Teoría

Números reales

Índice

1. El conjunto de los números reales

En esta sección veremos que no todos los números decimales que necesitamos para resolver problemas elementales de medida de longitudes son exactos o periódicos, o sea son números racionales. Esta insuficiencia del conjunto de los números racionales conducirá a la necesidad de ampliarlo con nuevos números que llamaremos irracionales y que se caracterizarán por tener una expresión decimal con infinitas cifras decimales no periódicas. De este modo, añadiendo a los números racionales los irracionales, formaremos un nuevo conjunto de números que denominaremos conjunto de los números reales y que designaremos por $\mathbb{R}$. Veremos también que este conjunto de números puede representarse mediante los puntos de una recta, y por este motivo, a la recta como representación gráfica del conjunto de los números reales se la llama recta real.

1.1. Existencia de números que no son racionales

En la figura 1 hemos dibujado una línea recta y sobre ella, tomando como unidad el segmento que se indica, hemos representado algunos números naturales[1].Ahora, sobre la misma recta, en la figura 2 hemos representado algunos números enteros[2].

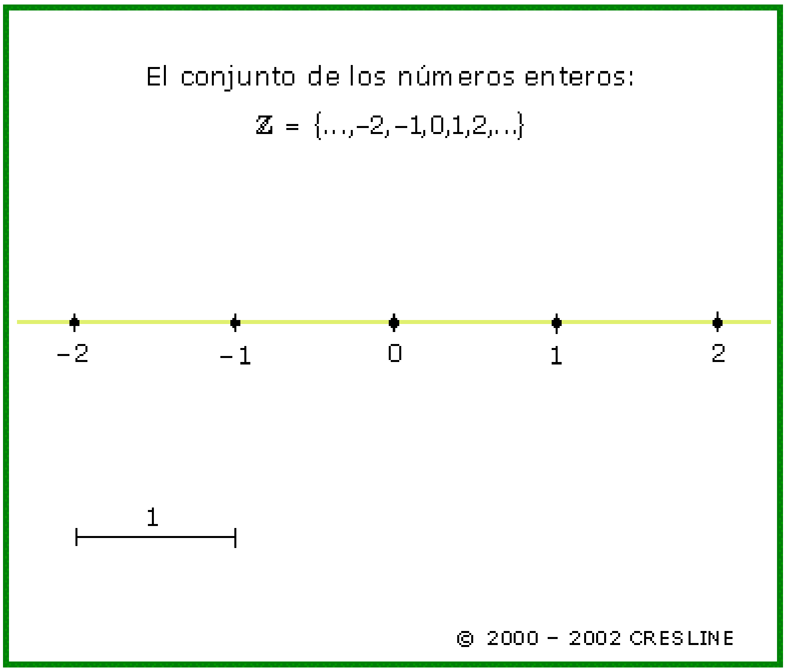


Figura 2

Como habrás observado en seguida, al representar estos números hemos tenido que señalar el punto que se corresponde con 0 y los puntos que se corresponden con los números negativos; los puntos que se corresponden con los números positivos ya estaban señalados al representar los números naturales. Por esta razón, tenemos que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$[3] y $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+$[4]. Ahora, de nuevo sobre la misma recta, en la figura 3 hemos representado algunos números racionales[5].

---

[1] Recuerda que el conjunto de los números naturales se simboliza por $\mathbb{N}$ y que $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$, indicando con esta notación que $\mathbb{N}$ es un conjunto cuyos elementos son $1, 2, 3, ...$.

[2] Recuerda que el conjunto de los números enteros se simboliza por $\mathbb{Z}$ y que $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$, indicando con esta notación que $\mathbb{Z}$ es un conjunto cuyos elementos son $..., -2, -1, 0, 1, 2, ...$.

[3] Con esta notación indicamos que el conjunto $\mathbb{N}$ es un subconjunto del conjunto $\mathbb{Z}$, es decir, que todo número natural es un número entero.

[4] Con esta notación indicamos que cualquier número entero es un número entero positivo, es decir, un número natural, o bien es un número entero negativo o bien es cero. En efecto, $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ y $\mathbb{Z}^- = \{-1, -2, -3, ...\}$ y, por tanto, $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+$, siendo $\cup$ la operación entre conjuntos que llamamos unión.

[5] Recuerda que el conjunto de los números racionales se simboliza por $\mathbb{Q}$ y que

$$\mathbb{Q} = \{\frac{n}{m} : n, m \in \mathbb{Z} \text{ y } m \neq 0\}$$

indicando con esta notación que $\mathbb{Q}$ es un conjunto cuyos elementos son, por ejemplo, $-2, -\frac{1}{3}$ o $\frac{3}{2}$.

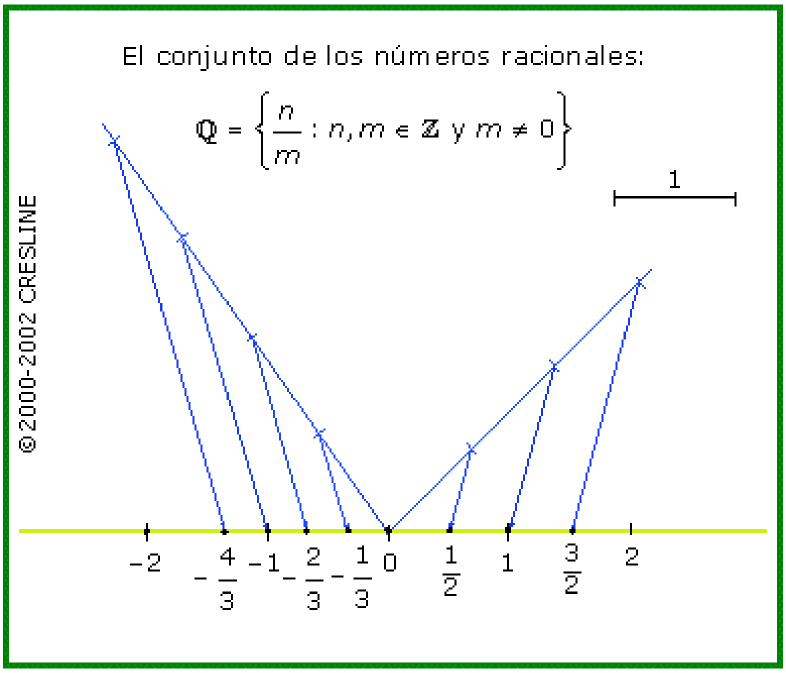


Figura 3

Como habrás observado en seguida, al representar estos números hemos tenido que señalar los puntos de la recta que se corresponde con las fracciones; los puntos que se corresponden con los números enteros[6] ya estaban señalados. Por esta razón, tenemos que

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

Es claro que también tenemos en este caso que

$$\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}^+$$

es decir, cualquier número racional es un número racional positivo o bien negativo o bien es cero. Llevados a este punto, es natural hacerse ahora la siguiente pregunta: una vez representados todos los números racionales sobre la recta, ¿quedan agujeros sobre ella?, es decir, ¿hay puntos de la recta que no se corresponden con ningún número considerado hasta ahora? Para responder a esta cuestión, haremos la siguiente construcción con regla, escuadra y compás. En la figura 4 hemos construido un cuadrado de lado 1 mediante regla y escuadra.

[6]Fracciones equivalentes de la forma $\frac{n}{1}$ con $n \in \mathbb{Z}$

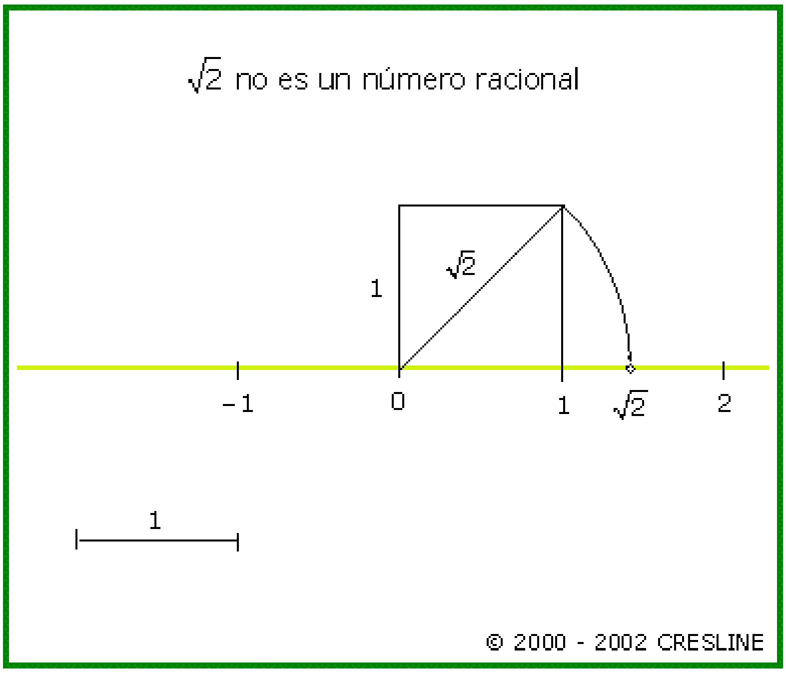


Figura 4

Por el teorema de Pitágoras[7], la diagonal de este cuadrado mide $\sqrt{2}$. Ahora, mediante el compás, hemos señalado $\sqrt{2}$ sobre la recta. ¿Es $\sqrt{2}$ un número racional? Para que lo fuera, debería poderse escribir como una fracción

$$\sqrt{2} = \frac{n}{m} \tag{1}$$

donde $n, m \in \mathbb{Z}$. Supongamos que así fuera y veamos que esto conduce a una contradicción[8]. Podemos también suponer que la fracción es irreducible, pues, de lo contrario trataríamos de simplificarla hasta convertirla en otra de equivalente irreducible. Entonces, los números enteros n y m son primos entre sí y, además, m no puede ser 1 ya que, si lo fuera, $\sqrt{2}$ sería un número entero y la experiencia realizada nos enseña que $\sqrt{2}$ es mayor que 1 y menor que 2. Por tanto, se cumplirá (1) si el cuadrado del número $\frac{n}{m}$ es 2, es decir,

$$\left(\frac{n}{m}\right)^2 = \frac{n^2}{m^2} = 2$$

pero esto no es posible ya que los números enteros n^2 y m^2, por ser cuadrados, tienen descomposiciones en factores primos donde todos los factores están elevados al cuadrado y, además, al haber supuesto que n y m son primos entre sí, no tienen ningún factor en común. Por lo tanto, la fracción $\frac{n^2}{m^2}$ también es irreducible y no puede simplificarse y ser igual a 2.

En definitiva, tenemos una conclusión clara: $\sqrt{2}$ no es ningún número racional y, por tanto, al representar todos los números racionales sobre la recta, ésta queda con agujeros, uno de los cuales es $\sqrt{2}$. El teorema de Pitágoras permite situar sobre la recta todas las longitudes con $\sqrt{}$; por ejemplo, en la figura 5 hemos situado $\sqrt{3}$ a partir de $\sqrt{2}$,

[7] Recuerda que el teorema de Pitágoras afirma que un triángulo es rectángulo si y sólo si se cumple que

$$h^2 = c_1^2 + c_2^2$$

en donde se indica por h el lado de mayor longitud y por c_1, c_2 los otros dos lados.

[8] Queremos demostrar que $\sqrt{2}$ no es un número racional y para ello utilizaremos el método de demostración llamado "demostración por reducción al absurdo": si con la hipótesis y la negación de la conclusión, mediante razonamientos correctos se llega a una contradicción, necesariamente la conclusión es verdadera.

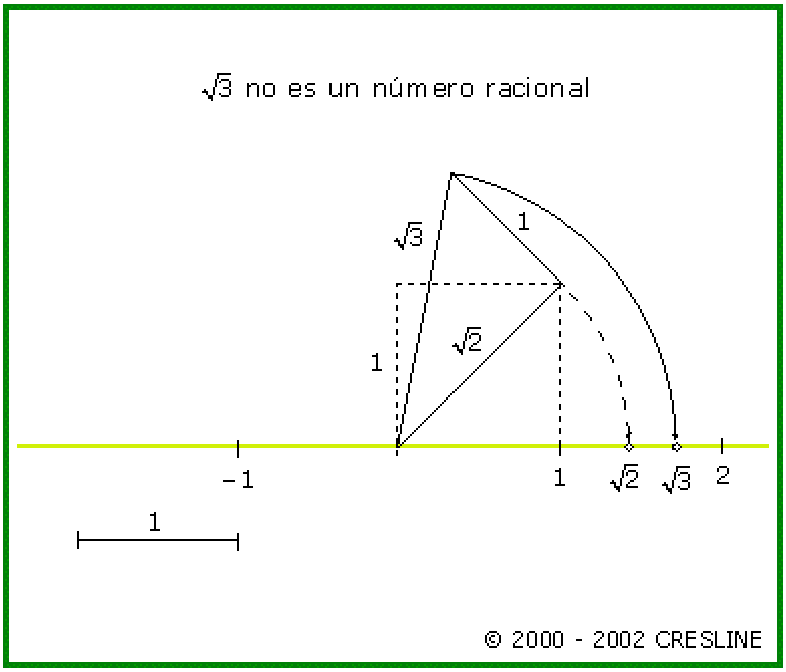


Figura 5

y del mismo modo se sitúan $\sqrt{5}, \sqrt{6}, ...$ El hecho de que sea posible dibujar sobre una recta longitudes que no estén representadas por números racionales sugiere la existencia de "nuevos"números. A estos números que no son números racionales los llamaremos **números irracionales**.
Se nos plantea en seguida la siguiente pregunta: ¿qué clase de números son los números irracionales? La respuesta a esta cuestión la encontraremos en el siguiente apartado.

1.2. Expresión decimal de los números irracionales

El número irracional $\sqrt{2}$ que hemos descubierto en el apartado anterior puede situarse sobre la recta haciendo uso de la regla y el compás, como hemos visto en la figura 4, pero ¿qué clase de número es? Será un número que, elevado al cuadrado, sea 2. Por construcción, sabemos que $\sqrt{2}$ está entre 1 y 2. Sigamos probando valores de $\sqrt{2}$, por tanteo, usando una calculadora para hallar $1{,}1^2, 1{,}2^2$, etc. (por el momento, no vale usar la tecla $\sqrt{}$). Después de varias pruebas, obtendremos los siguientes resultados:

1. $\sqrt{2}$ está comprendido entre 1,4 y 1,5 ya que $1{,}4^2 = 1{,}96$ y $1{,}5^2 = 2{,}25$
2. $\sqrt{2}$ está comprendido entre 1,41 y 1,42 ya que $1{,}41^2 = 1{,}9881$ y $1{,}42^2 = 2{,}0164$
3. $\sqrt{2}$ está comprendido entre 1,414 y 1,415 ya que $1{,}414^2 = 1{,}999396$ y $1{,}415^2 = 2{,}002225$

Aún no hemos hallado un número decimal cuyo cuadrado sea 2, pero hemos mejorado el resultado que habíamos obtenido por construcción. Este método permitirá alcanzar la precisión que uno quiera con solo repetir este proceso tantas veces como sea necesario. Naturalmente, la calculadora tiene la tecla $\sqrt{}$ para calcular raíces. Usándola, obtendrás un resultado como el siguiente (depende de cuántas cifras sea capaz de manejar tu calculadora)

$$\sqrt{2} = 1{,}414213562$$

pero, como puedes imaginar en seguida, este resultado no es exacto, porque si lo fuera, entonces $\sqrt{2}$ sería un número racional y esto no es posible como se ha visto en el apartado anterior. Además, por la misma razón, $\sqrt{2}$ tampoco es un número decimal periódico[9]. Por consiguiente, sólo podemos escribir

$$\sqrt{2} = 1{,}41421356...$$

[9] Recuerda que todo número decimal exacto o periódico admite una fracción generatriz que lo representa y, por tanto, es un número racional.

y del mismo modo, ocurre que

$$\sqrt{3} = 1{,}732050808...$$

y, en general, todos los números que hemos denominado irracionales tienen una expresión decimal que posee un número infinito de cifras decimales no periódicas. Esta caracterización de los números irracionales conduce a la definición de número real como veremos en el siguiente apartado.

1.3. El conjunto de los números reales

De los dos apartados anteriores podemos concluir afirmando que no todos los números decimales que necesitamos para resolver problemas elementales de medida de longitudes son finitos o periódicos, es decir, no son números racionales. Esta insuficiencia del conjunto $\mathbb{Q}$ conduce a la necesidad de ampliarlo con los números decimales infinitos no periódicos, es decir, con los números irracionales. De este modo, formamos un nuevo conjunto de números que denominaremos **conjunto de los números reales** y que simbolizaremos por $\mathbb{R}$. Por tanto, un número real será un número decimal exacto, periódico o no. Es claro que si simbolizamos el conjunto de los números irracionales por $\mathbb{I}$, entonces

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

y, por tanto, es evidente que por construcción se cumple

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

El conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ contiene, además de 0, los números decimales positivos (situados a su derecha en la recta) y los negativos (situados a su izquierda en la recta). Si simbolizamos por $\mathbb{R}^+$ el conjunto de los números decimales positivos y por $\mathbb{R}^-$, el de los negativos, obtenemos

$$\mathbb{R} = \mathbb{R}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^+$$

siendo los tres conjuntos disjuntos entre sí[10]. Como resumen, en la figura 6 mostramos la clasificación de los números reales.

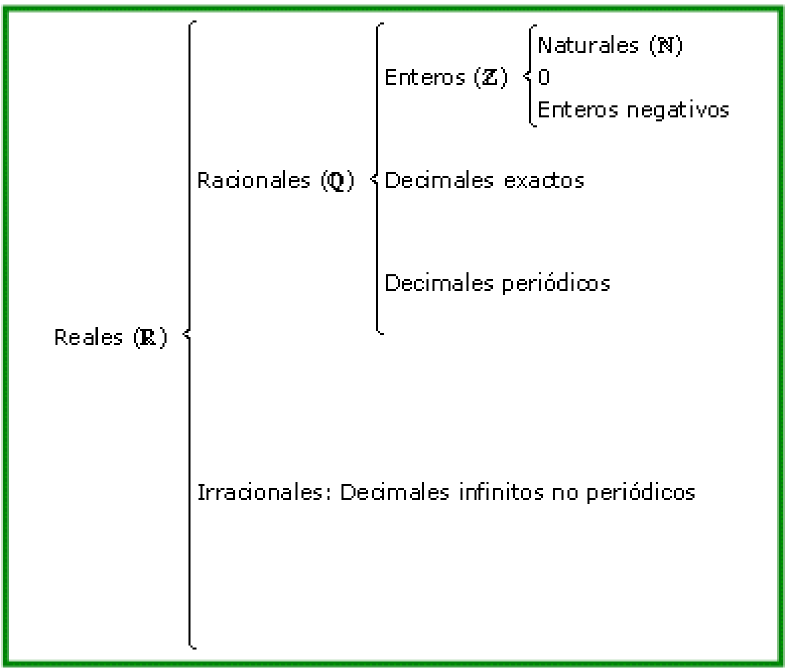


Figura 6

Finalmente, nos queda por resolver una última cuestión muy importante. Situados todos los números reales sobre la recta considerada en el apartado 1, ¿queda esta recta sin ningún agujero? La respuesta a esta pregunta es afirmativa como veremos en el siguiente apartado.

[10] Recuerda que dos conjuntos A y B se llaman disjuntos si su intersección es el conjunto vacío $A \cap B = \varnothing$.

1.4. La recta real

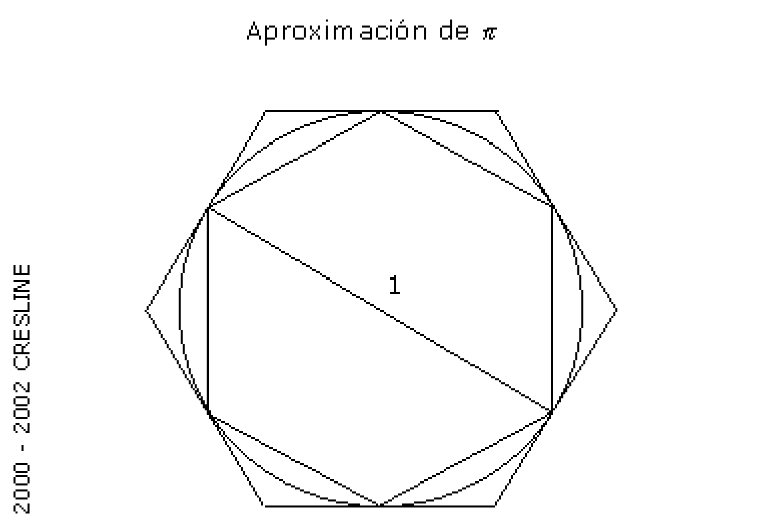
El problema que nos planteamos ahora es el siguiente: dado un número real, ¿podemos identificarlo como un único punto de la recta considerada en el apartado 1? y, recíprocamente, dado un punto de la recta, ¿podemos identificarlo como un único número real? Como veremos a continuación, la respuesta es sí a ambas preguntas. De este modo, se establece una correspondencia biyectiva entre los números reales y los puntos de la recta y, como consecuencia, los números reales llenan totalmente la recta. De ahí viene el nombre de recta real a la recta como representación gráfica del conjunto de los números reales.

1.4.1. Todo número real es un punto de la recta

Si el número real es un número racional ya sabemos que podemos situarlo como un único punto de la recta; hemos representado algunos números racionales en la figura 3. Si el número es irracional, también hemos visto cómo se sitúa sobre la recta en los casos más sencillos como $\sqrt{2}$ o $\sqrt{3}$; hemos situado estos puntos en las figuras 4 y 5, respectivamente. Ahora bien, hay otros números irracionales que no admiten construcciones geométricas tan simples (usando regla y compás). Por ejemplo, la longitud de una circunferencia[11] de diámetro 1 es el número pi

$$\pi = 3{,}141592654...$$

que también es un número irracional. Podemos aproximar π de la siguiente manera: en la circunferencia de diámetro 1 se inscribe y circunscribe un exágono regular. La longitud de esta circunferencia será menor que el perímetro[12] del exágono circunscrito y mayor que el perímetro del exágono inscrito. En la misma circunferencia se van inscribiendo y circunscribiendo sucesivamente polígonos regulares con doble número de lados que el polígono anterior y se van calculando los perímetros respectivos. De este modo, se puede aproximar π tanto como se quiera. En la figura 7 hemos anotado algunas aproximaciones sucesivas de π.



Número de lados	Perímetro del polígono inscrito	Perímetro del polígono circunscrito
6	3	3.464101
12	3.105828	3.215390
24	3.132628	3.159659
48	3.139350	3.146086
96	3.141032	3.142714
192	3.141452	3.141873
384	3.141557	3.141662
768	3.141583	3.141610
1536	3.141590	3.141597

[11] Recuerda que la longitud L de una circunferencia de radio r viene dada por la fórmula $L = 2\pi r$.
[12] Recuerda que se llama perímetro de un polígono a la suma de todos sus lados.

Figura 7

En general, pues, el problema se reduce a situar sobre la recta un número decimal infinito no periódico. Para ver cómo se hace esto, utilizaremos el número irracional $\sqrt{2}$ que hemos construido mediante regla y compás en el apartado 1. Mediante calculadora, obtenemos su expresión decimal

$$\sqrt{2} = 1{,}41421356...$$

A partir del número decimal podemos construir la siguiente sucesión de números racionales

$$1, 1{,}4, 1{,}41, 1{,}414, 1{,}4142, 1{,}41421, ... \tag{2}$$

obtenidos tomando las primeras cifras decimales del número. Cada número de esta lista es menor que $\sqrt{2}$ y se dice que son las **aproximaciones sucesivas por defecto** de $\sqrt{2}$. Sumando ahora una unidad a la útima cifra decimal de los números que aparecen en (2), obtenemos

$$2, 1{,}5, 1{,}42, 1{,}415, 1{,}4143, 1{,}41422, ... \tag{3}$$

Todos estos números racionales son mayores que $\sqrt{2}$ y se dice que son las **aproximaciones sucesivas por exceso** de $\sqrt{2}$. Por tanto, el punto de la recta que debemos asignar a $\sqrt{2}$ ha de situarse un poco más a la derecha que los puntos correspondientes a los números racionales en (2) y un poco más a la izquierda que los correspondientes a (3). En la figura 8, hemos situado sobre la recta los números racionales de (2) y (3).

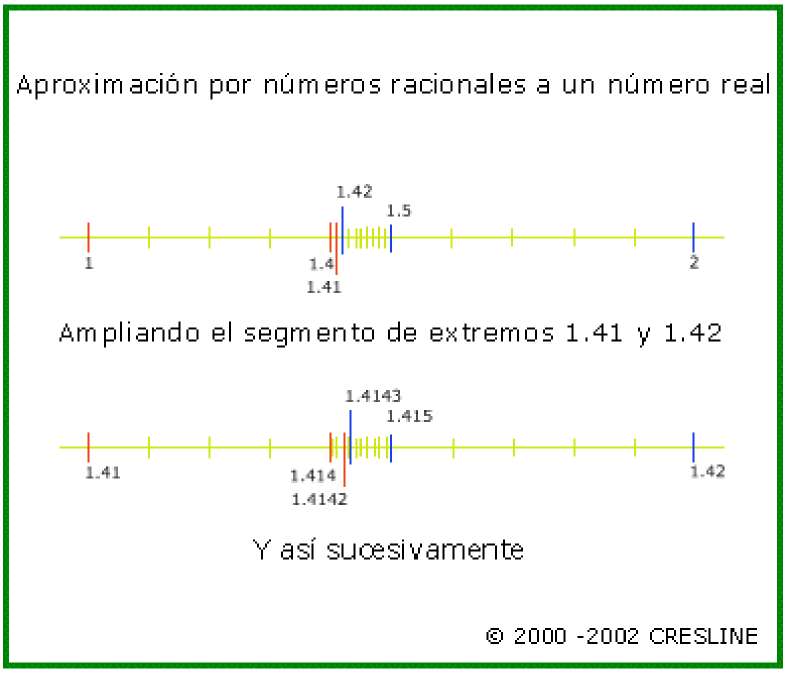


Figura 8

Si ahora consideramos los segmentos sobre la recta de extremos 1 y 2, 1,4 y 1,5, 1,41 y 1,42 , ... tenemos que sus longitudes son respectivamente 1, 0,1, 0,01, ... Los segmentos sobre la recta se llaman **intervalos** y se denotan colocando los extremos entre paréntesis cuadrados, es decir, los segmentos de recta considerados anteriormente se escriben así

$$[1, 2], [1{,}4, 1{,}5], [1{,}41, 1{,}42], ... \tag{4}$$

Hemos deibujado estos segmentos en la figura 9, y nos damos cuenta en seguida que cada intervalo está contenido en el anterior. Decimos entonces que son **intervalos encajados**.

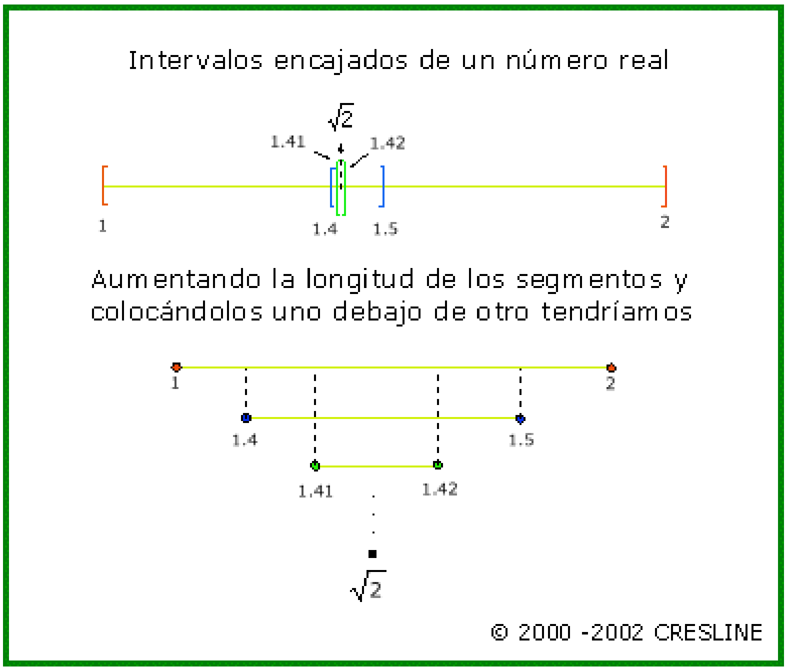


Figura 9

Ahora debemos asumir[13] un resultado teórico que se conoce como **propiedad de los intervalos encajados**[14]. Según esta propiedad, todos estos intervalos tienen un solo punto en común; de hecho hay infinitos, pues, hay infinitas cifras decimales en la expresión decimal de $\sqrt{2}$, y la longitud de cada uno de ellos es la décima parte del anterior. Como que, por construcción, todos los intervalos (4) contienen $\sqrt{2}$, este punto común corresponde a $\sqrt{2}$. Se dice entonces que la **sucesión de intervalos encajados** (4) **define** $\sqrt{2}$; aunque es imposible encontrar el punto correspondiente a $\sqrt{2}$, sin embargo, la propiedad de los intervalos encajados asegura su existencia sobre la recta. A partir de esta definición, se comprende por qué los números racionales y los irracionales están tan próximos unos de otros hasta el punto de que entre dos números reales cualesquiera existen infinitos racionales e infinitos irracionales.

1.4.2. Todo punto de la recta es un número real

Si en una recta se han fijado un origen y una unidad, todo punto P de esta recta se corresponde con un único número real. El proceso que hay que seguir para identificar P como un número real es inverso al seguido en el apartado anterior. En la figura 10 hemos situado un punto cualquiera P de la recta.

[13] Este resultado aunque es intuitivo, es una de las propiedades fundamentales que se deducen de la construcción axiomática de los números reales que se verá en estudios superiores de matemáticas.

[14] Según esta propiedad, en toda sucesión de intervalos encajados tales que su longitud se hace tan pequeña como se quiera existe un único punto perteneciente a todos los intervalos de la sucesión.

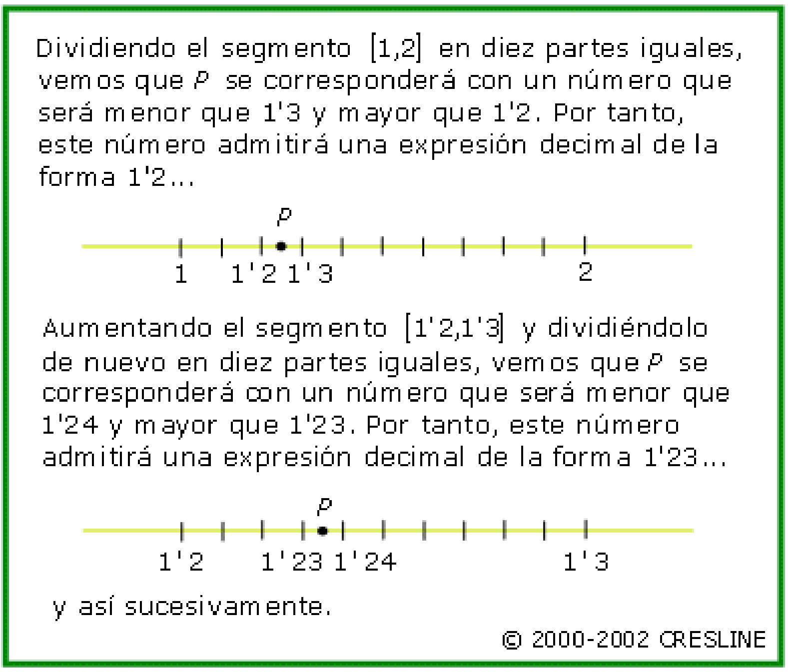


Figura 10

En teoría, el proceso indicado en la figura anterior se puede repetir indefinidamente. Además, como todos los intervalos que vamos construyendo son encajados y la longitud de cada uno de ellos es la décima parte del anterior, por la propiedad de los intervalos encajados, existirá un número real y sólo uno común a todos ellos y éste número real se corresponderá por construcción al punto P. Sin embargo, debemos hacer una importante observación. La posible expresión decimal del número real correspondiente a P será única excepto cuando P coincida con alguna de las subdivisiones sucesivas. En efecto, si en un paso del proceso de subdivisión, P se identifica con un número de la subdivisión realizada en este paso, en el paso siguiente tenemos dos posibles elecciones: una consiste en elegir el subintervalo a la izquierda de P, y la otra, consiste en elegir el subintervalo a la derecha de P. En la figura 11 se muestra con más de detalle al tratar un ejemplo.

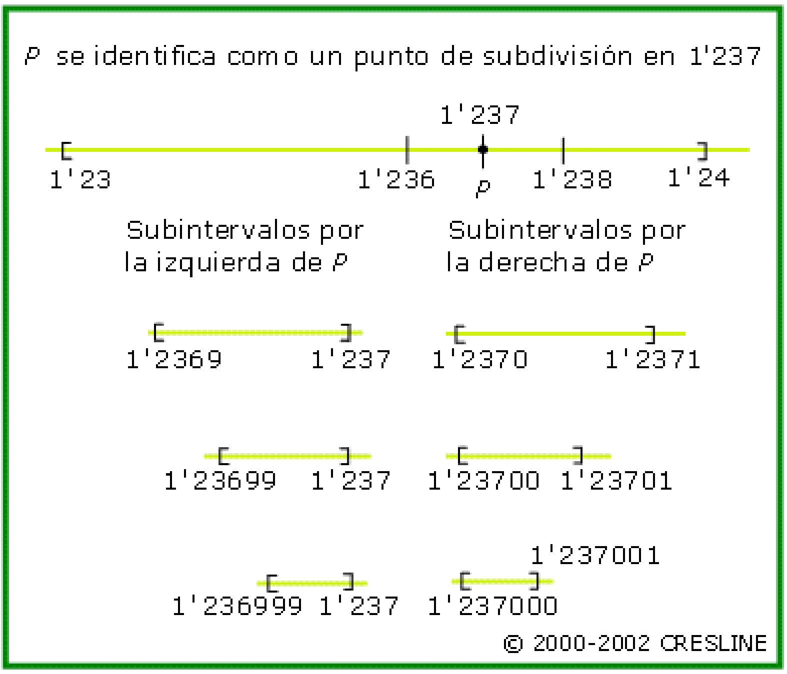


Figura 11

Nos damos cuenta en seguida que la expresión decimal del número real correspondiente a P por la izquierda será de la forma 1,236999..., mientras que su expresión decimal por la derecha será

1,237000.... Sabemos que cada una de estas colecciones de intervalos encajados ha de tener un único número real común y podemos observar que en cada colección el número decimal exacto 1,237, correspondiente al punto P, pertenece a todos los intervalos. Por tanto, las dos sucesiones de intervalos encajados definen el mismo número 1,237 y éste es el que corresponde al punto P. Como consecuencia, 1,236999... y 1,237000... representan el mismo número real (racional) 1,237.
En resumen, todo punto de la recta está representado por un número con (posiblemente) infinitas cifras decimales, pero identificando los decimales exactos con los decimales de período 9 y con los de período 0.
En esta recta, entre dos racionales existe siempre otro racional, entre dos irracionales existe siempre un racional tan próximo a él como se quiera (Esta idea procede de la forma en que se han definido los números irracionales a partir de los intervalos encajados de extremos racionales)

2. Operaciones con números reales

En esta sección veremos que todo el trabajo operativo con números reales debe hacerse con aproximaciones; para sumar y multiplicar dos números reales habrá que sumar y multiplicar sus aproximaciones. También pueden hacerse las operaciones geométricamente, utilizando las operaciones con segmentos. Admitiremos que las operaciones anteriores en $\mathbb{R}$ cumplen las mismas propiedades que en $\mathbb{Q}$. De este modo, el conjunto de los números reales tiene estructura de cuerpo. Como consecuencia, podremos aplicar todas las propiedades que se deducen de dicha estructura algebraica a $\mathbb{R}$; por ejemplo, podremos resolver ecuaciones como

$$2x + 3 = 4$$

de la siguiente manera

$$2x = 4 + (-3)$$

ya que la ecuación $x + a = b$ tiene la solución única $x = b + (-a)$; efectuando operaciones, tenemos

$$2x = 1$$

Entonces,

$$x = \frac{1}{2}$$

ya que la ecuación $a \cdot x = b$, con $a \neq 0$, tiene la solución única $x = \frac{1}{a} \cdot b$.

2.1. Aproximaciones

En la práctica, al trabajar con los números reales que son irracionales nos encontramos con el problema de saber cómo hay que escribirlos y operar con ellos. Al no poderlos escribir de forma exacta, ya que son números con infinitas cifras decimales, nos vemos obligados a trabajar con aproximaciones. Las aproximaciones decimales por defecto y por exceso de cada grado, utilizadas para identificar un número irracional sobre la recta real, nos dan un buen método de aproximación.

Cuadro de aproximaciones de π

Grado de aproximación	Por defecto	Por exceso
unidades	3	4
décimas	3.1	3.2
centésimas	3.14	3.15
milésimas	3.141	3.142
diezmilésimas	3.1415	3.1416
cienmilésimas	3.14159	3.14160
mil milésimas	3.141592	3.141593

Es claro que trabajar con una aproximación, en lugar de trabajar con el valor exacto, conlleva una cierta carga de error. Aunque aquí no trataremos el problema de los errores en los cálculos con números aproximados, en los resultados de las operaciones con números reales siempre precisaremos las cifras significativas que podemos considerar correctas; en el apartado siguiente lo veremos con algunos ejemplos.

2.2. Suma y producto de números reales

Como ya sabemos cómo se suman y multiplican dos números racionales (aunque dependerá de cómo estén representados los dos números, podremos hacerlo siempre de forma exacta utilizando fracciones), sólo hará falta tratar los dos casos siguientes: suma y producto de dos números irracionales, y suma y producto de dos números, uno racional y el otro irracional.

2.2.1. Suma

Para sumar dos números irracionales, al no poderlos escribir de forma exacta, nos vemos obligados a trabajar con sus aproximaciones. Por ejemplo, para sumar $\sqrt{2}$ y π, primero consideramos sus aproximaciones decimales por defecto y por exceso:

$$\sqrt{2} \quad \left\{ \begin{array}{llllll} 1 & 1{,}4 & 1{,}41 & 1{,}414 & 1{,}4142 & \cdots \\ 2 & 1{,}5 & 1{,}42 & 1{,}415 & 1{,}4143 & \cdots \end{array} \right.$$

y

$$\pi \quad \left\{ \begin{array}{llllll} 3 & 3{,}1 & 3{,}14 & 3{,}141 & 3{,}1415 & \cdots \\ 4 & 3{,}2 & 3{,}15 & 3{,}142 & 3{,}1416 & \cdots \end{array} \right.$$

Después, sumamos cada aproximación por defecto (resp. por exceso) de $\sqrt{2}$ con la correspondiente aproximación por defecto (resp. por exceso) del mismo grado de π, obteniendo las siguientes aproximaciones de $\sqrt{2}+\pi$:

$$\sqrt{2}+\pi \quad \left\{ \begin{array}{llllll} 4 & 4{,}5 & 4{,}55 & 4{,}555 & 4{,}5557 & \cdots \\ 6 & 4{,}7 & 4{,}57 & 4{,}557 & 5{,}5559 & \cdots \end{array} \right.$$

Por último, a partir de estas aproximaciones, determinanos cuántas cifras podemos considerar como correctas. En este caso, podemos asegurar cuatro cifras correctas en el resultado

$$\sqrt{2}+\pi = 4{,}555...$$

Es claro que, procediendo de esta manera, podemos encontrar tantas cifras decimales exactas como queramos, bastará con aumentar la precisión de los sumandos (ampliar el número de aproximaciones decimales).

En general, si queremos obtener la suma (o la resta) con un cierto grado n de aproximación, las aproximaciones de los sumandos deberán tomarse con aproximación de grado $n+1$; por ejemplo, si queremos calcular $\sqrt{2}+\pi$ con aproximación hasta las milésimas, deben tomarse $\sqrt{2}$ y π con aproximación hasta las diezmilésimas, es decir, $\sqrt{2} = 1{,}4142...$ y $\pi = 3{,}1415...$ y, de este modo, obtenemos

$$\sqrt{2}+\pi = 4{,}555\overset{?}{7}... = 4{,}555...$$

asegurando la precisión buscada.
Para sumar dos números, uno racional y el otro irracional, se procede del mismo modo. Por ejemplo, para sumar $7/6$ y $\sqrt{2}$, primero daremos la expresión decimal del número racional

$$\frac{7}{6} = 1{,}1666...$$

y después consideraremos sus aproximaciones decimales por defecto y por exceso

$$\tfrac{7}{6} \quad \begin{cases} 1 & 1{,}1 & 1{,}16 & 1{,}166 & 1{,}1666 & \cdots \\ 2 & 1{,}2 & 1{,}17 & 1{,}167 & 1{,}1667 & \cdots \end{cases}$$

Del mismo modo, tenemos

$$\sqrt{2} \quad \begin{cases} 1 & 1{,}4 & 1{,}41 & 1{,}414 & 1{,}4142 & \cdots \\ 2 & 1{,}5 & 1{,}42 & 1{,}415 & 1{,}4143 & \cdots \end{cases}$$

Por tanto,

$$\tfrac{7}{6}+\sqrt{2} \quad \begin{cases} 2 & 2{,}5 & 2{,}57 & 2{,}580 & 2{,}5808 & \cdots \\ 4 & 2{,}7 & 2{,}59 & 2{,}582 & 2{,}5810 & \cdots \end{cases}$$

y, en consecuencia,

$$\frac{7}{6}+\sqrt{2} = 2{,}58...$$

es decir, sólo podemos asegurar dos cifras decimales exactas en el resultado.

2.2.2. Producto

Del mismo modo a como hemos hecho la suma, se hace el producto. Por ejemplo, para multiplicar $\sqrt{2}$ y π consideramos sus respectivas aproximaciones decimales por defecto y por exceso

$$\sqrt{2} \quad \begin{cases} 1 & 1{,}4 & 1{,}41 & 1{,}414 & 1{,}4142 & \cdots \\ 2 & 1{,}5 & 1{,}42 & 1{,}415 & 1{,}4143 & \cdots \end{cases}$$

y

$$\pi \quad \begin{cases} 3 & 3{,}1 & 3{,}14 & 3{,}141 & 3{,}1415 & \cdots \\ 4 & 3{,}2 & 3{,}15 & 3{,}142 & 3{,}1416 & \cdots \end{cases}$$

Luego, multiplicamos cada aproximación por defecto (resp. por exceso) de $\sqrt{2}$ por la correspondiente aproximación por defecto (resp. por exceso) del mismo grado de π, obteniendo

$$\sqrt{2}\cdot\pi \quad \begin{cases} 3 & 4{,}34 & 4{,}4274 & 4{,}441374 & 4{,}44270930 & \cdots \\ 8 & 4{,}80 & 4{,}4730 & 4{,}445930 & 4{,}44316488 & \cdots \end{cases}$$

Finalmente, a partir de estas aproximaciones, determinanos cuántas cifras podemos considerar como correctas. En este caso, podemos asegurar tres cifras correctas en el resultado

$$\sqrt{2}\cdot\pi = 4{,}44...$$

Es claro que, procediendo de esta manera, podemos encontrar tantas cifras decimales exactas como queramos; bastará con aumentar la precisión de los factores (ampliar el número de aproximaciones decimales).
En general, si queremos obtener el producto (o el cociente) con n cifras significativas[15], deberemos tomar una cifra significativa más para los factores; por ejemplo, al encontrarse $\sqrt{2}\cdot\pi$ entre 3 y 8, para obtener un resultado con aproximación hasta las centésimas, necesitamos garantizar que tres de sus cifras sean significativas, y, por tanto, tendremos que tomar cada factor con cuatro cifras significativas, es decir, $\sqrt{2} = 1{,}4142...$ y $\pi = 3{,}1415...$ y, de este modo, obtenemos

$$\sqrt{2}\cdot\pi = 4{,}44\overbrace{27093}^{?}... = 4{,}44...$$

[15] Recuerda que si b es una aproximación de un número real a, las cifras significativas de b son aquellas que coinciden con las de a, excepto los ceros cuya única finalidad sea situar la coma decimal

2.2.3. Operaciones con segmentos

Para sumar (o restar) dos números reales a y b, el punto que corresponde al número $a+b$ se obtiene trasladando el punto correspondiente al número a una distancia igual a la longitud del segmento correpondiente al número b hacia la derecha, si b es positivo, y hacia la izquierda, si b es negativo; en la figura 12, supondiendo que a y b son positivos, se muestra la suma $a+b$ y la resta $a-b=a+(-b)$.

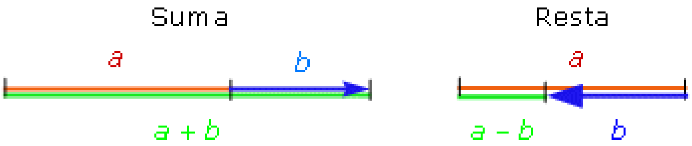
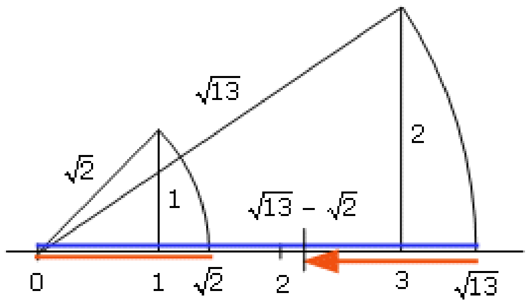


Figura 12

Por ejemplo, en la siguiente figura, utilizando procedimientos geométricos, representamos sobre la recta real $\sqrt{13}-\sqrt{2}$.



Para obtener gráficamente el producto de dos números reales a y b, aplicaremos el teorema de Thales[16]: supongamos que hemos situado sobre la recta real los números a y b, tracemos una recta auxiliar por el punto O correspondiente al número 0 y, mediante el compás, construyamos sobre ella y a partir de O un segmento de longitud b, obtendremos de este modo un punto P. Unimos ahora con una recta el punto P con el punto U correspondiente al número 1. Mediante regla y escuadra, trazamos por el punto correspondiente a b una recta paralela a la recta anterior que cortará a la recta auxiliar en un punto Q. Mediante compás, construimos sobre la recta real un segmento de longitud OQ, la longitud de este segmento será el producto $a \cdot b$; en la figura 13 se muestra el método seguido para obtener gráficamente $a \cdot b$.

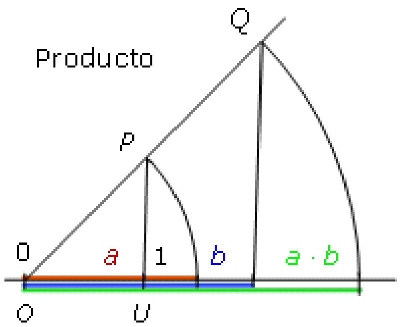


Figura 13

Observa que, por el teorema de Thales,

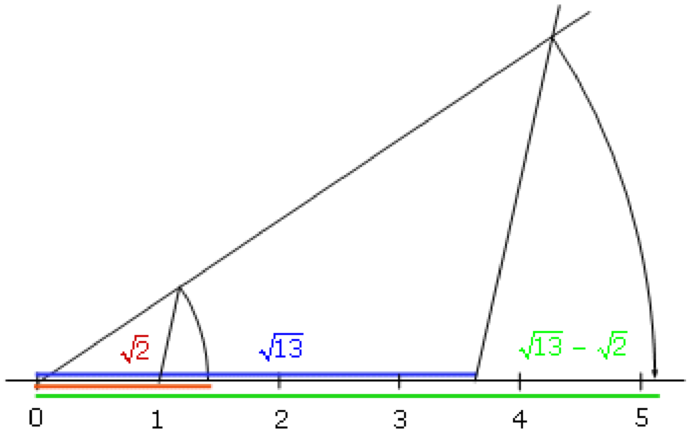
$$\frac{\overline{OP}}{\overline{OU}} = \frac{\overline{OQ}}{b}$$

pero $\overline{OP}=a$ y $\overline{OU}=1$, luego

$$\overline{OQ} = a \cdot b$$

[16] Recuerda que el teorema de Thales dice que los segmentos determinados sobre dos rectas concurrentes cortadas por varias rectas paralelas son proporcionales.

Por ejemplo, en la siguiente figura, utilizando procedimientos geométricos, representamos sobre la recta real $\sqrt{13} \cdot \sqrt{2}$.



Para obtener gráficamente el inverso de un número real a, con $a \neq 0$, podemos aplicar la misma construcción anterior pero tomando ahora $b = 1$; en la figura 14 podrás ver los pasos que hay que hacer para obtener $1/a$.

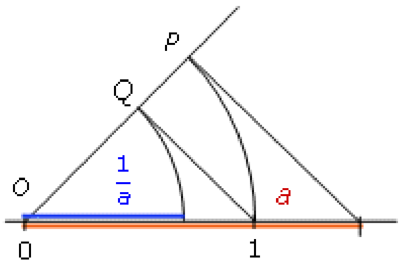


Figura 14

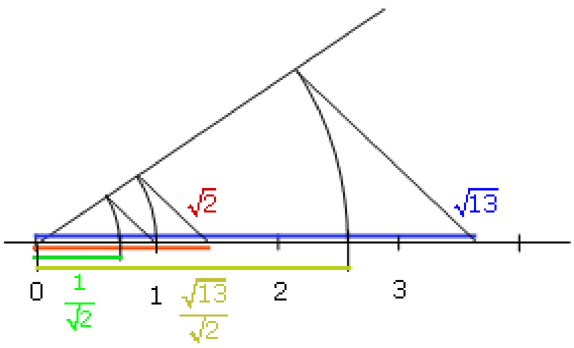
Observa que, por el teorema de Thales,

$$\frac{\overline{OP}}{a} = \frac{\overline{OQ}}{1}$$

pero $\overline{OP} = 1$, luego

$$\overline{OQ} = \frac{1}{a}$$

Finalmente, para obtener gráficamente el cociente $\frac{a}{b}$ de dos números reales a y b, con $b \neq 0$, primero se representará el inverso de b y, después, se obtendrá el producto $a \cdot \frac{1}{b}$. Por ejemplo, en la siguiente figura, utilizando procedimientos geométricos, representamos sobre la recta real $\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{2}}$.



2.3. El cuerpo de los números reales

Se demuestra (a este nivel no disponemos aún de las herramientas suficientes para probar estos resultados) que las operaciones de suma y producto de números reales cumplen las mismas propiedades que la suma y el producto de números racionales.
La operación suma de números reales cumple las siguientes propiedades:

1. Ley de composición interna: $a + b \in \mathbb{R}$, para todo $a, b \in \mathbb{R}$
2. Asociativa: $a + (b + c) = (a + b) + c$, para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$
3. Elemento neutro: existe $0 \in \mathbb{R}$ tal que $a + 0 = 0 + a = a$, para todo $a \in \mathbb{R}$.
4. Conmutativa: $a + b = b + a$, para todo $a, b \in \mathbb{R}$
5. Elemento simétrico: para cada $a \in \mathbb{R}$ existe $-a \in \mathbb{R}$, llamado **opuesto** de a, tal que $a+(-a) = (-a) + a = 0$

La operación producto de números reales cumple las siguientes propiedades:

6. Ley de composición interna: $a \cdot b \in \mathbb{R}$, para todo $a, b \in \mathbb{R}$
7. Asociativa: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$, para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$
8. Elemento neutro: existe $1 \in \mathbb{R}$ tal que $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$, para todo $a \in \mathbb{R}$
9. Conmutativa: $a \cdot b = b \cdot a$, para todo $a, b \in \mathbb{R}$
10. Elemento simétrico: para cada $a \in R$ con $a \neq 0$ existe $1/a \in \mathbb{R}$, llamado **inverso** de a, tal que $a \cdot (1/a) = (1/a) \cdot a = 1$

Finalmente, las dos operaciones cumplen la propiedad

11. Distributiva del producto respecto de la suma:

$$\begin{array}{c} a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \\ (b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a \end{array}$$

para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$

Por el hecho de satisfacer estas 11 propiedades se dice que el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales es un **cuerpo** o que tiene la estructura de cuerpo. Por esta razón, se dice que $\mathbb{R}$ es el **cuerpo de los números reales**.
Es claro que para restar y dividir dos números reales procederemos en la forma habitual, es decir,

$$a - b = a + (-b)$$

y

$$a : b = a \cdot \frac{1}{b}$$

siempre que $b \neq 0$. Las reglas de cálculo en $\mathbb{R}$, que se deducen por tener estuctura de cuerpo, son las mismas que las del conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$, que también tiene estructura de cuerpo. A continuación, consideramos algunas de ellas por su interés en la práctica: si $a, b, c \in \mathbb{R}$, entonces se cumplen las siguientes propiedades

1. Si $a + b = b$, entonces $a = 0$

En efecto,

$$\begin{array}{rcl} a + b &=& b \\ (a + b) + (-b) &=& b + (-b) \\ a + (b + (-b)) &=& b + (-b) \\ a + 0 &=& 0 \\ a &=& 0 \end{array}$$

2. Si $a \cdot b = b$ y $b \neq 0$, entonces $a = 1$

En efecto,

$$\begin{aligned} a \cdot b &= b \\ (a \cdot b) \cdot \frac{1}{b} &= b \cdot \frac{1}{b} \\ a \cdot \left(b \cdot \frac{1}{b}\right) &= b \cdot \frac{1}{b} \\ a \cdot 1 &= 1 \\ a &= 1 \end{aligned}$$

3. Si $a + b = 0$, entonces $a = -b$

En efecto,

$$\begin{aligned} a + b &= 0 \\ (a + b) + (-b) &= 0 + (-b) \\ a + (b + (-b)) &= -b \\ a + 0 &= -b \\ a &= -b \end{aligned}$$

4. Si $a \cdot b = 1$ y $b \neq 0$, entonces $a = \frac{1}{b}$

En efecto,

$$\begin{aligned} a \cdot b &= 1 \\ (a \cdot b) \cdot \frac{1}{b} &= 1 \cdot \frac{1}{b} \\ a \cdot \left(b \cdot \frac{1}{b}\right) &= \frac{1}{b} \\ a \cdot 1 &= \frac{1}{b} \\ a &= \frac{1}{b} \end{aligned}$$

5. Si $a + c = b + c$, entonces $a = b$

En efecto,

$$\begin{aligned} a + c &= b + c \\ (a + c) + (-c) &= (b + c) + (-c) \\ a + (c + (-c)) &= b + (c + (-c)) \\ a + 0 &= b + 0 \\ a &= b \end{aligned}$$

6. Si $a \cdot c = b \cdot c$ y $c \neq 0$, entonces $a = b$

En efecto,

$$\begin{aligned} a \cdot c &= b \cdot c \\ (a \cdot c) \cdot \frac{1}{c} &= (b \cdot c) \cdot \frac{1}{c}\text{ç} \\ a \cdot \left(c \cdot \frac{1}{c}\right) &= b \cdot \left(c \cdot \frac{1}{c}\right) \\ a \cdot 1 &= b \cdot 1 \\ a &= b \end{aligned}$$

7. $a \cdot 0 = 0$

En efecto,

$$\begin{aligned} a + (-a) &= 0 \\ a \cdot (1 + (-1)) &= 0 \\ a \cdot 0 &= 0 \end{aligned}$$

8. Si $a \cdot b = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$

En efecto, si $a \neq 0$ entonces

$$\begin{aligned} a \cdot b &= 0 \\ a \cdot b &= a \cdot 0 \\ b \cdot a &= 0 \cdot a \end{aligned}$$

de donde $b = 0$ por el apartado anterior. Análogamente, si $b \neq 0$ entonces

$$\begin{aligned} a \cdot b &= 0 \\ a \cdot b &= 0 \cdot b \end{aligned}$$

de donde $a = 0$ por el apartado anterior.

9. $a \cdot (-b) = (-a) \cdot b = -(a \cdot b)$

En efecto,

$$\begin{aligned} a \cdot b + a \cdot (-b) &= a \cdot (b + (-b)) \\ &= a \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

de donde $a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$. Análogamente,

$$\begin{aligned} a \cdot b + (-a) \cdot b &= (a + (-a)) \cdot b \\ &= 0 \cdot b \\ &= b \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

10. $(-1) \cdot a = -a$

En efecto,

$$\begin{aligned} a + (-1) \cdot a &= (1 + (-1)) \cdot a \\ &= 0 \cdot a \\ &= a \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por tanto, $(-1) \cdot a = -a$, ya que el opuesto de un número es único.

11. $-(-a) = a$

En efecto,

$$(-a) + a = 0$$

luego, $-(-a) = a$ ya que el opuesto de un número es único.

12. $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$

En efecto,

$$\begin{aligned} (-a) \cdot (-b) &= [(-1) \cdot a] \cdot [(-1) \cdot b] \\ &= [a \cdot (-1)] \cdot [(-1) \cdot b] \\ &= a \cdot [(-1) \cdot (-1)] \cdot b \\ &= a \cdot [-(-1)] \cdot b \\ &= a \cdot 1 \cdot b \\ &= a \cdot b \end{aligned}$$

13. $(-a)^n = a^n$, si n es un número natural par mayor que 2

En efecto,

$$\begin{aligned}
(-a)^n &= [(-1)\cdot a]^n \\
&= [(-1)\cdot a]\cdot \overset{n \text{ veces}}{\cdots} \cdot [(-1)\cdot a] \\
&= \Big[(-1)\cdot \overset{n \text{ veces}}{\cdots} \cdot (-1)\Big] \cdot \Big(a\cdot \overset{n \text{ veces}}{\cdots} \cdot a\Big) \\
&= 1\cdot a^n \\
&= a^n
\end{aligned}$$

pues, n es par y $(-1)\cdot(-1) = 1\cdot 1 = 1$.

14. $(-a)^n = -a^n$, si n es un número natural impar mayor que 1

En efecto,

$$\begin{aligned}
(-a)^n &= (-a)^{n-1}\cdot(-a) \\
&= a^{n-1}\cdot(-a) \\
&= -(a^{n-1}\cdot a) \\
&= -a^n
\end{aligned}$$

pues $n-1$ es par y por el apartado anterior $(-a)^{n-1} = a^{n-1}$.

15. La ecuación $x + a = b$, tiene la solución unica $x = b + (-a)$

En efecto,

$$\begin{aligned}
(b + (-a)) + a &= b + ((-a) + a) \\
&= b + 0 \\
&= b
\end{aligned}$$

luego $x = b + (-a)$ es una solución de la ecuación. Supongamos ahora que y fuera otra solución de la ecuación. Entonces

$$\begin{aligned}
y + a &= b \\
(y + a) + (-a) &= b + (-a) \\
y + (a + (-a)) &= x \\
y + 0 &= x \\
y &= x
\end{aligned}$$

lo que indica que la solución $x = b + (-a)$ es única.

16. La ecuación $a\cdot x = b$, con $a \neq 0$, tiene la solución única $x = \frac{1}{a}\cdot b$

En efecto,

$$\begin{aligned}
a\cdot\left(\frac{1}{a}\cdot b\right) &= \left(a\cdot\frac{1}{a}\right)\cdot b \\
&= 1\cdot b \\
&= b
\end{aligned}$$

luego $x = \frac{1}{a}\cdot b$ es una solución de la ecuación. Supongamos ahora que y fuera otra solución de la ecuación. Entonces

$$\begin{aligned}
a\cdot y &= b \\
\frac{1}{a}\cdot(a\cdot y) &= \frac{1}{a}\cdot b \\
\left(\frac{1}{a}\cdot a\right)\cdot y &= x \\
1\cdot y &= x \\
y &= x
\end{aligned}$$

lo que indica que la solución $x = \frac{1}{a}\cdot b$ es única.

17. $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ para todo $a, b \in \mathbb{R}$

En efecto, por ejemplo,

$$\begin{aligned} (a+b)^2 &= (a+b)\cdot(a+b) \\ &= ((a+b)\cdot a) + ((a+b)\cdot b) \\ &= (a\cdot a + b\cdot a) + (a\cdot b + b\cdot b) \\ &= a^2 + b\cdot a + a\cdot b + b^2 \\ &= a^2 + a\cdot b + a\cdot b + b^2 \\ &= a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2 \end{aligned}$$

De forma análoga se prueba la otra igualdad.

18. $(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$

En efecto,

$$\begin{aligned} (a+b)\cdot(a-b) &= (a\cdot(a-b)) + (b\cdot(a-b)) \\ &= (a\cdot a + a\cdot(-b)) + (b\cdot a + b\cdot(-b)) \\ &= a^2 - a\cdot b + b\cdot a - b^2 \\ &= a^2 - a\cdot b + a\cdot b - b^2 \\ &= a^2 - b^2 \end{aligned}$$

19. $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

En efecto, por ejemplo, sabemos que

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

y entonces

$$\begin{aligned} (a+b)^3 &= (a+b)^2\cdot(a+b) \\ &= \left(a^2 + 2ab + b^2\right)\cdot(a+b) \\ &= \left(a^2\cdot(a+b)\right) + (2ab\cdot(a+b)) + \left(b^2\cdot(a+b)\right) \\ &= a^3 + a^2b + 2ab\cdot a + 2ab\cdot b + b^2a + b^3 \\ &= a^3 + a^2b + 2a\cdot a\cdot b + 2ab^2 + b^2a + b^3 \\ &= a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3 \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \end{aligned}$$

De forma análoga se prueba la otra igualdad.

3. El orden en el conjunto de los números reales

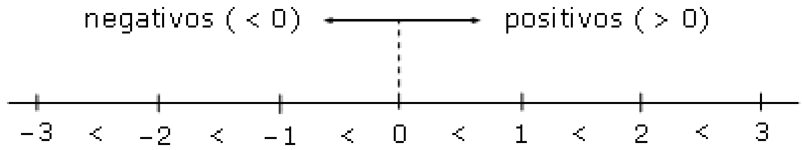
Vamos a ver en esta sección qué significado tiene el que dados dos números reales a y b, a sea mayor que b, que simbolizamos por $a > b$ o también por $b < a$, leyéndose en este caso b es menor que a; escribiremos también $a \geq b$ para indicar que a es mayor o igual que b, o también $b \leq a$, leyéndose entonces como b es menor o igual que a. Para introducir la noción de orden en $\mathbb{R}$, además de los enfoques numérico y geométrico, daremos otro basado en la existencia del conjunto de los números reales positivos $\mathbb{R}^+$ y la estabilidad de las operaciones en $\mathbb{R}$ sobre dicho conjunto. Aunque este enfoque no es tan intuitivo como los dos primeros, sin embargo tiene la ventaja de que nos permitirá demostrar las propiedades del orden en $\mathbb{R}$ de una forma más clara y simple. A partir del orden en $\mathbb{R}$ definiremos el valor absoluto de un número real y, a partir del valor absoluto definiremos la distancia entre dos números reales. Finalmente, distinguiremos algunos subconjuntos de la recta real como son los intervalos y las semirrectas.

3.1. Enfoque numérico y geométrico

Desde un punto de vista númerico, diremos que $a > b$ si y sólo si se puede encontrar una aproximación decimal (por defecto o por exceso) de a que sea mayor que la aproximación del mismo grado de b. Por ejemplo, $a = 1{,}234578...$ y $b = 1{,}234586...$, entonces $b > a$, pues

Aprox. de a por defecto	Aprox. de b por defecto	Resultado de la comparación
1	1	Iguales
1,2	1,2	Iguales
1,23	1,23	Iguales
1,234	1,234	Iguales
1,2345	1,2345	Iguales
1,23457	1,23458	La de b es mayor

El cero lo consideraremos más pequeño que cualquier número real positivo y mayor que cualquier número real negativo, y los números reales negativos los ordenaremos por sus respectivos opuestos (que serán positivos). Así, si a y b son negativos, $-a$ y $-b$ serán positivos, y si $-a < -b$, entonces $a > b$.



El orden en $\mathbb{R}$ puede también derivarse a partir de su representación gráfica como la recta real. De este modo, $a > b$ significa que el punto correspondiente a a se halla a la derecha del punto correspondiente a b, y $a < b$, significa que el punto correspondiente a a se encuentra a la izquierda del punto correspondiente a b.
Los órdenes ya existentes en los conjuntos $\mathbb{Q}, \mathbb{Z}$ y $\mathbb{N}$ son consistentes con el orden que acabamos de definir en $\mathbb{R}$. Esto quiere decir, por ejemplo, que al considerar $\mathbb{Q}$ como subconjunto de $\mathbb{R}$, si a, b son dos números racionales tales que $a > b$ en $\mathbb{R}$, entonces $a > b$ en $\mathbb{Q}$, es decir, el orden en $\mathbb{R}$ induce sobre $\mathbb{Q}$ el mismo orden que ya conocemos en $\mathbb{Q}$.

3.2. Enfoque algebraico

Los dos enfoques dados en el apartado anterior son suficientes para tener una idea clara del orden en $\mathbb{R}$. No obstante, hay una forma de expresar las relaciones de desigualdad $>$ y $\geq$ que es especialmente útil para hacer las demostraciones de las propiedades del orden en $\mathbb{R}$. Este nuevo enfoque no supone ninguna intuición previa (numérica o geométrica) sobre $\mathbb{R}$, sólo la existencia del subconjunto de los números reales positivos $\mathbb{R}^+$ y las siguientes propiedades:

1. Si $a, b \in \mathbb{R}^+$, entonces $a + b \in \mathbb{R}^+$
2. Si $a, b \in \mathbb{R}^+$, entonces $a \cdot b \in \mathbb{R}^+$
3. Si $a \in \mathbb{R}$, entonces se cumple exactamente una de las siguientes relaciones:

$$a \in \mathbb{R}^+ \qquad a = 0 \qquad -a \in \mathbb{R}^+$$

Las dos primeras propiedades aseguran la estabilidad sobre $\mathbb{R}^+$ de las operaciones de suma y producto en $\mathbb{R}$. La tercera propiedad divide a $\mathbb{R}$ en tres tipos de elementos distintos; establece que el conjunto

$$\mathbb{R}^- = \{-a : a \in \mathbb{R}^+\}$$

de los números reales negativos no tiene elementos en común con $\mathbb{R}^+$ y, además, que

$$\mathbb{R} = \mathbb{R}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^-$$

A partir de estos supuestos (por otra parte, muy naturales), hacemos las siguientes definiciones:

1. Decimos que a es positivo y escribimos $a > 0$, si $a \in \mathbb{R}^+$

2. Decimos que a es no negativo y escribimos $a \geq 0$, si $a \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$
3. Decimos que a es negativo y escribimos $a < 0$, si $-a \in \mathbb{R}^+$
4. Decimos que a es no positivo y escribimos $a \leq 0$, si $-a \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$
5. Decimos que a es mayor que b y escribimos $a > b$ o $b < a$, si $a - b \in \mathbb{R}^+$
6. Decimos que a es mayor o igual que b y escribimos $a \geq b$ o $b \leq a$, si $a - b \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

3.2.1. Propiedades del orden en $\mathbb{R}$

Una de las utilidades prácticas de las siguientes propiedades es su aplicación a la resolución de inecuaciones. Por ejemplo, usaremos estas propiedades para resolver una inecuación como

$$-\frac{x}{3} + 2 < \frac{x}{2} + 5$$

En efecto, primero quitamos los denominadores multiplicando cada miembro por 6.

$$-2x + 12 < 3x + 30$$

observa que al multiplicar por un número real positivo el signo no se invierte. Segundo,

$$\begin{array}{rcl} -2x + 12 - 3x & < & 3x + 30 - 3x \\ -5x + 12 & < & 30 \end{array}$$

observa que podemos sumar cualquier número real a ambos miembros resultando una inecuación equivalente. Del mismo modo, tenemos

$$\begin{array}{rcl} -5x + 12 - 12 & < & 30 - 12 \\ -5x & < & 8 \end{array}$$

Tercero, multiplicamos por $-1/5$ que, al ser negativo, obligará a invertir el signo de la desigualdad. Así, obtenemos

$$x > -\frac{8}{5}$$

que nos dice que todos los números reales mayores que $-8/5$ son solución de la inecuación dada. Veremos en otro apartado que las soluciones de una inecuación pueden expresarse mediante determinados subconjuntos de la recta real. En este caso, el conjunto de soluciones se expresaría como la siguiente semirrecta abierta

$$\left(-\frac{8}{5}, +\infty\right)$$

1. **Propiedad transitiva**: para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$, si $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$

En efecto, $a > b$ y $b > c$ si $a - b \in \mathbb{R}^+$ y $b - c \in \mathbb{R}^+$. Por tanto,

$$(a - b) + (b - c) = a - c \in \mathbb{R}^+$$

es decir, $a > c$.

2. **Tricotomía**: dados dos números reales cualesquiera a y b, se cumple una, y sólo una, de estas tres relaciones

$$a > b \qquad a = b \qquad a < b$$

En efecto, como $a - b \in \mathbb{R}$ entonces se cumple exactamente una de las siguientes relaciones:

$$a - b \in \mathbb{R}^+ \qquad a - b = 0 \qquad -(a - b) = b - a \in \mathbb{R}^+$$

es decir,

$$a > b \qquad a = b \qquad b > a$$

3. **Propiedad reflexiva**: para todo $a \in \mathbb{R}$, $a \leq a$.

En efecto, $a - a = 0 \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ y, por tanto, $a \leq a$.

4. **Propiedad antisimétrica**: para todo $a, b \in \mathbb{R}$, si $a \geq b$ y $b \leq a$, entonces $a = b$

En efecto, supongamos que fuera $a \neq b$. Entonces, por la propiedad anterior, se deduciría que $a > b$ o bien que $a < b$. Ahora bien, no puede ocurrir $a > b$ porque se contradice con la hipótesis de que $a \leq b$, ni tampoco puede ocurrir $a < b$ porque se contradice con la hipótesis de que $a \geq b$. Por lo tanto, no es posible que $a \neq b$ y, por tanto, debe ser $a = b$.

5. **Propiedad de traslación**: si $a > b$, entonces $a + c > b + c$, cualequiera que sean $a, b, c \in \mathbb{R}$

En efecto, $a > b$ si $a - b \in \mathbb{R}^+$. Podemos escribir

$$a - b = (a + c) - (b + c)$$

y, por tanto,

$$(a + c) - (b + c) \in \mathbb{R}^+$$

es decir,

$$a + c > b + c$$

Esta propiedad se expresa diciendo que el sentido de una desigualdad[17] no cambia si se suma un mismo número real a ambos lados de la desigualdad.

6. **Propiedad del producto por números positivos**: si $a > b$ y $c > 0$, entonces $a \cdot c > b \cdot c$, cualesquiera que sean $a, b, c \in \mathbb{R}$

En efecto, $a > b$ si $a - b \in \mathbb{R}^+$. Entonces, como $c \in \mathbb{R}^+$, deducimos que

$$(a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c \in \mathbb{R}^+$$

es decir,

$$a \cdot c > b \cdot c$$

Esta propiedad se la conoce diciendo que al multiplicar por un número positivo ambos lados de una desigualdad, el sentido de la desigualdad no cambia.

7. **Propiedad del producto por números negativos**: si $a > b$ y $c < 0$, entonces $a \cdot c < b \cdot c$, cualesquiera que sean $a, b, c \in \mathbb{R}$

En efecto, $a > b$ si $a - b \in \mathbb{R}^+$. Como $c < 0$, entonces $-c \in \mathbb{R}^+$ y, por tanto,

$$(a - b) \cdot (-c) = b \cdot c - a \cdot c \in \mathbb{R}^+$$

es decir,

$$b \cdot c > a \cdot c$$

Esta propiedad se la conoce diciendo que al multiplicar los dos miembros de una desigualdad por un número negativo, el sentido de la desigualdad se invierte.

8. **Propiedad de la suma**: si $a > b$ y $c > d$, entonces $a + c > b + d$, cualesquiera que sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

En efecto, $a > b$ y $c > d$ si $a - b \in \mathbb{R}^+$ y $c - d \in \mathbb{R}^+$. Entonces

$$(a - b) + (c - d) = (a + c) - (b + d) \in \mathbb{R}^+$$

es decir,

$$a + c > b + d$$

[17] De la misma manera que con el símbolo $=$ expresamos la relación de igualdad, con los símbolos $>$ y $\geq$ expresaremos la relación de desigualdad, que puede ser estricta en el primer caso, y no estricta, en el segundo.

3.3. Valor absoluto

Dado un número real cualquiera a, de los números a y $-a$ el mayor de ellos se llama **valor absoluto** de a, y lo designamos por $|a|$. El valor absoluto de un número real puede también definirse de la siguiente manera

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

es decir, el valor absoluto de un número real no negativo es el mismo número, mientras que si el número real es negativo, su valor absoluto es el opuesto de dicho número. En cualquier caso, es evidente que el valor absoluto de un número real es siempre un número no negativo.

3.3.1. Propiedades

1. $|a| = 0$ si y sólo si $a = 0$

En efecto, si $a = 0$, entonces $|0| = 0$. Recíprocamente, si fuera $a \neq 0$, entonces $-a \neq 0$ y, por tanto, $|a| \neq 0$. Como consecuencia, si $|a| = 0$, entonces $a = 0$.
Por ejemplo, si $|x - 3| = 0$, entonces $x = 3$.

2. $|-a| = |a|$, para todo $a \in \mathbb{R}$

En efecto, si $a = 0$, entonces $|-0| = |0| = 0$. Si $a > 0$, entonces $-a < 0$ y, por tanto, $|-a| = -(-a) = a = |a|$. Finalmente, si $a < 0$, entonces $-a > 0$ y, por tanto, $|-a| = -a = |a|$.
Por ejemplo, si $|x - 5| = 2$, entonces tenemos dos posibilidades: $x - 5 = 2$ o $x - 5 = -2$, es decir, $x = 7$ o $x = 3$.

3. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$, para todo $a, b \in \mathbb{R}$

En efecto, si $a = 0$ o $b = 0$, entonces $|a \cdot b| = |a| \cdot |b| = 0$. Si $a > 0$ y $b > 0$, entonces $a \cdot b > 0$ y, por tanto, $|a \cdot b| = a \cdot b = |a| \cdot |b|$. Si $a > 0$ y $b < 0$, entonces $a \cdot b < 0$ y, por tanto,

$$|a \cdot b| = -(a \cdot b) = a \cdot (-b) = |a| \cdot |b|$$

Del mismo modo se tratan los otros dos casos restantes.
Por ejemplo, si $|(x - 2)(x + 5)| = 0$, entonces $|x - 2|\,|x + 5| = 0$. Por tanto, $|x - 2| = 0$ o $|x + 5| = 0$, de donde $x - 2 = 0$ o $x + 5 = 0$, es decir, $x = 2$ o $x = -5$.

4. Si $b \geq 0$, entonces $|a| \leq b$ si y sólo si $-b \leq a \leq b$

En efecto, si $|a| \leq b$, entonces por la definición de valor absoluto se tiene $a \leq b$ y $-a \leq b$, pero $-a \leq b$ equivale a $-b \leq a$. Recíprocamente, si $-b \leq a \leq b$, entonces se tiene $a \leq b$ como $-a \leq b$, ya que $b \geq 0$. Por tanto, $|a| \leq b$.
Por ejemplo, si $|x - 2| \leq 3$, entonces $-3 \leq x - 2 \leq 3$, es decir, $-3 \leq x - 2$ y $x - 2 \leq 3$. Por tanto, $-1 \leq x$ y $x \leq 5$.

5. $|a + b| \leq |a| + |b|$, para todo $a, b \in \mathbb{R}$

En efecto, puesto que por definición $|a| \geq 0$ y $|b| \geq 0$, por el apartado anterior se tiene $-|a| \leq a \leq |a|$ y $-|b| \leq b \leq |b|$. De aquí, obtenemos

$$a + b \leq |a| + |b|$$

y

$$-(|a| + |b|) = -|a| - |b| \leq a + b$$

Por tanto,

$$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|$$

y, en consecuencia,

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

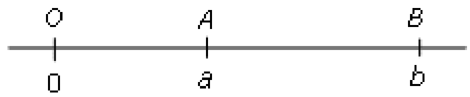
Por ejemplo, $2 = |2| = |(-3) + 5| \leq |-3| + |5| = 3 + 5 = 8$.

3.4. Distancia entre dos números reales

Dos números reales cualesquiera a y b se corresponden con dos puntos A y B de la recta real. Entonces, la longitud del segmento AB viene dada por $|a-b|$. En efecto, supongamos que $a < b$. Entonces pueden darse los tres casos siguientes:

a) Que $0 < a < b$, en cuyo caso

$$\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = b - a$$



Por otro lado, al ser $a - b < 0$, entonces

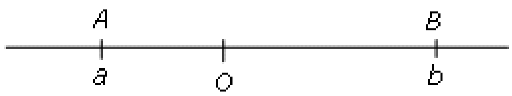
$$|a-b| = -(a-b) = b - a$$

y, por tanto

$$\overline{AB} = |a-b|$$

b) Que $a < 0 < b$, en cuyo caso

$$\overline{AB} = \overline{AO} + \overline{OB} = -a + b$$



Por otro lado, al ser $b > 0$, tenemos que $-b < 0$. De $a < 0$ y $-b < 0$, obtenemos $a + (-b) = a - b < 0$. Entonces,

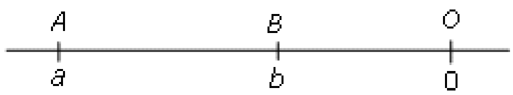
$$|a-b| = -(a-b) = -a + b$$

y, por tanto,

$$\overline{AB} = |a-b|$$

c) Que $a < b < 0$, en cuyo caso

$$\overline{AB} = \overline{AO} - \overline{BO} = -a - (-b) = -a + b$$



Por otra parte, al ser $a < b < 0$, tenemos que $a - b < 0$. Entonces,

$$|a-b| = -(a-b) = -a + b$$

Definimos la distancia entre dos números reales a y b como la longitud del segmento AB. Según lo que acabamos de demostrar, si designamos esta distancia por $d(a,b)$, entonces podemos escribir

$$d(a,b) = |a-b|$$

Por ejemplo,

$$d(7,9) = |7-9| = |-2| = 2$$

$$d(-7,9) = |-7-9| = |-16| = 16$$

$$d(-7,-9) = |-7-(-9)| = |2| = 2$$

3.4.1. Propiedades de la distancia

Las propiedades de la distancia son consecuencias inmediatas de las propiedades del valor absoluto.

1. $d(a,b) \geq 0$, cualesquiera que sean $a,b \in \mathbb{R}$, y $d(a,b) = 0$ si y sólo si $a = b$

En efecto, al ser $d(a,b) = |a-b|$ es evidente que $d(a,b) \geq 0$. Además, $d(a,b) = |a-b| = 0$ si y sólo si $a - b = 0$, o sea, $a = b$.

2. $d(a,b) = d(b,a)$, cualesquiera que sean $a,b \in \mathbb{R}$

En efecto,

$$\begin{aligned} d(b,a) &= |b-a| \\ &= |-(a-b)| \\ &= |-1| \cdot |a-b| \\ &= |a-b| \\ &= d(a,b) \end{aligned}$$

3. $d(a,b) \leq d(a,c) + d(c,b)$, cualesquiera que sean $a,b,c \in \mathbb{R}$

En efecto,

$$\begin{aligned} d(a,b) &= |a-b| \\ &= |a-c+c-b| \\ &\leq |a-c| + |c-b| \\ &= d(a,c) + d(c,b) \end{aligned}$$

3.4.2. Entornos

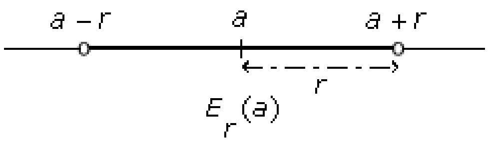
Si a es un punto de la recta real (o sea, cualquier número real), y $r > 0$, se llama **entorno de centro** a **y radio** r al conjunto de puntos cuya distancia a a es menor que r. Si designamos este conjunto por $E_r(a)$, entonces

$$\begin{aligned} E_r(a) &= \{x \in \mathbb{R} : d(x,a) < r\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : |x-a| < r\} \end{aligned}$$

Es inmediato comprobar que se cumple

$$E_r(a) = (a-r, a+r)$$

De esto último se deduce que la representación gráfica del entorno $E_r(a)$ es como sigue:



Si del entorno $E_r(a)$ se quita el punto a, el conjunto que resulta se llama **entorno reducido de centro** a **y radio** r y se denota por $E_r^*(a)$. Así, tenemos

$$E_r^*(a) = E_r(a) - \{a\}$$

Por ejemplo, el entorno de centro 2 y radio 1/2 será el conjunto

$$\begin{aligned} E_{1/2}(2) &= \{x \in \mathbb{R} : \left|x - \frac{1}{2}\right| < 2\} \\ &= \left(2 - \frac{1}{2}, 2 + \frac{1}{2}\right) \\ &= \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right) \end{aligned}$$

3.5. Intervalos y semirrectas

Recuerda que hemos utilizado la palabra intervalo como sinónimo de segmento sobre la recta al definir un número real como intersección de una sucesión de intervalos encajados. Con la noción de orden ya introducida en $\mathbb{R}$, podemos precisar aún más este concepto.
Si a y b son dos números reales con $a \leq b$, entonces el **intervalo abierto** de extremos a y b es el subconjunto de números reales que designamos por (a, b) o bien por $]a, b[$ y que se define por

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

Si añadimos los extremos al intervalo abierto, se obtiene el **intervalo cerrado**, designado por $[a, b]$, y que se define por

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

Si sólo añadimos uno de los extremos al intervalo abierto, se obtienen los **intervalos semiabiertos**:

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$$

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$$

En todos los casos, a es el extremos inferior del intervalo, b es el extremo superior y $b - a$ es la longitud del intervalo.
Del mismo modo, si $a \in \mathbb{R}$, entonces los subconjuntos siguientes:

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$$

$$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$$

se llaman **semirrectas abiertas** de extremo a. Si añadimos el extremo, obtenemos

$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$$

$$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$$

las **semirrectas cerradas**. El símbolo ∞ se llama **infinito** y no se corresponde con ningún número real; si cabe, al escribir $+\infty$ queremos indicar una cantidad indeterminada positiva tan grande como se quiera, mientras que $-\infty$ indica una cantidad indeterminada negativa tan pequeña como se quiera.

3.6. Conjuntos acotados

Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$. Decimos que $k \in \mathbb{R}$ es una **cota superior** de A si se cumple

$$x \leq k$$

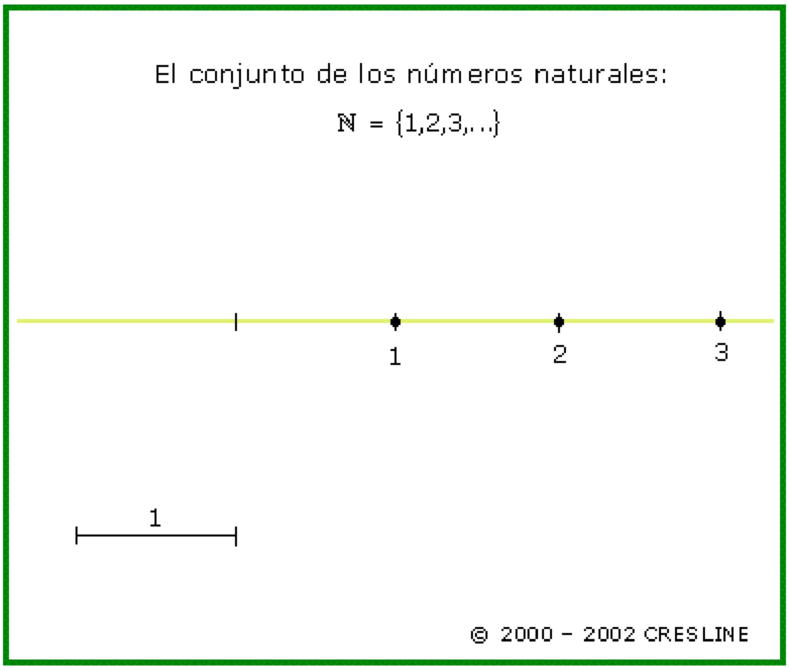
para todo $x \in A$; decimos que $k \in \mathbb{R}$ es una **cota inferior** de A si se cumple

$$k \leq x$$

para todo $x \in A$. Por ejemplo, en $\mathbb{R}^+$, cualquier número negativo es cota inferior, y en $\mathbb{R}^-$, cualquier número positivo es cota superior. Decimos que un subconjunto A de $\mathbb{R}$ está **acotado superiormente** (resp. **inferiormente**) si A tiene alguna cota superior (resp. inferior); decimos que A está **acotado** cuando lo está superior e inferiormente. Por ejemplo, cualquier intervalo cerrado $[a, b]$ es un conjunto acotado, pues, b es cota superior y a es cota inferior; la semirrecta $(-\infty, a)$ es un conjunto que está acotado superiormente pero no lo está inferiormente.

Si A es un subconjunto de $\mathbb{R}$ que está acotado superiormente (resp. inferiormente), se llama **supremo** (resp. **ínfimo**) de A, denotado por $\sup A$ (resp. $\inf A$), a la menor (resp. mayor) de todas las cotas superiores (resp. inferiores); si el supremo (resp. ínfimo) de A es un elemento de A, entonces el supremo (resp. ínfimo) se llama **máximo** (resp. **mínimo**) de A y se designa por $\max A$ (resp. $\min A$).

Una propiedad fundamental de $\mathbb{R}$ es la siguiente: Todo subconjunto no vacío acotado superiormente (resp. inferiormente) tiene supremo (resp. ínfimo).


El conjunto de los números naturales:
ℕ = {1,2,3,...}
1
2
3
1
© 2000 – 2002 CRESLINE