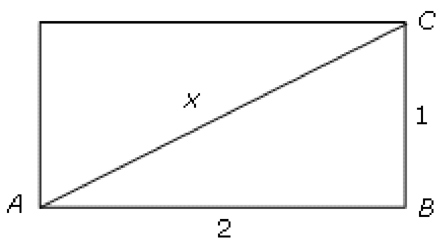
Práctica

Números reales

Índice

1. El conjunto de los números reales

Ejercicio 1 (1) Calcula la diagonal del rectángulo cuyas dimensiones son 2 cm y 1 cm, y (2) determina si el número que has obtenido es racional o irracional.
Solución: (1) Si designamos por x el valor de la diagonal, al ser rectángulo el triangulo ABC



podemos aplicar el teorema de Pitagoras. De este modo, tenemos

$$x^2 = 2^2 + 1^2 = 5$$

Por tanto, $x = \sqrt{5}$, es decir, la diagonal del rectángulo es un segmento de longitud $\sqrt{5}$ cm.
(2) Demostraremos por reducción al absurdo que el número $\sqrt{5}$ es irracional. En otras palabras, suponiendo lo contrario, es decir, que $\sqrt{5}$ es racional, deduciremos una contradicción. En efecto, si $\sqrt{5}$ es un número racional, entonces podremos expresarlo como una fracción

$$\sqrt{5} = \frac{n}{m} \tag{1}$$

donde $n, m \in \mathbb{Z}$. No es restrictivo suponer que además la fracción es irreducible, pues, si no lo fuera, trataríamos de reducirla a una fracción irreducible equivalente. Por tanto, los números enteros n y m son primos entre sí. Además, m no puede ser 1 ya que, si lo fuera, $\sqrt{5}$ sería un número entero y esto no es posible ya que, en la figura 1 hemos situado $\sqrt{5}$ sobre la recta mediante regla, escuadra y compás y hemos comprobado que $\sqrt{5}$ es mayor que 2 y menor que 3.

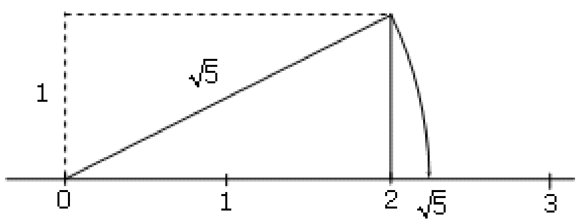


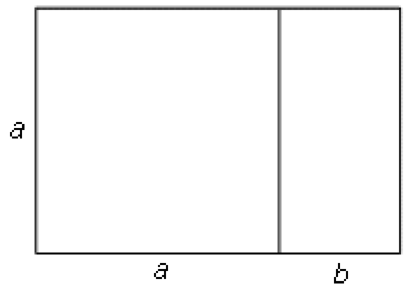
Figura 1

Ahora bien, se cumple (1) si

$$\left(\frac{n}{m}\right)^2 = \frac{n^2}{m^2} = 5$$

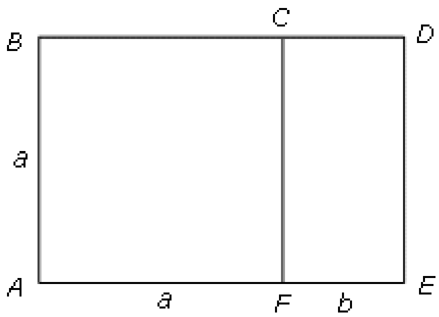
pero esto no es posible ya que los números enteros n^2 y m^2, por ser cuadrados, tienen descomposiciones en factores primos donde todos los factores están elevados al cuadrado y, además, al haber supuesto que n y m son primos entre sí, no tienen ningún factor en común. Por lo tanto, la fracción $\frac{n^2}{m^2}$ también es irreducible y no puede simplificarse y ser igual a 5. ■

Ejercicio 2 Un rectángulo se llama áureo cuando tiene la propiedad de que si le quitamos un cuadrado, el rectángulo que queda es semejante al primero.



Al cociente entre el lado mayor y el lado menor de un rectángulo áureo se llama el número áureo y se designa por Φ. (1) Calcula el número áureo. (2) Prueba que Φ es un número irracional.
Solución: (1) Por ser los rectángulos $ABDE$ y $CDEF$ semejantes, sus lados serán proporcionales. Por tanto, podemos escribir

$$\Phi = \frac{\overline{AE}}{\overline{CF}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}}$$



es decir,

$$\Phi = \frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

De la proporción

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

obtenemos

$$1 + \frac{b}{a} = \frac{a}{b}$$

o lo que es lo mismo,

$$1 + \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{a}{b}$$

Ahora bien, sabemos que $\Phi = \frac{a}{b}$ y, por tanto, podemos escribir

$$1 + \frac{1}{\Phi} = \Phi$$

es decir,

$$\frac{1}{\Phi} = \frac{\Phi - 1}{1}$$

de donde

$$\begin{aligned}\Phi(\Phi-1) &= 1\\ \Phi^2-\Phi &= 1\\ \Phi^2-\Phi-1 &= 0\end{aligned}$$

Resolviendo esta ecuación de segundo grado, obtenemos las dos soluciones siguientes

$$\frac{1\pm\sqrt{1+4}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

Teniendo presente que Φ designa un cociente entre longitudes de segmentos, Φ ha de ser un número positivo. Por tanto, el número áureo viene dado por

$$\Phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

(2) Demostraremos por reducción al absurdo que Φ es un número irracional. Primero, observamos que

$$\Phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\sqrt{5}$$

de donde se obtiene

$$\frac{\Phi-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=\sqrt{5} \tag{2}$$

Si fuera Φ racional, al ser $\frac{1}{2}$ un número racional, entonces, por (2), $\sqrt{5}$ sería un número racional, pero esto no es posible, según hemos visto en el ejercicio 1. De este modo, deducimos que Φ es un número irracional. ∎

Ejercicio 3 (1) Con regla, escuadra y compás, representa sobre la recta los siguientes números: a) $3(1-\sqrt{2})$, b) $2(3-\sqrt{2})$, c) $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$. (2) Prueba que los tres números anteriores son irracionales.
Solución: (1) Para resolver esta cuestión, primero trazamos una recta horizontal. Después situamos el origen y, a partir de él, situamos la unidad.
a) Primero, construiremos sobre la recta un segmento de longitud $\sqrt{2}$. Para ello, con la ayuda de la escuadra dibujamos un triángulo rectángulo isósceles de catetos iguales a 1. Por el teorema de Pitágoras, su hipotenusa será $\sqrt{2}$. Con la ayuda del compás, situamos $\sqrt{2}$ sobre la recta. Hemos construido así un segmento de longitud $\sqrt{2}$, indicado en rojo en la figura 2

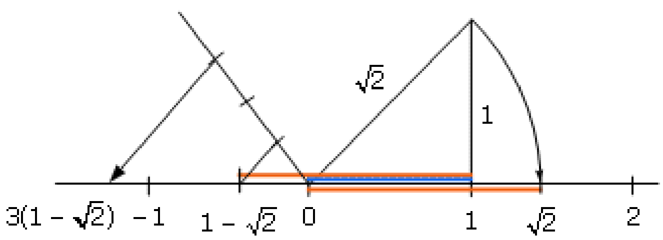


Figura 2

Ahora situaremos $1-\sqrt{2}$ sobre la recta. Para ello, con la ayuda de la regla, trazamos un segmento de longitud $\sqrt{2}$ a partir de 1 hacia la izquierda; para ver como se ha hecho, mira la figura 2. Finalmente, hacemos tres partes iguales sobre una recta cualquiera que pasa por el origen y, unimos con una recta el punto $1-\sqrt{2}$ con el extremo de la primera parte. Ahora, con la ayuda de la regla y la escuadra, trazamos una recta paralela desde el extremo de la tercera parte, por el teorema de Thales[1], el punto determinado por esta paralela sobre la recta será $3(1-\sqrt{2})$; para ver como se hace esto mira de nuevo la figura 2.
b) Procederemos del mismo modo para situar sobre la recta el número $2(3-\sqrt{2})$. Como resumen, adjuntamos la figura 3, en donde se pueden ver los pasos que se han hecho para situar $2(3-\sqrt{2})$.

[1] Recuerda que el teorema de Thales dice que los segmentos determinados sobre dos rectas concurrentes cortadas por varias rectas paralelas son proporcionales.

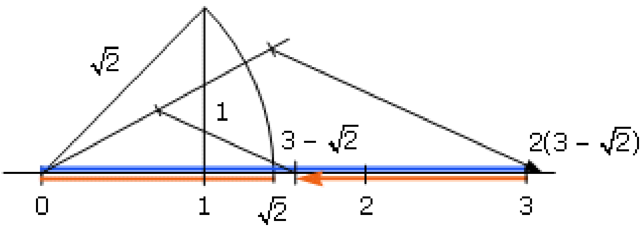


Figura 3

c) De nuevo, hay que aplicar el método explicado en el apartado a). Como resumen, adjuntamos la figura 4, en donde se pueden ver los pasos que se han hecho para situar $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$.

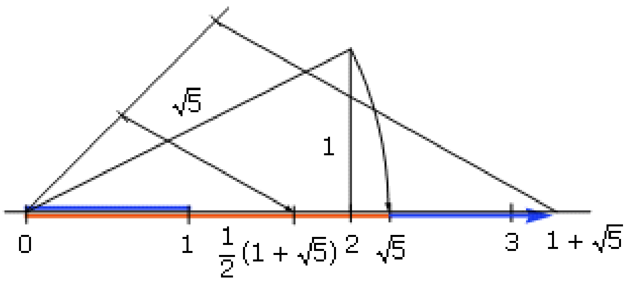


Figura 4

(2) Para probar que los tres números anteriores son irracionales utilizaremos el método de demostración por reducción al absurdo. Según este método, se supone lo contrario y por razonamientos correctos debemos deducir una contradicción. En tal caso, se concluye que la hipótesis que habíamos negado es verdadera.
a) Sabemos que $\sqrt{2}$ es un número irracional. Supongamos que $3(1-\sqrt{2})$ es un número racional r, entonces

$$\begin{aligned} r &= 3(1-\sqrt{2}) \\ \frac{r}{3} &= 1-\sqrt{2} \\ \sqrt{2} &= 1-\frac{r}{3} \end{aligned}$$

pero $1-\frac{r}{3}$ es un número racional, lo cual es absurdo con el hecho de que $\sqrt{2}$ es un número irracional.
b) Procederemos del mismo modo, basta con suponer que

$$\begin{aligned} r &= 2(3-\sqrt{2}) \\ \frac{r}{2} &= 3-\sqrt{2} \\ \sqrt{2} &= 3-\frac{r}{2} \end{aligned}$$

y, como $3-\frac{r}{2}$ es un número racional, se llega a una contradicción, pues, $\sqrt{2}$ es un número irracional.
c) Nos damos cuenta de que $\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ es el número áureo. En el ejercicio 2, hemos visto que este número es irracional. ■

Ejercicio 4 Utilizando una calculadora que no tiene la tecla para calcular raíces, ¿cómo encontrarías una expresión decimal del número $\sqrt[3]{2}$ con cuatro cifras exactas?.
Solución: Sabemos que $x=\sqrt[3]{2}$ si $x^3=2$. De este modo, debemos encontrar números tales que su cubo sea 2. Por tanteo, mediante una calculadora, obtenemos los siguientes resultados para $\sqrt[3]{2}$:

	Grado de aprox.	$\sqrt[3]{2}$ es mayor que	$\sqrt[3]{2}$ es menor que	Observaciones
(1)	Unidades	1	2	1^3= 1 y 2^3= 8
(2)	Décimas	1,2	1,3	$1{,}2^3$= 1,728 y $1{,}3^3$= 2,197
(3)	Centésimas	1,25	1,26	$1{,}25^3$= 1,953125 y $1{,}26^3$= 2,000376
(4)	Milésimas	1,259	1,260	$1{,}25^3$= 1,953125 y $1{,}26^3$= 2,000376
(5)	Diezmilésimas	1,2599	1,2600	$1{,}2599^3$= 1,999899758 y $1{,}26^3$= 2,000376
(6)	Cienmilésimas	1,25991	1,25992	$1{,}25992^3$= 1,999947379 y $1{,}25993^3$= 2,000042622

De (6) obtenemos que 1,259 es el valor aproximado de $\sqrt[3]{2}$ con 4 cifras exactas. ∎

Ejercicio 5 Clasifica los siguientes números en naturales, enteros, racionales, irracionales, reales y no reales.

$$\sqrt{81}, \sqrt[3]{81}, -\frac{1}{2}\sqrt{63{,}999...}, 0{,}363636..., 7{,}3,$$

$$\frac{13}{7}, \sqrt{-25}, -\sqrt{25}, 0{,}363663666..., \sqrt[3]{-25}$$

Solución: Resumimos los resultados mediante la tabla siguiente:

Número	N	Z	Q	I	R	Observaciones
$\sqrt{81}$	Sí	Sí	Sí	No	Sí	$\sqrt{81}= 9$
$\sqrt[3]{81}$	No	No	No	Sí	Sí	Número decimal no periódico
$-\frac{1}{2}\sqrt{63{,}999...}$	No	Sí	Sí	No	Sí	$-\frac{1}{2}\sqrt{63{,}999...}= -\frac{1}{2}\sqrt{64}= -\frac{1}{2}\cdot 8 = -4$
0,363636...	No	No	Sí	No	Sí	Número decimal periódico
7,3	No	No	Sí	No	Sí	Número decimal exacto
$\frac{13}{7}$	No	No	Sí	No	Sí	Número decimal periódico
$\sqrt{-25}$	No	No	No	No	No	No hay ningún número real que su cuadrado sea negativo
$-\sqrt{25}$	No	Sí	Sí	No	Sí	$-\sqrt{25}= -5$
0,363663666...	No	No	No	Sí	Sí	Número decimal no periódico
$\sqrt[3]{-25}$	No	No	No	Sí	Sí	Número decimal negativo no periódico

∎

Ejercicio 6 Considera la sucesión de intervalos encajados definida por

$$\left[\left(1+\frac{1}{1}\right)^1, \left(1+\frac{1}{1}\right)^2\right], \left[\left(1+\frac{1}{2}\right)^2, \left(1+\frac{1}{2}\right)^3\right], ...$$

es decir, los intervalos son de la forma

$$\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right]$$

donde $n = 1, 2, 3, ...$. Comprueba que esta sucesión define al número irracional denominado **número** e, tomando n = 1, 10, 50, 100, 500, 1000, 10000, 100000 y 1000000. Escribe las cifras exactas del valor aproximado del número e que puedes obtener a partir de los valores indicados para n.
Solución: Mediante una calculadora científica puedes calcular de forma aproximada el número e.

$$e = 2{,}718281828$$

Ahora calculemos los intervalos encajados para n = 1, 10, 50, 100, 500, 1000, 10000, 100000 y 1000000.

n	$\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right]$
1	$[2, 4]$
10	$[2{,}59374246, 2{,}853116706]$
50	$[2{,}691588029, 2{,}74541979]$
100	$[2{,}704813829, 2{,}731861968]$
500	$[2{,}715568521, 2{,}720999658]$
1000	$[2{,}716923932, 2{,}719640856]$
10000	$[2{,}718145927, 2{,}718417741]$
100000	$[2{,}718268237, 2{,}71829542]$
1000000	$[2{,}718280469, 2{,}718283188]$

Por tanto,

$$e = 2{,}71828...$$

∎

Ejercicio 7 Escribe las aproximaciones decimales por defecto y por exceso hasta el orden 5 de $\sqrt{3}$ y de $1+\sqrt[3]{2}$. ¿Con cuántas cifras exactas puedes escribir los valores aproximados de estos números?
Solución: Con una calculadora obtenemos

$$\sqrt{3} = 1{,}732050808 \quad \text{y} \quad 1+\sqrt[3]{2} = 2{,}25992105$$

Entonces las aproximaciones decimales de $\sqrt{3}$ hasta el orden indicado, son

Orden	Aprox. defecto	Aprox. exceso
1	1	2
2	1,7	1,8
3	1,73	1,74
4	1,732	1,733
5	1,7320	1,7321

y a partir de estos resultados, podemos escribir su valor aproximado con 4 cifras exactas

$$\sqrt{3} = 1{,}732...$$

Para $1+\sqrt[3]{2}$ tenemos

Orden	Aprox. defecto	Aprox. exceso
1	2	3
2	2,2	2,3
3	2,25	2,26
4	2,259	2,260
5	2,2599	2,2600

y a partir de aquí, podemos escribir su valor aproximado con 2 cifras exactas

$$1+\sqrt[3]{2} = 2{,}2...$$

■

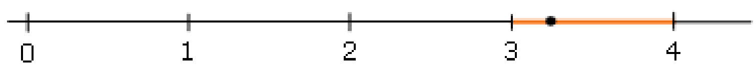
Ejercicio 8 Sitúa sobre la recta real el número π.
Solución: Para representar el número irracional π de forma aproximada sobre la recta real lo haremos mediante aproximaciones decimales, ya que no es posible hacerlo con regla y compás. Con ayuda de una calculadora, podemos obtener el siguiente valor aproximado

$$\pi = 3{,}141592654$$

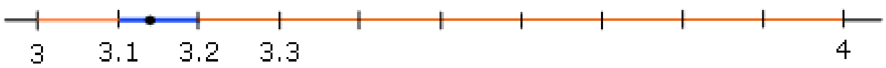
Entonces, tomando aproximaciones decimales por defecto y por exceso de π, tenemos

Orden	Aprox. defecto	Aprox. exceso
1	3	4
2	3,1	3,2
3	3,14	3,15
4	3,141	3,142
...	...	...

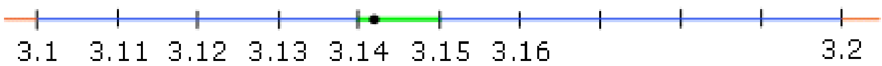
Ahora podemos situar π sobre la recta real de la siguiente manera:



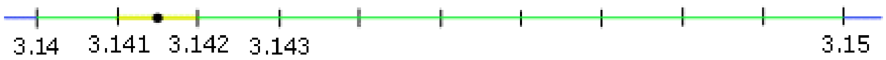
aumentado el intervalo $[3,4]$ de manera que podamos visualizar el orden aproximación de las décimas, tenemos



aumentando el intervalo $[3{,}1, 3{,}2]$ de manera que podamos ver el orden de aproximación de las centésimas, tenemos



aumentando ahora el intervalo $[3{,}14, 3{,}15]$ de modo que podamos ver el orden de aproximación de las milésimas, tenemos



y, así sucesivamente, este proceso puede continuar hasta conseguir situarlo con la aproximación del grado que nos interese. ■

Ejercicio 9 Escribe tres números racionales y otros tres irracionales, comprendidos entre 4 y 5, utilizando fracciones y raíces. Justifica que los números que escribes cumplen la condición impuesta.
Solución: Como números racionales escogemos, por ejemplo,

$$\frac{4+5}{2} = \frac{9}{2} = 4{,}5$$

que es el punto medio del segmento $[4, 5]$,

$$\frac{4+\frac{9}{2}}{2} = \frac{\frac{8+9}{2}}{2} = \frac{17}{4} = 4{,}25$$

que es el punto medio del segmento $[4, \frac{9}{2}]$, y

$$\frac{\frac{9}{2}+5}{2} = \frac{\frac{19}{2}}{2} = \frac{19}{4} = 4{,}75$$

que es el punto medio del segmento $[\frac{9}{2}, 5]$.
Puesto que $4^2 = 16$ y $5^2 = 25$, como números irracionales escogemos, por ejemplo,

$$\sqrt{17} = 4{,}123105626$$

$$\sqrt{18} = 4{,}242640687$$

y

$$\sqrt{19} = 4{,}358898944$$

■

2. Las operaciones en el conjunto de los números reales

Ejercicio 10 De dos números reales a y b se conoce que $a = 7{,}325...$ y $b = 24{,}46....$ Deduce entre qué valores se hallarán $a + b$ y $a \cdot b$, y con cuántas cifras exactas podrán darse en los resultados.
Solución: Para simplificar la escritura utilizaremos la notación $a \leq b \leq c$ para indicar que el número real b está comprendido entre los números a y c. Así, según los datos, las aproximaciones por defecto y por exceso de a y b son

$$7{,}325 \leq a \leq 7{,}326 \quad \text{y} \quad 24{,}46 \leq b \leq 24{,}47$$

Luego,

$$7{,}325 + 24{,}46 = 31{,}785 \leq a + b \leq 31{,}796 = 7{,}326 + 24{,}47$$

y

$$7{,}325 \cdot 24{,}46 = 179{,}1695 \leq a \cdot b \leq 179{,}26722 = 7{,}326 \cdot 24{,}47$$

A la vista de estas desigualdades, está claro que las únicas cifras exactas para la suma son

$$a + b = 31{,}7\cdots$$

y para el producto,

$$a \cdot b = 179.\cdots$$

Observa que sólo podemos asegurar la exactitud de las cifras de la suma $a+b$ hasta las décimas, es decir, hasta el orden anterior al que corresponde la última cifra exacta del sumando de menor presición (24,46..., que es exacto hasta las centésimas). Mientras que, en el producto $a \cdot b$ sólo podemos garantizar tres cifras significativas, o sea, una cifra menos que el número de cifras significativas del factor que menos tiene (ambos tienen cuatro cifras significativas). ■

Ejercicio 11 Utilizando que $\sqrt{17} = 4{,}1231046...$ y $\pi = 3{,}1415926...$, calcula con aproximación hasta las milésimas, los números reales siguientes: (1) $\sqrt{17} + \pi$, (2) $\sqrt{17} - \pi$, (3) $\sqrt{17} \cdot \pi$, y (4) $\sqrt{17}/\pi$.
Solución: (1) Para obtener $\sqrt{17} + \pi$ con aproximación hasta las milésimas, deben tomarse $\sqrt{17}$ y π con aproximación hasta las diezmilésimas. Entonces,

$$\sqrt{17} + \pi = 4{,}1231... + 3{,}1415... = 7{,}264\overset{?}{6}... = 7{,}264...$$

(2) Del mismo modo, para obtener $\sqrt{17} - \pi$ con aproximación hasta las milésimas, deben tomarse $\sqrt{17}$ y π con aproximación hasta las diezmilésimas. Entonces,

$$\sqrt{17} - \pi = 4{,}1231... - 3{,}1415... = 0{,}981\overset{?}{6}... = 0{,}981...$$

(3) Al encontrarse $\sqrt{17} \cdot \pi$ entre 12 y 20, ya que $4 \leq \sqrt{17} \leq 5$ y $3 \leq \pi \leq 4$, para obtener este producto con aproximación hasta las milésimas, necesitamos asegurar que cinco (dos cifras enteras y tres cifras decimales) de sus cifras sean significativas y, por tanto, debemos coger cada factor con seis cifras significativas. Entonces,

$$\sqrt{3} \cdot \sqrt{10} = (4{,}12310...) \cdot (3{,}14159...) = 12{,}953\overbrace{08973}^{?}... = 12{,}953...$$

(4) Al ser $3 \leq \pi \leq 4$, entonces $\frac{1}{4} = 0{,}25 \leq \frac{1}{\pi} \leq 0{,}333... = \frac{1}{3}$; por tanto, $\sqrt{17}/\pi$ se encuentra entre 1 y $\frac{5}{3} = 1{,}666...$. Para obtener este cociente con aproximación hasta las milésimas, necesitamos asegurar que cuatro (una cifra entera y tres cifras decimales) de sus cifras sean significativas y, por tanto, debemos tomar el numerador y el denominador con cinco cifras significativas. Entonces,

$$\frac{\sqrt{13}}{\pi} = \frac{4{,}1231...}{3{,}1415...} = 1{,}312\overbrace{4622}^{?} = 1{,}312...$$

■

Ejercicio 12 Sabiendo que $a = -1{,}427...$ y $b = 7{,}3902$, encuentra $a+b$, $a-b$, $a \cdot b$ y $\frac{a}{b}$, determinando la precisión de cada resultado.
Solución: Según los datos, las aproximaciones por defecto y por exceso de a y b son

$$-1{,}428 \leq a \leq -1{,}427 \quad \text{y} \quad 7{,}3902 \leq b \leq 7{,}3903$$

Luego,

$$-1{,}428 + 7{,}3902 = 5{,}9622 \leq a + b \leq 5{,}9633 = -1{,}427 + 7{,}3903$$

$$-1{,}428 - 7{,}3903 = -8{,}8183 \leq a - b \leq -8{,}8172 = -1{,}427 - 7{,}3902$$

ya que $-7{,}3903 \leq -b \leq -7{,}3902$, y, por tanto, obtenemos que

$$a + b = 5{,}96... \quad \text{y} \quad a - b = -8{,}81...$$

es decir, sólo podemos asegurar la exactitud de las cifras de la suma $a+b$ y la resta $a-b$ hasta las centésimas, ya que el sumando de menor precisión es exacto hasta las milésimas.
Por otro lado, tenemos que

$$(-1{,}428) \cdot 7{,}3903 = -10{,}5533484 \leq a \cdot b \leq -10{,}5458154 = (-1{,}427) \cdot 7{,}3902$$

y

$$(-1{,}428) \cdot 0{,}13532 = -0{,}19323696 \leq \frac{a}{b} \leq -0{,}19308737 = (-1{,}427) \cdot 0{,}13531$$

ya que

$$\frac{1}{7{,}3903} = 0{,}135312504 \leq \frac{1}{b} \leq 0{,}135314335 = \frac{1}{7{,}3902}$$

es decir,

$$\frac{1}{b} = 0{,}13531...$$

y, por tanto, obtenemos que

$$a \cdot b = -10{,}5... \quad \text{y} \quad \frac{a}{b} = -0{,}193...$$

es decir, sólo podemos garantizar tres cifras significativas en el producto, o sea, una cifra menos que el número de cifras significativas del factor $-1{,}427$ que menos tiene; en el cociente ocurre lo mismo. ■

Ejercicio 13 Resuelve las siguientes cuestiones: (1) calcula el área de un círculo de 3 cm de radio y expresa el resultado con tres decimales exactos; (2) calcula el área de un triángulo equilatero de 10 cm de lado y expresa el resultado con dos decimales exactos.
Solución: (1) Sabemos que el área de un círculo de radio r viene dada por la fórmula

$$A = \pi r^2$$

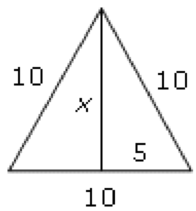
Al ser $r = 3$, tenemos que

$$A = 9\pi$$

Como $27 \leq 9\pi \leq 36$, si queremos expresar el resultado con aproximación hasta las milésimas, necesitamos asegurar que cinco (dos cifras enteras y tres cifras decimales) de sus cifras sean significativas y, por tanto, debemos tomar π con seis cifras significativas. Puesto que $\pi = 3{,}14159...$, entonces

$$A = 9 \cdot (3{,}14159...) = 28{,}274\overbrace{31}^{?}... = 28{,}274...$$

(2) Si designamos por x la altura de este triángulo,



por el teorema de Pitagoras, tenemos

$$10^2 = 5^2 + x^2$$

es decir,

$$x^2 = 75$$

y, por tanto, $x = \sqrt{75}$. Por consiguiente, el área del triángulo será

$$A = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \sqrt{75} = 5\sqrt{75}$$

Como $40 \leq 5\sqrt{75} \leq 45$, si queremos expresar el resultado con aproximación hasta las centésimas, necesitamos garantizar que cuatro (dos cifras enteras y dos de decimales) de sus cifras sean significativas y, por tanto, debemo coger $\sqrt{75}$ con cinco cifras significativas. Puesto que $\sqrt{75} = 8{,}6602...$, entonces

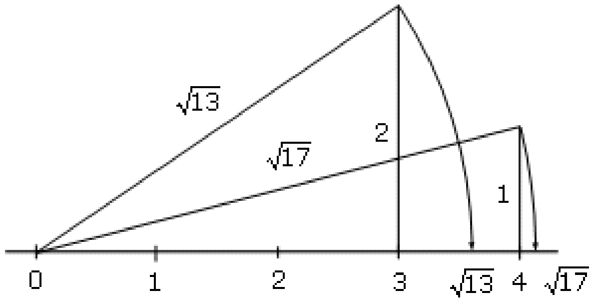
$$A = 5 \cdot (8{,}6602...) = 43{,}30\overset{?}{1} = 43{,}30...$$

■

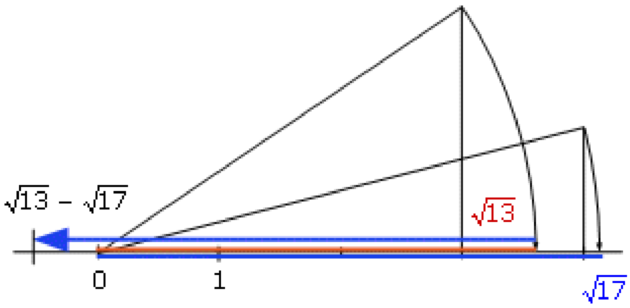
Ejercicio 14 Consideremos los números reales $\sqrt{13}$ y $\sqrt{17}$. Se pide: (1) su representación sobre la recta real y (2) utilizando procedimientos geométricos, representa también los siguientes números reales: (a) $\sqrt{13} - \sqrt{17}$, (b) $\sqrt{13} \cdot \sqrt{17}/3$, y (c) $\sqrt{17}/\sqrt{13}$.
Solución: (1) Observa primero que se cumplen las siguientes relaciones

$$13 = 3^2 + 2^2 \quad \text{y} \quad 17 = 4^2 + 1^2$$

Ahora, por el teorema de Pitágoras, podemos construir segmentos de longitud $\sqrt{13}$ y $\sqrt{17}$, utilizando regla, escuadra y compás. La siguiente figura muestra la construcción de los dos segmentos.



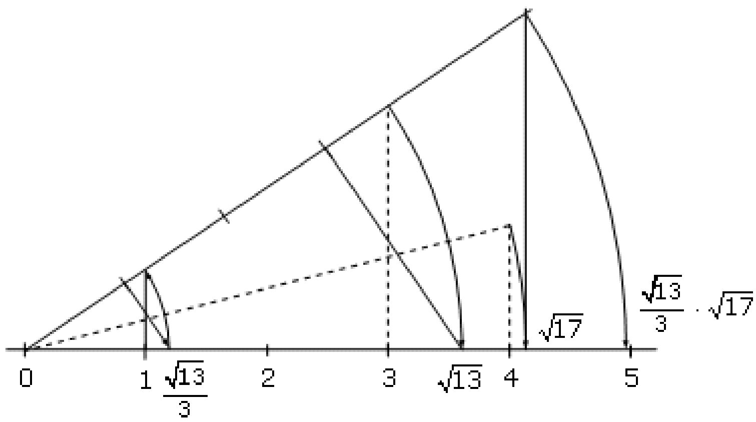
(2) Para resolver las cuestiones de este apartado utilizaremos la construcciones geométricas correspondientes a las operaciones con segmentos.
(a) Para representar $\sqrt{13} - \sqrt{17}$ sobre la recta real, hacemos la construcción que se indica en la siguiente figura.



(b) Para obtener

$$\frac{\sqrt{13} \cdot \sqrt{17}}{3} = \frac{\sqrt{13}}{3} \cdot \sqrt{17}$$

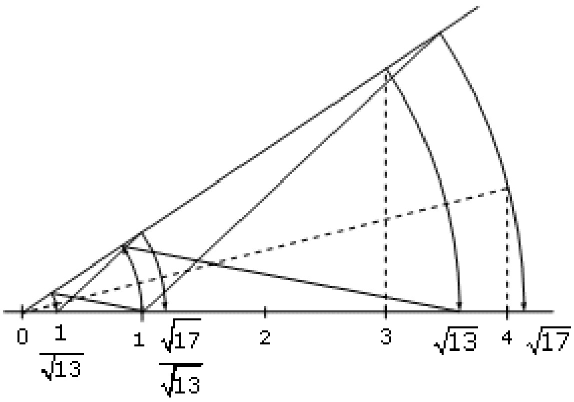
hacemos la construcción que se muestra en la figura siguiente.



(c) Para representar

$$\frac{\sqrt{17}}{\sqrt{13}} = \sqrt{17} \cdot \frac{1}{\sqrt{13}}$$

hacemos la construcción que se indica en la siguiente figura.



■

Ejercicio 15 Razona con ejemplos las siguientes cuestiones: (1) la suma de dos números irracionales, ¿es siempre un número irracional?; (2) el producto de dos números irracionales, ¿es siempre un número irracional? y (3) ¿cómo es la suma de un número racional con un irracional? ¿y el producto?
Solución: (1) La suma de dos números irracionales no es siempre un número irracional, pues $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$ son dos números irracionales y su suma $\sqrt{2}+(-\sqrt{2})=0$ no es un número irracional.
(2) El producto de dos números irracionales no es siempre un número irracional, pues $\sqrt{2}$ es un número irracional y el producto $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=\left(\sqrt{2}\right)^2=2$ no es un número racional, ya que $x=\sqrt{2}$ si $x^2=\left(\sqrt{2}\right)^2=2$.
(3) La suma de un número racional r con un irracional s es siempre un irracional, pues, de lo contrario, $r+s$ sería un número racional r' y, como consecuencia, $s=r'-r$ sería también racional, lo que no es posible por hipótesis. De manera similar, el producto de un número racional no nulo r por un irracional s es siempre un irracional, pues, de lo contrario, $r\cdot s$ sería un número racional r' y, como consecuencia, $s=\frac{r'}{r}$ sería también racional, lo que tampoco es posible por hipótesis. ■

Ejercicio 16 Observa el razonamiento siguiente e indica dónde está el error: supongamos que $a\neq 0$ y que $a=b$. Entonces, multiplicando ambos lados de la igualdad por b, obtenemos $ab=b^2$. Sumando a ambos miembros de la igualdad $-a^2$, obtenemos $ab-a^2=b^2-a^2$. Ahora, sacando factor común a, a la izquierda, y sustituyendo b^2-a^2 por $(b+a)(b-a)$, a la derecha, obtenemos

$$a(b-a)=(b+a)(b-a)$$

Dividiendo ambos miembros de la igualdad por $b-a$, tenemos

$$a=b+a$$

pero $a=b$, luego $a=2a$. Finalmente, al dividir ambos lados de la igualdad por a, deducimos que $1=2$.
Solución: Al pasar de

$$a(b-a)=(b+a)(b-a)$$

a

$$a=b+a$$

se comete el error de dividir por $b-a=0$, pues, $a=b$, lo que no es posible. ■

Ejercicio 17 Resuelve las ecuaciones siguientes, indicando las propiedades que utilizas en cada paso de la resolución: (1) $3(5-2x)+4x-3=6-(4-2x)$; (2) $(x-1)(x^2-5)=0$; y (3) $x^2+16=0$.

Solución: (1)

$$\begin{aligned}
3(5-2x)+4x-3 &= 6-(4-2x)\\
15-6x+4x-3 &= 6-4+2x\\
12-2x &= 2+2x\\
-2x-2x &= -12+2\\
-4x &= -10\\
4x &= 10\\
2x &= 5\\
x &= \frac{5}{2}
\end{aligned}$$

(2)

$$(x-1)(x^2-5)=0$$

Por tratarse de un producto de dos factores que es igual a cero, los números reales que satisfacen la ecuación anterior deben cumplir que

$$x+1=0 \quad \text{o} \quad x^2-5=0$$

De la ecuación $x+1=0$, se deduce $x=-1$, y de la otra ecuación, $x^2-5=0$, equivalente a $x^2=5$, se deducen dos valores para x, $\sqrt{5}$ y $-\sqrt{5}$; esto es así porque

$$\left(\sqrt{5}\right)^2=5 \quad \text{y} \quad \left(-\sqrt{5}\right)^2=\left(\sqrt{5}\right)^2=5$$

Por consiguiente, las soluciones de la ecuación son -1, $\sqrt{5}$ y $-\sqrt{5}$.
(3) La ecuación $x^2+16=0$ es equivalente a $x^2=-16$, pero no hay ningún número real que elevado al cuadrado sea negativo. Por tanto, la ecuación no tiene solución en $\mathbb{R}$. ■

Ejercicio 18 Si x, y son números reales cualesquiera, probar que se cumple la siguiente identidad

$$x^3 \pm y^3 = (x \pm y)(x^2 \mp xy + y^2)$$

Solución: Probaremos que se cumple

$$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+xy+y^2)$$

y dejamos como ejercicio la otra identidad. Tenemos que

$$\begin{aligned}
(x-y)(x^2+xy+y^2) &= x(x^2+xy+y^2)-y(x^2+xy+y^2)\\
&= x^3+x^2y+xy^2-yx^2-xy^2-y^3\\
&= x^3-y^3
\end{aligned}$$

■

Ejercicio 19 Prueba que la ecuación de segundo grado $ax^2+bx+c=0$ tiene como soluciones

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Solución: En efecto, puesto que $a \neq 0$ y suponiendo que $b^2 - 4ac \geq 0$, tenemos

$$\begin{array}{rcl}
ax^2 + bx + c & = & 0 \\
4a \cdot (ax^2 + bx + c) & = & 4a \cdot 0 \\
4a^2x^2 + 4abx + 4ac & = & 0 \\
4a^2x^2 + 4abx + 4ac + b^2 & = & b^2 \\
4a^2x^2 + 4abx + 4ac + b^2 - 4ac & = & b^2 - 4ac \\
4a^2x^2 + 4abx + b^2 & = & b^2 - 4ac \\
(2ax + b)^2 & = & b^2 - 4ac \\
2ax + b & = & \pm\sqrt{b^2 - 4ac} \\
2ax + b - b & = & \pm\sqrt{b^2 - 4ac} - b \\
2ax & = & -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac} \\
x & = & \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}
\end{array}$$

■

3. El orden en el conjunto de los números reales

Ejercicio 20 Si a, b son dos números reales positivos, probar que se cumple

$$a^2 < b^2 \quad \Longrightarrow \quad a < b$$

Si a, b no son positivos, ¿es cierta la implicación anterior?
Solución: Evidentemente, se cumple

$$\begin{array}{rcl}
a^2 & < & b^2 \\
0 & < & b^2 - a^2 \\
0 & < & (a + b)(a - b)
\end{array}$$

Puesto que por hipótesis $a, b \in \mathbb{R}^+$, se cumple $a + b \in \mathbb{R}^+$ y, por tanto, de la última desigualdad, se deduce $a - b \in \mathbb{R}^+$, es decir, $a < b$.
Si a, b no son positivos, la implicación no es cierta, pues, por ejemplo,

$$(-2)^2 = 4 < 9 = (-3)^2$$

y no es cierto que -2 sea menor que -3. ■

Ejercicio 21 Si a, b son dos números reales positivos, probar que se cumple

$$\sqrt{a \cdot b} \leq \frac{a + b}{2}$$

¿En qué casos se da la igualdad?
Solución: Observa que si $a > 0$, $b > 0$ y $a \neq b$, entonces $\sqrt{a} > 0$, $\sqrt{b} > 0$ y $\sqrt{a} \neq \sqrt{b}$. Entonces, se cumple

$$\begin{array}{rcl}
\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 & > & 0 \\
\left(\sqrt{a}\right)^2 - 2\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} + \left(\sqrt{b}\right)^2 & > & 0 \\
a - 2\sqrt{a \cdot b} + b & > & 0 \\
a + b & > & 2\sqrt{a \cdot b} \\
\dfrac{a + b}{2} & > & \sqrt{a \cdot b}
\end{array}$$

Por lo tanto, la desigualdad estricta se cumple cuando $a \neq b$. Si $a = b > 0$, entonces la desigualdad se convierte en una igualdad, pues, los dos miembros son iguales a a.

Por otra parte, supongamos $a > 0$, $b > 0$ y que se cumple

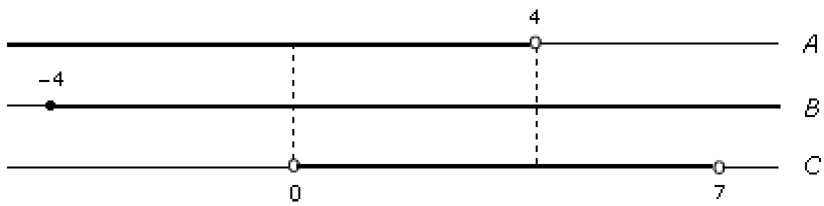
$$\begin{aligned}
\sqrt{a \cdot b} &= \frac{a+b}{2} \\
ab &= \frac{(a+b)^2}{4} \\
4ab &= (a+b)^2 \\
4ab &= a^2 + 2ab + b^2 \\
0 &= a^2 - 2ab + b^2 \\
0 &= (a-b)^2
\end{aligned}$$

de donde se sigue que $a = b$. Por tanto, la igualdad se cumple cuando $a = b$. ■

Ejercicio 22 Sea $A = \{x \in \mathbb{R} : x < 4\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : x \geq -4\}$ y $C = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 7\}$. (a) Expresa los conjuntos dados en forma de intervalos o semirrectas; (b) expresa $A \cap B \cap C$ en forma de entorno de algún punto.
Solución: (a) Es claro que

$$\begin{aligned}
A &= (-\infty, 4) \\
B &= [-4, +\infty) \\
C &= (0, 7)
\end{aligned}$$

(b) Primero calcularemos $A \cap B \cap C$. Para ello, observa la figura siguiente:



Es claro a partir de ella que

$$A \cap B \cap C = (0, 4)$$

El punto medio de este intervalo es 2 y la distancia de éste a uno cualquiera de los extremos es también 2. Por tanto,

$$A \cap B \cap C = E_2(2)$$

■

Ejercicio 23 Calcula el supremo, ínfimo, máximo y mínimo (si existen) de los siguientes conjuntos:

a) $A = (-\infty, 3) \cup [10, 11)$

b) $B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4x + 3 < 0\}$

c) $C = \{x \in \mathbb{R} : |x - 1| \leq 3\}$

d) $D = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$

Solución: a) Es claro que el conjunto

$$A = (-\infty, 3) \cup [10, 11)$$

no está acotado inferiormente y que los puntos del conjunto $[11, +\infty)$ son cotas superiores de A. Por esto no existe $\text{ínf}\, A$ y $\sup A = 11$. Además, A no admite máximo ni mínimo.
b) Primero, expresaremos

$$B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4x + 3 < 0\}$$

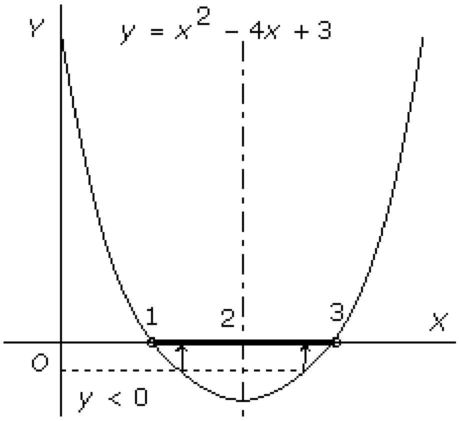
mediante intervalos o semirrectas. Para ello, debemos resolver la siguiente inecuación de segundo

$$x^2 - 4x + 3 < 0$$

Un método para resolver este tipo de inecuaciones es representar a "grosso modo"la parábola $y = x^2 - 4x + 3$ y averiguar después para qué valores de x es $y < 0$. Busquemos los puntos de corte de la parábola con el eje OX, resolviendo la ecuación

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

cuyas soluciones son $x = 1$ o $x = 3$. Por la simetría de la parábola y por ser $a = 1 > 0$, en $x = 2$ la parábola tendrá un mínimo como se muestra en la siguiente figura.



A partir de la gráfica, es claro que $y < 0$ cuando $1 < x < 3$. Por tanto,

$$B = (1, 3)$$

A partir de aquí, es claro que $\sup B = 3$, $\text{ínf}\, B = 1$ y que B no admite máximo ni mínimo.
c) Observa, en primer lugar, que

$$\begin{array}{rcl} |x-1| & \leq & 3 \\ -3 & \leq & x - 1 \leq 3 \\ -2 & \leq & x \leq 4 \end{array}$$

Luego,

$$\begin{array}{rcl} C & = & \{x \in \mathbb{R} : |x-1| \leq 3\} \\ & = & [-2, 4] \end{array}$$

De aquí, se deduce de forma inmediata que $\sup C = \text{máx}\, C = 4$ y $\text{ínf}\, C = \text{mín}\, C = -2$.
d) Ahora tenemos que

$$D = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$$

Observa que

$$\frac{1}{n} > 0$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, 0 es una cota inferior de D. Observa también que

$$\frac{1}{n} \leq 1$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, 1 es una cota superior de D. A partir de estos dos hechos, es evidente que $\sup D = \text{máx}\, D = 1$, $\text{ínf}\, D = 0$ y D no admite mínimo. ■

Ejercicio 24 Escribe las expresiones siguientes sin hacer uso del valor absoluto:

a) $|x - 3|$

b) $|x - 1| + |x + 3|$

c) $|1 - |x||$

d) $|x-y|-|y|$

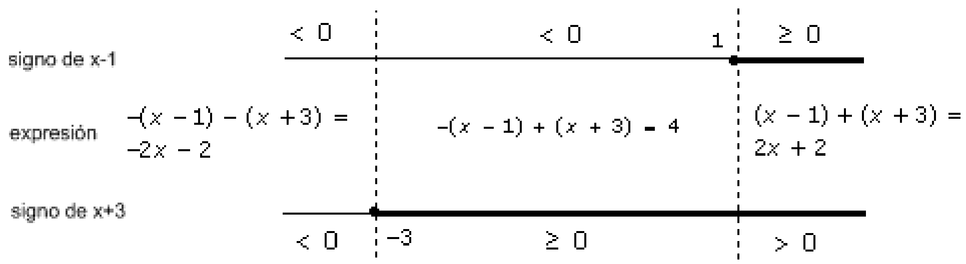
Solución: Para resolver estas cuestiones debemos recordar la definición de valor absoluto:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

a) La expresión $|x-3|$ dependerá del signo de $x-3$; si $x \geq 3$, entonces $x-3 \geq 0$, y si $x < 3$, entonces $x-3 < 0$. Por tanto,

$$|x-3| = \begin{cases} x-3 & \text{si } x \geq 3 \\ -(x-3) = 3-x & \text{si } x < 3 \end{cases}$$

b) La expresión $|x-1|+|x+3|$ dependerá de los signos de $x-1$ y $x+3$. Observa la siguiente figura:



A partir de ella, es claro que se cumple

$$|x-1|+|x+3| = \begin{cases} 2x+2 & \text{si } x \geq 1 \\ 4 & \text{si } -3 \leq x < 1 \\ -2x-2 & \text{si } x < 3 \end{cases}$$

c) La expresión $|1-|x||$ dependerá, primero, del signo de x. Así, tenemos

$$|1-|x|| = \begin{cases} |1-x| & \text{si } x \geq 0 \\ |1-(-x)| = |1+x| & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Entonces, si $x \geq 0$, tenemos

$$|1-x| = \begin{cases} 1-x & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ -(1-x) = x-1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

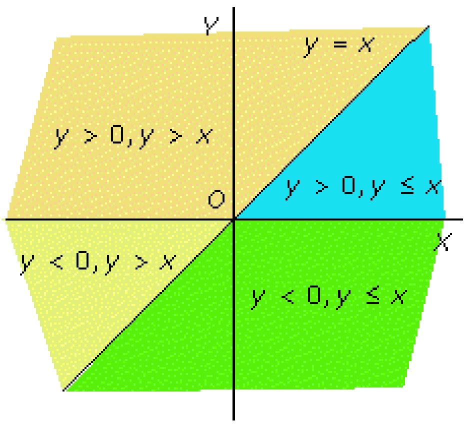
y si $x < 0$, tenemos

$$|1+x| = \begin{cases} 1+x & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ -(1+x) = -1-x & \text{si } x < -1 \end{cases}$$

En resumen, hemos obtenido que

$$|1-|x|| = \begin{cases} x-1 & \text{si } x > 1 \\ 1-x & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 1+x & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ -1-x & \text{si } x < -1 \end{cases}$$

d) La expresión $|x-y|-|y|$ dependederá de los signos de $x-y$ e y. Observa las regiones del plano señaladas en la siguiente figura:



A partir de ellas, es claro que se cumple

$$|x-y|-|y| = \begin{cases} -(x-y)-y=-x & \text{si } y>0, y>x \\ x-y-y=x-2y & \text{si } y>0, y\leq x \\ -(x-y)-(-y)=-x+2y & \text{si } y<0, y>x \\ x-y-(-y)=x & \text{si } y<0, y\leq x \end{cases}$$

■

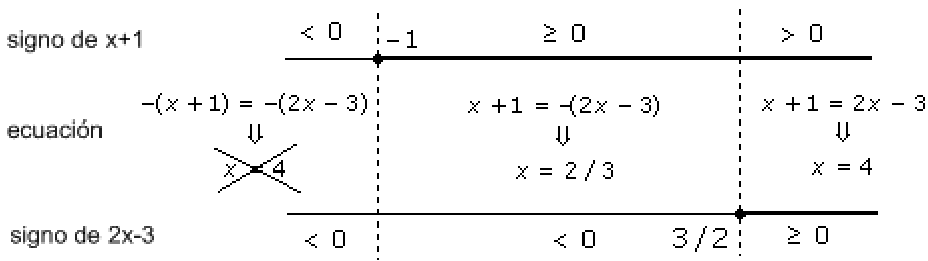
Ejercicio 25 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $|x+1| = |2x-3|$

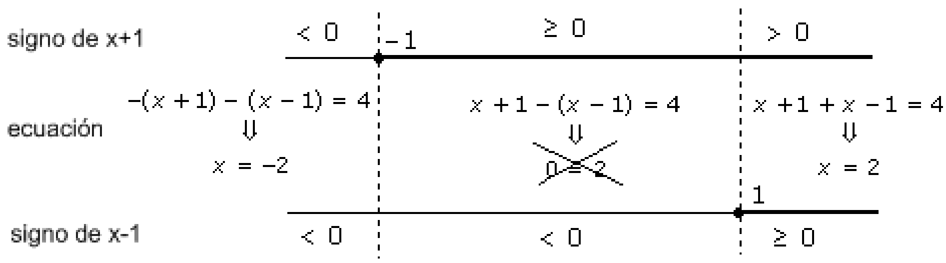
b) $|x+1| + |x-1| = 4$

c) $\left|x^2-x\right| + |x| = 9$

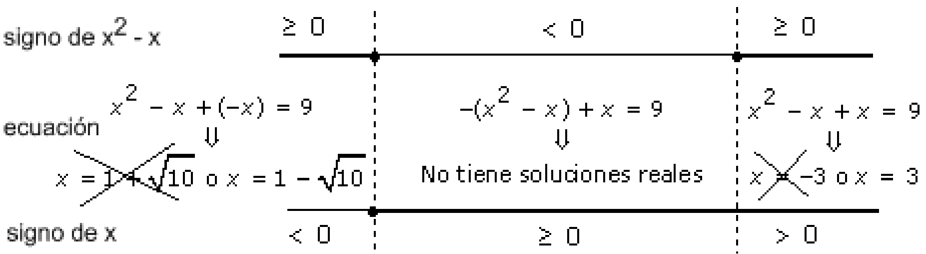
Solución: Para resolver estas ecuaciones, primero examinaremos los signos de las expresiones con valor absoluto para saber cuándo la expresión cambia de signo o queda igual. Segundo, resolveremos las ecuaciones que resultan en cada región y, tercero, descartaremos las soluciones que no pertenecen a las regiones correspondientes.
a) Para resolver la ecuación $|x+1| = |2x-3|$ hay que examinar los signos de las expresiones $x+1$ y $2x-3$. Para ello, observa la siguiente figura:



De ella, resulta claro que las soluciones son $x = 2/3$ o $x = 4$.
b) Del mismo modo resolveremos la ecuación $|x+1|+|x-1| = 4$. Observa la siguiente figura para ver los signos de las expresiones $x+1$ y $x-1$:



A partir de ella, es claro que las soluciones son $x = -2$ o $x = 2$.
c) Análogamente, para resolver la ecuación $\left|x^2-x\right| + |x| = 9$ debemos analizar los signos de las expresiones $x^2 - x$ y x. Para ello, observa la siguiente figura:



A partir de ella, es claro que las soluciones son $x = 1 - \sqrt{10}$ o $x = 3$. ■

Ejercicio 26 Resuelve las inecuaciones siguientes, expresando las soluciones en forma de intervalos o semirrectas:

a) $|3 - x| \geq |2x + 1|$

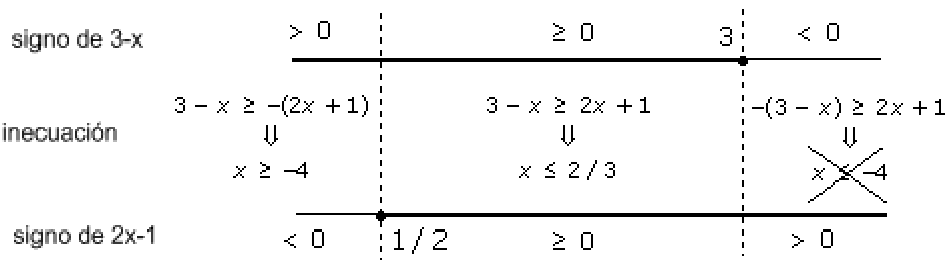
b) $|x - 1| + |x + 2| > 3$

c) $2 < \left|4 - x^2\right| \leq 12$

d) $\left|\frac{x-1}{x+1}\right| < 2$

e) $\left|4 - \frac{1}{x^2}\right| < 1$

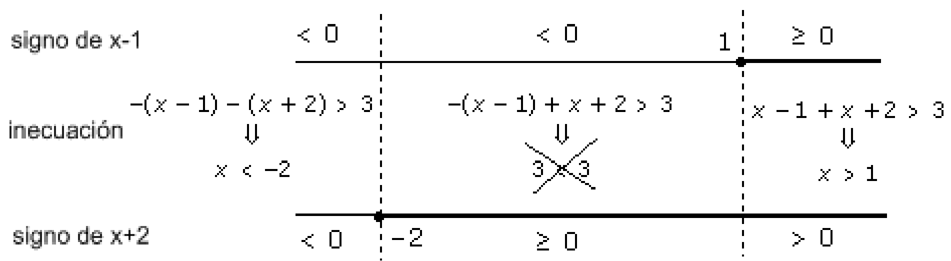
Solución: Para resolver estas inecuaciones utilizaremos la misma técnica usada en el ejercicio 24, es decir, primero examinaremos los signos de las expresiones con valor absoluto para saber cuándo la expresión cambia de signo o queda igual. Segundo, resolveremos las inecuaciones que resultan en cada región y, tercero, descartaremos las soluciones que no pertenecen a las regiones correspondientes.
a) Para resolver la inecuación $|3 - x| \geq |2x + 1|$, observa la figura siguiente:



A partir de ella, es claro que las soluciones son $-4 \leq x \leq 2/3$, es decir, los puntos del intervalo cerrado

$$[-4, 2/3]$$

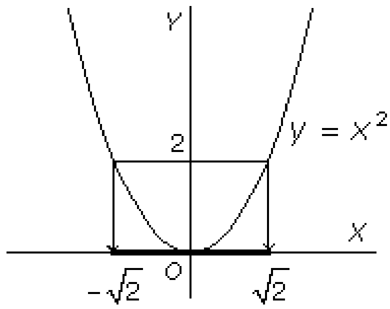
b) Para resolver la inecuación $|x - 1| + |x + 2| > 3$, observa la figura siguiente:

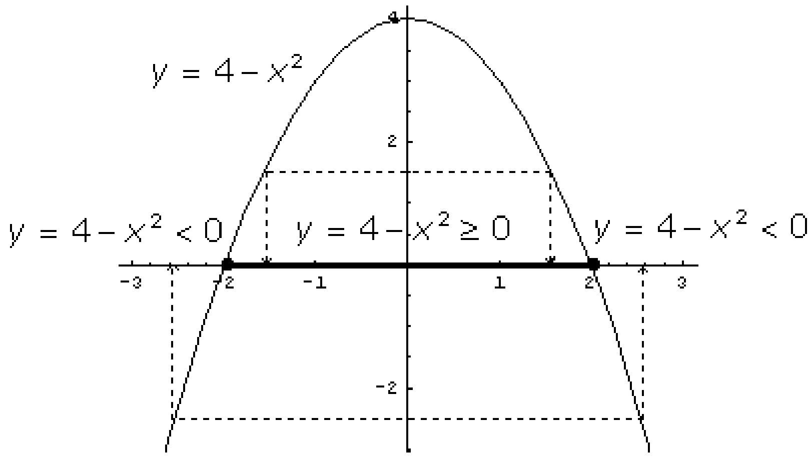


A partir de ella, es claro que las soluciones son $x < -2$ o $x > 1$, es decir, los puntos de la siguiente unión de semirrectas abiertas

$$(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$$

c) Para resolver la inecuación $2 < \left|4 - x^2\right| \leq 12$, observa la figura siguiente:





En ella hemos representado la parábola $y = 4 - x^2$ para poder averiguar el signo de la expresión $4 - x^2$. Vemos que si $-2 \leq x \leq 2$, entonces $4 - x^2 \geq 0$, y en el resto, $4 - x^2 < 0$. Hay pues dos casos: (1) $-2 \leq x \leq 2$ y (2) $x < -2$ o $x > 2$.

(1) Supongamos que $-2 \leq x \leq 2$, entonces en esta región la inecuación se escribe como

$$\begin{gathered} 2 < 4 - x^2 \leq 12 \\ -2 < -x^2 \leq 8 \\ 2 > x^2 \geq -8 \end{gathered}$$

de donde resulta $x^2 < 2$, pues, $x^2 \geq -8$ se cumple para todo $x \in \mathbb{R}$. Por tanto, las soluciones son

$$-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$$

como puede deducirse de la siguiente figuraObserva que las soluciones que hemos obtenido están dentro de la región considerada.

(2) Supongamos ahora que $x < -2$ o $x > 2$, entonces en esta región la inecuación se escribe como

$$\begin{gathered} 2 < -(4 - x^2) \leq 12 \\ 2 < -4 + x^2 \leq 12 \\ 6 < x^2 \leq 16 \end{gathered}$$

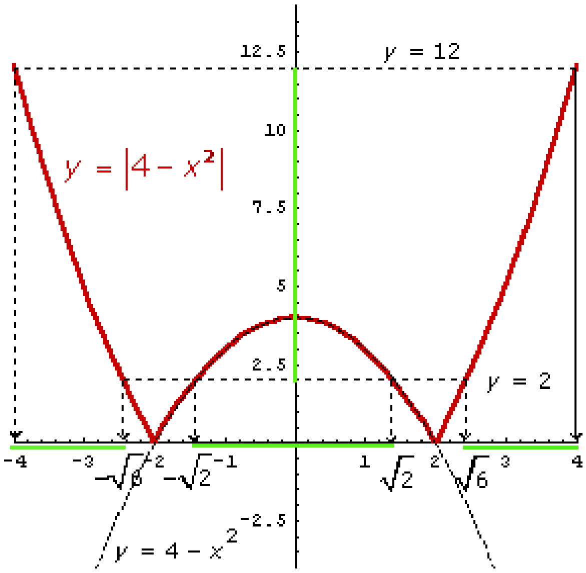
de donde resultan las inecuaciones $x^2 \leq 16$ y $x^2 > 6$. De la primera, obtenemos $-4 \leq x \leq 4$, y de la segunda, $-\sqrt{6} > x > \sqrt{6}$. Al igual que antes, estos resultados pueden deducirse de la representación gráfica de la parábola $y = x^2$. De las soluciones obtenidas sólo las que indicamos a continuación

$$-4 \leq x < -\sqrt{6} \quad \text{y} \quad \sqrt{6} < x \leq 4$$

están en la región considerada. En resumen, las soluciones de la inecuación $2 < \left|4 - x^2\right| \leq 12$ son todos los números reales pertenecientes a la siguiente unión de intervalos

$$[-4, -\sqrt{6}) \cup (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{6}, 4]$$

En la figura siguiente se señala otro método para resolver este tipo de inecuaciones, basado en la representación gráfica de la curva $y = \left|4 - x^2\right|$ a partir de la parábola $y = 4 - x^2$.



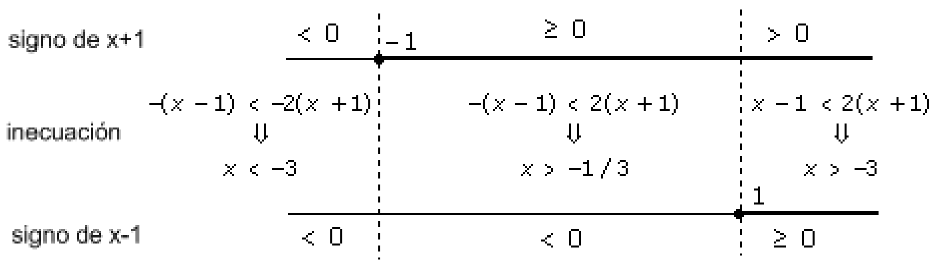
Observa como se obtienen las mismas soluciones.
(d) Para resolver la inecuación

$$\left|\frac{x-1}{x+1}\right| < 2$$

primero efectuamos las siguientes transformaciones

$$\begin{aligned} \frac{|x-1|}{|x+1|} &< 2 \\ |x-1| &< 2\,|x+1| \end{aligned}$$

en el supuesto de que $x \neq -1$. Observa ahora la siguiente figura:



A partir de ella, obtenemos que las soluciones de la inecuación son $x < -3$ o $x > -1/3$, pues, en la región $x \geq 1$ la inecuación se cumple trivialmente (porque $x \geq 1 > -3$), es decir, los puntos de la siguiente unión de semirrectas

$$(-\infty, -3) \cup (-1/3, +\infty)$$

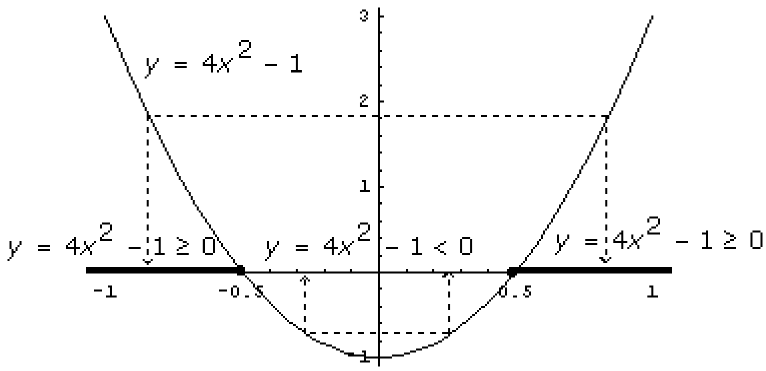
e) Para resolver la inecuación

$$\left|4 - \frac{1}{x^2}\right| < 1$$

primero efectuamos las siguientes transformaciones

$$\begin{aligned} \left|\frac{4x^2-1}{x^2}\right| &< 1 \\ \frac{|4x^2-1|}{|x^2|} &< 1 \\ \frac{|4x^2-1|}{x^2} &< 1 \\ \left|4x^2-1\right| &< x^2 \end{aligned}$$

en el supuesto de que $x \neq 0$. En la siguiente figura hemos dibujado la parábola $y = 4x^2 - 1$ para poder averiguar el signo de la expresión $4x^2 - 1$.



Observa que para $x \leq -1/2$ o $x \geq 1/2$ se cumple $4x^2 - 1 \geq 0$, y en el resto se cumple $4x^2 - 1 < 0$. Hay pues dos casos: (1) $x \leq -1/2$ o $x \geq 1/2$ y (2) $-1/2 < x < 1/2$.
(1) Supongamos que $x \leq -1/2$ o $x \geq 1/2$, entonces en esta región la inecuación se escribe como sigue

$$\begin{aligned} 4x^2 - 1 &< x^2 \\ 3x^2 &< 1 \\ x^2 &< \frac{1}{3} \end{aligned}$$

cuyas soluciones son

$$-1/\sqrt{3} < x < 1/\sqrt{3}$$

como puede deducirse en seguida a partir de la gráfica de la parábola $y = x^2$. Por tanto, las soluciones que están dentro de la región considerada son

$$-1/\sqrt{3} < x \leq -1/2 \quad \text{o} \quad 1/2 \leq x < 1/\sqrt{3} \tag{3}$$

(2) Supongamos ahora que $-1/2 < x < 1/2$, entonces en esta región la inecuación se escribe como sigue

$$\begin{aligned} -(4x^2 - 1) &< x^2 \\ -4x^2 + 1 &< x^2 \\ 1 &< 5x^2 \\ \frac{1}{5} &< x^2 \end{aligned}$$

cuyas soluciones son

$$-1/\sqrt{5} > x > 1/\sqrt{5}$$

como puede deducirse en seguida a partir de la gráfica de la parábola $y = x^2$. De las soluciones obtenidas, sólo están dentro de la región considerada las que indicamos a continuación

$$1/\sqrt{5} < x < 1/2 \qquad \text{o} \qquad -1/2 < x < -1/\sqrt{5} \tag{4}$$

En resumen, juntando las soluciones (3) y (4), obtenemos que las soluciones de la inecuación dada son todos los números reales de la siguiente unión de intervalos abiertos

$$\left(-1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{5}\right) \cup \left(1/\sqrt{5}, 1/\sqrt{3}\right)$$

■