cos x+\cos y)+\sin y(\sin y-\sin x)-1}=\tan(x+y)$$

(c)

$$\begin{aligned}\frac{\cos 132^o-\cos 80^o}{\sin 132^o+\sin 80^o} &= \frac{-2\sin 106^o\sin 26^o}{2\sin 106^o\cos 26^o}\\ &= -\tan 26^o\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}\tan(\frac{\pi}{4}+x)\cdot\tan(\frac{\pi}{4}-x) &= \frac{1+\tan x}{1-\tan x}\cdot\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\\ &= 1\end{aligned}$$

■

Ejercicio 65 *Demuestra las siguientes identidades:*

(a)
$$\sin 2x - \cos 2x + \sin x - \cos x = 2\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}\sin\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

(b)
$$\frac{\sin x + \cos x - 1}{\sin x - \cos x + 1} = \frac{\cos x}{\sin x + 1}$$

(c)
$$\frac{\sin x + \tan x}{\cot x + \csc x} = \sin x \tan x$$

(d)
$$\frac{\sin^4 x - \sin^2 x}{\cos^4 x - \cos^2 x} = 1$$

Solución: *(a) Haremos la prueba por deducción indirecta:*

$$\begin{aligned}
\sin 2x - \cos 2x + \sin x - \cos x &= (\sin 2x + \sin x) - (\cos 2x + \cos x) \\
&= 2\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2} - 2\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2} \\
&= 2\cos\frac{x}{2}\left(\sin\frac{3x}{2} - \cos\frac{3x}{2}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}\sin\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) &= 2\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}\left(\sin\frac{3x}{4}\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{3x}{4}\right) \\
&= 2\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{3x}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{3x}{4}\right) \\
&= 2\cos\frac{x}{2}\left(\sin\frac{3x}{2} - \cos\frac{3x}{2}\right)
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\sin 2x - \cos 2x + \sin x - \cos x = 2\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}\sin\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

(b) Esta igualdad tiene la forma de una proporción y sabemos que se verifica

$$\tfrac{a}{b} = \tfrac{c}{d} \iff ad = bc$$

En consecuencia, se cumplirá la identidad

$$\frac{\sin x + \cos x - 1}{\sin x - \cos x + 1} = \frac{\cos x}{\sin x + 1}$$

si y sólo si se cumple la siguiente identidad equivalente

$$(\sin x + \cos x - 1)(\sin x + 1) = (\sin x - \cos x + 1)\cos x$$

Haremos la prueba de esta última por deducción directa:

$$\begin{aligned}
(\sin x + \cos x - 1)(\sin x + 1) &= \sin^2 x + \cos x \sin x - \sin x + \sin x + \cos x - 1 \\
&= \sin^2 x + \cos x \sin x + \cos x - 1 \\
&= 1 - \cos^2 x + \cos x \sin x + \cos x - 1 \\
&= (\sin x - \cos x + 1)\cos x
\end{aligned}$$

(c) Haremos la prueba por deducción directa:

$$\begin{aligned}
\frac{\sin x + \tan x}{\cot x + \csc x} &= \frac{\sin x + \tan x}{\frac{1}{\tan x} + \frac{1}{\sin x}} \\
&= \frac{\frac{\sin x + \tan x}{1}}{\frac{\sin x + \tan x}{\tan x \sin x}} \\
&= \sin x \tan x
\end{aligned}$$

(d) Haremos la prueba por deducción directa:

$$\begin{aligned}
\frac{\sin^4 x - \sin^2 x}{\cos^4 x - \cos^2 x} &= \frac{\sin^2 x(\sin^2 x - 1)}{\cos^4 x - \cos^2 x} \\
&= \frac{(1 - \cos^2 x)(1 - \cos^2 x - 1)}{\cos^4 x - \cos^2 x} \\
&= \frac{(1 - \cos^2 x)(-\cos^2 x)}{\cos^4 x - \cos^2 x} \\
&= \frac{\cos^4 x - \cos^2 x}{\cos^4 x - \cos^2 x} \\
&= 1
\end{aligned}$$

■

Ejercicio 66 *Demuestra las siguientes identidades:*

(a)

$$\frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{\sin(x+y) + \sin(x-y)} = \tan y$$

(b)

$$\frac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)} = \frac{\tan x \cot y + 1}{\tan x \cot y - 1}$$

(c)

$$\frac{\sin x + \sin 3x}{\cos x + \cos 3x} = \tan 2x$$

(d)

$$\frac{\sin x + \sin y}{\sin x - \sin y} = \frac{\tan \frac{x+y}{2}}{\tan \frac{x-y}{2}}$$

Solución: *(a) Haremos la prueba por deducción directa:*

$$\begin{aligned}
\frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{\sin(x+y) + \sin(x-y)} &= \frac{\cos x \cos y + \sin x \sin y - \cos x \cos y + \sin x \sin y}{\sin x \cos y + \sin y \cos x + \sin x \cos y - \sin y \cos x} \\
&= \frac{2 \sin x \sin y}{2 \sin x \cos y} \\
&= \tan y
\end{aligned}$$

(b) Haremos la prueba por deducción directa:

$$\begin{aligned}
\frac{\sin(x+y)}{\sin(x-y)} &= \frac{\sin x \cos y + \sin y \cos x}{\sin x \cos y - \sin y \cos x} \\
&= \frac{\frac{\sin x \cos y}{\sin y \cos x} + \frac{\sin y \cos x}{\sin y \cos x}}{\frac{\sin x \cos y}{\sin y \cos x} - \frac{\sin y \cos x}{\sin y \cos x}} \\
&= \frac{\tan x \cot y + 1}{\tan x \cot y - 1}
\end{aligned}$$

(c) Haremos la prueba por deducción directa:

$$\begin{aligned}
\frac{\sin x + \sin 3x}{\cos x + \cos 3x} &= \frac{2 \sin 2x \cos(-x)}{2 \cos 2x \cos(-x)} \\
&= \tan 2x
\end{aligned}$$

(d) Haremos la prueba por deducción directa:

$$\begin{aligned}
\frac{\sin x + \sin y}{\sin x - \sin y} &= \frac{2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}}{2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}} \\
&= \tan \frac{x+y}{2} \cot \frac{x-y}{2} \\
&= \frac{\tan \frac{x+y}{2}}{\tan \frac{x-y}{2}}
\end{aligned}$$

■

Ejercicio 67 *Si A, B, C son los ángulos de un triángulo, prueba que se cumplen las siguientes relaciones:*

(a)

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$$

(b)

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$$

Solución: *(a) Si A, B, C son los ángulos de un triángulo, entonces*

$$C = \pi - (A + B)$$

y, por tanto,

$$\tan C = \tan\left[\pi - (A + B)\right] = -\tan(A + B)$$

Luego,

$$\tan C = -\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

y de aquí, obtenemos

$$\begin{aligned}
\tan C(1 - \tan A \tan B) &= -\tan A - \tan B \\
\tan C - \tan A \tan B \tan C &= -\tan A - \tan B \\
\tan A + \tan B + \tan C &= \tan A \tan B \tan C
\end{aligned}$$

(b) Del mismo modo que antes, se cumple

$$C = \pi - (A + B)$$

y, por tanto,

$$\frac{C}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{A + B}{2}$$

Además, sabemos que

$$\sin C = 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}$$

y, en consecuencia, obtenemos que

$$\sin C = 2 \cos \frac{A + B}{2} \cos \frac{C}{2}$$

Por otra parte, tenemos

$$\begin{aligned}
\sin A + \sin B + \sin C &= 2 \sin \frac{A + B}{2} \cos \frac{A - B}{2} + \sin C \\
&= 2 \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A - B}{2} + 2 \cos \frac{A + B}{2} \cos \frac{C}{2} \\
&= 2 \cos \frac{C}{2} \left(\cos \frac{A - B}{2} + \cos \frac{A + B}{2} \right) \\
&= 2 \cos \frac{C}{2} \cdot 2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \\
&= 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}
\end{aligned}$$

■

Ejercicio 68 *Prueba que todo triángulo ABC que verifique la relación*

$$\sin B + \sin C = \cos B + \cos C$$

es rectángulo.

Solución: *(a) Primero probaremos que si se cumple la relación, entonces el triángulo es rectángulo y, después, (b) probaremos que si el triángulo es rectángulo, entonces se cumple la relación.*

(a) Supongamos que se verifica la relación. Entonces, tenemos

$$\begin{aligned} \sin B + \sin C &= \cos B + \cos C \\ 2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2} &= 2\cos\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2} \\ \sin\frac{B+C}{2} &= \cos\frac{B+C}{2} \end{aligned}$$

de donde se deduce que

$$\frac{B+C}{2} = \frac{\pi}{4}$$

luego

$$B + C = \frac{\pi}{2}$$

y, por tanto,

$$A = \frac{\pi}{2}$$

y el triángulo es rectángulo.

(b) Supongamos que el triangulo es rectángulo y, además, que $A = \pi/2$. Entonces,

$$B + C = \frac{\pi}{2}$$

y, por tanto,

$$\sin B = \sin\left(\frac{\pi}{2} - C\right) = \cos C$$

y

$$\sin C = \sin\left(\frac{\pi}{2} - B\right) = \cos B$$

y, en consecuencia,

$$\sin B + \sin C = \cos C + \cos B$$

■

Funciones trigonométricas

Ejercicio 69 *De las siguientes funciones, averigua cuáles son periódicas, calculando su período:*

(a) $f(x) = \sin 2x$

(b) $f(x) = \cos \frac{x}{4}$

(c) $f(x) = \cos x^2$

(d) $f(x) = \sin x + \cos 2x$

(e) $f(x) = \tan(x - 1) + 1$

Solución: *Recuerda que una función f es periódica de período k si*

$$f(x + k) = f(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ y $k \neq 0$.

(a) Tenemos que

$$f(x) = \sin 2x$$

y

$$f(x + k) = \sin(2(x + k))$$

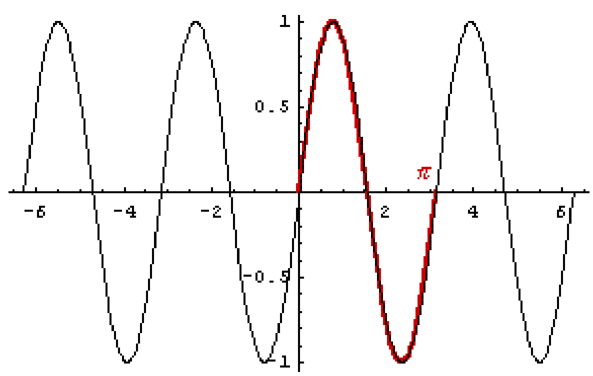
Por tanto, f será periódica si

$$\sin 2x = \sin(2x + 2k)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Sabemos que la función seno es periódica y su período es 2π. Luego,

$$\begin{aligned} 2k &= 2\pi \\ k &= \pi \end{aligned}$$

Por consiguiente, esta función es periódica de período π; observa este hecho a partir de la gráfica de la función.



$y = \sin 2x$

(b) Tenemos que

$$f(x) = \cos \frac{x}{4}$$

y

$$f(x+k) = \cos\frac{x+k}{4}$$

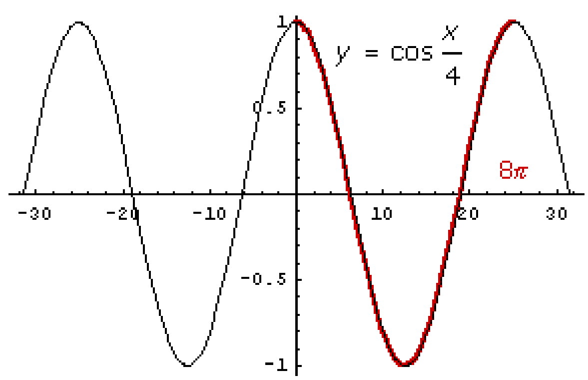
Por tanto, f será periódica si

$$\cos\left(\frac{x}{4}+\frac{k}{4}\right) = \cos\frac{x}{4}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Sabemos que la función coseno es periódica y su período es 2π. Luego,

$$\begin{aligned} \frac{k}{4} &= 2\pi \\ k &= 8\pi \end{aligned}$$

Por consiguiente, esta función es periódica de período 8π; observa este hecho a partir de la gráfica de la función.



(c) Tenemos que

$$f(x) = \cos x^2$$

y

$$f(x+k) = \cos(x+k)^2$$

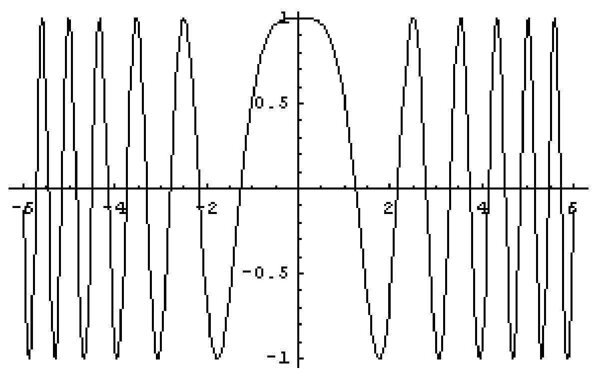
Por tanto, f será periódica si

$$\begin{aligned} \cos(x+k)^2 &= \cos x^2 \\ \cos(x^2+2kx+k^2) &= \cos x^2 \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Como sabemos que la función coseno es periódica de período 2π, entonces

$$2kx + k^2 = 2\pi$$

pero esto no es posible, ya que el valor de k depende de x. Por consiguiente esta función no es periódica. Observa este hecho a partir de la gráfica de la función.



$y = \cos x^2$

(d) Tenemos que

$$f(x) = \sin x + \cos 2x$$

y

$$f(x+k) = \sin(x+k) + \cos\left(2(x+k)\right)$$

Por tanto, f será periódica si

$$\sin(x+k) + \cos\left(2x+2k\right) = \sin x + \cos 2x$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Sabemos que

$$\sin(x+k) = \sin x \Longrightarrow k = 2\pi$$

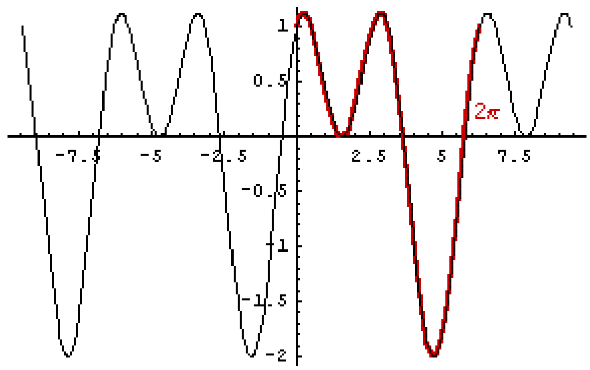
y

$$\cos(2x+2k) = \cos 2x \Longrightarrow 2k = 2\pi \Longrightarrow k = \pi$$

Al ser 2π múltiplo de π, el período de f es 2π, pues,

$$\begin{aligned} \sin(x+2\pi) + \cos\left(2(x+2\pi)\right) &= \sin x + \cos((2x+2\pi)+2\pi) \\ &= \sin x + \cos(2x+2\pi) \\ &= \sin x + \cos 2x \end{aligned}$$

Por consiguiente, esta función es periódica de período 2π; observa este hecho a partir de la gráfica de la función.



$y = \sin x + \cos 2x$

(e) Tenemos que

$$f(x) = \tan(x-1) + 1$$

y

$$f(x+k) = \tan(x+k-1) + 1$$

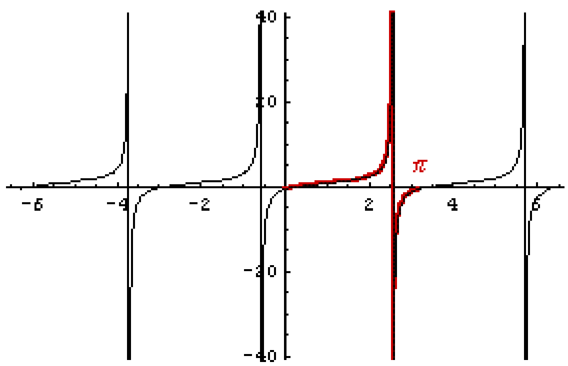
Por tanto, f será periódica si

$$\begin{aligned} \tan(x+k-1)+1 &= \tan(x-1)+1 \\ \tan(x-1+k) &= \tan(x-1) \end{aligned}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Sabemos que la función tangente es periódica y su período es π. Luego,

$$k = \pi$$

Por consiguiente, esta función es periódica de período π; observa este hecho a partir de la gráfica de la función.



$y = \tan(x-1) + 1$

■

Ejercicio 70 *Sin utilizar la calculadora, calcula las razones trigonométricas fundamentales de los siguientes ángulos: (a)* 820^o *(b)* 5700^o *y (c)* $-13\pi/3$.

Solución: *(a) La medida principal del ángulo* 820^o *es* 120^o*, ya que*

$$820^o = 120^o + 2 \cdot 360^o$$

Luego,

$$\sin 820^o = \sin 120^o = \sin(180^o - 60^o) = \sin 60^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 820^o = \cos 120^o = \cos(180^o - 60^o) = -\cos 60^o = -\frac{1}{2}$$

$$\tan 820^o = \tan 120^o = \tan(180^o - 60^o) = -\tan 60^o = -\sqrt{3}$$

(b) La medida principal del ángulo 5700^o *es* 300^o*, ya que*

$$5700^o = 300^o + 15 \cdot 360^o$$

Luego,

$$\sin 5700^o = \sin 300^o = \sin(-60^o) = -\sin 60^o = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 5700^o = \cos 300^o = \cos(-60^o) = \cos 60^o = \frac{1}{2}$$

$$\tan 5700^o = \tan 300^o = \tan(-60^o) = -\tan 60^o = -\sqrt{3}$$

(c) La medida principal del ángulo $-13\pi/3$ *es* $-\pi/3$*, ya que*

$$-\frac{13\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} - 2 \cdot 2\pi$$

Luego,

$$\sin\left(-\frac{13\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\left(-\frac{13\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\tan\left(-\frac{13\pi}{3}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\tan\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

■

Ejercicio 71 *Expresa en términos de* $\sin x$, $\cos x$ *y* $\tan x$ *las siguientes expresiones: (a)* $\sin(2\pi - x)$ *(b)* $\tan(2\pi - x)$ *(c)* $\cos(2x + 5\pi)$ *y (d)* $\tan(2x + 3\pi)$.

Solución: *(a)*

$$\begin{aligned} \sin(2\pi - x) &= \sin(-x) \\ &= -\sin x \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \tan(2\pi - x) &= \tan(-x) \\ &= -\tan x \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} \cos(2x + 5\pi) &= \cos(2x + \pi) \\ &= -\cos 2x \\ &= -\cos^2 x + \sin^2 x \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} \tan(2x + 3\pi) &= \tan 2x \\ &= \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x} \end{aligned}$$

■

Ejercicio 72 *Sin utilizar la calculadora, da la expresión general de los ángulos x tales que:*

(a) $\sin x = 0$

(b) $\cos x = -1$

(c) $\tan x$ *no existe*

(d) $\sin x = \sqrt{2}/2$

(e) $\cos x = -\sqrt{3}/2$

(f) $\tan x = -1/\sqrt{3}$

(g) $\sec x = 0.5$

Solución: *(a) La ecuación es* $\sin x = 0$*. Puesto que*

$$\sin 0 = \sin \pi = 0$$

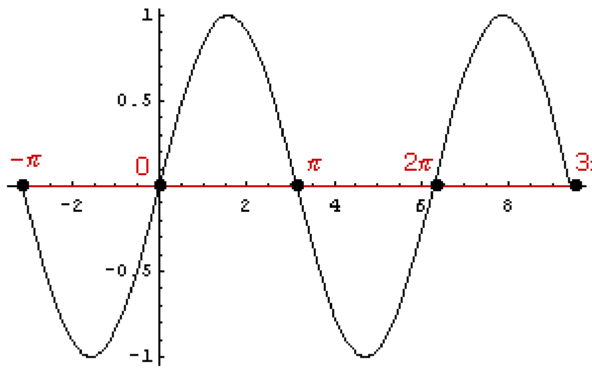
y la función seno es periódica de período 2π*, todas las soluciones de la ecuación son*

$$x_1 = 0 + k \cdot 2\pi \quad o \quad x_2 = \pi + k \cdot 2\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

o, de forma equivalente,

$$x = k \cdot \pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

Observa cómo puedes obtener estas soluciones a partir de la gráfica de la función seno.



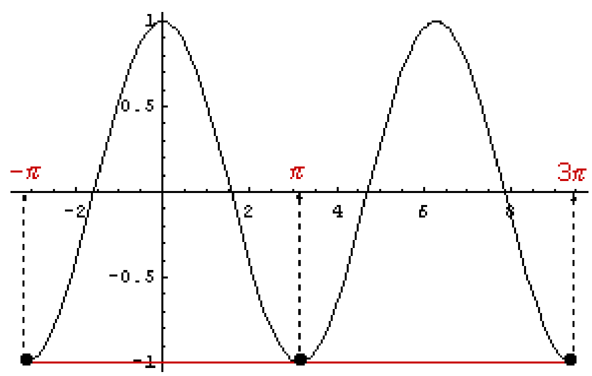
(b) La ecuación es $\cos x = -1$. *Puesto que*

$$\cos \pi = -1$$

y la función coseno es periódica de período 2π, *todas las soluciones de esta ecuación son*

$$x = \pi + k \cdot 2\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

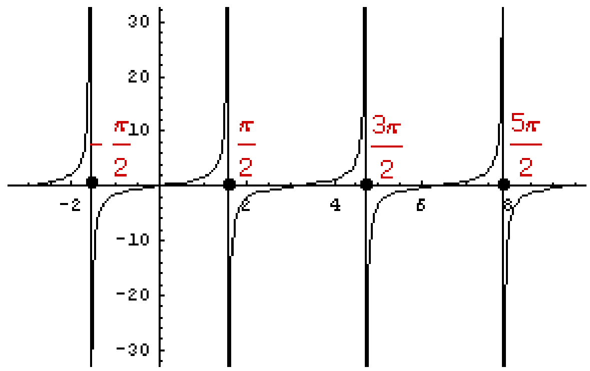
Observa cómo puedes obtener estas soluciones a partir de la gráfica de la función coseno.



(c) Se trata de encontrar los valores de x *para los cuales* $\tan x$ *no existe. Sabemos que la tangente de* $\pi/2$ *no existe. Al ser la función tangente periódica de período* π, *entonces* $\tan x$ *no existe cuando*

$$x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

Observa la gráfica de la función tangente para darte cuenta de este hecho.



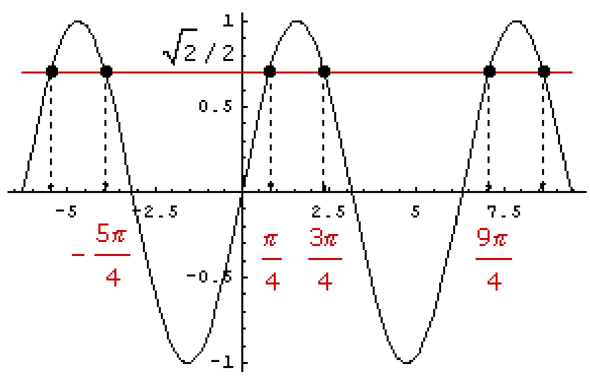
(d) La ecuación es $\sin x = \sqrt{2}/2$*. Puesto que*

$$\sin\frac{\pi}{4} = \sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

y la función seno es periódica de período 2π*, todas las soluciones de la ecuación son*

$$x_1 = \frac{\pi}{4} + k\cdot 2\pi \quad o \quad x_2 = \frac{3\pi}{4} + k\cdot 2\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

Observa cómo puedes obtener estas soluciones a partir de la gráfica de la función seno.



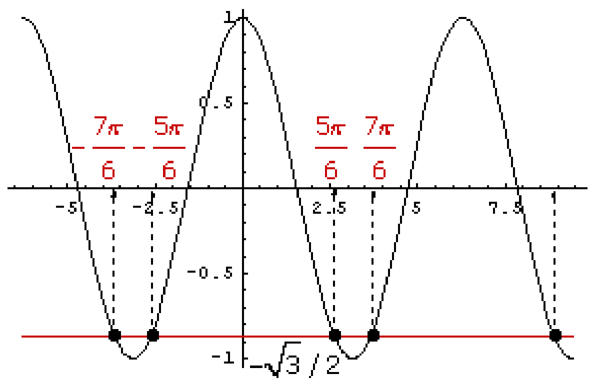
(e) La ecuación es $\cos x = -\sqrt{3}/2$*. Puesto que*

$$\cos\frac{5\pi}{6} = \cos\frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

y la función coseno es periódica de período 2π*, todas las soluciones de esta ecuación son*

$$x_1 = \frac{5\pi}{6} + k\cdot 2\pi \quad o \quad x_2 = \frac{7\pi}{6} + k\cdot 2\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

Observa cómo puedes obtener estas soluciones a partir de la gráfica de la función coseno.



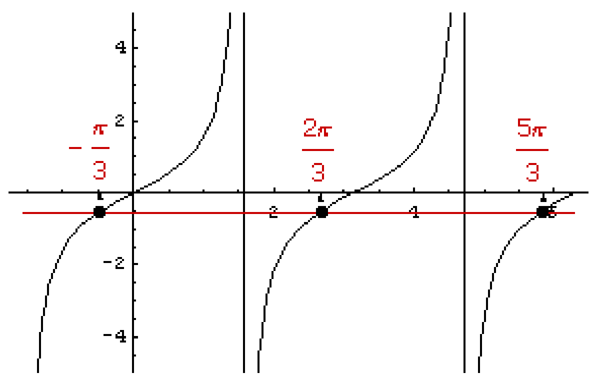
(f) La ecuación es $\tan x = -1/\sqrt{3}$. *Puesto que*

$$\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Al ser la función tangente periódica de período π, *entonces la ecuación tiene como soluciones*

$$x = -\frac{\pi}{3} + k \cdot \pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

Observa cómo puedes obtener estas soluciones a partir de la gráfica de la función tangente.



(g) La ecuación es $\sec x = 0.5$. *Observa que*

$$\sec x = \frac{1}{2} \Longrightarrow \cos x = 2$$

y sabemos que el recorrido de la función coseno es $[-1, 1]$. *Por tanto, esta ecuación no tiene soluciones.* ■

Ejercicio 73 *Mediante la calculadora, da la expresión general de los ángulos* x *tales que:*

(a) $\sin x = 0.435$

(b) $\cos x = -0.12$

(c) $\tan x = 13.5$

(d) $\csc x = -1/2$

Solución: *(a) Mediante calculadora, pulsando las teclas*

$$\boxed{\text{SHIFT}} + \boxed{\text{sin}}$$

a partir de $\sin x = 0.435$, *obtenemos que*

$$\sin 25^o 47' 7'' = 0.435$$

Ahora bien, también sabemos que

$$\sin(180^o - 25^o 47' 7'') = \sin 154^o 12' 53'' = 0.435$$

Por tanto, sabiendo que la función seno es periódica de período 2π, *tenemos que las soluciones de la ecuación dada son*

$$x_1 = 25^o 47' 7'' + k \cdot 360^o \quad y \quad x_2 = 154^o 12' 53'' + k \cdot 360^o$$

(b) Mediante calculadora, pulsando las teclas

$$\boxed{\text{SHIFT}} + \boxed{\text{cos}}$$

a partir de $\cos x = -0.12$, *obtenemos que*

$$\cos 96^o 53' 32'' = -0.12$$

Ahora bien, también sabemos que

$$\cos(360^o - 96^o 53' 32'') = \cos 263^o 6' 28'' = -0.12$$

Por tanto, sabiendo que la función coseno es periódica de período 2π, *tenemos que las soluciones de la ecuación dada son*

$$x_1 = 96^o 53' 32'' + k \cdot 360^o \quad y \quad x_2 = 263^o 6' 28'' + k \cdot 360^o$$

(c) Mediante calculadora, pulsando las teclas

$$\boxed{\text{SHIFT}} + \boxed{\text{tan}}$$

a partir de $\tan x = 13.5$, *obtenemos que*

$$\tan 85^o 45' 49'' = 13.5$$

Por tanto, sabiendo que la función tangente es periódica de período π, *tenemos que las soluciones de la ecuación dada son*

$$x = 85^o 45' 49'' + k \cdot 180^o$$

■

Ejercicio 74 *Calcula el dominio de las siguientes funciones:*

(a) $f(x) = 2\sin 2x$

(b) $f(x) = 1 - 3\cos(x + 1)$

(c) $f(x) = \sqrt{\sin x + 1}$

(d) $f(x) = \sqrt{1 - \cos^2 x}$

(e) $f(x) = 2\tan(x - 1)$

(f) $f(x) = \sin\sqrt{x - 1}$

(g) $f(x) = \frac{1-\sin x}{\cos x}$

Solución: *(a) Tenemos la función* $f(x) = 2\sin 2x$*. Su dominio es* $\mathbb{R}$*, pues la expresión* $2x$ *sobre la que se aplica la función seno siempre está bien definida para cualquier número real.*

(b) La función es ahora $f(x) = 1-3\cos(x+1)$*. Su dominio es* $\mathbb{R}$*, pues* $x+1$ *es un número real cualesquiera que sea* $x \in \mathbb{R}$*.*

(c) La función es $f(x) = \sqrt{\sin x + 1}$*. Sabemos que las raíces cuadradas de números negativos no son números reales. Por tanto, debemos averiguar para qué valores de* x *se cumple la siguiente desigualdad*

$$\sin x + 1 \geq 0$$

Ahora bien, sabemos que el recorrido de la función seno es $[-1, 1]$ *y, por tanto, se verifica*

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

y, por tanto, sumando 1 *a cada miembro de las desigualdades, obtenemos*

$$0 \leq \sin x + 1 \leq 2$$

y, como consecuencia, se cumple

$$\sin x + 1 \geq 0$$

para todo $x \in \mathbb{R}$*. Por consiguiente, el dominio de esta función es* $\mathbb{R}$*.*

(d) Tenemos la función $f(x) = \sqrt{1 - \cos^2 x}$*. Del mismo modo que antes, debemos averiguar para qué valores de* x *se cumple*

$$1 - \cos^2 x \geq 0$$

Ahora bien, sabemos que el recorrido de la función coseno es $[-1, 1]$ *y, por tanto, se verifica*

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

y, como consecuencia, se cumple

$$0 \leq \cos^2 x \leq 1$$

es decir,

$$0 \geq -\cos^2 x \geq -1$$

luego, sumando 1 *a cada miembro de las desigualdades, obtenemos*

$$1 \geq 1 - \cos^2 x \geq 0$$

para todo $x \in \mathbb{R}$*. Por consiguiente, el dominio de esta función es* $\mathbb{R}$*.*

(e) La función es ahora $f(x) = 2\tan(x-1)$*. La expresión* $\tan(x-1)$ *será un número real siempre que* $x-1$ *no tome los valores de la forma*

$$\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$$

Por tanto, el dominio de esta función es

$$\mathbb{R} - \{1 + \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi : k \in \mathbb{Z}\}$$

(f) La función es $f(x) = \sin\sqrt{x-1}$*. La expresión* $\sqrt{x-1}$ *será un número real cuando* $x - 1 \geq 0$*, es decir, cuando* $x \geq 1$*. Por tanto, el dominio de esta función es*

$$[1, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$$

(g) Tenemos la función

$$f(x) = \frac{1 - \sin x}{\cos x}$$

La expresión

$$\frac{1 - \sin x}{\cos x}$$

será un número real cuando

$$\cos x \neq 0$$

Ahora bien, sabemos que $\cos x = 0$ *cuando*

$$x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$$

Por tanto, el dominio de la función dada es

$$\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$$

■

Ejercicio 75 *Calcula el recorrido de las siguientes funciones:*

(a) $f(x) = 3\sin x$

(b) $f(x) = -2\cos x$

(c) $f(x) = 1 + \sin x$

(d) $f(x) = \sin(x-2)$

(e) $f(x) = 4 - \frac{1}{2}\cos x$

(f) $f(x) = 1 + 4\tan x$

Solución: *(a) La función es $f(x) = 3\sin x$. Al ser $[-1,1]$ el recorrido de la función seno, se cumple*

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Por tanto, multiplicando por 3 los miembros de las desigualdades, obtenemos

$$-3 \leq 3\sin x \leq 3$$

y, como consecuencia, el recorrido de esta función es $[-3,3]$.

(b) La función es $f(x) = -2\cos x$. Al ser $[-1,1]$ el recorrido de la función coseno, se cumple

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Por tanto, multiplicando por -2 los miembros de las desigualdades, obtenemos

$$2 \geq -2\cos x \geq -2$$

y, como consecuencia, el recorrido de esta función es $[-2,2]$.

(c) La función es $f(x) = 1 + \sin x$. Puesto que

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

al sumar 1 a los miembros de las desigualdades, obtenemos

$$0 \leq 1 + \sin x \leq 2$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Por consiguiente, el recorrido de esta función es $[0,2]$.

(d) La función es $f(x) = \sin(x-2)$. El recorrido de esta función es $[-1,1]$.

(e) La función es $f(x) = 4 - \frac{1}{2}\cos x$. Puesto que

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

multiplicando por $-1/2$, tenemos

$$\frac{1}{2} \geq -\frac{1}{2}\cos x \geq -\frac{1}{2}$$

y sumando ahora 4, tenemos

$$4 + \frac{1}{2} \geq 4 - \frac{1}{2}\cos x \geq 4 - \frac{1}{2}$$

es decir,

$$\frac{9}{2} \geq 4 - \frac{1}{2}\cos x \geq \frac{7}{2}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Por tanto, el recorrido de esta función es

$$\left[\frac{7}{2}, \frac{9}{2}\right]$$

(f) La función es $f(x) = 1 + 4\tan x$. Puesto que

$$-\infty < \tan x < +\infty$$

entonces es claro que se verifica que

$$-\infty < 1 + 4\tan x < +\infty$$

y, en consecuencia, el recorrido de esta función es $\mathbb{R}$. ■

Ejercicio 76 *Gráfica, dominio, recorrido y puntos de discontinuidad de las siguientes funciones:*

(a) $f(x) = \sec x$

(b) $f(x) = \csc x$

(c) $f(x) = \cot x$

(d) $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{si } x \leq 0 \\ \cos 2x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

(e) $f(x) = \left|\cos x - \frac{1}{2}\right|$

(f) $f(x) = 2\sin(3x - 1) - 1$

Solución: *(a) Recuerda que*

$$f(x) = \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

y, por tanto, su dominio es

$$\mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} : \cos x = 0\}$$

Ahora bien, las soluciones de la ecuación

$$\cos x = 0$$

son

$$x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$$

Luego,

$$Dom(\sec) = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Los puntos de discontinuidad de esta función son los puntos de la forma

$$\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

Además, por ejemplo, para $k = 0$ se cumple

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \frac{1}{\cos x} = -\infty \qquad y \qquad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{\cos x} = +\infty$$

y lo mismo ocurre con los demás puntos de esta forma. Esto quiere decir que en dichos puntos hay discontinuidades asintóticas y, por tanto, las rectas de la forma

$$x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

son asíntotas verticales de la gráfica de la función. Puesto que

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

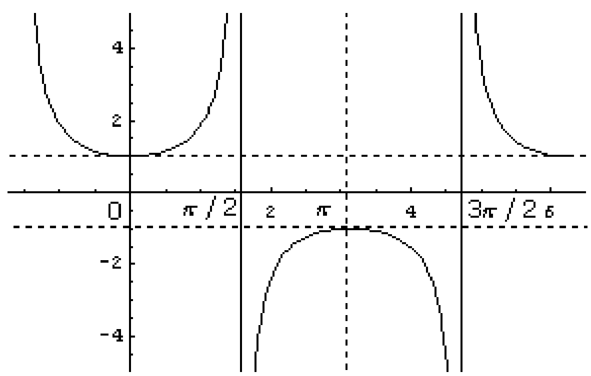
entonces

$$-1 \geq \frac{1}{\cos x} = \sec x \geq 1$$

lo que nos dice que el recorrido de esta función es

$$Rec(\sec) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) = \mathbb{R} - (-1, 1)$$

La gráfica de la función secante es



(b) Recuerda que

$$f(x) = \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

y, por tanto, su dominio es

$$\mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} : \sin x = 0\}$$

Ahora bien, las soluciones de la ecuación

$$\sin x = 0$$

son

$$x = k \cdot \pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

Luego,

$$Dom(\sec) = \mathbb{R} - \{k \cdot \pi : k \in \mathbb{Z}\}$$

Los puntos de discontinuidad de esta función son los puntos de la forma

$$k \cdot \pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

Además, por ejemplo, para $k = 0$ se cumple

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sin x} = +\infty \qquad y \qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{\sin x} = -\infty$$

y lo mismo ocurre con los demás puntos de esta forma. Esto quiere decir que en dichos puntos hay discontinuidades asintóticas y, por tanto, las rectas de la forma

$$x = k \cdot \pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

son asíntotas verticales de la gráfica de la función. Puesto que

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

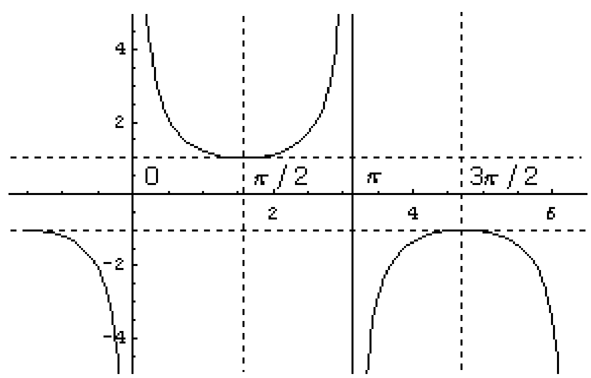
entonces

$$-1 \geq \frac{1}{\sin x} = \csc x \geq 1$$

lo que nos dice que el recorrido de esta función es

$$Rec(\csc) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) = \mathbb{R} - (-1, 1)$$

La gráfica de la función cosecante es



(c) Recuerda que

$$f(x) = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

y, por tanto, su dominio es

$$\mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} : \sin x = 0\}$$

Ahora bien, según el apartado anterior, podemos escribir

$$Dom(\cot) = \mathbb{R} - \{k \cdot \pi : k \in \mathbb{Z}\}$$

Los puntos de discontinuidad de esta función son los puntos de la forma

$$k \cdot \pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

Además, por ejemplo, para $k = 0$ se cumple

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\cos x}{\sin x} = +\infty \qquad y \qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{\cos x}{\sin x} = -\infty$$

y lo mismo ocurre con los demás puntos de esta forma. Esto quiere decir que en dichos puntos hay discontinuidades asintóticas y, por tanto, las rectas de la forma

$$x = k \cdot \pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

son asíntotas verticales de la gráfica de la función. Puesto que

$$\cot x = \frac{1}{\tan x}$$

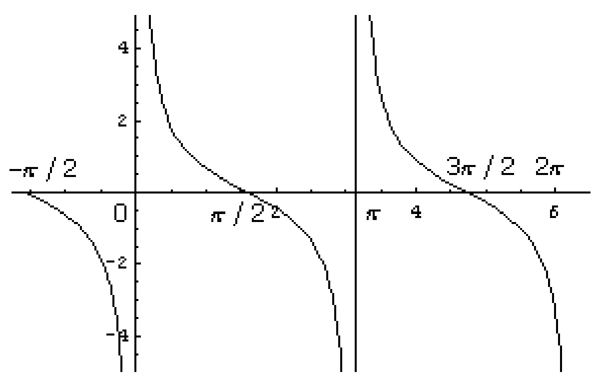
y el recorrido de la función tangente es $\mathbb{R}$ y, además, se cumple

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi\right) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi} \frac{1}{\tan x} = 0$$

para cada $k \in \mathbb{Z}$, entonces

$$Rec(\cot) = \mathbb{R}$$

La gráfica de la función cotangente es



(d) La función es ahora

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & si\ x \leq 0 \\ \cos 2x & si\ x > 0 \end{cases}$$

Puesto que $\sin x$ *está bien definido para cualquier valor real* $x \leq 0$ *y* $\cos 2x$ *también lo está para* $x > 0$, *el dominio de esta función es* $\mathbb{R}$. *Además, como*

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

y

$$-1 \leq \cos 2x \leq 1$$

para cualquier $x \in \mathbb{R}$, *el recorrido de la función es* $[-1, 1]$. *Sabemos que las funciones seno y coseno son continuas y, por tanto, podemos asegurar que la función será continua en cualquier punto real que no sea cero. Por definición* $f(0) = \sin 0 = 0$ *y*

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \cos 2x = 1$$

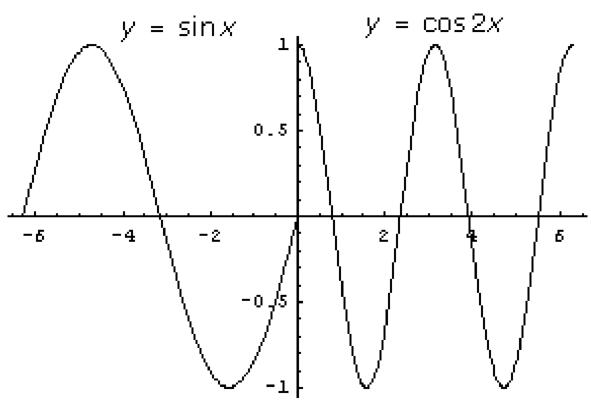
y

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \sin x = 0$$

Luego, no existe

$$\lim_{x \to 0} f(x)$$

y, como consecuencia, la función no es continua en $x = 0$. *La discontinuidad que se presenta es de salto porque los límites laterales son distintos pero finitos. La gráfica de esta función es*

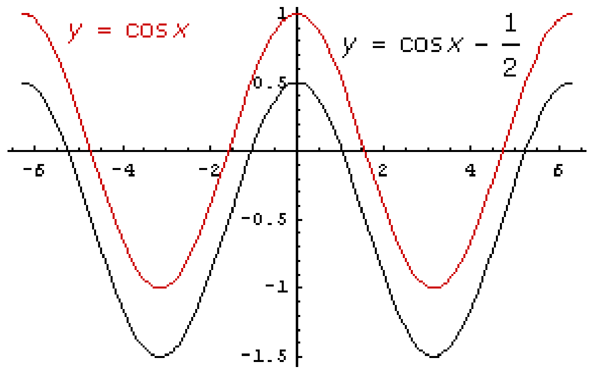


(e) La función es ahora

$$f(x) = \left|\cos x - \frac{1}{2}\right|$$

En este caso empezaremos representando la gráfica de la función. En la siguiente figura hemos representado las gráficas de la función coseno y de la función

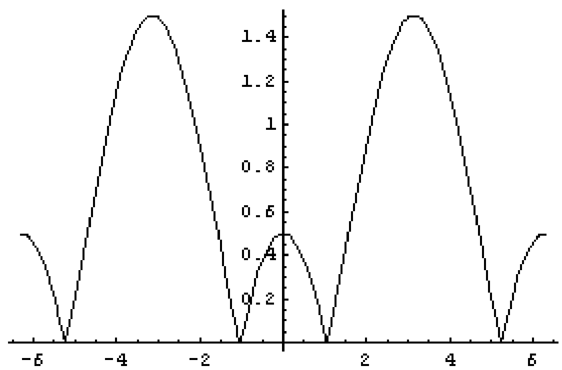
$$g(x) = \cos x - \frac{1}{2}$$



Como puedes observar inmediatamente, la segunda se ha obtenido de la primera mediante una traslación vertical hacia abajo de $1/2$ *unidades. Entonces la gráfica de la función dada*

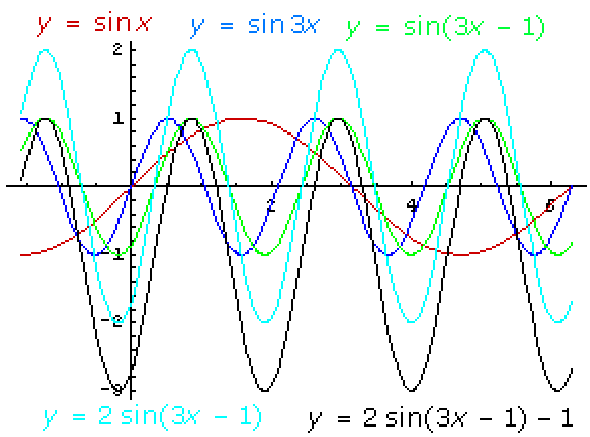
$$f(x) = \left|\cos x - \frac{1}{2}\right|$$

es



pues la parte negativa de g *se convierte en su simétrica respecto del eje* OX*. A partir de esta construcción de la gráfica de la función obtendremos la información que nos piden. Es claro que el dominio es* $\mathbb{R}$ *y el recorrido es* $[0, 3/2]$*. Por último, es evidente que la función es continua en* $\mathbb{R}$*.*

(f) La función es ahora $f(x) = 2\sin(3x-1) - 1$*. De nuevo empezamos representando la gráfica de la función. En la siguiente figura verás cómo la hemos construido a partir de la función seno mediante transformaciones que se corresponden con las operaciones aritméticas que definen a la función dada.*



A partir de esta construcción de la gráfica de la función obtendremos la información que nos piden. Es claro que el dominio es $\mathbb{R}$ *y que el recorrido es* $[1, -3]$. *Por último, es evidente que la función es continua en* $\mathbb{R}$. ∎

Ejercicio 77 *Calcular los dominios de las siguientes funciones:*

(a) $f(x) = \arcsin(2x - 3)$

(b) $f(x) = \arccos(x + 1)$

(c) $f(x) = \arctan\sqrt{3x + 5}$

Solución: *(a) Teniendo en cuenta que la función* arcsin *tiene por dominio el intervalo* $[-1, 1]$, *tenemos*

$$-1 \leq 2x - 3 \leq 1$$

es decir,

$$2x - 3 \leq 1 \Longrightarrow 2x \leq 4 \Longrightarrow x \leq 2$$

y

$$-1 \leq 2x - 3 \Longrightarrow 2 \leq 2x \Longrightarrow 1 \leq x$$

Por tanto, su dominio es $[1, 2]$.

(b) Teniendo en cuenta que la función arccos *tiene por dominio el intervalo* $[-1, 1]$, *tenemos*

$$-1 \leq x + 1 \leq 1$$

es decir,

$$x + 1 \leq 1 \Longrightarrow x \leq 0$$

y

$$-1 \leq x + 1 \Longrightarrow -2 \leq x$$

Por tanto, su dominio es $[-2, 0]$.

(c) Teniendo en cuenta que la función arctan *tiene por dominio* $\mathbb{R}$*, entonces* $\sqrt{3x+5}$ *será un número real si*

$$3x + 5 \geq 0 \Longrightarrow 3x \geq -5 \Longrightarrow x \geq -\frac{5}{3}$$

Por tanto, su dominio es $[-5/3, +\infty)$. ■

Ejercicio 78 *Calcula, sin usar la calculadora, los valores siguientes: (a)* $\arcsin(1/2)$ *(b)* $\arcsin(-1)$ *(c)* $\arccos(-1/2)$ *(d)* $\arccos 2$ *(e)* $\arctan(-1)$ *y (f)* $\arctan\sqrt{3}$.

Solución: *(a) Si* $x = \arcsin(1/2)$*, entonces*

$$\sin x = \frac{1}{2} \quad y \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

y, por tanto,

$$\arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

(b) Si $x = \arcsin(-1)$*, entonces*

$$\sin x = -1 \quad y \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

y, por tanto,

$$\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$$

(c) Si $x = \arccos(-1/2)$*, entonces*

$$\cos x = -\frac{1}{2} \quad y \quad 0 \leq x \leq \pi$$

y, por tanto,

$$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$$

(d) Si $x = \arccos 2$*, entonces*

$$\cos x = 2$$

y como sabemos esto no es posible. Por tanto, $\arccos 2$ *no es un número real.*

(e) Si $x = \arctan(-1)$*, entonces*

$$\tan x = -1 \quad y \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

y, por tanto,

$$\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$$

(f) Si $x = \arctan\sqrt{3}$*, entonces*

$$\tan x = \sqrt{3} \quad y \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

y, por tanto,

$$\arctan\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3}$$

■

Ejercicio 79 *Calcular los valores exactos de las siguientes expresiones: (a)* $\tan(2\arcsin(1/3))$ *y (b)* $\arcsin(\cos(-\frac{\pi}{6}))$*.*

Solución: *(a) Escribimos* $x = \arcsin(1/3)$*, entonces*

$$\sin x = \frac{1}{3} \quad y \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

y, por tanto, se trata de calcular $\tan 2x$*. Ahora bien, sabemos que*

$$\begin{aligned} \cos x &= \sqrt{1-\sin^2 x} \\ &= \sqrt{1-\frac{1}{9}} \\ &= \sqrt{\frac{8}{9}} \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \tan x &= \frac{\sin x}{\cos x} \\ &= \frac{1/3}{2\sqrt{2}/3} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

Por consiguiente, tenemos

$$\begin{aligned} \tan(2\arcsin(1/3)) &= \tan 2x \\ &= \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x} \\ &= \frac{2\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}}{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{1}{8}} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{7}{8}} \\ &= \frac{4\sqrt{2}}{7} \end{aligned}$$

(b) Si $x = \arcsin(\cos(-\frac{\pi}{6}))$*, entonces*

$$\sin x = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) \quad y \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

es decir,

$$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad y \quad -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$$

y, por tanto,

$$\arcsin(\cos(-\frac{\pi}{6})) = -\frac{\pi}{3}$$

■

Ecuaciones trigonométricas

Ejercicio 80 *Resuelve las ecuaciones siguientes:*

(a) $\sin 5x = 1/2$

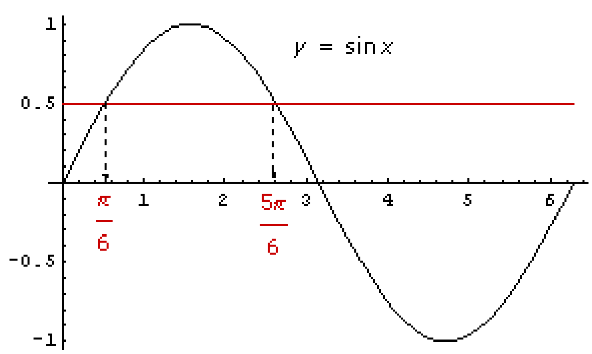
(b) $\cos(3x - \pi) = -\sqrt{3}/2$

(c) $\tan 4x = -\sqrt{3}$

Solución: *(a) Sabemos que*

$$\sin\frac{\pi}{6} = \sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

y que la función seno es periódica de período 2π*.*



Por tanto, las soluciones de la ecuación $\sin 5x = 1/2$ *son*

$$\begin{aligned} 5x_1 &= \frac{\pi}{6} + k\cdot 2\pi \\ x_1 &= \frac{\pi}{30} + k\cdot\frac{2\pi}{5} \qquad (k\in\mathbb{Z}) \end{aligned}$$

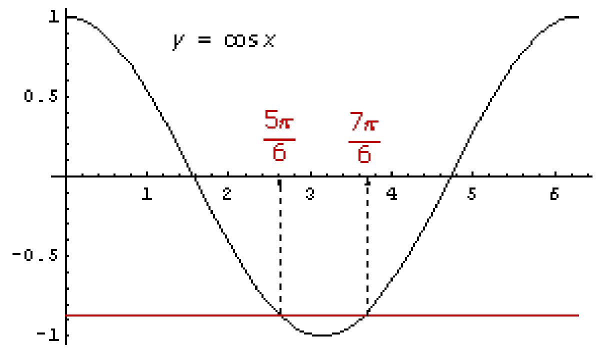
y

$$\begin{aligned} 5x_2 &= \frac{5\pi}{6} + k\cdot 2\pi \\ x_2 &= \frac{\pi}{6} + k\cdot\frac{2\pi}{5} \qquad (k\in\mathbb{Z}) \end{aligned}$$

(b) Sabemos que

$$\cos\frac{5\pi}{6} = \cos\frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

y que la función coseno es periódica de período 2π*.*



Por tanto, las soluciones de la ecuación $\cos(3x-\pi) = -\sqrt{3}/2$ *son*

$$\begin{aligned} 3x_1 - \pi &= \frac{5\pi}{6} + k\cdot 2\pi \\ 3x_1 &= \frac{11\pi}{6} + k\cdot 2\pi \\ x_1 &= \frac{11\pi}{18} + k\cdot\frac{2\pi}{3} \qquad (k\in\mathbb{Z}) \end{aligned}$$

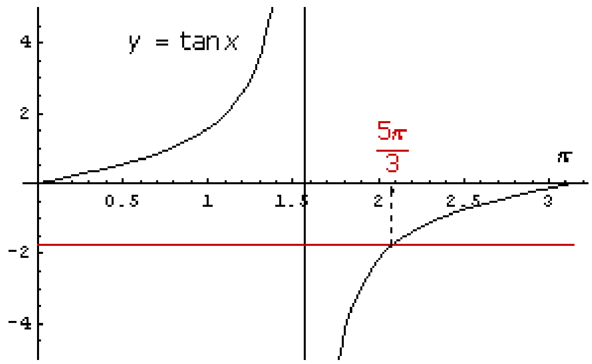
y

$$\begin{aligned} 3x_2 - \pi &= \frac{7\pi}{6} + k\cdot 2\pi \\ 3x_2 &= \frac{13\pi}{6} + k\cdot 2\pi \\ x_2 &= \frac{13\pi}{18} + k\cdot\frac{2\pi}{3} \qquad (k\in\mathbb{Z}) \end{aligned}$$

(c) Sabemos que

$$\tan\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$$

y que la función tangente es periódica de período π*.*



Por tanto, las soluciones de la ecuación $\tan 4x = -\sqrt{3}$ *son*

$$\begin{aligned} 4x &= \frac{5\pi}{3} + k \cdot \pi \\ x &= \frac{5\pi}{12} + k \cdot \frac{\pi}{4} \qquad (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

■

Ejercicio 81 *Resuelve las ecuaciones siguientes:*

(a) $\sin(x - \frac{\pi}{4}) = \sin(3x + \pi)$

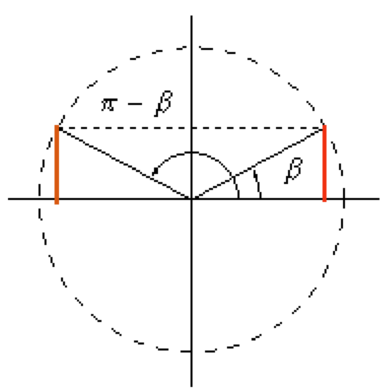
(b) $\cos x = \cos(2x - \frac{\pi}{2})$

(c) $\tan(3x + \pi) = \tan(3\pi - x)$

(d) $\sin(x + \frac{\pi}{3}) = \cos 2x$

Solución: *(a) Teniendo en cuenta que*

$$\sin \alpha = \sin \beta \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \alpha = \beta + k \cdot 2\pi \\ \alpha = \pi - \beta + k \cdot 2\pi \end{cases} \qquad (k \in \mathbb{Z})$$



las soluciones de la ecuación

$$\sin(x - \frac{\pi}{4}) = \sin(3x + \pi)$$

son

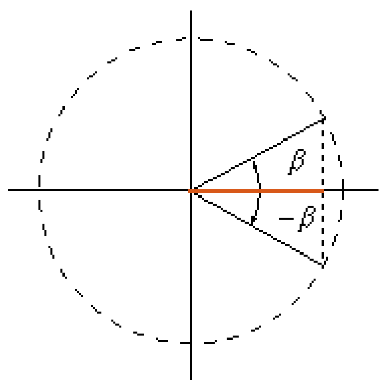
$$\begin{aligned} 3x_1 + \pi &= x_1 - \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \\ 2x_1 &= -\frac{5\pi}{4} + k \cdot 2\pi \\ x_1 &= -\frac{5\pi}{8} + k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} 3x_2 + \pi &= \pi - \left(x_1 - \frac{\pi}{4}\right) + k \cdot 2\pi \\ 4x_2 &= \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \\ x_2 &= \frac{\pi}{16} + k \cdot \frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

(b) Teniendo en cuenta que

$$\cos\alpha = \cos\beta \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \alpha = \beta + k \cdot 2\pi \\ \alpha = -\beta + k \cdot 2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$



las soluciones de la ecuación

$$\cos x = \cos(2x - \frac{\pi}{2})$$

son

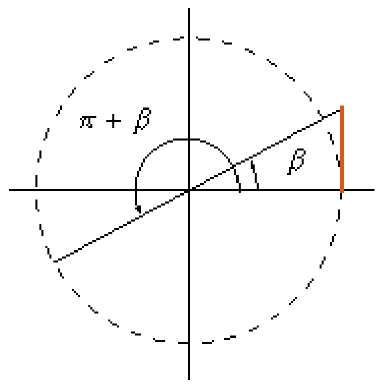
$$\begin{aligned} 2x_1 - \frac{\pi}{2} &= x_1 + k \cdot 2\pi \\ x_1 &= \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

y

$$\begin{array}{rcl} 2x_2 - \dfrac{\pi}{2} & = & -x_2 + k \cdot 2\pi \\ 3x_2 & = & \dfrac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \\ x_2 & = & \dfrac{\pi}{6} + k \cdot \dfrac{2\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{array}$$

(c) Teniendo en cuenta que

$$\tan\alpha = \tan\beta \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \beta + k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$



las soluciones de la ecuación

$$\tan(3x + \pi) = \tan(3\pi - x)$$

son

$$\begin{array}{rcl} 3x + \pi & = & 3\pi - x + k \cdot \pi \\ 4x & = & 2\pi + k \cdot \pi \\ x & = & \dfrac{\pi}{2} + k \cdot \dfrac{\pi}{4} \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{array}$$

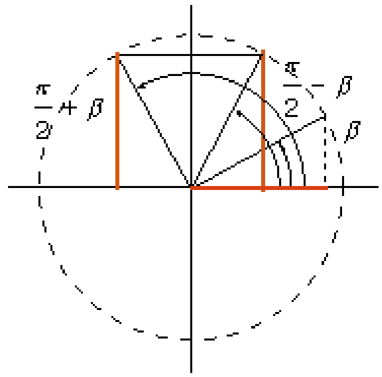
Sin embargo, de estas soluciones debemos eliminar las que hacen que $\tan(3x+\pi)$ *o* $\tan(3\pi - x)$ *no esté definida; por ejemplo, la solución* $x = \pi/2$ *(para* $k = 0$*) no es válida ya que*

$$\tan(\frac{3\pi}{2} + \pi)$$

no existe.

(d) Teniendo en cuenta que

$$\sin\alpha = \cos\beta \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{\pi}{2} - \beta + k \cdot 2\pi \\ \alpha = \frac{\pi}{2} + \beta + k \cdot 2\pi \end{array} \right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$



las soluciones de la ecuación

$$\sin(x+\frac{\pi}{3}) = \cos 2x$$

son

$$\begin{aligned} x_1+\frac{\pi}{3} &= \frac{\pi}{2}-2x_1+k\cdot 2\pi \\ 3x_1 &= \frac{\pi}{6}+k\cdot 2\pi \\ x_1 &= \frac{\pi}{18}+k\cdot\frac{2\pi}{3} \quad (k\in\mathbb{Z}) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} x_2+\frac{\pi}{3} &= \frac{\pi}{2}+2x_2+k\cdot 2\pi \\ -x_2 &= \frac{\pi}{6}+k\cdot 2\pi \\ x_2 &= -\frac{\pi}{6}-k\cdot 2\pi \quad (k\in\mathbb{Z}) \end{aligned}$$

■

Ejercicio 82 *Resuelve las ecuaciones siguientes:*

(a) $\cos 2x + 1 = \cos x$

(b) $2\sin(x+\frac{\pi}{3}) = \sin x$

(c) $3\cos^2 x + \sin x = 11/4$

(d) $4\sin^2 x = \sqrt{3}\tan x$

(e) $\sin 2x \ \cos x = 6\sin^3 x$

Solución: *(a) Del desarrollo siguiente*

$$\begin{aligned} \cos 2x+1 &= \cos x \\ \cos^2 x-\sin^2 x+1 &= \cos x \\ 2\cos^2 x &= \cos x \\ 2\cos^2 x-\cos x &= 0 \\ \cos x\ (2\cos x-1) &= 0 \end{aligned}$$

deducimos dos ecuaciones: $\cos x = 0$ *y* $2\cos x - 1 = 0$*. De* $\cos x = 0$*, obtenemos las soluciones siguientes*

$$x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

y de la otra, es decir, de $\cos x = 1/2$*, obtenemos*

$$x_2 = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \quad y \quad x_3 = -\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

(b) Del desarrollo siguiente

$$\begin{aligned} 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) &= \sin x \\ 2\sin x \ \cos\frac{\pi}{3} + 2\sin\frac{\pi}{3} \ \cos x &= \sin x \\ \sin x + \sqrt{3}\cos x &= \sin x \\ \sqrt{3}\cos x &= 0 \\ \cos x &= 0 \end{aligned}$$

obtenemos la ecuación $\cos x = 0$*, cuyas soluciones son*

$$x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

(c) Del desarrollo siguiente

$$\begin{aligned} 3\cos^2 x + \sin x &= \frac{11}{4} \\ 3(1 - \sin^2 x) + \sin x &= \frac{11}{4} \\ -3\sin^2 x + \sin x + \frac{1}{4} &= 0 \end{aligned}$$

obtenemos una ecuación de segundo grado en $\sin x$ *cuyas soluciones*

$$\frac{-1 \pm \sqrt{1+3}}{-6} = \frac{-1 \pm 2}{6}$$

dan lugar a las ecuaciones siguientes: $\sin x = 1/6$ *y* $\sin x = -1/2$*. De* $\sin x = 1/6$*, mediante calculadora, obtenemos las siguientes soluciones*

$$x_1 = 0.1674 + k \cdot 2\pi \quad y \quad x_2 = 2.9741 + k \cdot 2\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

y de la otra, es decir, de $\sin x = -1/2$*, obtenemos*

$$x_3 = \frac{7\pi}{6} + k \cdot 2\pi \quad y \quad x_4 = \frac{11\pi}{6} + k \cdot 2\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

(d) Del desarrollo siguiente

$$\begin{aligned}
4\sin^2 x &= \sqrt{3}\tan x \\
4\sin^2 x &= \sqrt{3}\,\frac{\sin x}{\cos x} \\
4\sin^2 x\ \cos x - \sqrt{3}\sin x &= 0 \\
\sin x\ (4\sin x\cos x - \sqrt{3}) &= 0 \\
\sin x\ (2\sin 2x - \sqrt{3}) &= 0
\end{aligned}$$

obtenemos las siguientes ecuaciones: $\sin x = 0$ *y* $2\sin 2x - \sqrt{3} = 0$*. De* $\sin x = 0$*, obtenemos las soluciones siguientes:*

$$x_1 = k\cdot\pi \qquad (k\in\mathbb{Z})$$

y de la otra, es decir, $\sin 2x = \sqrt{3}/2$*, obtenemos*

$$\begin{aligned}
2x_2 &= \frac{\pi}{3} + k\cdot 2\pi \\
x_2 &= \frac{\pi}{6} + k\cdot\pi \qquad (k\in\mathbb{Z})
\end{aligned}$$

o

$$\begin{aligned}
2x_3 &= \frac{5\pi}{6} + k\cdot 2\pi \\
x_3 &= \frac{5\pi}{12} + k\cdot\pi \qquad (k\in\mathbb{Z})
\end{aligned}$$

(e) Del desarrollo siguiente

$$\begin{aligned}
\sin 2x\ \cos x &= 6\sin^3 x \\
2\sin x\ \cos^2 x &= 6\sin^3 x \\
2\sin x\ (\cos^2 x - 3\sin^2 x) &= 0 \\
2\sin x\ (1 - 4\sin^2 x) &= 0
\end{aligned}$$

obtenemos las siguientes ecuaciones: $\sin x = 0$ *y* $1 - 4\sin^2 x = 0$*. De* $\sin x = 0$*, obtenemos*

$$x_1 = k\cdot\pi \qquad (k\in\mathbb{Z})$$

y de la otra ecuación

$$\begin{aligned}
1 - 4\sin^2 x &= 0 \\
\sin^2 x &= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

obtenemos a su vez otras dos ecuaciones: $\sin x = 1/2$ *y* $\sin x = -1/2$*. De estas dos ecuaciones, obtenemos las soluciones siguientes*

$$x_2 = \frac{\pi}{6} + k\cdot\pi \quad y \quad x_3 = \frac{5\pi}{6} + k\cdot\pi \qquad (k\in\mathbb{Z})$$

∎

Ejercicio 83 *Resuelve las ecuaciones siguientes:*

(a) $\sin x + \sin 3x = \cos x$

(b) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \cos 4x = 0$

(c) $\cos 2x - \cos 6x = \sin 5x + \sin 3x$

Solución: *(a) Del desarrollo siguiente*

$$\begin{aligned} \sin x + \sin 3x &= \cos x \\ 2\sin 2x \ \cos(-x) &= \cos x \\ 2\sin 2x \ \cos x &= \cos x \\ \cos x \ (2\sin 2x - 1) &= 0 \end{aligned}$$

obtenemos las siguientes ecuaciones: $\cos x = 0$ *y* $2\sin 2x - 1 = 0$*. De* $\cos x = 0$*, obtenemos las soluciones*

$$x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

y de la otra ecuación, es decir, $\sin 2x = 1/2$*, obtenemos las soluciones*

$$\begin{aligned} 2x_2 &= \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \\ x_2 &= \frac{\pi}{12} + k \cdot \pi \qquad (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} 2x_3 &= \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi \\ x_3 &= \frac{5\pi}{12} + k \cdot \pi \qquad (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

(b) Del desarrollo siguiente

$$\begin{aligned} \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \cos 4x &= 0 \\ \sin x + \sin 3x + \sin 2x + \cos 4x &= 0 \\ 2\sin 2x \ \cos(-x) + 2\sin 3x \ \cos(-x) &= 0 \\ 2\cos x \ (\sin 2x + \sin 3x) &= 0 \\ 4\cos x \ \sin\frac{5x}{2} \ \cos\left(-\frac{x}{2}\right) &= 0 \\ 4\cos x \ \sin\frac{5x}{2} \ \cos\frac{x}{2} &= 0 \end{aligned}$$

obtenemos las siguientes ecuaciones: $\cos x = 0$*,* $\sin 5x/2 = 0$ *y* $\cos x/2 = 0$*. De la primera obtenemos las soluciones:*

$$x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

De la segunda, es decir, de $\sin 5x/2$, *obtenemos*

$$\begin{aligned} \frac{5x_2}{2} &= k \cdot \pi \\ x_2 &= k \cdot \frac{2\pi}{5} \qquad (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

y de la tercera, es decir, de $\cos x/2 = 0$, *obtenemos*

$$\begin{aligned} \frac{x_3}{2} &= \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \\ x_3 &= \pi + k \cdot 2\pi \qquad (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

(c) Del desarrollo siguiente

$$\begin{aligned} \cos 2x - \cos 6x &= \sin 5x + \sin 3x \\ -2\sin 4x \ \sin(-2x) &= 2\sin 4x \ \cos x \\ 2\sin 4x \ (\sin 2x - \cos x) &= 0 \end{aligned}$$

obtenemos las siguientes ecuaciones: $\sin 4x = 0$ *y* $\sin 2x - \cos x = 0$. *De la primera, obtenemos las soluciones*

$$\begin{aligned} 4x_1 &= k \cdot \pi \\ x_1 &= k \cdot \frac{\pi}{4} \qquad (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

y de la segunda, es decir,

$$\sin 2x = \cos x$$

obtenemos

$$\begin{aligned} 2x_2 &= \frac{\pi}{2} - x_2 + k \cdot 2\pi \\ 3x_2 &= \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \\ x_2 &= \frac{\pi}{6} + k \cdot \frac{2\pi}{3} \qquad (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} 2x_3 &= \frac{\pi}{2} + x_3 + k \cdot 2\pi \\ x_3 &= \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \qquad (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

■

Ejercicio 84 *Resuelve las ecuaciones siguientes:*

(a) $\tan(x - \frac{\pi}{4}) + \tan(x + \frac{\pi}{4}) = 2\cot x$

(b) $\tan x + 3\cot x = 4$

(c) $\cos^2 x - \sin^2 x + \tan^2 x = 1$

Solución: *(a) Del desarrollo siguiente*

$$\begin{aligned}
\tan(x - \frac{\pi}{4}) + \tan(x + \frac{\pi}{4}) &= 2\cot x \\
\frac{\tan x - 1}{1 + \tan x} + \frac{\tan x + 1}{1 - \tan x} &= \frac{2}{\tan x} \\
\frac{-(1 - \tan x)^2 + (1 + \tan x)^2}{1 - \tan^2 x} &= \frac{2}{\tan x} \\
\frac{(1 + \tan x + 1 - \tan x)(1 + \tan x - 1 + \tan x)}{1 - \tan^2 x} &= \frac{2}{\tan x} \\
\frac{4\tan x}{1 - \tan^2 x} &= \frac{2}{\tan x} \\
2\tan^2 x &= 1 - \tan^2 x \\
3\tan^2 x &= 1 \\
\tan^2 x &= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

obtenemos las ecuaciones $\tan x = \sqrt{3}/3$ *y* $\tan x = -\sqrt{3}/3$. *De la primera ecuación, obtenemos las soluciones*

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

y de la segunda, es decir, $\tan x = -\sqrt{3}/3$, *obtenemos*

$$x_2 = \frac{5\pi}{6} + k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Además de estas soluciones hay otras que se corresponden al caso límite de que $\tan x$ *no exista, o de forma equivalente, al caso en que* $\cot x = 0$. *Observa que las soluciones de la forma*

$$x_3 = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

correspondientes a $\cot x = 0$, *hacen que*

$$\tan(x - \frac{\pi}{4}) + \tan(x + \frac{\pi}{4}) = 0$$

(b) Del desarrollo siguiente

$$\begin{aligned}
\tan x + 3\cot x &= 4 \\
\tan x + \frac{3}{\tan x} &= 4 \\
\tan^2 x + 3 &= 4\tan x \\
\tan^2 x - 4\tan x + 3 &= 0
\end{aligned}$$

resulta una ecuación de segundo grado en $\tan x$ *cuyas soluciones*

$$\frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2}$$

dan lugar a las ecuaciones siguientes: $\tan x = 3$ *y* $\tan x = 1$*. De la primera, obtenemos*

$$x_1 = \arctan 3$$

y de la segunda

$$x_2 = \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

(c) Del desarrollo siguiente

$$\begin{aligned}
\cos^2 x - \sin^2 x + \tan^2 x &= 1 \\
\cos^2 x - \sin^2 x + 1 + \tan^2 x &= 2 \\
\cos^2 x - 1 + \cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} &= 2 \\
2\cos^4 x - 3\cos^2 x + 1 &= 0
\end{aligned}$$

obtenemos una ecuación bicuadrada en $\cos^2 x$*. Si hacemos* $\cos^2 x = t$*, tenemos*

$$2t^2 - 3t + 1 = 0$$

cuyas soluciones

$$\frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4}$$

dan lugar a las ecuaciones $\cos x = 1$*,* $\cos x = -1$*,* $\cos x = \sqrt{2}/2$ *y* $\cos x = -\sqrt{2}/2$*. De la primera ecuación, obtenemos las soluciones*

$$x_1 = k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

y de la segunda, obtenemos

$$x_2 = \pi + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

De la tercera ecuación, obtenemos las soluciones

$$x_3 = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \quad y \quad x_4 = -\frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

y de la cuarta, obtenemos

$$x_5 = \frac{3\pi}{4} + k \cdot 2\pi \quad y \quad x_6 = \frac{5\pi}{4} + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Todas las soluciones, tomadas conjuntamente, pueden expresarse de forma simplificada como sigue

$$x_1 = k \cdot \pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

y

$$x_2 = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

■

Ejercicio 85 *Resuelve las ecuaciones siguientes:*

(a) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2$

(b) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$

Solución: *(a) Mediante el desarrollo siguiente*

$$\begin{aligned}
\sin x + \sqrt{3}\cos x &= 2 \\
\sin x &= 2 - \sqrt{3}\ \cos x \\
\sin^2 x &= (2 - \sqrt{3}\ \cos x)^2 \\
1 - \cos^2 x &= 4 - 4\sqrt{3}\ \cos x + 3\ \cos^2 x \\
4\cos^2 x - 4\sqrt{3}\ \cos x + 3 &= 0
\end{aligned}$$

obtenemos una ecuación de segundo grado en $\cos x$ *cuya solución*

$$\frac{4\sqrt{3} \pm \sqrt{48-48}}{8}$$

da lugar a la ecuación $\cos x = \sqrt{3}/2$*. De esta ecuación, obtenemos las soluciones siguientes*

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \quad y \quad x_2 = -\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

Ahora debemos comprobar que las soluciones obtenidas son correctas. Para $x_1 = \pi/6 + k \cdot 2\pi$*, tenemos*

$$\sin\left(\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi\right) + \sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi\right) = \sin\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}\ \cos\frac{\pi}{6} = 2$$

y, por tanto, las soluciones son correctas. Para $x_2 = -\pi/6 + k \cdot 2\pi$*, tenemos*

$$\sin\left(-\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi\right) + \sqrt{3}\cos\left(-\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{3}\ \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 0$$

y, por tanto, estas soluciones son incorrectas. En resumen, las soluciones de la ecuación son

$$x = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

(b) Mediante el mismo desarrollo que antes

$$\begin{aligned}
\sin x + \cos x &= \sqrt{2} \\
\sin x &= \sqrt{2} - \cos x \\
\sin^2 x &= (\sqrt{2} - \cos x)^2 \\
1 - \cos^2 x &= 2 - 2\sqrt{2}\ \cos x + \cos^2 x \\
2\cos^2 x - 2\sqrt{2}\ \cos x + 1 &= 0
\end{aligned}$$

obtenemos una ecuación de segundo grado en $\cos x$ *cuya solución*

$$\frac{2\sqrt{2} \pm \sqrt{8-8}}{4}$$

da lugar a la ecuación $\cos x = \sqrt{2}/2$*. De esta ecuación, obtenemos las soluciones siguientes*

$$x_1 = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \quad y \quad x_2 = -\frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

Ahora debemos comprobar que las soluciones obtenidas son correctas. Para $x_1 = \pi/4 + k \cdot 2\pi$*, tenemos*

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi\right) = \sin\frac{\pi}{4} + \ \cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$$

y, por tanto, las soluciones son correctas. Para $x_2 = -\pi/4 + k \cdot 2\pi$*, tenemos*

$$\sin\left(-\frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \ \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 0$$

y, por tanto, estas soluciones son incorrectas. En resumen, las soluciones de la ecuación son

$$x = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

■

Sistemas trigonométricos

Ejercicio 86 *Resuelve el siguiente sistema:*

$$\left.\begin{array}{rcl} \sin x + \cos y & = & \sqrt{2} \\ \csc x + \sec y & = & 2\sqrt{2} \end{array}\right\}$$

Solución: *Sabiendo que*

$$\csc x = \frac{1}{\sin x} \quad y \quad \sec y = \frac{1}{\cos y}$$

tenemos

$$\left.\begin{array}{rcl} \sin x + \cos y & = & \sqrt{2} \\ \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos y} & = & 2\sqrt{2} \end{array}\right\}$$

Observamos que este sistema tiene como incógnitas $\sin x$ *y* $\cos y$*. Esto hace posible que mediante el siguiente cambio* $m = \sin x$ *y* $n = \cos y$*, el sistema pueda escribirse como*

$$\left.\begin{array}{rcl} m + n & = & \sqrt{2} \\ \frac{1}{m} + \frac{1}{n} & = & 2\sqrt{2} \end{array}\right\}$$

Resolveremos ahora el sistema en m *y* n*. La segunda ecuación puede transformarse como*

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{n+m}{mn} & = & 2\sqrt{2} \\ \dfrac{\sqrt{2}}{mn} & = & 2\sqrt{2} \\ 1 & = & 2mn \\ m & = & \dfrac{1}{2n} \end{array}$$

Sustituyendo este resultado en la primera ecuación del sistema, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2n} + n &= \sqrt{2} \\ 1 + 2n^2 &= 2\sqrt{2}n \\ 2n^2 - 2\sqrt{2}n + 1 &= 0 \end{aligned}$$

resultando una ecuación de segundo grado cuya solución

$$\frac{2\sqrt{2} \pm \sqrt{8-8}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

da lugar a la siguiente ecuación trigonométrica $\cos y = \sqrt{2}/2$. *Además, como* $m = 1/2n$, *deducimos que*

$$n = \frac{1}{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

y de aquí obtenemos la ecuación trigonométrica $\sin x = \sqrt{2}/2$. *Por tanto, hemos deducido que*

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad y \quad \cos y = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

cuyas soluciones por separado son

$$x_1 = \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \quad y \quad x_2 = \frac{3\pi}{4} + k \cdot 2\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

y

$$y_1 = \frac{\pi}{4} + k' \cdot 2\pi \quad y \quad y_2 = -\frac{\pi}{4} + k' \cdot 2\pi \qquad (k' \in \mathbb{Z})$$

Por consiguiente el sistema tiene 4 soluciones:

Soluciones	x	y	
1	$\frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi$	$\frac{\pi}{4} + k' \cdot 2\pi$	
2	$\frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi$	$-\frac{\pi}{4} + k' \cdot 2\pi$	$(k, k' \in \mathbb{Z})$
3	$\frac{3\pi}{4} + k \cdot 2\pi$	$\frac{\pi}{4} + k' \cdot 2\pi$	
4	$\frac{3\pi}{4} + k \cdot 2\pi$	$-\frac{\pi}{4} + k' \cdot 2\pi$	

Observa que $\sin x$ *y* $\cos y$ *no se anulan para ninguna de las soluciones obtenidas.*
■

Ejercicio 87 *Resuelve el siguiente sistema:*

$$\left.\begin{aligned} \sin x - \sin y &= -\tfrac{1}{2} \\ \sin x + \sin y &= \tfrac{3}{2} \end{aligned}\right\}$$

Solución: *La forma del sistema permite resolverlo directamente por reducción. Así, sumando miembro a miembro las dos ecuaciones del sistema, obtenemos*

$$2 \sin x = 1$$

y, restando miembro a miembro, resulta

$$-2\sin y = -2$$

De este modo, hemos obtenido las ecuaciones $\sin x = 1/2$ *y* $\sin y = 1$*. De la ecuación* $\sin x = 1/2$*, obtenemos las soluciones*

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + k\cdot 2\pi \quad y \quad x_2 = \frac{5\pi}{6} + k\cdot 2\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

y de la otra ecuación, es decir, de $\sin y = 1$*, obtenemos*

$$y = \frac{\pi}{2} + k'\cdot 2\pi \quad (k' \in \mathbb{Z})$$

Por lo tanto, hay dos soluciones para el sistema

$$\begin{array}{cccc} \textit{Soluciones} & x & y & \\ 1 & \frac{\pi}{6} + k\cdot 2\pi & \frac{\pi}{2} + k'\cdot 2\pi & (k, k' \in \mathbb{Z}) \\ 2 & \frac{5\pi}{6} + k\cdot 2\pi & \frac{\pi}{2} + k'\cdot 2\pi & \end{array}$$

■

Ejercicio 88 *Resuelve el siguiente sistema:*

$$\left.\begin{array}{rcl} \sin x\ \cos y & = & \frac{3}{4} \\ \cos x\ \sin y & = & \frac{1}{4} \end{array}\right\}$$

Solución: *Sumando miembro a miembro las dos ecuaciones del sistema, obtenemos*

$$\begin{array}{rcl} \sin x\ \cos y + \cos x\ \sin y & = & 1 \\ \sin(x+y) & = & 1 \end{array}$$

De la ecuación $\sin(x+y) = 1$*,obtenemos*

$$x + y = \frac{\pi}{2} + k\cdot 2\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

de donde

$$y = -x + \frac{\pi}{2} + k\cdot 2\pi$$

Sustituyendo este resultado en la primera ecuación del sistema, tenemos

$$\begin{array}{rcl} \sin x\ \cos\left(-x + \frac{\pi}{2} + k\cdot 2\pi\right) & = & \frac{3}{4} \\ \sin x\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) & = & \frac{3}{4} \\ \sin^2 x & = & \frac{3}{4} \end{array}$$

de donde obtenemos las ecuaciones $\sin x = \sqrt{3}/2$ *y* $\sin x = -\sqrt{3}/2$*. De la primera, obtenemos*

$$x_1 = \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \quad y \quad x_2 = \frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi$$

y de la segunda, obtenemos

$$x_3 = \frac{4\pi}{3} + k \cdot 2\pi \quad y \quad x_4 = -\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi$$

A partir de

$$y = -x + \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$$

obtendremos las correspondientes soluciones para y*. De este modo, tenemos que el sistema tiene cuatro soluciones*

Soluciones	x	y	
1	$\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi$	$\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi$	
2	$\frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi$	$-\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi$	$(k \in \mathbb{Z})$
3	$\frac{4\pi}{3} + k \cdot 2\pi$	$-\frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi$	
4	$-\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi$	$\frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi$	

■

Ejercicio 89 *Resuelve el siguiente sistema:*

$$\left.\begin{array}{rcl} \sin x + \sin y & = & 1 \\ 2x + 2y & = & \pi \end{array}\right\}$$

Solución: *De la segunda ecuación, obtenemos*

$$y = \frac{\pi}{2} - x$$

y, sustituyendo este resultado en la primera ecuación del sistema, tenemos

$$\begin{array}{rcl} \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) & = & 1 \\ \sin x + \cos x & = & 1 \end{array}$$

Del desarrollo siguiente

$$\begin{array}{rcl} \sin x & = & 1 - \cos x \\ \sin^2 x & = & (1 - \cos x)^2 \\ 1 - \cos^2 x & = & 1 - 2\cos x + \cos^2 x \\ 2\cos^2 x - 2\cos x & = & 0 \\ 2\cos x\ (\cos x - 1) & = & 0 \end{array}$$

obtenemos las ecuaciones $\cos x = 0$ *y* $\cos x - 1 = 0$*. De la primera ecuación, obtenemos las soluciones*

$$x_1 = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \quad y \quad x_2 = -\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$$

y de la segunda, es decir, de $\cos x = 1$, *obtenemos*

$$x_3 = k \cdot 2\pi$$

Ahora bien, la solución

$$x_2 = -\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$$

no es correcta (Recuerda que al elevar al cuadrado en una ecuación pueden introducirse soluciones incorrectas). A partir de

$$y = \frac{\pi}{2} - x$$

obtendremos las correspondientes soluciones para y. *De este modo, tenemos que el sistema tiene dos soluciones*

Soluciones	x	y	
1	$\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi$	$-k \cdot 2\pi$	$(k \in \mathbb{Z})$
2	$k \cdot 2\pi$	$\frac{\pi}{2} - k \cdot 2\pi$	

■

Ejercicio 90 *Resuelve el siguiente sistema:*

$$\left.\begin{array}{rcl} \sin(x-y) & = & \frac{1}{2} \\ \cos(x+y) & = & \frac{1}{2} \end{array}\right\}$$

Solución: *De la primera ecuación, obtenemos*

$$x - y = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \quad o \quad x - y = \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi$$

es decir,

$$x = y + \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \quad o \quad x = y + \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi$$

De este modo, sustituyendo cada una de estas fórmulas en la segunda ecuación del sistema, tenemos dos casos:

1.

$$\begin{array}{rcl} \cos\left(y + \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi + y\right) & = & \frac{1}{2} \\ \cos\left(2y + \frac{\pi}{6}\right) & = & \frac{1}{2} \end{array}$$

de donde resultan las soluciones

$$\begin{array}{rcl} 2y_1 + \frac{\pi}{6} & = & \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \\ 2y_1 & = & \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \\ y_1 & = & \frac{\pi}{12} + k \cdot \pi \end{array}$$

y

$$\begin{aligned}
2y_2 + \frac{\pi}{6} &= -\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \\
2y_2 &= -\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \\
y_2 &= -\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi
\end{aligned}$$

Los correspondientes valores para x son

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{\pi}{12} + k \cdot \pi + \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \\
&= \frac{\pi}{4} + k \cdot 3\pi \\
&= \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
x_2 &= -\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi + \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \\
&= -\frac{\pi}{12} + k \cdot 3\pi \\
&= -\frac{\pi}{12} + k \cdot \pi
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\cos\left(y + \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi + y\right) &= \frac{1}{2} \\
\cos\left(2y + \frac{5\pi}{6}\right) &= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

de donde resultan las soluciones

$$\begin{aligned}
2y_3 + \frac{5\pi}{6} &= \frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \\
2y_3 &= -\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \\
y_3 &= -\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
2y_4 + \frac{5\pi}{6} &= -\frac{\pi}{3} + k \cdot 2\pi \\
2y_4 &= -\frac{7\pi}{6} + k \cdot 2\pi \\
y_4 &= -\frac{7\pi}{12} + k \cdot \pi
\end{aligned}$$

Los correspondientes valores para x son

$$\begin{aligned}
x_3 &= -\frac{\pi}{4}+k\cdot\pi+\frac{5\pi}{6}+k\cdot 2\pi \\
&= \frac{7\pi}{12}+k\cdot 3\pi \\
&= \frac{7\pi}{12}+k\cdot\pi
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
x_4 &= -\frac{7\pi}{12}+k\cdot\pi+\frac{5\pi}{6}+k\cdot 2\pi \\
&= \frac{\pi}{4}+k\cdot 3\pi \\
&= \frac{\pi}{4}+k\cdot\pi
\end{aligned}$$

En resumen, hemos encontrado cuatro soluciones para este sistema

Soluciones	x	y	
1	$\frac{\pi}{4}+k\cdot\pi$	$\frac{\pi}{12}+k\cdot\pi$	
2	$-\frac{\pi}{12}+k\cdot\pi$	$-\frac{\pi}{4}+k\cdot\pi$	$(k\in\mathbb{Z})$
3	$\frac{7\pi}{12}+k\cdot\pi$	$-\frac{\pi}{4}+k\cdot\pi$	
4	$\frac{\pi}{4}+k\cdot\pi$	$-\frac{7\pi}{12}+k\cdot\pi$	

■

Inecuaciones trigonométricas

Ejercicio 91 *Halla los ángulos entre* 0 *y* 2π *que cumplen:*

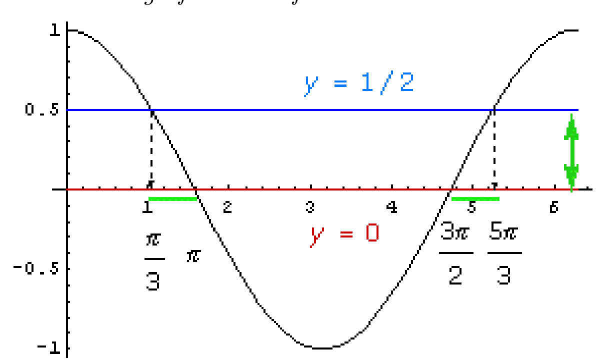
(a) $0<\cos x<1/2$

(b) $\sin x>1/\sqrt{2}$

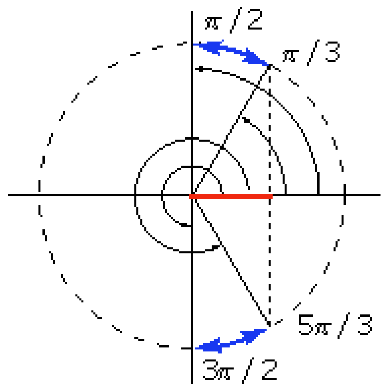
Solución: *(a) Para resolver la inecuación*

$$0<\cos x<1/2$$

podemos ayudarnos de la gráfica de la función coseno



o bien, de la circunferencia goniométrica



En cualquiera de los dos procedimientos, es claro por las figuras adjuntas que las soluciones pedidas son los ángulos x que satisfacen

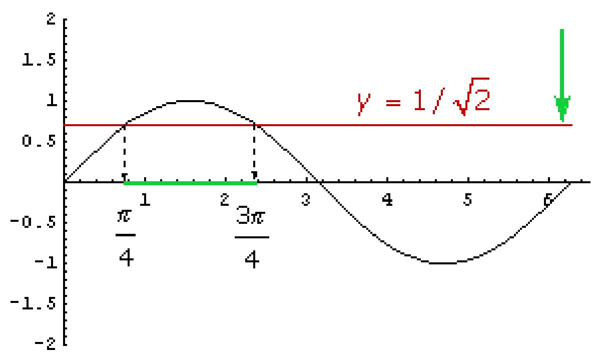
$$\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2} \quad o \quad \frac{3\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{3}$$

Es importante observar que las desigualdades son estrictas, ya que en la inecuación las desigualdades son también estrictas.

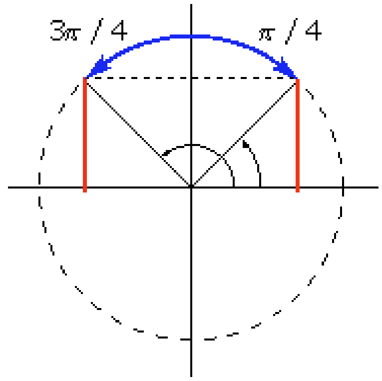
(b) Para resolver la inecuación

$$\sin x > 1/\sqrt{2}$$

podemos ayudarnos de la gráfica de la función seno



o bien, de la circunferencia goniométrica



En cualquiera de los dos procedimientos, es claro por las figuras adjuntas que las soluciones pedidas son los ángulos x que satisfacen

$$\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$$

■

Ejercicio 92 *Halla los ángulos entre* 0 *y* 2π *que cumplen:*

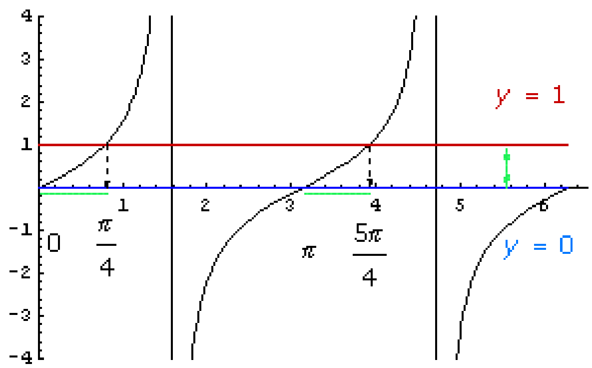
(a) $0 < \tan x < 1$

(b) $\sin x + \cos x > 0$

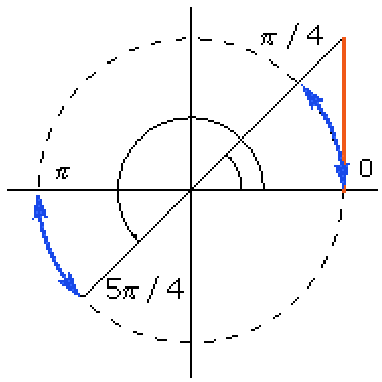
Solución: *(a) Para resolver la inecuación*

$$0 < \tan x < 1$$

podemos ayudarnos de la gráfica de la función tangente



o bien, de la circunferencia goniométrica



En cualquiera de los dos procedimientos, es claro por las figuras adjuntas que las soluciones pedidas son los ángulos x que satisfacen

$$0 < x < \frac{\pi}{4} \quad o \quad \pi < x < \frac{5\pi}{4}$$

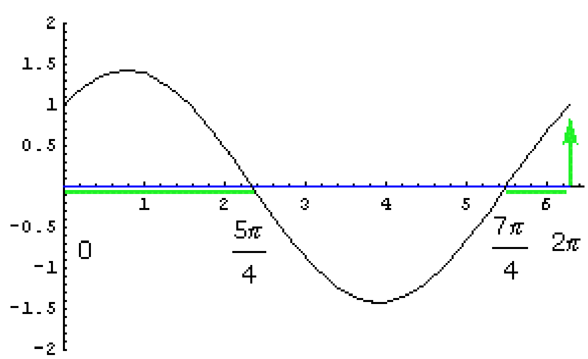
(b) Primero, averiguaremos para que valores de x se cumple la ecuación $\sin x + \cos x = 0$. *Mediante el siguiente desarrollo*

$$\begin{aligned} \sin x + \cos x &= 0 \\ \sin x &= -\cos x \\ \frac{\sin x}{\cos x} &= -1 \\ \tan x &= -1 \end{aligned}$$

obtenemos la ecuación $\tan x = -1$ *cuyas soluciones entre* 0 *y* 2π *son* $x_1 = 5\pi/4$ *y* $x_2 = 7\pi/4$. *Ahora, para resolver la inecuación*

$$\sin x + \cos x > 0$$

podemos ayudarnos de la gráfica de la función $f(x) = \sin x + \cos x$



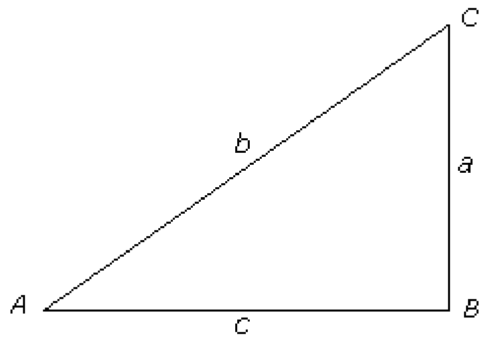
A partir de la figura es claro que las soluciones pedidas son los ángulos x que satisfacen

$$0 < x < \frac{5\pi}{4} \quad o \quad \frac{7\pi}{4} < x < 2\pi$$

■

Resolución de triángulos rectángulos

Ejercicio 93 *Resuelve el triángulo de la figura*



en los siguientes casos:

(a) $b = 6$ *y* $a = 3$

(b) $A = 40^o$ *y* $c = 5$

(c) $a = 2$ *y* $c = 3$

Solución: *(a) Puesto que conocemos la hipotenusa y el cateto opuesto al ángulo A, podemos utilizar la razón seno para calcular dicho ángulo. Así tenemos*

$$\sin A = \frac{a}{b} = \frac{1}{2}$$

y, por tanto, $A = 30^o$. *Como consecuencia,* $C = 60^o$. *Finalmente, para calcular el cateto c, contiguo a A, podemos usar el coseno. Así tenemos*

$$\begin{aligned} \cos A &= \frac{c}{b} \\ \cos 30^o &= \frac{c}{6} \\ c &= 6\cos 30^o \\ c &= 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ c &= 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

(b) Al ser $A = 40^o$, *entonces* $C = 50^o$. *Puesto que conocemos el cateto contiguo al ángulo* C, *podemos usar la razón coseno para calcular la hipotenusa.*

Así, tenemos

$$\begin{aligned}
\cos A &= \frac{c}{b}\\
\cos 40^o &= \frac{5}{b}\\
b &= \frac{5}{\cos 40^o}\\
b &= 6.53
\end{aligned}$$

Ahora, con la razón tangente del mismo ángulo podemos hallar el cateto opuesto. Así, tenemos

$$\begin{aligned}
\tan A &= \frac{a}{c}\\
\tan 40^o &= \frac{a}{5}\\
a &= 5\ \tan 40^o\\
a &= 4.20
\end{aligned}$$

(c) Puesto que conocemos los catetos opuesto y contiguo del ángulo A, podemos aplicar la razón tangente para calcular dicho ángulo. Así, tenemos

$$\begin{aligned}
\tan A &= \frac{a}{c}\\
\tan A &= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

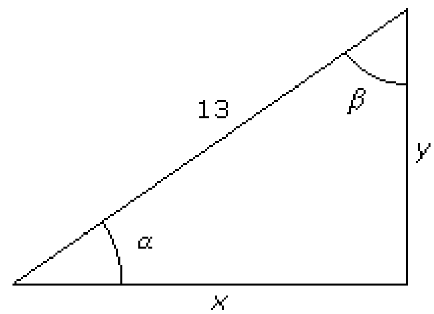
de donde obtenemos $A = 33^o41'24''$. *Por tanto,* $B = 56^o18'36''$. *Para calcular la hipotenusa podemos usar el seno de A. Así, tenemos*

$$\begin{aligned}
\sin A &= \frac{a}{b}\\
\sin 33^o41'24'' &= \frac{2}{b}\\
b &= \frac{2}{\sin 33^o41'24''}\\
b &= 3.61
\end{aligned}$$

■

Ejercicio 94 *Un triángulo rectángulo tiene* 30 *cm de perímetro. Calcula la medida de los ángulos sabiendo que la hipotenusa mide* 13 *cm.*

Solución: *Consideremos el triángulo rectángulo de la siguiente figura*



Al ser el perímetro del triángulo 30 *cm, podemos escribir*

$$\begin{aligned} x + y + 13 &= 30 \\ x + y &= 17 \\ y &= 17 - x \end{aligned}$$

y, por Pitágoras, obtenemos

$$\begin{aligned} x^2 + (17 - x)^2 &= 13^2 \\ x^2 + 289 - 34x + x^2 &= 169 \\ 2x^2 - 34x + 120 &= 0 \\ x^2 - 17x + 60 &= 0 \end{aligned}$$

una ecuación de segundo grado cuyas soluciones son

$$\frac{17 \pm \sqrt{289 - 240}}{2} = \frac{17 \pm 7}{2}$$

$x_1 = 12$ *y* $x_2 = 5$. *De este modo, como era de esperar, deducimos que hay dos triángulos rectángulos que satisfacen las condiciones del ejercicio.*

Soluciones	x	y
1	12	5
2	5	12

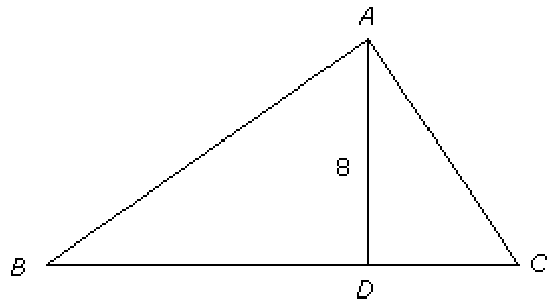
Tomaremos como triángulo de referencia para calcular α *y* β *el que tiene* $x = 12$ *e* $y = 5$. *Podemos usar la razón seno para calcular* α. *Así, tenemos*

$$\sin \alpha = \frac{5}{13}$$

de donde obtenemos $\alpha = 22^o 37^o 12''$ *y, por tanto,* $\beta = 67^o 22' 48''$. ■

Ejercicio 95 *En un triángulo* ABC*, recto en* A*, la altura relativa al lado* BC *mide* 8 *cm y* $\sin B = 1/4$. *Halla los lados del triángulo.*

Solución: *Consideremos el triángulo rectángulo de la figura*



del cual también conocemos

$$\sin B = \frac{1}{4}$$

De aquí, obtenemos $B = 14^o 28' 39''$. *Del triángulo rectángulo* BDA, *conocemos el cateto opuesto al ángulo* B *y, por tanto, podemos usar la razón seno para calcular su hipotenusa* BA. *Así tenemos*

$$\begin{aligned} \sin B &= \frac{DA}{BA} \\ \frac{1}{4} &= \frac{8}{BA} \\ BA &= 32 \end{aligned}$$

Entonces, del triángulo rectángulo BAC, *conocemos el cateto contiguo* BA *del ángulo* B *y, por tanto, podemos usar la razón coseno para calcular su hipotenusa* BC. *Así tenemos*

$$\begin{aligned} \cos B &= \frac{BA}{BC} \\ \cos 14^o 28' 39'' &= \frac{32}{BC} \\ BC &= \frac{32}{\cos 14^o 28' 39''} \\ BC &= 33.05 \end{aligned}$$

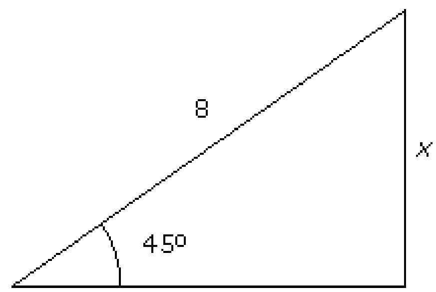
Finalmente, mediante la razón seno de B *podemos calcular el cateto* AC. *Así, tenemos*

$$\begin{aligned} \sin B &= \frac{AC}{BC} \\ \frac{1}{4} &= \frac{AC}{33.05} \\ AC &= \frac{33.05}{4} \\ AC &= 8.26 \end{aligned}$$

■

Ejercicio 96 *Una escalera apoyada en la pared mide 8 m y forma con el suelo un ángulo de 45^o. ¿Qué altura alcanzará el extremo que apoya en la pared?*

Solución: *En la siguiente figura se representa la situación planteada en el ejercicio.*



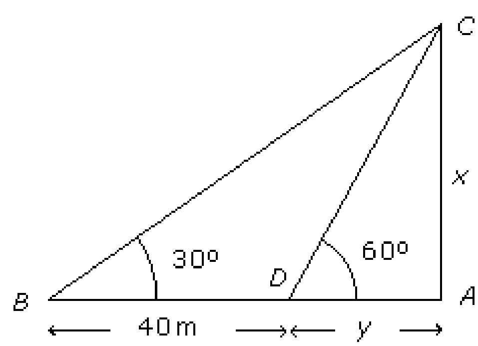
Se trata de calcular x con los datos de la figura. Observamos que x es el cateto opuesto al ángulo conocido y, por tanto, podemos aplicar la razón seno. Así, tenemos

$$\begin{aligned} \sin 45^o &= \frac{x}{8} \\ x &= 8 \ \sin 45^o \\ x &= 5.66 \end{aligned}$$

Como consecuencia, el extremo de la escalera alcanzará una altura de 5.66 m.
■

Ejercicio 97 *El punto más alto de una torre se ve desde la posición de un hombre en el suelo formando un ángulo de 30^o con la horizontal. Si el hombre se acerca 40 m hacia el pie de la torre, este ángulo se vuelve de 60^o. Hallar la altura de la torre.*

Solución: *Consideremos el diagrama siguiente*



En el triángulo rectángulo BAC, aplicando la razón tangente del ángulo B, *tenemos*

$$\begin{aligned}
\tan B &= \frac{AC}{AB} \\
\tan 30^o &= \frac{x}{40+y} \\
\frac{\sqrt{3}}{3} &= \frac{x}{40+y}
\end{aligned}$$

y, en el triángulo rectángulo DAC*, aplicando la misma razón al ángulo* D*, tenemos*

$$\begin{aligned}
\tan D &= \frac{x}{y} \\
\tan 60^o &= \frac{x}{y} \\
\sqrt{3} &= \frac{x}{y}
\end{aligned}$$

De este modo, hemos obtenido el sistema

$$\left.\begin{array}{r} \frac{\sqrt{3}}{3}(40+y) = x \\ \sqrt{3}y = x \end{array}\right\}$$

que, resuelto por igualación, tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{3}}{3}(40+y) &= \sqrt{3}y \\
\frac{40\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}y &= \sqrt{3}y \\
40\sqrt{3} &= 2\sqrt{3}y \\
y &= 20
\end{aligned}$$

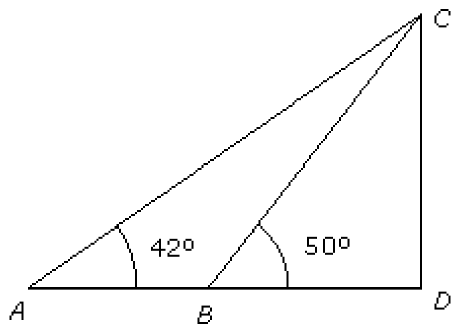
Luego,

$$x = 20\sqrt{3}$$

es decir, la altura de la torre es $20\sqrt{3}$ *m.* ■

Ejercicio 98 *Desde dos puntos* A *y* B *de una playa recta que distan* 1 *Km, se observa un barco* C *con visuales de* 42^o *y* 50^o *respecto a la recta de unión de los dos puntos. Hallar la distancia del barco a la playa.*

Solución: *Consideremos el diagrama de la siguiente figura*



del cual conocemos que $\overline{AB} = 1$. *Hacemos* $\overline{BD} = y$ *y* $\overline{CD} = x$. *En el triángulo rectángulo* ADC, *aplicando la razón tangente del ángulo* A, *obtenemos*

$$\begin{aligned} \tan A &= \frac{\overline{CD}}{\overline{AD}} \\ \tan 42^o &= \frac{x}{1+y} \\ 0.90\ (1+y) &= x \end{aligned}$$

y, en el triángulo rectángulo BDC, *aplicando la misma razón al ángulo* B, *tenemos*

$$\begin{aligned} \tan B &= \frac{\overline{CD}}{\overline{BD}} \\ \tan 50^o &= \frac{x}{y} \\ 1.20 &= \frac{x}{y} \\ 1.20\ y &= x \end{aligned}$$

De este modo, hemos obtenido el sistema

$$\left.\begin{array}{r} 0.9\ (1+y) = x \\ 1.2\ y = x \end{array}\right\}$$

que, resuelto por igualación, tenemos

$$\begin{aligned} 0.9\ (1+y) &= 1.2\ y \\ 0.9 &= 0.3y \\ y &= 3 \end{aligned}$$

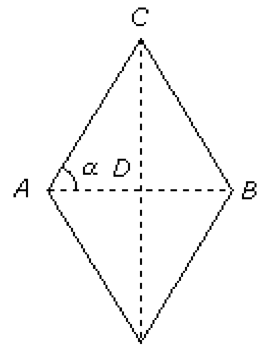
Luego,

$$x = 3.6$$

es decir, la distancia del barco a la playa es 3.6 *Km.* ■

Ejercicio 99 *Hallar los ángulos de un rombo de 2 cm de lado y cuya diagonal menor mide 3 cm.*

Solución: *Consideremos el rombo de la figura*



del cual conocemos $\overline{AC} = \overline{BC} = 2$ *y* $\overline{AB} = 3$. *En el triángulo rectángulo* ADC, *conocemos su hipotenusa* $\overline{AC}$ *y el cateto contiguo* $\overline{AD} = 1.5$ *cm al ángulo* α. *Así, tenemos*

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= \frac{AD}{AC} \\ \cos\alpha &= \frac{1.5}{2} \\ \cos\alpha &= 0.75\end{aligned}$$

de donde obtenemos $\alpha = 41^o 24' 35''$. *Ahora bien, el ángulo* A *es* 2α, *luego*

$$A = 82^o 49' 10''$$

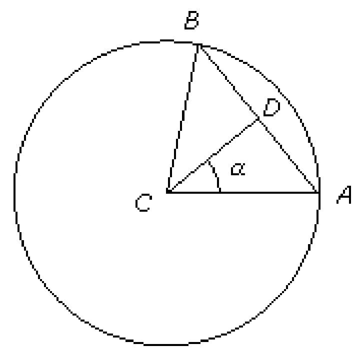
y, como los ángulos de un rombo suman 360^o, *tenemos que*

$$\begin{aligned}A + C &= 180^o \\ C &= 180^o - A \\ C &= 97^o 10' 50''\end{aligned}$$

■

Ejercicio 100 *En una circunferencia cuya longitud es* 12π *dm, halla la longitud de una cuerda que abarca un arco de* 80^o.

Solución: *En la siguiente figura hemos trazado una cuerda a la circunferencia de extremos* A *y* B. *También hemos trazado la altura* CD *relativa al lado* AB *del triángulo isósceles* ABC.



Sabemos que el ángulo central C es 80^o y, por tanto, $\alpha = 40^o$. Además, como la longitud de la circunferencia es 12π, podemos escribir

$$\begin{aligned} L &= 2\pi r \\ 12\pi &= 2\pi r \\ r &= 6 \end{aligned}$$

y, por tanto, $\overline{CB} = \overline{CA} = 6$. En el triángulo rectángulo ADC se cumple

$$\begin{aligned} \sin\alpha &= \frac{\overline{DA}}{\overline{CA}} \\ \sin 40^o &= \frac{\overline{DA}}{6} \\ \overline{DA} &= 3.86 \end{aligned}$$

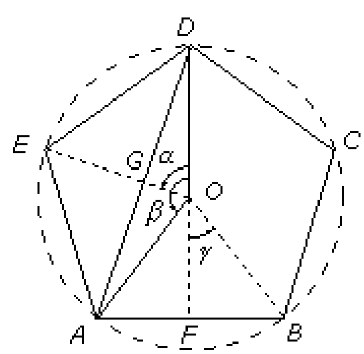
Por consiguiente,

$$\overline{AB} = 2\ \overline{DA} = 7.72$$

■

Ejercicio 101 *Dado un pentágono regular ABCDE de 8 cm de lado, calcula la longitud de la diagonal AD.*

Solución: *Consideremos el pentágono regular de la siguiente figura*



del cual sabemos que $\overline{AB} = 8$ *y*

$$\alpha = \frac{360^o}{5} = 72^o$$

Por construcción, $\gamma = \alpha/2 = 36^o$*, pues* OF *es una apotema del polígono. En el triángulo rectángulo* FBO*, sabemos que* $\overline{FB} = \overline{AB}/2 = 4$ *y se cumple*

$$\begin{aligned} \sin\gamma &= \frac{\overline{FB}}{\overline{OB}} \\ \sin 36^o &= \frac{4}{\overline{OB}} \\ \overline{OB} &= \frac{4}{\sin 36^o} \\ \overline{OB} &= 6.81 \end{aligned}$$

Observa que OB *es el radio de la circunferencia circunscrita al polígono. El triángulo* OAD *es isósceles y* $\beta = 2\alpha$*. En el triángulo rectángulo* GOD*, sabemos que* $\overline{OD} = 6.81$ *y se cumple*

$$\begin{aligned} \sin\alpha &= \frac{\overline{GD}}{\overline{OD}} \\ \sin 72^o &= \frac{\overline{GD}}{6.81} \\ \overline{GD} &= 6.48 \end{aligned}$$

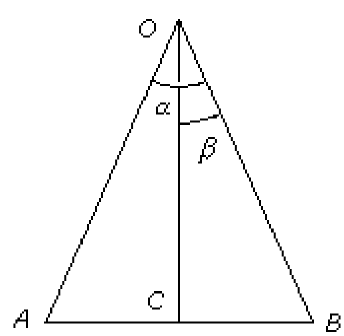
Luego,

$$\overline{AD} = 2\ \overline{GD} = 12.96$$

■

Ejercicio 102 *Halla el área de un polígono regular de* 15 *lados inscrito en una circunferencia de radio* 5 *cm.*

Solución: *Un polígono regular de* 15 *lados está formado por 15 triángulos isósceles iguales*



en los que O es el centro de la circunferencia que circunscribe el polígono y

$$\alpha = \frac{360^o}{15} = 24^o$$

y, por tanto, $\beta = 12^o$. Para hallar el área del polígono necesitamos el lado $\overline{AB}$ y la apotema $\overline{OC}$ del polígono. Sabemos que el radio de la circunferencia vale 5 y, por tanto, tomando el triángulo rectángulo OCB tenemos

$$\begin{aligned} \sin\beta &= \frac{\overline{CB}}{\overline{OB}} \\ \sin 12^o &= \frac{\overline{CB}}{5} \\ \overline{CB} &= 1.04 \end{aligned}$$

y, como $\overline{AB} = 2\ \overline{CB}$, obtenemos

$$\overline{AB} = 2.08$$

Además, en el mismo triángulo rectángulo, se cumple

$$\begin{aligned} \cos\beta &= \frac{\overline{OC}}{\overline{OB}} \\ \cos 12^o &= \frac{\overline{OC}}{5} \\ \overline{OC} &= 4.90 \end{aligned}$$

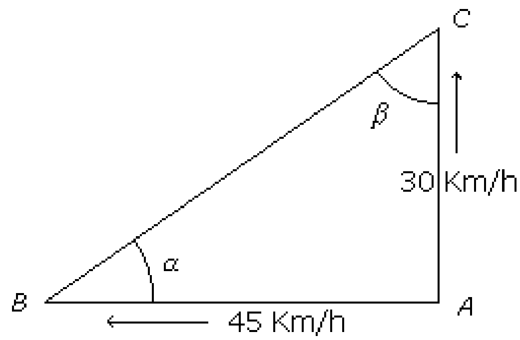
Finalmente, sabemos que el área del polígono es

$$\begin{aligned} \acute{A}rea &= \frac{per\acute{\imath}metro \cdot\ apotema}{2} \\ &= \frac{15 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{OC}}{2} \\ &= 76.44 \end{aligned}$$

■

Ejercicio 103 *Dos móviles parten de un punto A con direcciones perpendiculares, uno a 30 Km/h y el otro a 45 Km/h. ¿Qué ángulo forma la línea que une estos móviles con las direcciones de los mismos al cabo de 2 horas y 15 minutos?*

Solución: *Consideremos el diagrama de la siguiente figura*



Primero calcularemos, mediante factores de conversión, los catetos AC y AB. Así, tenemos

$$\overline{AC} = 2.25\ h \cdot \frac{30\ Km}{1\ h} = 67.5\ Km$$

y

$$\overline{AB} = 2.25\ h \cdot \frac{45\ Km}{1\ h} = 101.25\ Km$$

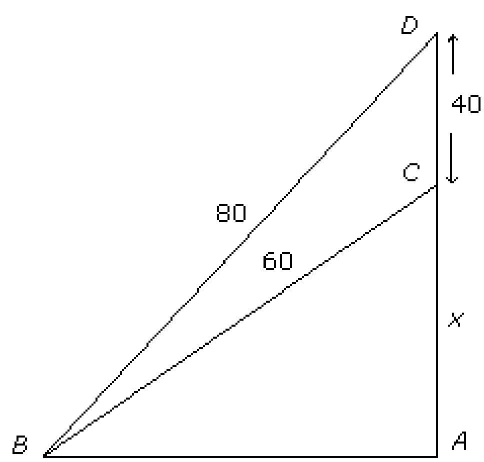
Ahora, en el triángulo rectángulo ABC, se cumple

$$\begin{aligned} \tan\alpha &= \frac{AC}{AB} \\ \tan\alpha &= \frac{67.5}{101.25} \\ \tan\alpha &= 0.6667 \end{aligned}$$

de donde $\alpha = 33^o 41' 24''$ *y, por tanto,* $\beta = 90^o - \alpha = 56^o 18' 36''$. ■

Ejercicio 104 *Un faro tiene* 40 *m de altura, hallándose sobre una roca. Situados en un punto A de la playa, hemos comprobado que la distancia que hay hasta la base del faro es* 60 *m, y la distancia que le separa de la cúpula del faro es* 80 *m. Halla la altura de la roca sobre la que se encuentra el faro.*

Solución: *Consideremos el esquema de la figura siguiente*



En el triángulo rectángulo ABC, por Pitágoras, tenemos

$$\overline{AB} = \sqrt{60^2 - x^2}$$

y, en el triángulo rectángulo ABD, por el mismo teorema, tenemos

$$\overline{AB} = \sqrt{80^2 - (40 + x)^2}$$

Por tanto,

$$\sqrt{60^2 - x^2} = \sqrt{80^2 - (40 + x)^2}$$

y, elevando al cuadrado ambos miembros de la igualdad, obtenemos

$$\begin{aligned} 3600 - x^2 &= 6400 - 1600 - 80x - x^2 \\ 80x &= 1200 \\ x &= 15 \end{aligned}$$

luego, la altura de la roca es de 15 m. ■

Resolución de triángulos cualesquiera

Ejercicio 105 *En los siguientes casos se dan tres elementos de un triángulo y se deben calcular los otros tres y el área correspondiente.*

(a) $a = 10$ *cm,* $B = 50^o$ *y* $C = 63^o$

(b) $a = 15$ *cm,* $b = 20$ *cm y* $C = 30^o$

(c) $a = 74$ *cm,* $b = 59$ *cm y* $B = 57^o$

(d) $a = 3$ *cm,* $b = 5$ *cm y* $c = 6$ *cm*

(e) $b = 4$ *cm,* $c = 6$ *cm y* $B + C = 120^o$

(f) $B = 120^o$, $C = 45^o$ *y* $b + c = \sqrt{2} + \sqrt{3}$

Solución: *(a) Los datos son* $a = 10$ *cm,* $B = 50^o$ *y* $C = 63^o$*. Los ángulos de un triángulo suman* 180^o*. Por tanto,*

$$\begin{aligned} A &= 180^o - (B + C) \\ A &= 67^o \end{aligned}$$

Como datos tenemos ahora el lado a y su ángulo opuesto A y los otros dos ángulos. Por el teorema del seno, podemos calcular los otros dos lados. Así, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{a}{\sin A} &= \frac{b}{\sin B} \\ \frac{10}{\sin 67^o} &= \frac{b}{\sin 50^o} \\ b &= \frac{10 \cdot \sin 50^o}{\sin 67^o} \\ b &= 8.32 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\frac{a}{\sin A} &= \frac{c}{\sin C} \\
\frac{10}{\sin 67^o} &= \frac{c}{\sin 63^o} \\
c &= \frac{10 \cdot \sin 63^o}{\sin 67^o} \\
c &= 9.68
\end{aligned}$$

Para calcular el área del triángulo usaremos

$$\begin{aligned}
\acute{A}rea &= \frac{1}{2}\ a\ b\ \sin C \\
&= \frac{1}{2}\ 10 \cdot 8.32 \cdot \sin 63^o \\
&= 37.07
\end{aligned}$$

luego, el área vale $37.07\ cm^2$.

(b) Los datos son $a = 15\ cm$, $b = 20\ cm$ *y* $C = 30^o$. *Como datos tenemos dos lados y el ángulo opuesto al lado desconocido. Por tanto, aplicaremos el teorema del coseno para calcular este lado desconocido. Así, tenemos*

$$\begin{aligned}
c &= \sqrt{a^2 + b^2 - 2a\ b\ \cos C} \\
&= \sqrt{15^2 + 20^2 - 2 \cdot 15 \cdot 20 \cdot \cos 30^o} \\
&= 10.27
\end{aligned}$$

Ahora, para calcular el ángulo A utilizaremos el teorema del seno. Así, tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{a}{\sin A} &= \frac{c}{\sin C} \\
\frac{15}{\sin A} &= \frac{10.27}{\sin 30^o} \\
\sin A &= \frac{15 \cdot \sin 30^o}{10.27} \\
\sin A &= 0.7303
\end{aligned}$$

luego,

$$A = 46^o 54' 42''$$

y, por tanto,

$$\begin{aligned}
B &= 180^o - (A + C) \\
B &= 103^o 5' 18''
\end{aligned}$$

El área del triángulo en cm^2 *es*

$$\begin{aligned}
\acute{A}rea &= \frac{1}{2} a\ b\ \sin C \\
&= \frac{1}{2} 15 \cdot 20 \cdot \sin 30^o \\
&= 75
\end{aligned}$$

(c) Los datos son $a = 74$ cm, $b = 59$ cm y $B = 57^o$. Como datos tenemos el lado b y su ángulo opuesto B, además del lado a. Por tanto, podemos usar el teorema del seno para hallar el ángulo A. Así, tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{a}{\sin A} &= \frac{b}{\sin B} \\
\frac{74}{\sin A} &= \frac{59}{\sin 57^o} \\
\sin A &= \frac{74 \cdot \sin 57^o}{59} \\
\sin A &= 1.05
\end{aligned}$$

lo cual es imposible, ya que $-1 \leq \sin A \leq 1$. Por tanto, no hay ningún triángulo que satisfaga las condiciones del enunciado.

(d) Los datos son $a = 3$ cm, $b = 5$ cm y $c = 6$ cm. Como datos tenemos los tres lados del triángulo. Por tanto, debemos aplicar el teorema del coseno. Así, tenemos

$$\begin{aligned}
a^2 &= b^2 + c^2 - 2\ b\ c\ \cos A \\
\cos A &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \\
&= \frac{5^2 + 6^2 - 3^2}{2 \cdot 5 \cdot 6} \\
&= 0.8667
\end{aligned}$$

luego,

$$A = 29^o 55' 22''$$

Ahora, por el teorema del seno, tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{a}{\sin A} &= \frac{b}{\sin B} \\
\frac{3}{\sin 29^o 55' 22''} &= \frac{5}{\sin B} \\
\sin B &= \frac{5 \cdot \sin 29^o 55' 22''}{3} \\
\sin B &= 0.8314
\end{aligned}$$

luego,

$$B = 56^o 14' 28''$$

y, por tanto,

$$\begin{aligned}
C &= 180^o - (A + B) \\
&= 93^o 50' 10''
\end{aligned}$$

El área del triángulo en cm^2 es

$$\begin{aligned}
\acute{A}rea &= \frac{1}{2}\ a\ b\ \sin C \\
&= \frac{1}{2}\ 3 \cdot 5 \cdot \sin 93^o 50' 10'' \\
&= 7.48
\end{aligned}$$

(e) Los datos son $b = 4$ cm, $c = 6$ cm y $B + C = 120^o$. Puesto que $B + C = 120^o$, entonces

$$\begin{aligned}
A &= 180^o - (B + C) \\
&= 60^o
\end{aligned}$$

Ahora, por el teorema del coseno, tenemos

$$\begin{aligned}
a &= \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc\ \cos A} \\
&= \sqrt{4^2 + 6^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cos 60^o} \\
&= 5.29
\end{aligned}$$

Ahora, por el teorema del seno, tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{a}{\sin A} &= \frac{b}{\sin B} \\
\frac{5.29}{\sin 60^o} &= \frac{4}{\sin B} \\
\sin B &= \frac{4 \cdot \sin 60^o}{5.29} \\
&= 0.6548
\end{aligned}$$

luego,

$$B = 40^o 54' 27''$$

y, por tanto,

$$\begin{aligned}
C &= 120^o - B \\
C &= 79^o 5' 33''
\end{aligned}$$

El área del triángulo en cm^2 es

$$\begin{aligned}
\acute{A}rea &= \frac{1}{2}\ b\ c\ \sin A \\
&= \frac{1}{2}\ 4 \cdot 6 \cdot \sin 60^o \\
&= 10.39
\end{aligned}$$

(f) Los datos son $B = 120^o$, $C = 45^o$ y $b + c = \sqrt{2} + \sqrt{3}$. Tenemos la relación $b + c = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ y necesitamos otra para poder hallar b y c. Esta relación la

proporcionará el teorema del seno. Así, tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{b}{\sin B} &= \frac{c}{\sin C}\\
\frac{b}{\sin 120^o} &= \frac{c}{\sin 45^o}
\end{aligned}$$

Ahora bien,

$$\sin 120^o = \sin(180^o - 60^o) = \sin 60^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

y $\sin 45^o = \sqrt{2}/2$. *Por tanto, tenemos*

$$\begin{aligned}
\frac{b}{\sqrt{3}/2} &= \frac{c}{\sqrt{2}/2}\\
\sqrt{2}b &= \sqrt{3}c\\
b &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\,c
\end{aligned}$$

Sustituyendo esta última relación en $b + c = \sqrt{2} + \sqrt{3}$, *tenemos*

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\,c + c &= \sqrt{2} + \sqrt{3}\\
(\sqrt{3} + \sqrt{2})c &= 2 + \sqrt{6}\\
c &= \frac{2 + \sqrt{6}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}\\
&= \sqrt{2}
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$b = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{3}$$

Por otra parte, es claro que

$$\begin{aligned}
A &= 180^o - (B + C)\\
&= 15^o
\end{aligned}$$

y, por el teorema del seno, tenemos

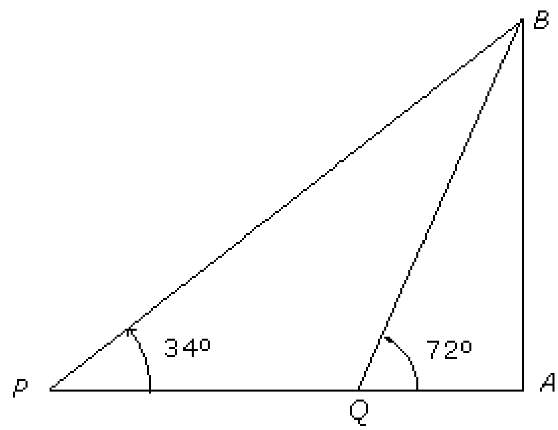
$$\begin{aligned}
\frac{a}{\sin A} &= \frac{b}{\sin B}\\
\frac{a}{\sin 15^o} &= \frac{\sqrt{3}}{\sin 120^o}\\
a &= \frac{\sqrt{3} \cdot \sin 15^o}{\sin 120^o}\\
a &= 0.52
\end{aligned}$$

Finalmente, el área del triángulo en cm^2 es

$$\begin{aligned} \acute{A}rea &= \frac{1}{2}\ b\ c\ \sin A \\ &= \frac{1}{2}\ \sqrt{3}\cdot\sqrt{2}\cdot\sin 15^o \\ &= 0.32 \end{aligned}$$

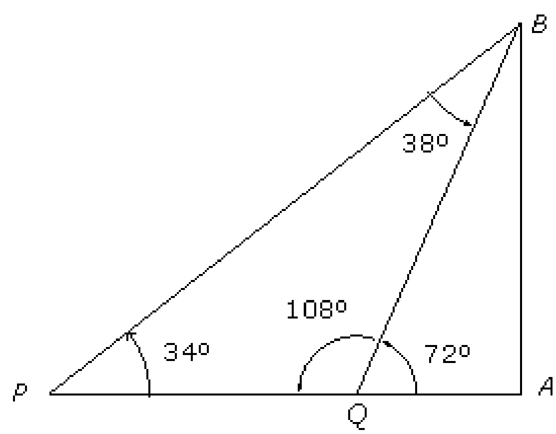
■

Ejercicio 106 *Se quiere calcular la altura de una torre AB y se tienen los siguientes datos:*



$\overline{PQ} = 50\ m$, $\widehat{APB} = 34^o$ *y* $\widehat{AQB} = 72^o$.

Solución: *A partir de los datos que tenemos encontramos otros ángulos que nos servirán para poder aplicar el teorema del seno al triángulo PQB. Colocamos esta información en la siguiente figura.*



Así, tenemos

$$\begin{aligned}\frac{50}{\sin 38^o} &= \frac{\overline{QB}}{\sin 34^o}\\ \overline{QB} &= \frac{50\cdot\sin 34^o}{\sin 38^o}\\ &= 45.41\end{aligned}$$

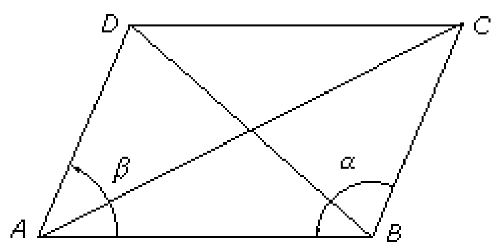
Utilizando ahora el triángulo rectángulo QAB, tenemos

$$\begin{aligned}\sin 72^o &= \frac{\overline{AB}}{45.41}\\ \overline{AB} &= 43.19\end{aligned}$$

■

Ejercicio 107 *Calcula las diagonales de un paralelogramo, sabiendo que dos lados consecutivos miden* 5 *y* 8 *cm y forman un ángulo de* 150^o.

Solución: *Consideremos el paralelogramo de la siguiente figura*



en donde sabemos que $\alpha = 150^o$, $\overline{AB} = 8$ *y* $\overline{BC} = 5$. *Sabemos que los ángulos de un paralelogramo suman 360º. Por tanto,*

$$\begin{aligned}\alpha+\beta &= 180^o\\ \beta &= 180^o - 150^o\\ \beta &= 30^o\end{aligned}$$

Para hallar la diagonal AC, podemos usar el triángulo ABC y aplicar el teorema del coseno. Así, tenemos

$$\begin{aligned}\overline{AC} &= \sqrt{8^2+5^2-2\cdot 8\cdot 5\cdot\cos 150^o}\\ &= 12.58\end{aligned}$$

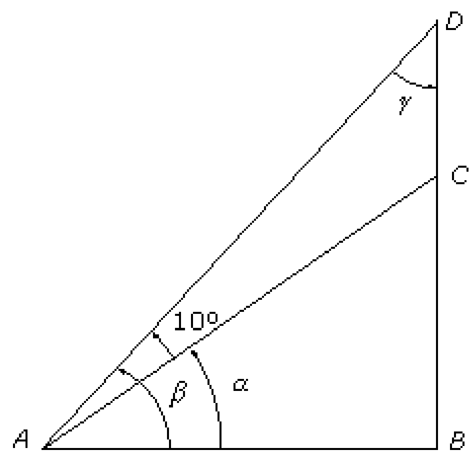
Para hallar la diagonal BD, usaremos el triángulo ABD y aplicaremos el teorema del coseno. Así, tenemos

$$\begin{aligned}\overline{BD} &= \sqrt{5^2+8^2-2\cdot 5\cdot 8\cdot\cos 30^o}\\ &= 4.44\end{aligned}$$

■

Ejercicio 108 *A 12 m de distancia de un edificio vemos la parte inferior y superior de una ventana bajo un ángulo de 10^o. Halla la altura de la misma, sabiendo que está situada a 5 m del suelo.*

Solución: *Consideremos el esquema de la figura siguiente*



en donde sabemos que $\overline{AB} = 12$ y $\overline{BC} = 5$. En el triángulo rectángulo ABC se cumple

$$
\begin{aligned}
\tan\alpha &= \frac{\overline{CB}}{\overline{AB}} \\
\tan\alpha &= \frac{5}{12} \\
\tan\alpha &= 0.4167
\end{aligned}
$$

luego, $\alpha = 22^o37'12''$ y, por tanto, $\beta = 32^o37'12''$. Además, por Pitágoras, tenemos

$$\overline{AC} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$$

En el triángulo rectángulo ABD, se cumple

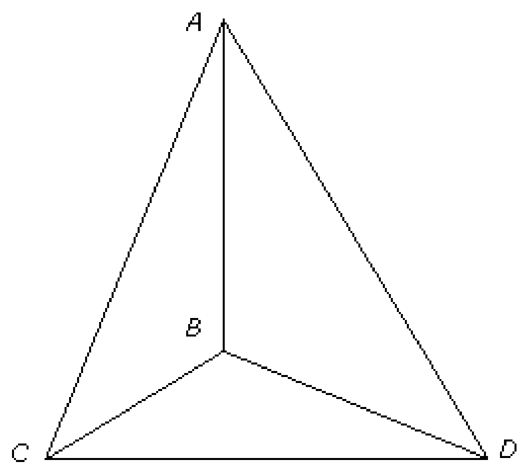
$$
\begin{aligned}
\beta + \gamma &= 90^o \\
\gamma &= 57^o22'48''
\end{aligned}
$$

Con los datos obtenidos, podemos aplicar el teorema del seno al triángulo ACD para hallar la altura de la ventana $\overline{CD}$. Así, tenemos

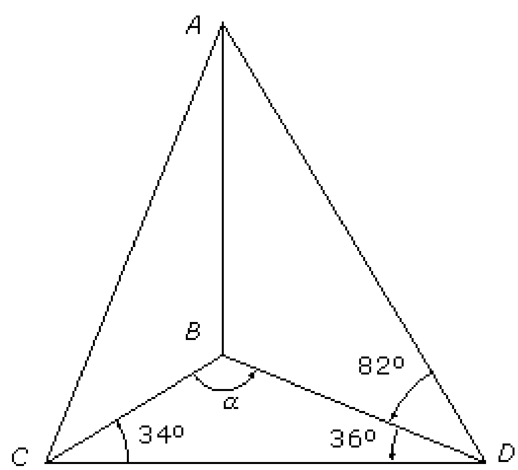
$$
\begin{aligned}
\frac{\overline{CD}}{\sin 10^o} &= \frac{13}{\sin 57^o22'48''} \\
\overline{CD} &= \frac{13 \cdot \sin 10^o}{\sin 57^o22'48''} \\
\overline{CD} &= 2.06
\end{aligned}
$$

Por tanto, la altura de la ventana es 2.06 m. ■

Ejercicio 109 *Se quiere calcular la altura de una montaña. Para ello, se considera el punto B que es la proyección de la cima A (punto inaccesible) y los puntos accesibles C y D. La dirección CB la determinan los planos horizontal CBD y el vertical CBA. Análogamente con BD. Se han calculado las siguientes medidas: $\overline{CD} = 100$ m, $\widehat{DCB} = 34^o$, $\widehat{BDC} = 36^o$ y $\widehat{ADB} = 82^o$. Calcula $\overline{AB}$.*



Solución: *Consideremos la siguiente figura*



en donde hemos colocado los datos de los ángulo y sabemos también que $\overline{CD} = 100$. En el triángulo BCD, se cumple

$$\begin{aligned} \alpha &= 180^o - (34^o + 36^o) \\ &= 110^o \end{aligned}$$

En este triángulo, mediante el teorema del seno, obtenemos

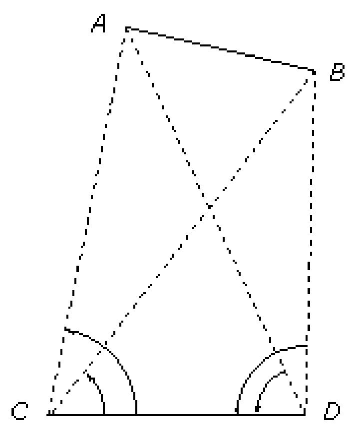
$$\begin{aligned}
\frac{\overline{BD}}{\sin 34^o} &= \frac{100}{\sin 110^o} \\
\overline{BD} &= \frac{100 \cdot \sin 34^o}{\sin 110^o} \\
&= 59.51
\end{aligned}$$

Ahora, en el triángulo rectángulo ABD, recto en B, se cumple

$$\begin{aligned}
\tan 82^o &= \frac{\overline{AB}}{59.51} \\
\overline{AB} &= 59.51 \cdot \tan 82^o \\
&= 423.44
\end{aligned}$$

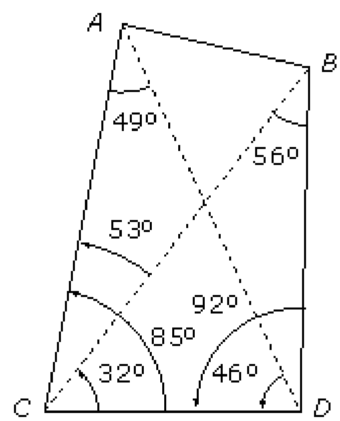
Por tanto, la altura de la montaña es 423.44 m. ■

Ejercicio 110 *Se quiere calcular la distancia entre dos puntos inaccesibles A y B.*



Para ello se toman dos puntos accesibles C y D. Se han calculado las siguientes medidas: $\overline{CD} = 34$ m, $\widehat{DCB} = 32^o$, $\widehat{ADC} = 46^o$, $\widehat{DCA} = 85^o$ y $\widehat{BDC} = 92^o$. Halla $\overline{AB}$.

Solución: *A partir de los datos que tenemos encontramos otros ángulos que nos servirán para poder aplicar dos veces el teorema del seno y, después, el teorema del coseno. En la figura siguiente escribimos los ángulos que se usarán en la aplicación de estos dos teoremas.*



En el triángulo ACD, se cumple

$$\begin{aligned}\frac{34}{\sin 49^o} &= \frac{\overline{AC}}{\sin 46^o}\\ \overline{AC} &= \frac{34\cdot\sin 46^o}{\sin 49^o}\\ \overline{AC} &= 32.41\end{aligned}$$

En el triángulo BCD, se cumple

$$\begin{aligned}\frac{34}{\sin 56^o} &= \frac{\overline{BC}}{\sin 92^o}\\ \overline{BC} &= \frac{34\cdot\sin 92^o}{\sin 56^o}\\ \overline{BC} &= 40.99\end{aligned}$$

Ahora, en el triángulo ABC, aplicando el teorema del coseno, obtenemos

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= \sqrt{32.41^2+40.99^2-2\cdot 32.41\cdot 40.99\cdot\cos 53^o}\\ &= 65.78\end{aligned}$$

■

Ejercicio 111 *Halla los lados de un triángulo de área 18 cm^2, y ángulos $A = 30^o$ y $B = 45^o$.*

Solución: *Es claro que*

$$\begin{aligned}C &= 180^o-(A+B)\\ &= 105^o\end{aligned}$$

Sabemos que el área del triángulo viene dada por

$$\acute{A}rea = \frac{1}{2}\ b\ c\ \sin A$$

luego,

$$\begin{aligned} 18 &= \frac{1}{2}\, bc\ \sin 30^o \\ bc &= 72 \end{aligned}$$

Por otra parte, aplicando el teorema del seno, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{b}{\sin 45^o} &= \frac{c}{\sin 105^o} \\ b &= \frac{\sin 45^o}{\sin 105^o}\ c \\ b &= 0.73c \end{aligned}$$

Sustituyendo este resultado en $bc = 72$, *obtenemos*

$$\begin{aligned} 0.73c^2 &= 72 \\ c &= \sqrt{\frac{72}{0.73}} \\ &= 9.93 \end{aligned}$$

luego,

$$\begin{aligned} b &= 0.73c \\ &= 7.25 \end{aligned}$$

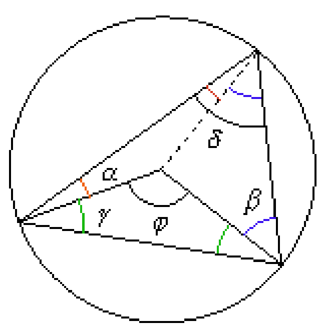
Para hallar el lado a*, aplicamos de nuevo el teorema del seno. Así, tenemos*

$$\begin{aligned} \frac{a}{\sin 30^o} &= \frac{7.25}{\sin 45^o} \\ a &= \frac{7.25 \cdot \sin 30^o}{\sin 45^o} \\ &= 5.13 \end{aligned}$$

■

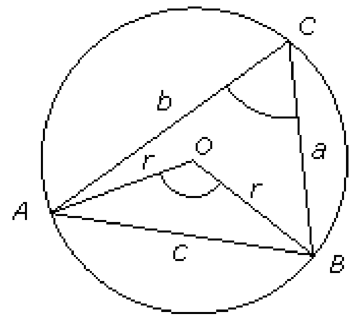
Ejercicio 112 *El área de un triángulo es* $3\ m^2$*, siendo* $a = 2\ m$ *y* $b = 5\ m$*. Calcula el radio de la circunferencia circunscrita a dicho triángulo.*

Solución: *En primer lugar probaremos el siguiente hecho: si un ángulo inscrito* δ *y un ángulo central* φ *limitan sobre una circunferencia el mismo arco, entonces* $\varphi = 2\delta$*. En efecto, consideremos el esquema de la siguiente figura*



A partir de la figura es evidente que $\alpha + \beta + \gamma = 90^o$ *y* $\delta = \alpha + \beta$. *Por tanto,* $\delta = 90^o - \gamma$. *Por otra parte, también es evidente que* $\varphi = 180^o - 2\gamma$. *Luego,* $\varphi = 2(90^o - \gamma) = 2\delta$.

Ahora, pasamos a solucionar el ejercicio. Para ello, consideremos el esquema de la siguiente figura



Por los datos que tenemos, tenemos

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \frac{1}{2}\, ab\ \sin C \\ 3 &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 5 \cdot \sin C \\ \sin C &= 0.6 \end{aligned}$$

luego, $C = 36^o52'12''$. *Aplicando ahora el teorema del coseno al triángulo* ABC, *tenemos*

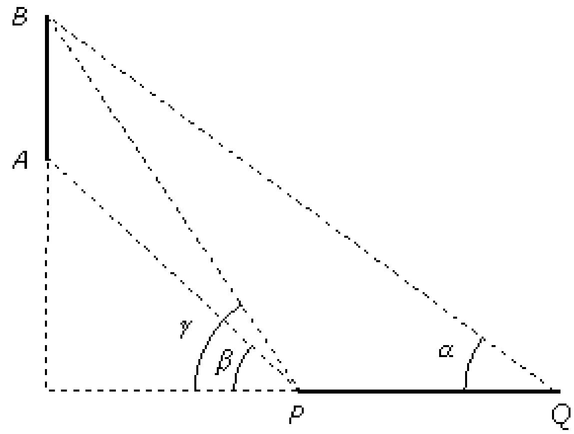
$$\begin{aligned} c &= \sqrt{2^2 + 5^2 - 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot \cos 36^o52'12''} \\ &= 3.61 \end{aligned}$$

Ahora, por el hecho que hemos probado al principio del ejercicio, tenemos que el ángulo central $O = 2C$. *Por tanto,* $O = 73^o44'24''$. *Aplicando ahora el teorema del coseno al triángulo* OAB, *tenemos*

$$\begin{aligned} c^2 &= r^2 + r^2 - 2r^2 \cdot \cos O \\ 3.61^2 &= 2r^2 - 0.56r^2 \\ r &= \sqrt{\frac{3.61^2}{1.44}} \\ r &\simeq 3 \end{aligned}$$

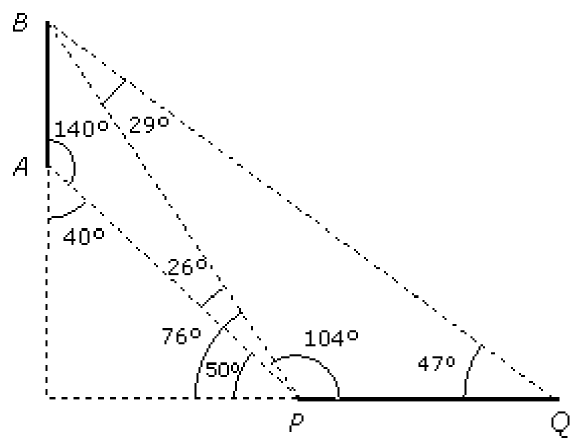
■

Ejercicio 113 *Se quiere calcular la altura de una ventana* AB *y se tienen los datos siguientes:*



$\overline{PQ} = 5\ m$, $\alpha = 47^o$, $\beta = 50^o$ *y* $\gamma = 76^o$. *Halla* $\overline{AB}$.

Solución: *Con los datos que tenemos, en la siguiente figura hemos introducido medidas de otros ángulos que serán necesarios para poder aplicar el teorema del seno.*



En el triángulo BPQ, *aplicando el teorema del seno, tenemos*

$$\begin{aligned}
\frac{5}{\sin 29^o} &= \frac{\overline{BP}}{\sin 47^o} \\
\overline{BP} &= \frac{5 \cdot \sin 47^o}{\sin 29^o} \\
&= 7.54
\end{aligned}$$

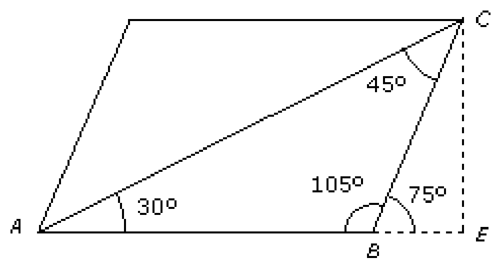
Ahora, en el triángulo ABP, aplicando de nuevo el teorema del seno, tenemos

$$\begin{aligned}\frac{\overline{AB}}{\sin 26^o} &= \frac{7.54}{\sin 140^o} \\ \overline{AB} &= \frac{7.54 \cdot \sin 26^o}{\sin 140^o} \\ &= 5.14\end{aligned}$$

es decir, la altura de la ventana es 5.14 *m.* ■

Ejercicio 114 *Calcula el área de un paralelogramo sabiendo que una diagonal mide* 30 *cm y forma con los lados ángulos de* 30^o *y* 45^o*.*

Solución: *Consideremos el paralelogramo de la siguiente figura*



en donde sabemos que $\overline{AC} = 30$*. Consideremos el triángulo* ABC*, del cual conocemos los ángulos* A *y* C*. Por tanto,*

$$\begin{aligned}B &= 180^o - (A + C) \\ &= 105^o\end{aligned}$$

Aplicando ahora el teorema del seno, tenemos

$$\begin{aligned}\frac{\overline{AC}}{\sin B} &= \frac{\overline{BC}}{\sin A} \\ \frac{30}{\sin 105^o} &= \frac{\overline{BC}}{\sin 30^o} \\ \overline{BC} &= \frac{30 \cdot \sin 30^o}{\sin 105^o} \\ &= 15.53\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\frac{\overline{AB}}{\sin C} &= \frac{\overline{AC}}{\sin B} \\ \frac{\overline{AB}}{\sin 45^o} &= \frac{30}{\sin 105^o} \\ \overline{AB} &= \frac{30 \cdot \sin 45^o}{\sin 105^o} \\ &= 21.96\end{aligned}$$

En el triángulo BDE, se cumple

$$\begin{aligned}
\sin 75^o &= \frac{\overline{CE}}{15.53} \\
\overline{CE} &= 15.53 \cdot \sin 75^o \\
&\simeq 15
\end{aligned}$$

Por tanto, el área del paralelogramo es

$$\begin{aligned}
\acute{A}rea &= AB \cdot CE \\
&= 21.96 \cdot 15 \\
&= 329.4
\end{aligned}$$

También podemos calcular el área del paralelogramo como el doble del área del triángulo ABC. Así, tenemos que el área del triángulo ABC es

$$\begin{aligned}
\acute{A}rea\ ABC &= \frac{1}{2}\ ab\ \sin C \\
&= \frac{1}{2}\ 15.53 \cdot 30 \cdot \sin 45^o \\
&= 164.72
\end{aligned}$$

y, por tanto, el área del paralelogramo es

$$\begin{aligned}
\acute{A}rea &= 2 \cdot 164.72 \\
&= 329.44
\end{aligned}$$

■

Ejercicio 115 *Calcular el área del triángulo de lados 8, 6 y 4 cm.*

Solución: *A partir de los datos que conocemos, la forma más rápida de calcular el área de este triángulo será utilizar la fórmula de Heron. Puesto que el perímetro del tríangulo es $p = 18$ cm, entonces*

$$\begin{aligned}
\acute{A}rea &= \sqrt{\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}-a\right)\left(\frac{p}{2}-b\right)\left(\frac{p}{2}-c\right)} \\
&= \sqrt{9(9-4)(9-6)(9-8)} \\
&= \sqrt{135} \\
&= 11.62
\end{aligned}$$

Por tanto, el área del triángulo es 11.62 cm^2. ■