Teoría

Índice

1. Potencias enteras de números reales **1**
1.1. Potencias de exponente natural 1
1.1.1. Propiedades 2
1.2. Potencias de exponente entero 4
1.3. Notación científica 5

2. Raíces de números reales **5**
2.1. Raíces cuadradas 6
2.2. Raices cúbicas 6
2.3. Raíces enésimas 7
2.4. Cálculo de raíces 8
2.4.1. Algoritmo para extraer raíces cuadradas 8
2.4.2. Cálculo de raíces con calculadora 10
2.4.3. Cálculo de raíces exactas por descomposición 10
2.4.4. Cálculo de raíces por tanteo 11

3. Cálculo con radicales **11**
3.1. Propiedades de las operaciones con raíces 12
3.1.1. Raíz de un producto 12
3.1.2. Potencia de una raíz 13
3.1.3. Raíz de un cociente 13
3.1.4. Raíz de una raíz 14
3.2. Radicales equivalentes 15
3.3. Introducción y extracción de factores en una raíz 16
3.4. Suma de raíces 17
3.5. Racionalización de denominadores 18
3.6. Potencias de exponente racional 19
3.6.1. Propiedades de las potencias de exponente racional 20

1. Potencias enteras de números reales

En esta sección daremos las propiedades de las potencias de números reales con exponente natural y veremos también cómo se extiende el concepto formal de potencia de exponente natural al de exponente entero. Aunque no lo demostraremos, hay que saber que las propiedades dadas para las potencias de exponente natural se extienden sin dificultad a las de potencias con exponente entero.

1.1. Potencias de exponente natural

Si a es un número real y n es un número natural, se llama **potencia n-ésima** de a, y la designamos por a^n, al resultado de multiplicar a consigo mismo n veces, es decir,

$$a^n = \overbrace{a \cdot \cdots \cdot a}^{n \text{ veces}}$$

En la expresión a^n, el número a se llama **base**, y n, **exponente**.
Por ejemplo,

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^3 = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8}$$

1.1.1. Propiedades

1. **Producto de potencias**: el producto de potencias de la misma base es otra potencia de la misma base y de exponente la suma de los exponentes, es decir,

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

En efecto,

$$\begin{aligned} a^n \cdot a^m &= \overbrace{(a \cdot \cdots \cdot a)}^{n \text{ veces}} \cdot \overbrace{(a \cdot \cdots \cdot a)}^{m \text{ veces}} \\ &= \overbrace{a \cdot \cdots \cdot a}^{n+m \text{ veces}} \\ &= a^{n+m} \end{aligned}$$

Por ejemplo,

$$2^3 \cdot 2^2 = 2^{3+2} = 2^5$$

2. **Cociente de potencias**: el cociente de potencias de la misma base es otra potencia de la misma base y de exponente la diferencia de los exponentes, es decir,

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

siempre que $a \neq 0$ y $n > m$.

En efecto, suponiendo que $a \neq 0$ y $n > m$, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{a^n}{a^m} &= \frac{\overbrace{a \cdot \cdots \cdot a}^{n \text{ veces}}}{\overbrace{a \cdot \cdots \cdot a}^{m \text{ veces}}} \\ &= \frac{\overbrace{a \cdot \cdots \cdot a}^{n-1 \text{ veces}}}{\overbrace{a \cdot \cdots \cdot a}^{m-1 \text{ veces}}} \\ &\vdots \\ &= \overbrace{a \cdot \cdots \cdot a}^{n-m \text{ veces}} \\ &= a^{n-m} \end{aligned}$$

Por ejemplo,

$$\begin{aligned} \frac{3^7 \cdot 3^2}{3^5} &= \frac{3^{7+2}}{3^5} \\ &= \frac{3^9}{3^5} \\ &= 3^4 \end{aligned}$$

En particular, si $m = n$, entonces

$$\frac{a^n}{a^n} = 1$$

pero, por otra parte, teniendo presente la propiedad anterior, tenemos

$$\frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0$$

Por tanto, debe ser

$$a^0 = 1$$

siempre que $a \neq 0$.

3. **Potencia de una potencia**: la potencia de una potencia es otra potencia de la misma base y de exponente el producto de los exponentes, es decir,

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

En efecto,

$$\begin{aligned} (a^n)^m &= \overbrace{a^n \cdot \cdots \cdot a^n}^{m \text{ veces}} \\ &= a^{\overbrace{n + \cdots + n}^{m \text{ veces}}} \\ &= a^{n \cdot m} \end{aligned}$$

Por ejemplo,

$$\begin{aligned} \left(\frac{2^3 \cdot 2^4}{2^5}\right)^3 &= \left(\frac{2^7}{2^5}\right)^3 \\ &= \left(2^2\right)^3 \\ &= 2^6 \end{aligned}$$

4. **Potencia de un producto**: la potencia n-ésima de un producto es el producto de las potencias n-ésimas de los factores, es decir,

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

En efecto,

$$\begin{aligned} (a \cdot b)^n &= \overbrace{(a \cdot b) \cdot \cdots \cdot (a \cdot b)}^{n \text{ veces}} \\ &= \overbrace{(a \cdot \cdots \cdot a)}^{n \text{ veces}} \cdot \overbrace{(b \cdot \cdots \cdot b)}^{n \text{ veces}} \\ &= a^n \cdot b^n \end{aligned}$$

En particular, tenemos

$$(-a)^n = [(-1) \cdot a]^n = (-1)^n \cdot a^n = \begin{cases} a^n & \text{si } n \text{ es par} \\ -a^n & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Por ejemplo,

$$\begin{aligned} \left[(-2)^3 \cdot 3^2\right]^4 &= \left[(-2)^3\right]^4 \cdot \left(3^2\right)^4 \\ &= (-2)^{12} \cdot 3^8 \\ &= 2^{12} \cdot 3^8 \end{aligned}$$

5. **Potencia de un cociente**: la potencia n-ésima de un cociente es el cociente de las potencias n-ésimas del numerador y del denominador, es decir,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

siempre que $b \neq 0$.

En efecto,

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{b}\right)^n &= \overbrace{\frac{a}{b} \cdot \cdots \cdot \frac{a}{b}}^{n \text{ veces}} \\ &= \frac{\overbrace{(a \cdot \cdots \cdot a)}^{n \text{ veces}}}{\overbrace{(b \cdot \cdots \cdot b)}^{n \text{ veces}}} \\ &= \frac{a^n}{b^n} \end{aligned}$$

Por ejemplo,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{2^3\cdot(-3)^5}{(-2)^2\cdot 3^2}\right)^4 &= \frac{\left[2^3\cdot(-3)^5\right]^4}{\left[(-2)^2\cdot 3^2\right]^4}\\
&= \frac{\left(2^3\right)^4\cdot\left[(-3)^5\right]^4}{\left[(-2)^2\right]^4\cdot\left(3^2\right)^4}\\
&= \frac{2^{12}\cdot(-3)^{20}}{(-2)^8\cdot 3^8}\\
&= \frac{2^{12}\cdot 3^{20}}{2^8\cdot 3^8}\\
&= 2^4\cdot 3^{12}
\end{aligned}$$

1.2. Potencias de exponente entero

Para extender el concepto formal de potencia de exponente natural al de exponente entero y negativo, debemos observar el hecho siguiente:

$$a^{-n}=a^{0-n}=\frac{a^0}{a^n}=\frac{1}{a^n}$$

donde n es un número natural y a es un número real distinto de cero. Este hecho justifica la siguiente definición: si n es un número natural y a es un número real distinto de cero, se llama **potencia de exponente** $-n$ al número designado por a^{-n} que se define por

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n}$$

Como consecuencia de esta definición tenemos que, si n y m son números naturales, entonces

$$\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$$

aún cuando m sea mayor que n.
No es difícil demostrar que las propiedades de las potencias de exponente natural son también válidas para las potencias de exponente entero.
Por ejemplo,

$$\begin{aligned}
\frac{\left[\left(\frac{2}{3}\right)^4:\left(\frac{2}{3}\right)^3\right]^{-1}}{\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}} &= \frac{\left[\left(\frac{2}{3}\right)^4\right]^{-1}:\left[\left(\frac{2}{3}\right)^3\right]^{-1}}{\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}}\\
&= \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}:\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}}{\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}}\\
&= \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{-4-(-3)}}{\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}}\\
&= \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}}{\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}}\\
&= \left(\frac{2}{3}\right)^{-1-(-2)}\\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Veremos en otro apartado que, una vez introducido el concepto de raíz n-ésima, podremos extender aún más el concepto de potencia, ampliando el campo de validez de las propiedades ya estudiadas al de las potencias de exponente racional.

1.3. Notación científica

Si tu calculadora tiene la tecla x^y podrás calcular potencias directamente. Por ejemplo, para calcular 3^5 has de teclear

$$3 \qquad x^y \qquad 5 \qquad = \qquad \text{y obtendrás} \qquad 243$$

Sin embargo, cuando los resultados de las potencias son números en valor absoluto muy grandes o muy pequeños las calculadoras muestran los resultados en notación científica. Por ejemplo, al calcular la potencia 100^{10}

$$100 \qquad x^y \qquad 10 \qquad = \qquad \text{obtendrás} \qquad 1\ ^{20}$$

que significa

$$1 \times 10^{20}$$

Un número en **notación científica** se representa como un número comprendido entre 1 y 9 multiplicado por una potencia de 10 con exponente entero. En el campo de las ciencias experimentales es muy habitual expresar cantidades en notación científica. Por ejemplo, el número de Avogadro

$$6{,}02 \times 10^{23}$$

o la masa del protón en gramos

$$1{,}9 \times 10^{-24}$$

son dos números en notación científica que representan valores aproximados de los valores reales de las magnitudes medidas en cada caso. Observa que la potencia de 10 nos da rápidamente una idea del orden de magnitud del número y el número de cifras con que se escribe el número se corresponde con el grado de precisión que se quiera dar a la medida. En general, utilizaremos esta notación para facilitar la lectura y el manejo de números muy grandes o muy pequeños en valor absoluto.

Si se quiere introducir un número en notación científica en una calculadora, usaremos la tecla EXP para poner el exponente de la potencia. Por ejemplo, $1{,}9 \times 10^{-24}$ se introduce tecleando

$$1{,}9 \qquad \text{EXP} \qquad 24 \qquad +/- \qquad \text{y aparecerá} \qquad 1{,}9\ ^{-24}$$

2. Raíces de números reales

En la sección anterior aprendimos a calcular potencias n-ésimas de números reales y ahora nos planteamos el problema inverso: dado un número real a queremos encontrar otro, x, cuya potencia n-ésima sea igual a a, es decir, queremos resolver la ecuación

$$x^n = a$$

En esta sección veremos que esta ecuación tiene siempre solución si a es no negativo; sus soluciones se obtienen a partir del cálculo de la raíz n-ésima de a que se designa por el radical $\sqrt[n]{a}$. Veremos también que el problema inverso queda resuelto si limitamos nuestra atención a las potencias con base un número real positivo x, verificándose entonces

$$\sqrt[n]{a} = x \quad \Longleftrightarrow \quad a = x^n$$

En tal caso, al cálculo inverso de la potenciación se le llama radicación.

$$\sqrt[n]{a} = x \quad \overset{\text{Potenciación}}{\Longrightarrow} \quad a = x^n$$

$$\sqrt[n]{a} = x \quad \overset{\text{Radicación}}{\Longleftarrow} \quad a = x^n$$

2.1. Raíces cuadradas

La diagonal de un cuadrado cuyo lado mide una unidad de longitud es un número real positivo que satisface la ecuación

$$x^2 = 2$$

Sabemos que este número es irracional y, por tanto, sólo podremos escribirlo de forma aproximada porque su expresión decimal tiene infinitas cifras decimales no periódicas. Aunque sea imposible conocerlo de forma exacta, sabemos que hay métodos para encontrar su valor con el grado de aproximación que se quiera (mediante calculadora o por aproximaciones sucesivas de números racionales o bien por el algoritmo clásico de extracción de raíces cuadradas). No obstante, podemos expresarlo en forma exacta mediante el símbolo del **radical** $\sqrt{}$ por $\sqrt{2}$. La expresión $\sqrt{2}$ se llama **raíz cuadrada** de 2. Al escribir $\sqrt{2}$ nos referimos al número en su forma exacta, es decir, al número que elevado al cuadrado da 2, es decir,

$$\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$$

Ahora bien, la ecuación $x^2 = 2$ tiene dos soluciones: la raíz cuadrada positiva, $\sqrt{2}$, y la raíz cuadrada negativa, $-\sqrt{2}$, pues, se cumple

$$\begin{aligned} \left(-\sqrt{2}\right)^2 &= \left(-\sqrt{2}\right) \cdot \left(-\sqrt{2}\right) \\ &= \left(\sqrt{2}\right)^2 \\ &= 2 \end{aligned}$$

Observamos que las ecuaciones como, por ejemplo, $x^2 = -1$ no tienen solución porque el cuadrado de un número real nunca es negativo. Por tanto, las expresiones $\sqrt{-1}$ y $-\sqrt{-1}$ no tienen sentido ya que no representan ningún número real.
En general, las ecuaciones de la forma

$$x^2 = a$$

en donde a es un número real positivo, tienen dos soluciones: $\sqrt{a}$ y $-\sqrt{a}$. Escribimos

$$x^2 = a \quad \Longrightarrow \quad x = \pm\sqrt{a}$$

Ejemplos

1. $\sqrt{16} = 4$ y $-\sqrt{16} = -4$, ya que $4^2 = 16$. Por tanto, las soluciones de la ecuación $x^2 = 16$ son $x = \pm 4$
2. Si $\sqrt{a} = 13$, entonces $a = 13^2 = 169$
3. Si $-\sqrt{a} = -1{,}1$, entonces $a = (1{,}1)^2 = 1{,}21$
4. Si $\sqrt{2x} = 4$, entonces $2x = 4^2 = 16$ y, por tanto, $x = 8$
5. $\left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$ y $\left(\sqrt{5}\right)^3 = \left(\sqrt{5}\right)^2 \sqrt{5} = 5\sqrt{5}$
6. $\left(3\sqrt{7}\right)^2 = 3^2 \left(\sqrt{7}\right)^2 = 9 \cdot 7 = 63$
7. Si $\sqrt{2x-1} = 5$, entonces $2x - 1 = 5^2 = 25$ y, por tanto, $2x = 26$ y, en consecuencia, $x = 13$

2.2. Raices cúbicas

La arista de un cubo cuyo volumen es tres unidades cúbicas es un número real positivo x que satisface la ecuación

$$x^3 = 3$$

Puede demostrarse que también es un número irracional y, por tanto, su valor numérico sólo podrá calcularse de forma aproximada. Sin embargo, al igual que antes, podemos expresarlo de forma exacta mediante el símbolo del radical $\sqrt[3]{}$ por $\sqrt[3]{3}$. Esta expresión se llama **raíz cúbica** de 3, y con ella nos referimos al número que elevado al cubo da 3, es decir,

$$\left(\sqrt[3]{3}\right)^3 = 3$$

Ahora, las ecuaciones como, por ejemplo,

$$x^3 = -8$$

sí que tienen solución y, en este caso se escribe como

$$x = \sqrt[3]{-8} = -2$$

ya que

$$(-2)^3 = -8$$

En general, la ecuación

$$x^3 = a$$

en donde a es cualquier número real, tiene una única solución que expresamos como

$$x = \sqrt[3]{a}$$

Ejemplos:

1. $\sqrt[3]{-64} = -4$, pues $(-4)^3 = -64$
2. Si $\sqrt[3]{2x} = 4$, entonces $2x = 4^3 = 64$ y, por tanto, $x = 32$
3. $\left(\sqrt[3]{5}\right)^3 = 5$ y $\left(\sqrt[3]{3}\right)^4 = \left(\sqrt[3]{3}\right)^3 \sqrt[3]{3} = 3\sqrt[3]{3}$
4. $\left(2\sqrt[3]{5}\right)^3 = 2^3 \left(\sqrt[3]{5}\right)^3 = 8 \cdot 5 = 40$

2.3. Raíces enésimas

En general, podemos encontrarnos con ecuaciones de la forma

$$x^n = a$$

en donde n es un número natural mayor que 1 y $a \in \mathbb{R}$. Si n es par y a es positivo, la ecuación admite dos soluciones que se expresan en forma exacta mediante los radicales $\sqrt[n]{a}$ y $-\sqrt[n]{a}$. Al radical $\sqrt[n]{a}$ se le llama **raíz n-ésima positiva** de a, y a $-\sqrt[n]{a}$, **raíz n-ésima negativa** de a; n se llama **índice** de la raíz y a se llama **radicando**. Con estas expresiones nos referimos a los números reales cuya potencia n-ésima es igual a a

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = \left(-\sqrt[n]{a}\right)^n = a$$

Como habrás observado en seguida, los números reales negativos no tienen raíces de índice par. Si n es impar y a es cualquier número real, la ecuación admite una sola solución que se expresa por $\sqrt[n]{a}$; $\sqrt[n]{a}$ será un número real negativo si a es negativo, pues al ser n impar y verificarse que

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$$

entonces $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n$ es negativo y de aquí, por las reglas de los signos, deducimos que $\sqrt[n]{a}$ ha de ser también negativo.

De la definición de raíz n-ésima se deduce en seguida la siguiente propiedad

$$\sqrt[n]{a} = x \quad \Longrightarrow \quad x^n = a$$

En efecto, si $\sqrt[n]{a} = x$, entonces

$$x^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$$

El recíproco de esta propiedad es falso, pues, por ejemplo,

$$2^2 = (-2)^2 = 4$$

y, por tanto, podríamos escribir $\sqrt{4} = 2$ y $\sqrt{4} = -2$, lo cual no es posible ya que $-2 \neq 2$. Esta contradicción se debe al hecho de que al efectuar potencias de exponente par, por las reglas de los signos, los números reales positivos y negativos se confunden. Sin embargo, si limitamos nuestra atención a las potencias con base un número real positivo, entonces se cumple el recíproco

$$\sqrt[n]{a} = x \quad \Longleftrightarrow \quad x^n = a$$

En otras palabras, decir que a es la potencia n-ésima de un número real positivo x equivale a decir que x es la raíz n-ésima de a. Hemos definido así un proceso de cálculo inverso al de la potenciación con exponentes naturales. A este procedimento se le llama **radicación** y consiste en extraer la raíz n-ésima de un número positivo. Al resultado de efectuar este proceso se le llama raíz n-ésima de ese número.
Ejemplos:

1. $\sqrt{16} = 4$, ya que $4^2 = 16$, pero también $\sqrt{16} = -4$, ya que $(-4)^2 = 16$
2. $\sqrt[3]{27} = 3$, ya que $3^3 = 27$
3. $\sqrt[5]{-32} = -2$ ya que $(-2)^5 = 32$
4. $\sqrt{-16}$ no es un número real, pues según las reglas de los signos en la multiplicación de los números reales, no hay ningún número real cuyo cuadrado sea negativo
5. $\sqrt[3]{8a^6b^3} = 2a^2b$, ya que $(2a^2b)^3 = 8a^6b^3$
6. $\sqrt{\frac{25a^2}{b^4}} = \frac{5a}{b^2}$, ya que $\left(\frac{5a}{b^2}\right)^2 = \frac{25a^2}{b^4}$

2.4. Cálculo de raíces

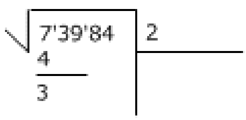
El cálculo de raíces es inmediato si se dispone de calculadora. El cálculo sin calculadora será sencillo si la raíz es exacta, pues, bastará con efectuar la descomposición factorial del número y, después aplicar la definición de raíz. Si la raíz no es exacta, siempre podrá aproximarse por tanteo hasta un cierto grado mediante el uso de las operaciones elementales. Sin embargo, el método por tanteo es largo y pesado. En su lugar, se aplican algoritmos de cálculo, como el que se conoce para extraer la raíz cuadrada de un número, o también métodos iterativos de aproximación; en realidad, las calculadoras científicas tienen implementado uno de estos procedimientos iterativos para que de forma automática calcule la raíz de cualquier índice. No trataremos por el momento estos últimos enfoques de cálculo de raíces.

2.4.1. Algoritmo para extraer raíces cuadradas

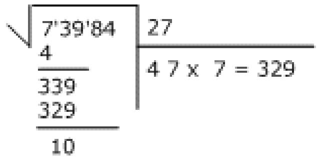
Si se dispone de una calculadora con la tecla $\sqrt{\ }$ el resultado es inmediato. Si no se dispone de calculadora, en los ejemplos que siguen se explica cómo se extrae la raíz cuadrada de un número por el algoritmo ordinario.

Ejemplo: Raíz cuadrada de 73984

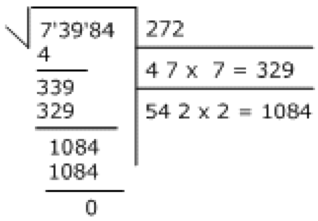
Se separa el número en bloques de 2 cifras empezando por las unidades y se busca un número (en este caso es 2) cuyo cuadrado sea menor o igual que el primer bloque (en este caso es 7). Ahora se efectúa la resta indicada, resultando 3.



De este modo hemos obtenido la primera cifra de la raíz.
Ahora, se baja el bloque siguiente (en este caso es 39) y se duplica el número encontrado en el paso anterior (en este caso es $2 \cdot 2 = 4$). Entonces se busca la cifra (en este caso es 7) que, colocada después del doble del número encontrado en el paso anterior forme un número que multiplicado por esta cifra resulte un número menor o igual que el número que resulta después de haber bajado el siguiente bloque (en este caso 339). Ahora se efectúa la resta indicada, resultando 10.



De este modo hemos obtenido la siguiente cifra de la raíz.
Se repite de nuevo este proceso hasta que no se puedan bajar más bloques. Si la última resta efectuada tiene como resultado 0, la raíz cuadrada es exacta. De lo contrario, el valor de la raíz será un número decimal. En nuestro caso, obtenemos que la raíz cuadrada es exacta y su valor es 272 como se indica a continuación

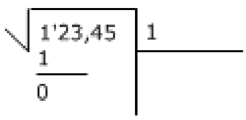


Podemos comprobar el resultado mediante la calculadora, tecleando

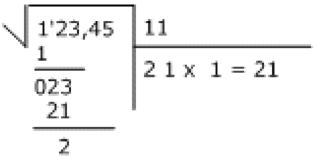
73984 $\sqrt{\ }$ = y obtendrás 272

Ejemplo: Raíz cuadrada de $123,45$ con cuatro cifras decimales

Se separa el número en bloques de 2 cifras empezando por las unidades (desde la coma) y se busca un número (en este caso es 1) cuyo cuadrado sea menor o igual que el primer bloque (en este caso es 1). Ahora se efectúa la resta indicada, resultando 0.



De este modo hemos obtenido la primera cifra de la raíz.
Ahora, se baja el bloque siguiente (en este caso es 23) y se duplica el número encontrado en el paso anterior (en este caso es $2 \cdot 1 = 2$). Entonces se busca la cifra (en este caso es 1) que, colocada después del doble del número encontrado en el paso anterior forme un número que multiplicado por esta cifra resulte un número menor o igual que el número que resulta después de haber bajado el siguiente bloque (en este caso 23). Ahora se efectúa la resta indicada, resultando 2.



De este modo hemos obtenido la siguiente cifra de la raíz.
En este caso, al bajar el bloque siguiente, tropezamos antes con la coma. Esto quiere decir, que en el valor de la raíz habrá que colocar también la coma. Entonces, a partir de la última cifra decimal del número habrá que añadir ceros hasta lograr que el número de bloques de dos cifras a partir de la coma sea el número de cifras decimales con el que queremos encontrar la raíz. En este caso habrá que añadir 6 ceros. A partir de aquí, repetiremos de nuevo el proceso hasta que no se puedan bajar más bloques.

```
√ 1'23,45'00'00'00 | 11'1108
  1                | 2 1 x  1 = 21
  023              | 22 1 x 1 = 221
   21              | 222 1 x 1 = 2221
    245            | 22220 8 x 8 = 1777664
    221            |
     2400          |
     2221          |
      1790000      |
      1777664      |
       123336      |
```

Observamos que hay un paso en el que no hay ninguna cifra que, colocada después del doble del número encontrado en el paso anterior (en este caso es 2222) forme un número que sea menor o igual que el número que resulta después de haber bajado el siguiente bloque (en este caso es 17900). Entonces se bajará el siguiente bloque y se colocará 0 como la siguiente cifra decimal de la raíz. Podemos comprobar el resultado mediante la calculadora, tecleando

123,45 $\quad \sqrt{} \quad = \quad$ y obtendrás $\quad$ 11,11080555

cuya aproximación por defecto con 4 cifras decimales coincide con nuestro resultado.

2.4.2. Cálculo de raíces con calculadora

Si tu calculadora tiene la tecla con la función $x^{1/y}$, para calcular $\sqrt[3]{3796416}$ has de teclear

3796416 $\quad x^{1/y} \quad$ 3 $\quad = \quad$ y obtendrás $\quad$ 156

Del mismo modo, para calcular $\sqrt[5]{217{,}4}$ debes teclear

217,4 $\quad x^{1/y} \quad$ 5 $\quad = \quad$ y obtendrás $\quad$ 2,933944593

Si no tiene la tecla $x^{1/y}$ pero sí tiene la tecla para la potencia x^y, también podemos calcular las raíces anteriores de la siguiente manera

3796416 $\quad x^y \quad$ 3 $\quad 1/x \quad = \quad$ 156

217,4 $\quad x^y \quad$ 5 $\quad 1/x \quad = \quad$ 2,933944593

2.4.3. Cálculo de raíces exactas por descomposición

Por ejemplo, para calcular $\sqrt[3]{3796416}$ por descomposición, primero descomponemos el radicando en factores primos

3796416	2
1898208	2
949104	2
474552	2
237276	2
118638	2
59319	3
19773	3
6591	3
2197	13
169	13
13	13
1	

resultando

$$3796416 = 2^6 \cdot 3^3 \cdot 13^3$$

Ahora bien, por las propiedades de las potencias, podemos escribir también

$$\begin{aligned} 3796416 &= (2^2 \cdot 3 \cdot 13)^3 \\ &= 156^3 \end{aligned}$$

Por tanto, tenemos

$$\sqrt[3]{3796416} = \sqrt[3]{156^3} = 156$$

Del mismo modo, para calcular $\sqrt{0{,}0064}$, primero observamos que

$$0{,}0064 = 64 \cdot 10^{-4} = 2^6 \cdot 10^{-4} = (2^3 \cdot 10^{-2})^2$$

y, por tanto,

$$\sqrt{0{,}0064} = 2^3 \cdot 10^{-2} = 0{,}08$$

2.4.4. Cálculo de raíces por tanteo

Para calcular por tanteo una raíz como, por ejemplo, $\sqrt[3]{5{,}23}$, primero observamos que

$$1 < \sqrt[3]{5{,}23} < 2$$

pues

$$1^3 = 1 < 5{,}23 < 8 = 2^3$$

De este modo, sabemos que

$$\sqrt[3]{5{,}23} = 1.\cdots$$

Ahora, encontraremos la cifra de las décimas también por tanteo. Observa los cálculos siguientes:

$$\begin{gathered} 1{,}5^3 = 3{,}375 < 5{,}23 \\ 1{,}6^3 = 4{,}096 < 5{,}23 \\ 1{,}7^3 = 4{,}913 < 5{,}23 \\ 1{,}8^3 = 5{,}832 > 5{,}23 \end{gathered}$$

A partir de aquí, es claro que

$$1{,}7 < \sqrt[3]{5{,}23} < 1{,}8$$

y, por tanto, sabemos que

$$\sqrt[3]{5{,}23} = 1{,}7\ \cdots$$

Del mismo modo se encontrarán las demás cifras decimales. Así, para las centesimas tenemos

$$\begin{gathered} 1{,}75^3 = 5{,}359375 > 5{,}23 \\ 1{,}74^3 = 5{,}268024 > 5{,}23 \\ 1{,}73^3 = 5{,}177717 < 5{,}23 \end{gathered}$$

y, por tanto, obtenemos que

$$\sqrt[3]{5{,}23} = 1{,}73\ \cdots$$

3. Cálculo con radicales

En el cálculo con raíces o con expresiones que las contienen se pueden aplicar las propiedades usuales de las operaciones con números reales y ciertas propiedades que veremos en este apartado. Al cálculo hecho de este modo, sin utilizar valores aproximados de los números irracionales que aparecen (es decir, expresándolos en forma exacta como radicales), se le suele llamar **cálculo con radicales**.
Las propiedades de las operaciones con radicales son:

1. Producto

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

2. Potencia

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

3. Cociente
$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

4. Radicación
$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$$

Además, para el cálculo con radicales, será conveniente conocer las siguientes técnicas:

1. Obtención de radicales semejantes
$$\sqrt[mn]{a^m} = \sqrt[n]{a}$$

2. Simplificación de radicales
$$\sqrt[n]{a^{pn+q} \cdot b} = a^p \cdot \sqrt[n]{a^q \cdot b}$$

3. Suma y resta de radicales

4. Racionalización de denominadores

3.1. Propiedades de las operaciones con raíces

Para probar las propiedades siguientes utilizaremos las propiedades de las potencias de exponente natural, la definición de raíz n-ésima según la cual $\sqrt[n]{a} = b$ si $b^n = a$ y la propiedad fundamental

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$$

siempre que la raíz tenga sentido.

3.1.1. Raíz de un producto

Esta propiedad se expresa diciendo que la raíz de un producto es igual al producto de las raíces. En términos más formales: para todo $a, b \in \mathbb{R}$ y para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

siempre que las tres raíces tengan sentido.
En efecto,

$$\begin{aligned} \left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\right)^n &= \left(\sqrt[n]{a}\right)^n \cdot \left(\sqrt[n]{b}\right)^n \\ &= a \cdot b \end{aligned}$$

Por la propiedad asociativa de la multiplicación, esta propiedad puede extenderse a más de dos factores. Por ejemplo, para tres factores, tenemos

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{a \cdot b \cdot c} &= \sqrt[n]{a \cdot (b \cdot c)} \\ &= \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b \cdot c} \\ &= \sqrt[n]{a} \cdot \left(\sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c}\right) \\ &= \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c} \end{aligned}$$

Ejemplos:

1.
$$\begin{aligned} \sqrt[4]{32a^4} \cdot \sqrt[4]{2a^2} \cdot \sqrt[4]{4a^2} &= \sqrt[4]{32a^4 \cdot 2a^2 \cdot 4a^2} \\ &= \sqrt[4]{256a^8} \\ &= \sqrt[4]{2^8 a^8} \\ &= \sqrt[4]{(2a)^8} \\ &= (2a)^2 \\ &= 4a^2 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\left(2\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2 &= \left(2\sqrt{5}\right)^2 - 2\cdot 2\sqrt{5}\cdot\sqrt{3} + \left(\sqrt{3}\right)^2\\ &= 4\sqrt{5^2} - 4\sqrt{15} + \sqrt{3^2}\\ &= 20 - 4\sqrt{15} + 3\\ &= 23 - 4\sqrt{15}\end{aligned}$$

3.1.2. Potencia de una raíz

De la propiedad del producto de raíces se obtiene de forma inmediata la propiedad de la potencia de una raíz que se expresa diciendo que la potencia de una raíz es la raíz de la potencia, es decir,

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

siempre que las dos raíces tengan sentido.
En efecto,

$$\begin{aligned}\left(\sqrt[n]{a}\right)^m &= \overbrace{\sqrt[n]{a}\cdot\dots\cdot\sqrt[n]{a}}^{m \text{ factores}}\\ &= \sqrt[n]{\overbrace{a\cdot\dots\cdot a}^{m \text{ factores}}}\\ &= \sqrt[n]{a^m}\end{aligned}$$

Ejemplos:

1.

$$\begin{aligned}\left(\sqrt[4]{729}\right)^2 &= \left(\sqrt[4]{3^6}\right)^2\\ &= \sqrt[4]{\left(3^6\right)^2}\\ &= \sqrt[4]{3^{12}}\\ &= 3^3 = 27\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\left(\sqrt[3]{9a^2b}\right)^2\left(\sqrt[3]{3ab^2}\right)^2 &= \sqrt[3]{\left(9a^2b\right)^2}\,\sqrt[3]{\left(3ab^2\right)^2}\\ &= \sqrt[3]{81a^4b^2}\,\sqrt[3]{9a^2b^4}\\ &= \sqrt[3]{\left(81a^4b^2\right)\left(9a^2b^4\right)}\\ &= \sqrt[3]{729a^6b^6}\\ &= \sqrt[3]{\left(3ab\right)^6}\\ &= \left(3ab\right)^2 = 9a^2b^2\end{aligned}$$

3.1.3. Raíz de un cociente

Esta propiedad se expresa diciendo que la raíz de un cociente es igual al cociente de las raíces. En término más formales: para todo $a, b \in \mathbb{R}$ con $b \neq 0$ y para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

siempre que las tres raíces tengan sentido.
En efecto,

$$\begin{aligned}\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n &= \frac{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n}{\left(\sqrt[n]{b}\right)^n}\\ &= \frac{a}{b}\end{aligned}$$

Ejemplos:

1.

$$\frac{\sqrt[4]{8x^2y}}{\sqrt[4]{2xy^2}} = \sqrt[4]{\frac{8x^2y}{2xy^2}} = \sqrt[4]{\frac{4x}{y}}$$

2.

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt[3]{3a}\,\sqrt[3]{9a^4}}{\sqrt[3]{3a^2}} &= \frac{\sqrt[3]{(3a)\,(9a^4)}}{\sqrt[3]{3a^2}}\\ &= \frac{\sqrt[3]{27a^5}}{\sqrt[3]{3a^2}}\\ &= \sqrt[3]{\frac{27a^5}{3a^2}}\\ &= \sqrt[3]{9a^3}\\ &= \sqrt[3]{9}\,\sqrt[3]{a^3}\\ &= a\sqrt[3]{9}\end{aligned}$$

3.1.4. Raíz de una raíz

Esta propiedad se expresa afirmando que la raíz de una raíz es otra raíz que tiene como índice el producto de los índices de las raíces, es decir,

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$$

siempre que las tres raíces tengan sentido.
En efecto,

$$\begin{aligned}\left(\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}\right)^{nm} &= \left[\left(\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}\right)^{n}\right]^{m}\\ &= \left(\sqrt[m]{a}\right)^{m}\\ &= a\end{aligned}$$

Ejemplos:

1.

$$\frac{\sqrt[3]{\sqrt{ab}}}{\sqrt{\sqrt[3]{ab}}} = \frac{\sqrt[6]{ab}}{\sqrt[6]{ab}} = 1$$

2.

$$\begin{aligned}\left(\sqrt[4]{\sqrt[3]{729}}\right)^{3} &= \left(\sqrt[12]{729}\right)^{3}\\ &= \left(\sqrt[12]{3^6}\right)^{3}\\ &= \sqrt[12]{(3^6)^3}\\ &= \sqrt[12]{3^{18}}\\ &= \sqrt[12]{3^{12}\cdot 3^6}\\ &= \sqrt[12]{3^{12}}\,\sqrt[12]{3^6}\\ &= 3\sqrt[12]{3^6}\\ &= 3\sqrt{3}\end{aligned}$$

3.2. Radicales equivalentes

Observa que se cumple

$$3 = \sqrt{9} = \sqrt[3]{27} = \sqrt[4]{81}$$

es decir, el número 3 está representado por diferentes radicales. Se dice entonces que estos radicales son equivalentes. Dos radicales se llaman **equivalentes** cuando tienen las mismas raíces.
Para obtener un radical equivalente a uno dado tenemos la siguiente propiedad

$$\sqrt[mn]{a^m} = \sqrt[n]{a}$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \left(\sqrt[mn]{a^m}\right)^n &= \sqrt[mn]{(a^m)^n} \\ &= \sqrt[mn]{a^{mn}} \\ &= a \end{aligned}$$

Con esta propiedad, vemos que

$$\sqrt[3]{2^2} = \sqrt[6]{2^4} = \sqrt[9]{2^6} = \sqrt[12]{2^8} = \sqrt[15]{2^{10}}$$

y, en general, esta propiedad permitirá simplificar radicales, reducirlos a índice común y compararlos.
Ejemplos:

- **Simplificación de radicales:**

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{a^{12}\sqrt[4]{b^{24}}} &= \sqrt[4]{a^{12}} \cdot \sqrt[4]{\sqrt[4]{b^{24}}} \\ &= \sqrt[3]{a^3} \cdot \sqrt[16]{b^{24}} \\ &= a\sqrt{b^3} \\ &= a\sqrt{b^2}\sqrt{b} \\ &= ab\sqrt{b} \end{aligned}$$

- **Reducción de radicales a índice común:** toda multiplicación y división con radicales de diferentes índices puede transformarse de manera que todos los radicales tengan el mismo índice. Una vez hecha esta transformación, efectuaremos las operaciones según las propiedades de las raíces.

  1.

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt[6]{2/3}}{\sqrt[3]{3/2}} &= \frac{\sqrt[6]{2/3}}{\sqrt[6]{(3/2)^2}} \\ &= \frac{\sqrt[6]{2/3}}{\sqrt[6]{9/4}} \\ &= \sqrt[6]{\frac{2/3}{9/4}} \\ &= \sqrt[6]{\frac{8}{27}} \\ &= \sqrt[6]{\frac{2^3}{3^3}} \\ &= \sqrt[6]{\left(\frac{2}{3}\right)^3} \\ &= \sqrt{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{ab}\sqrt{a\sqrt{b}}}{\sqrt{a\sqrt[3]{b}}} &= \frac{\sqrt{ab}\left(\sqrt{a}\sqrt{\sqrt{b}}\right)}{\sqrt{a}\sqrt{\sqrt[3]{b}}} \\
&= \frac{\sqrt{ab}\sqrt{a}\,\sqrt[4]{b}}{\sqrt{a}\,\sqrt[6]{b}} \\
&= \frac{\sqrt[12]{(ab)^6}\,\sqrt[12]{a^6}\,\sqrt[12]{b^3}}{\sqrt[12]{a^6}\,\sqrt[12]{b^2}} \\
&= \frac{\sqrt[12]{a^{12}b^9}}{\sqrt[12]{a^6b^2}} \\
&= \sqrt[12]{\frac{a^{12}b^9}{a^6b^2}} \\
&= \sqrt[12]{a^6b^7} \\
&= \sqrt[12]{a^6}\,\sqrt[12]{b^7} \\
&= \sqrt{a}\,\sqrt[12]{b^7}
\end{aligned}$$

- **Comparación de radicales:** Ordenar de menor a mayor los siguientes radicales

$$\sqrt[4]{5},\ \sqrt[6]{3^4},\ \sqrt[8]{7^5}$$

reduciéndolos a índice común y sabiendo que $mcm(4,6,8) = 24$, obtenemos

$$\sqrt[24]{5^6},\ \sqrt[24]{(3^4)^4},\ \sqrt[24]{(7^5)^3}$$

es decir,

$$\sqrt[24]{5^6},\ \sqrt[24]{3^{16}},\ \sqrt[24]{7^{15}}$$

Por tanto,

$$\sqrt[4]{5} = \sqrt[24]{5^6} < \sqrt[6]{3^4} = \sqrt[24]{3^{16}} < \sqrt[8]{7^5} = \sqrt[24]{7^{15}}$$

pues, una vez reducidos los radicales a común índice, estamos en condiciones de compararlos y ordenarlos, siendo mayor el radical que tenga mayor radicando.

3.3. Introducción y extracción de factores en una raíz

La formulación de esta propiedad viene dada por

$$\sqrt[n]{a^n \cdot b} = a\,\sqrt[n]{b}$$

siempre que las raíces tengan sentido. Leyendo de izquierda a derecha, se efectúa la **extracción** de un factor de la raíz y, de derecha a izquierda, se realiza la **introducción** de un factor en la raíz. En efecto,

$$\begin{aligned}
\left(a\,\sqrt[n]{b}\right)^n &= a^n\left(\sqrt[n]{b}\right)^n \\
&= a^n \cdot b
\end{aligned}$$

Podemos dar una formulación más general de esta propiedad escribiendo que

$$\sqrt[n]{a^{pn+q} \cdot b} = a^p \cdot \sqrt[n]{a^q \cdot b}$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
\left(a^p \cdot \sqrt[n]{a^q \cdot b}\right)^n &= a^{pn} \cdot \left(\sqrt[n]{a^q \cdot b}\right)^n \\
&= a^{pn} \cdot (a^q \cdot b) \\
&= a^{pn+q} \cdot b
\end{aligned}$$

Ejemplos:

- Extracción:

  1.

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{a^7} &= \sqrt[3]{a^{2\cdot 3+1}}\\ &= a^2\sqrt[3]{a}\end{aligned}$$

  2.

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{a^6b^8c^{12}} &= \sqrt[4]{a^{1\cdot 4+2}}\sqrt[4]{b^{2\cdot 4}}\sqrt[4]{c^{3\cdot 4}}\\ &= a\sqrt[4]{a^2}b^2c^3\\ &= ab^2c^3\sqrt{a}\end{aligned}$$

- Introducción:

  1.

$$\begin{aligned}2\cdot\sqrt[5]{3}\cdot 6\cdot\sqrt[7]{5} &= 2\cdot\sqrt[35]{3^7}\cdot 6\cdot\sqrt[35]{5^5}\\ &= \sqrt[35]{2^{35}}\cdot\sqrt[35]{3^7}\cdot\sqrt[35]{6^{35}}\cdot\sqrt[35]{5^5}\\ &= \sqrt[35]{2^{35}\cdot 3^7\cdot 6^{35}\cdot 5^5}\end{aligned}$$

  2.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}a^3b\sqrt{\frac{b^5}{a^4}} &= \sqrt{\frac{\left(a^3b\right)^2b^5}{2^2a^4}}\\ &= \sqrt{\frac{a^6b^7}{4a^4}}\\ &= \sqrt{\frac{a^2b^7}{4}}\end{aligned}$$

3.4. Suma de raíces

Es importante señalar que la raíz de una suma no es la suma de las raíces

$$\sqrt[n]{a+b}\neq\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}$$

Para probar este hecho, damos el siguiente ejemplo

$$\sqrt{9}=\sqrt{2+7}\neq\sqrt{2}+\sqrt{7}$$

ya que

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{2}+\sqrt{7}\right)^2 &= \left(\sqrt{2}\right)^2+2\sqrt{2}\sqrt{7}+\left(\sqrt{7}\right)^2\\ &= 9+2\sqrt{14}\neq 9\end{aligned}$$

En general, cuando tengamos una suma de raíces sólo podremos agrupar los radicales semejantes, utilizando la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma

$$b\sqrt[n]{a}+c\sqrt[n]{a}=(b+c)\sqrt[n]{a}$$

Ejemplos:

1.

$$\begin{aligned}\sqrt{45}-2\sqrt[3]{81}-3\sqrt{180}+\sqrt[3]{375}-\sqrt{80} &= \sqrt{5\cdot 3^2}-2\sqrt[3]{3^{3+1}}-3\sqrt{2^2\cdot 3^2\cdot 5}+\sqrt[3]{5^3\cdot 3}-\sqrt{2^{2\cdot 2}\cdot 5}\\ &= 3\sqrt{5}-2\cdot 3\sqrt[3]{3}-3\cdot 2\cdot 3\sqrt{5}+5\sqrt[3]{3}-2^2\sqrt{5}\\ &= (3-18-4)\sqrt{5}+(5-6)\sqrt[3]{3}\\ &= -19\sqrt{5}-\sqrt[3]{3}\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}5\sqrt[3]{a^2b}-3\sqrt[3]{a^2b}+7\sqrt[3]{a^2b} &= (5-3+7)\sqrt[3]{a^2b}\\ &= 9\sqrt[3]{a^2b}\end{aligned}$$

3.5. Racionalización de denominadores

La fracción

$$\frac{3\sqrt{2}+1}{5\sqrt{2}+\sqrt{3}}$$

al tener como denominador un número irracional se considera poco adecuada si queremos efectuar la división indicada. Con el objetivo de evitar errores en los cálculos, pues, habrá que usar aproximaciones racionales tanto en el numerador como en el denominador, e intentar trabajar lo más posible con valores exactos, se recomienda en estos casos realizar antes la racionalización del denominador. La **racionalización de denominadores** es una técnica que consiste en transformar la fracción dada, de denominador irracional, en otra de equivalente pero con el denominador racional. La técnica general consistirá en encontrar una expresión que al multiplicarla por el numerador y el denominador de la fracción se consiga que en el denominador de la nueva fracción equivalente no aparezca ninguna raíz.

Estudiaremos dos casos:

Caso 1 si el denominador contiene una sola raíz, la fracción es del tipo

$$\frac{a}{c\sqrt[n]{b^m}}$$

en donde m es menor que n. La racionalización se consigue multiplicando numerador y denominador por

$$\sqrt[n]{b^{n-m}}$$

En efecto,

$$\frac{a}{c\sqrt[n]{b^m}} = \frac{a}{c\sqrt[n]{b^m}} \cdot \frac{\sqrt[n]{b^{n-m}}}{\sqrt[n]{b^{n-m}}} = \frac{a\sqrt[n]{b^{n-m}}}{c\sqrt[n]{b^n}} = \frac{a\sqrt[n]{b^{n-m}}}{cb}$$

Si fuera m mayor que n, se podría extraer fuera del radical una cierta potencia de b y dentro quedaría una potencia de b de exponente más pequeño que n y a partir de aquí se procedería igual que antes.

Ejemplos:

1.

$$\begin{aligned} \frac{5}{\sqrt[3]{16}} &= \frac{5}{\sqrt[3]{2^4}} \\ &= \frac{5}{2\sqrt[3]{2}} \\ &= \frac{5}{2\sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}} \\ &= \frac{5\sqrt[3]{4}}{2\sqrt[3]{2^3}} \\ &= \frac{5\sqrt[3]{4}}{4} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \frac{3}{4\sqrt{5}} &= \frac{3}{4\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{3\sqrt{5}}{4\sqrt{5^2}} \\ &= \frac{3\sqrt{5}}{20} \end{aligned}$$

Caso 2 Si el denominador contiene una suma o diferencia de raíces cuadradas, la fracción es del tipo

$$\frac{a}{b\sqrt{c} \pm d\sqrt{e}}$$

La racionalización se consigue multiplicando numerador y denominador por la expresión conjugada del denominador $b\sqrt{c} \mp d\sqrt{e}$

En efecto, teniendo presente que

$$\begin{aligned}\left(b\sqrt{c}+d\sqrt{e}\right)\left(b\sqrt{c}-d\sqrt{e}\right) &= \left(b\sqrt{c}\right)^2-\left(d\sqrt{e}\right)^2\\ &= b^2\left(\sqrt{c}\right)^2-d^2\left(\sqrt{e}\right)^2\\ &= b^2c-d^2e\end{aligned}$$

entonces tenemos

$$\begin{aligned}\frac{a}{b\sqrt{c}+d\sqrt{e}} &= \frac{a}{b\sqrt{c}+d\sqrt{e}}\cdot\frac{b\sqrt{c}-d\sqrt{e}}{b\sqrt{c}-d\sqrt{e}}\\ &= \frac{a\left(b\sqrt{c}-d\sqrt{e}\right)}{b^2c-d^2e}\\ &= \frac{ab\sqrt{c}-ad\sqrt{e}}{b^2c-d^2e}\end{aligned}$$

y de forma análoga se hace el otro caso.
Ejemplos:

1.

$$\begin{aligned}\frac{5}{5-\sqrt{5}} &= \frac{5}{5-\sqrt{5}}\cdot\frac{5+\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}\\ &= \frac{5\left(5+\sqrt{5}\right)}{5^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}\\ &= \frac{5\left(5+\sqrt{5}\right)}{20}\\ &= \frac{5+\sqrt{5}}{4}\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\frac{3\sqrt{2}+1}{5\sqrt{2}+\sqrt{3}} &= \frac{3\sqrt{2}+1}{5\sqrt{2}+\sqrt{3}}\cdot\frac{5\sqrt{2}-\sqrt{3}}{5\sqrt{2}-\sqrt{3}}\\ &= \frac{\left(3\sqrt{2}+1\right)\left(5\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}{\left(5\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}\\ &= \frac{15\left(\sqrt{2}\right)^2-3\sqrt{2}\sqrt{3}+5\sqrt{2}-\sqrt{3}}{5^2\left(\sqrt{2}\right)^2-3}\\ &= \frac{30-3\sqrt{6}+5\sqrt{2}-\sqrt{3}}{47}\end{aligned}$$

3.6. Potencias de exponente racional

Al tomar el convenio de definir a^{-n} por

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n} \tag{1}$$

con $a>0$ y $n\in\mathbb{N}$, se pudo extender el cálculo de potencias de exponente natural al de exponente entero. Con el fin de ampliar aún más el concepto formal de potencia, ahora tomamos el convenio de definir $a^{m/n}$ por

$$a^{m/n}=\sqrt[n]{a^m}$$

con $n,m\in\mathbb{N}$ y $a\geq 0$, y en base a (1), convenimos también en definir $a^{-m/n}$ por

$$a^{-m/n}=\frac{1}{a^{m/n}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$$

con $n,m\in\mathbb{N}$ y $a>0$. De este modo, podemos extender el cálculo de potencias al de exponente racional, pues cualquier número racional puede escribirse como m/n, donde $m\in\mathbb{Z}$ y $n\in\mathbb{N}$.

Además, este convenio es consistente con la teoría ya conocida, es decir, que todas las propiedades que conocemos para las potencias de exponente entero continúan siendo válidas para las potencias de exponente racional.
Ejemplos:

1. $32^{3/5} = 8$, ya que $\sqrt[5]{32^3} = \sqrt[5]{(2^5)^3} = \sqrt[5]{2^{15}} = 2^3 = 8$.
2. $81^{-1/4} = 1/3$, ya que $\sqrt[4]{81^{-1}} = \sqrt[4]{1/81} = \sqrt[4]{1/3^4} = 1/\sqrt[4]{3^4} = 1/3$.

3.6.1. Propiedades de las potencias de exponente racional

Estas propiedades son importantes porque cuando tengamos que operar con expresiones en las que aparezcan exponentes racionales, podremos usarlas directamente sin necesidad de transformarlas en radicales.
Sin embargo, el siguiente ejemplo muestra dos maneras de calcular una expresión con exponentes racionales: una, consiste en utilizar las propiedades de las potencias de exponente racional, y la otra, consiste en transformar primero la expresión en otra de equivalente con radicales y después utilizar las propiedades de los radicales.

$$\frac{3^{1/3} \cdot 3^{1/2}}{3^{2/5}} = \frac{3^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}}{3^{\frac{2}{5}}} = 3^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{2}{5}} = 3^{\frac{13}{30}}$$

$$\begin{aligned}\frac{3^{1/3} \cdot 3^{1/2}}{3^{2/5}} &= \frac{\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt[5]{3^2}} \\ &= \frac{\sqrt[6]{3^2} \cdot \sqrt[6]{3^3}}{\sqrt[5]{3^2}} \\ &= \frac{\sqrt[6]{3^5}}{\sqrt[5]{3^2}} \\ &= \frac{\sqrt[30]{3^{25}}}{\sqrt[30]{3^{12}}} \\ &= \sqrt[30]{3^{13}}\end{aligned}$$

Producto de potencias: Para todo $a > 0$, $m, r \in \mathbb{Z}$ y $n, s \in \mathbb{N}$, se cumple

$$a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{r}{s}}$$

En efecto,

$$\begin{aligned}a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{r}{s}} &= \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[s]{a^r} \\ &= \sqrt[ns]{a^{ms}} \cdot \sqrt[ns]{a^{nr}} \\ &= \sqrt[ns]{a^{ms} \cdot a^{nr}} \\ &= \sqrt[ns]{a^{ms+nr}} \\ &= a^{\frac{ms+nr}{ns}} \\ &= a^{\frac{m}{n}+\frac{r}{s}}\end{aligned}$$

Ejemplos:

1.

$$\begin{aligned}3^{1/2} \cdot 3^{1/3} \cdot 3^{1/6} &= \left(3^{1/2} \cdot 3^{1/3}\right) \cdot 3^{1/6} \\ &= 3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{6}} \\ &= 3^{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{6}} \\ &= 3^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} \\ &= 3^1 = 3\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
a^{1/2}\cdot b\cdot a^3\cdot b^{-1/3} &= \Big(a^{1/2}\cdot b\Big)\cdot\Big(a^3\cdot b^{-1/3}\Big)\\
&= \Big(a^{1/2}\cdot b\Big)\cdot\Big(b^{-1/3}\cdot a^3\Big)\\
&= a^{1/2}\cdot\Big(b\cdot b^{-1/3}\Big)\cdot a^3\\
&= a^{1/2}\cdot\Big(b^{1-\frac{1}{3}}\cdot a^3\Big)\\
&= a^{1/2}\cdot\Big(a^3\cdot b^{2/3}\Big)\\
&= \Big(a^{1/2}\cdot a^3\Big)\cdot b^{2/3}\\
&= a^{\frac{1}{2}+3}\cdot b^{2/3}\\
&= a^{7/2}\cdot b^{2/3}
\end{aligned}$$

Cociente de potencias: Para todo $a>0$, $m,r\in\mathbb{Z}$ y $n,s\in\mathbb{N}$, se cumple

$$\frac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{r}{s}}}=a^{\frac{m}{n}-\frac{r}{s}}$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
\frac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{r}{s}}} &= \frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[s]{a^r}}\\
&= \frac{\sqrt[ns]{a^{ms}}}{\sqrt[ns]{a^{nr}}}\\
&= \sqrt[ns]{\frac{a^{ms}}{a^{nr}}}\\
&= \sqrt[ns]{a^{ms-nr}}\\
&= a^{\frac{ms-nr}{ns}}\\
&= a^{\frac{m}{n}-\frac{r}{s}}
\end{aligned}$$

Ejemplos:

1.

$$\begin{aligned}
\frac{5^3\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^2\cdot 5^{3/4}}{5^4\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^3} &= \frac{5^3\cdot 5^{-2}\cdot 5^{3/4}}{5^4\cdot 5^{-3}}\\
&= \frac{\left(5^3\cdot 5^{-2}\right)\cdot 5^{3/4}}{5}\\
&= \frac{5\cdot 5^{3/4}}{5}\\
&= 5^{3/4}
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\frac{a^2b^{-1}a^{3/2}b^4}{a^{-1/2}b^{-2}a^{1/3}} &= \frac{\left(a^2b^{-1}\right)\left(a^{3/2}b^4\right)}{a^{-1/2}\left(b^{-2}a^{1/3}\right)} \\
&= \frac{\left(a^2b^{-1}\right)\left(b^4a^{3/2}\right)}{a^{-1/2}\left(a^{1/3}b^{-2}\right)} \\
&= \frac{a^2\left(b^{-1}b^4\right)a^{3/2}}{\left(a^{-1/2}a^{1/3}\right)b^{-2}} \\
&= \frac{a^2\left(b^3a^{3/2}\right)}{a^{-1/6}b^{-2}} \\
&= \frac{a^2\left(a^{3/2}b^3\right)}{a^{-1/6}b^{-2}} \\
&= \frac{\left(a^2a^{3/2}\right)b^3}{a^{-1/6}b^{-2}} \\
&= \frac{a^{7/2}b^3}{a^{-1/6}b^{-2}} \\
&= \frac{a^{7/2}}{a^{-1/6}}\cdot\frac{b^3}{b^{-2}} \\
&= a^{22/6}\cdot b^5 \\
&= a^{11/3}\cdot b^5
\end{aligned}$$

Potencia de una potencia: Para todo $a > 0$, $m, r \in \mathbb{Z}$ y $n, s \in \mathbb{N}$, se cumple

$$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{m}{n}\cdot\frac{r}{s}}$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{r}{s}} &= \left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{\frac{r}{s}} \\
&= \sqrt[s]{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^r} \\
&= \sqrt[s]{\sqrt[n]{(a^m)^r}} \\
&= \sqrt[ns]{a^{mr}} \\
&= a^{\frac{mr}{ns}} \\
&= a^{\frac{m}{n}\cdot\frac{r}{s}}
\end{aligned}$$

Ejemplos:

1.

$$\begin{aligned}
\left(2^{1/2}\right)^{1/3}\cdot\left(2^4\right)^{1/5} &= 2^{1/6}\cdot 2^{4/5} \\
&= 2^{29/30}
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\frac{\left(a^{1/2}\cdot\frac{a^{1/3}}{a^{2/5}}\right)^{1/4}}{a^{-2/3}} &= \frac{\left(a^{1/2}\cdot a^{-1/15}\right)^{1/4}}{a^{-2/3}} \\
&= \frac{a^{1/8}\cdot a^{-1/60}}{a^{-2/3}} \\
&= \frac{a^{13/120}}{a^{-2/3}} \\
&= a^{31/40}
\end{aligned}$$

Potencia de un porducto: Para todo $a, b > 0$, $m \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$, se cumple

$$(a \cdot b)^{m/n} = a^{m/n} \cdot b^{m/n}$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
(a \cdot b)^{m/n} &= \sqrt[n]{(a \cdot b)^m} \\
&= \sqrt[n]{a^m \cdot b^m} \\
&= \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{b^m} \\
&= a^{n/m} \cdot b^{n/m}
\end{aligned}$$

Ejemplos:

1.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{3}{4}\right)^{3/2} \cdot 2^{3/2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{3/2} &= \left[\left(\frac{3}{4}\right)^{3/2} \cdot 2^{3/2}\right] \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{3/2} \\
&= \left(\frac{3}{4} \cdot 2\right)^{3/2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{3/2} \\
&= \left(\frac{3}{2}\right)^{3/2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{3/2} \\
&= \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3}\right)^{3/2} \\
&= 1^{3/2} = \sqrt{1^3} = 1
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\left(a^3 \cdot b^{-4}\right)^{5/6} &= \left(a^3\right)^{5/6} \cdot \left(b^{-4}\right)^{5/6} \\
&= a^{5/2} \cdot b^{-10/3}
\end{aligned}$$

Potencia de un cociente: Para todo $a, b > 0$, $m \in \mathbb{Z}$ y $n \in \mathbb{N}$, se cumple

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{m/n} = \frac{a^{m/n}}{b^{m/n}}$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a}{b}\right)^{m/n} &= \sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^m} \\
&= \sqrt[n]{\frac{a^m}{b^m}} \\
&= \frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[n]{b^m}} \\
&= \frac{a^{m/n}}{b^{m/n}}
\end{aligned}$$

Ejemplos:

1.

$$\begin{aligned}
\frac{(16 \cdot 9 \cdot 25)^{1/3}}{(8 \cdot 27 \cdot 5)^{1/3}} &= \left(\frac{16 \cdot 9 \cdot 25}{8 \cdot 27 \cdot 5}\right)^{1/3} \\
&= \left(\frac{10}{3}\right)^{1/3}
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a^2b}{b^{1/2}a}\right)^3 \cdot \left(\frac{a^{-1/3}b^5}{a^2b^3}\right)^{1/2} &= \frac{\left(a^2b\right)^3}{\left(b^{1/2}a\right)^3} \cdot \frac{\left(a^{-1/3}b^5\right)^{1/2}}{(a^2b^3)^{1/2}} \\
&= \frac{a^6b^3}{b^{3/2}a^3} \cdot \frac{a^{-1/6}b^{5/2}}{ab^{3/2}} \\
&= \frac{a^{35/6}b^{11/2}}{a^4b^3} \\
&= a^{11/6} \cdot b^{5/2}
\end{aligned}$$