# Práctica

## Índice



## 1. Potencias enteras de números reales

**Ejercicio 1** Calcular:

a)
$$\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^5\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^3\right]:\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^5\right]$$

b)
$$\frac{(0{,}25)^3\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^2}{\left(-\frac{1}{2}\right)^3\cdot(0{,}5)^2}$$

c)
$$\frac{5^3\cdot\left(\frac{1}{25}\right)^2\cdot 5^7}{5^4\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^2}$$

d)
$$\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^7\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^4}{\left[\left(\frac{1}{9}\right)^2\right]^3\cdot\frac{1}{27}}$$

**Solución:** a)

$$\begin{aligned}\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^5\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^3\right] \quad : \quad \left[\left(-\frac{1}{3}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^5\right] &= \frac{\left[-\left(\frac{1}{3}\right)^5\right]\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left[-\left(\frac{1}{3}\right)^3\right]}{\left(\frac{1}{3}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^5}\\ &= \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{10}}{\left(\frac{1}{3}\right)^9}\\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

b)

$$
\begin{aligned}
\frac{(0{,}25)^3 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^2}{\left(-\frac{1}{2}\right)^3 \cdot (0{,}5)^2} &= \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2}{\left[-\left(\frac{1}{2}\right)^3\right] \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2} \\
&= \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^5}{-\left(\frac{1}{2}\right)^5} \\
&= -\frac{\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^5}{\left(\frac{1}{2}\right)^5} \\
&= -\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{10}}{\left(\frac{1}{2}\right)^5} \\
&= -\left(\frac{1}{2}\right)^5 \\
&= -\frac{1}{2^5} \\
&= -\frac{1}{32}
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
\frac{5^3 \cdot \left(\frac{1}{25}\right)^2 \cdot 5^7}{5^4 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2} &= \frac{5^{10} \cdot \left[\left(\frac{1}{5}\right)^2\right]^2}{5^4 \cdot \frac{1}{5^2}} \\
&= \frac{5^{10} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^4}{\frac{5^4}{5^2}} \\
&= \frac{5^{10} \cdot \frac{1}{5^4}}{5^2} \\
&= \frac{\frac{5^{10}}{5^4}}{5^2} \\
&= \frac{5^6}{5^2} \\
&= 5^4 \\
&= 625
\end{aligned}
$$

d)

$$
\begin{aligned}
\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^7 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^4}{\left[\left(\frac{1}{9}\right)^2\right]^3 \cdot \frac{1}{27}} &= \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^7 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left[\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]^4}{\left(\frac{1}{9}\right)^6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3} \\
&= \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^7 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^8}{\left[\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]^6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3} \\
&= \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{15} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^{12} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3} \\
&= \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{15} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2}{\left(\frac{1}{3}\right)^{15}} \\
&= \left(\frac{1}{4}\right)^2 \\
&= \frac{1}{16}
\end{aligned}
$$

■

**Ejercicio 2** Calcular:

a)

$$\frac{\left(a^2 \cdot b \cdot c\right)^3 \cdot \left(a \cdot b^2 \cdot c^3\right)^4}{\left(\frac{a^2 \cdot b}{b^2 \cdot c}\right)^2 \cdot \left(\frac{a \cdot b}{c}\right)^3}$$

b)

$$\frac{\left[\left(\frac{1}{a^2 \cdot b}\right)^2\right]^3 \cdot \left(\frac{a^3 \cdot b \cdot c}{b^3}\right)^2}{\left(\frac{a \cdot b \cdot c}{b^3}\right)^2 : \left(\frac{b \cdot c}{a^2}\right)^2}$$

**Solución:** a)

$$\begin{aligned}
\frac{\left(a^2 \cdot b \cdot c\right)^3 \cdot \left(a \cdot b^2 \cdot c^3\right)^4}{\left(\frac{a^2 \cdot b}{b^2 \cdot c}\right)^2 \cdot \left(\frac{a \cdot b}{c}\right)^3} &= \frac{\left(a^2\right)^3 \cdot b^3 \cdot c^3 \cdot a^4 \cdot (b^2)^4 \cdot (c^3)^4}{\frac{(a^2 \cdot b)^2}{(b^2 \cdot c)^2} \cdot \frac{(a \cdot b)^3}{c^3}} \\
&= \frac{a^6 \cdot b^3 \cdot c^3 \cdot a^4 \cdot b^8 \cdot c^{12}}{\frac{(a^2)^2 \cdot b^2}{b^4 \cdot c^2} \cdot \frac{a^3 \cdot b^3}{c^3}} \\
&= \frac{a^{10} \cdot b^{11} \cdot c^{15}}{\frac{a^4 \cdot b^2 \cdot a^3 \cdot b^3}{b^4 \cdot c^2 \cdot c^3}} \\
&= \frac{a^{10} \cdot b^{11} \cdot c^{15}}{\frac{a^7 \cdot b^5}{b^4 \cdot c^5}} \\
&= \frac{a^{10} \cdot b^{11} \cdot c^{15}}{1} : \frac{a^7 \cdot b}{c^5} \\
&= \frac{a^{10} \cdot b^{11} \cdot c^{15} \cdot c^5}{a^7 \cdot b} \\
&= a^3 \cdot b^{10} \cdot c^{20}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\frac{\left[\left(\frac{1}{a^2 \cdot b}\right)^2\right]^3 \cdot \left(\frac{a^3 \cdot b \cdot c}{b^3}\right)^2}{\left(\frac{a \cdot b \cdot c}{b^3}\right)^2 : \left(\frac{b \cdot c}{a^2}\right)^2} &= \frac{\left(\frac{1}{a^2 \cdot b}\right)^6 \cdot \frac{(a^3 \cdot b \cdot c)^2}{(b^3)^2}}{\frac{(a \cdot b \cdot c)^2}{(b^3)^2} : \frac{(b \cdot c)^2}{(a^2)^2}} \\
&= \frac{\frac{1}{(a^2 \cdot b)^6} \cdot \frac{a^6 \cdot b^2 \cdot c^2}{b^6}}{\frac{a^2 \cdot b^2 \cdot c^2}{b^6} : \frac{b^2 \cdot c^2}{a^4}} \\
&= \frac{\frac{1}{a^{12} \cdot b^6} \cdot \frac{a^6 \cdot b^2 \cdot c^2}{b^6}}{\frac{a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 \cdot a^4}{b^6 \cdot b^2 \cdot c^2}} \\
&= \frac{\frac{a^6 \cdot b^2 \cdot c^2}{a^{12} \cdot b^6 \cdot b^6}}{\frac{a^6 \cdot b^2 \cdot c^2}{b^8 \cdot c^2}} \\
&= \frac{a^6 \cdot b^2 \cdot c^2 \cdot b^8 \cdot c^2}{a^{12} \cdot b^{12} \cdot a^6 \cdot b^2 \cdot c^2} \\
&= \frac{a^6 \cdot b^{10} \cdot c^4}{a^{18} \cdot b^{14} \cdot c^2} \\
&= \frac{c^2}{a^{12} \cdot b^4}
\end{aligned}$$

■

**Ejercicio 3** Demostrar que si $a$ y $b$ son dos números cualesquiera no nulos, entonces

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

**Solución:** En efecto,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} &= \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^{n}} \\
&= \frac{1}{\frac{a^n}{b^n}} \\
&= \frac{b^n}{a^n} \\
&= \left(\frac{b}{a}\right)^{n}
\end{aligned}$$

■

**Ejercicio 4** Calcular

a)

$$\frac{(0{,}1)^{-7}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^{-5}}{\left(\frac{1}{100}\right)^{2}\cdot\left[(-0{,}001)^{-3}\right]^{2}}$$

b)

$$\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{5}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{-4}\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^{2}}{\left(\frac{1}{9}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{1}{27}\right)^{-3}}$$

**Solución:** a)

$$\begin{aligned}
\frac{(0{,}1)^{-7}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^{-5}}{\left(\frac{1}{100}\right)^{2}\cdot\left[(-0{,}001)^{-3}\right]^{2}} &= \frac{\left(\frac{1}{10}\right)^{-7}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^{-5}}{\left[\left(\frac{1}{10}\right)^{2}\right]^{2}\cdot\left(-\frac{1}{1000}\right)^{-6}} \\
&= \frac{\left(\frac{1}{10}\right)^{-12}}{\left(\frac{1}{10}\right)^{4}\cdot\left[-\left(\frac{1}{10}\right)^{3}\right]^{-6}} \\
&= \frac{\left(\frac{1}{10}\right)^{-12}}{\left(\frac{1}{10}\right)^{4}\cdot(-1)^{-6}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^{-18}} \\
&= \frac{\left(\frac{1}{10}\right)^{-12}}{\left(\frac{1}{10}\right)^{-14}} \\
&= \left(\frac{1}{10}\right)^{2} \\
&= \frac{1}{100}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{5}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{-4}\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^{2}}{\left(\frac{1}{9}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{1}{27}\right)^{-3}} &= \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{5}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{-4}\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^{2}}{\left(\frac{1}{9}\right)^{-2}\cdot\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{3}\right]^{-3}} \\
&= \frac{\left(\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^{2}}{\left(\frac{1}{9}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{-9}} \\
&= \left(\frac{1}{3}\right)^{10}\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^{4} \\
&= \left(\frac{1}{3}\right)^{10}\cdot\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{2}\right]^{4} \\
&= \left(\frac{1}{3}\right)^{10}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{8} \\
&= \left(\frac{1}{3}\right)^{18}
\end{aligned}$$

■

**Ejercicio 5** Calcular:

a)

$$\frac{(a^{-3}b^4)^{-1}c^2}{(5^{-3}a^{-1}b^2)\cdot(5^2a^3b^{-4})^2\cdot a^{-5}}$$

b)

$$\left[\left(\frac{2a}{bc^2}\right)^{-3}\cdot\left(\frac{(2ab^2)^3}{(2a^2)\cdot(2b^2)}\right)^{-2}\right]:\left(\frac{b^2a}{2c^{-2}}\right)^{-3}$$

**Solución:** a)

$$\begin{aligned}\frac{(a^{-3}b^4)^{-1}c^2}{(5^{-3}a^{-1}b^2)\cdot(5^2a^3b^{-4})^2\cdot a^{-5}} &= \frac{a^3b^{-4}c^2}{(5^{-3}a^{-6}b^2)\cdot(5^4a^6b^{-8})}\\ &= \frac{a^3b^{-4}c^2}{5a^0b^{-6}}\\ &= \frac{a^3b^2c^2}{5}\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\left[\left(\frac{2a}{bc^2}\right)^{-3}\cdot\left(\frac{(2ab^2)^3}{(2a^2)\cdot(2b^2)}\right)^{-2}\right] : \left(\frac{b^2a}{2c^{-2}}\right)^{-3} &= \left(\frac{(2a)^{-3}}{(bc^2)^{-3}}\cdot\frac{\left[(2ab^2)^3\right]^{-2}}{[(2a^2)\cdot(2b^2)]^{-2}}\right):\frac{(b^2a)^{-3}}{(2c^{-2})^{-3}}\\ &= \left(\frac{2^{-3}a^{-3}}{b^{-3}(c^2)^{-3}}\cdot\frac{(2ab^2)^{-6}}{(2a^2)^{-2}\cdot(2b^2)^{-2}}\right):\frac{(b^2)^{-3}a^{-3}}{2^{-3}(c^{-2})^{-3}}\\ &= \left(\frac{2^{-3}a^{-3}}{b^{-3}c^{-6}}\cdot\frac{2^{-6}a^{-6}(b^2)^{-6}}{2^{-2}(a^2)^{-2}\cdot 2^{-2}(b^2)^{-2}}\right):\frac{b^{-6}a^{-3}}{2^{-3}c^6}\\ &= \left(\frac{2^{-3}a^{-3}}{b^{-3}c^{-6}}\cdot\frac{2^{-6}a^{-6}b^{-12}}{2^{-2}a^{-4}\cdot 2^{-2}b^{-4}}\right):\frac{b^{-6}a^{-3}}{2^{-3}c^6}\\ &= \frac{(2^{-3}a^{-3})\cdot(2^{-6}a^{-6}b^{-12})}{(b^{-3}c^{-6})\cdot 2^{-4}a^{-4}b^{-4}}:\frac{b^{-6}a^{-3}}{2^{-3}c^6}\\ &= \frac{2^{-9}a^{-9}b^{-12}}{2^{-4}a^{-4}b^{-7}c^{-6}}:\frac{b^{-6}a^{-3}}{2^{-3}c^6}\\ &= \frac{(2^{-9}a^{-9}b^{-12})\cdot(2^{-3}c^6)}{(2^{-4}a^{-4}b^{-7}c^{-6})\cdot(b^{-6}a^{-3})}\\ &= \frac{2^{-12}a^{-9}b^{-12}c^6}{2^{-4}a^{-7}b^{-13}c^{-6}}\\ &= 2^{-8}a^{-2}bc^{12}\\ &= \frac{bc^{12}}{2^8a^2}\end{aligned}$$

■

**Ejercicio 6** El ser vivo más pequeño es un virus que pesa del orden de $10^{-21}$ Kg y el más grande es la ballena que pesa aproximadamente $1{,}38\times10^5$ Kg. ¿Cuántos virus serían necesarios para conseguir el peso de una ballena?

**Solución:** El número de virus será

$$\frac{1{,}38\times10^5}{10^{-21}} = 1{,}38\times10^{26}$$

■

**Ejercicio 7** El volumen estimado de todos los océanos de la Tierra es de 1285600000 $Km^3$ y el volumen de agua dulce estimado es de 35000000 $Km^3$. ¿Cuál es la proporción?

**Solución:** Expresando en notación científica ambas magnitudes, obtenemos

$$1285600000\ Km^3 = 1{,}2856 \times 10^9\ Km^3 \simeq 1{,}3 \times 10^9\ Km^3$$

y

$$35000000\ Km^3 = 3{,}5 \times 10^7\ Km^3$$

Entonces, la proporción es

$$\frac{3{,}5 \times 10^7}{1{,}3 \times 10^9} \simeq 2{,}7 \times 10^{-2}$$

es decir, del orden del 2,7 %. ■

**Ejercicio 8** Sabiendo que $A = 9 \times 10^{-2}, B = 8 \times 10^{-3}, C = 3 \times 10^{-4}$ y $D = 5 \times 10^5$, calcula

$$(AB)^3\,(CD)^4$$

y exprésalo en notación científica.

**Solución:** Primero calculamos

$$\begin{aligned} AB &= \left(9 \times 10^{-2}\right) \cdot \left(8 \times 10^{-3}\right) \\ &= 72 \times 10^{-5} \\ &= 7{,}2 \times 10^{-4} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} CD &= \left(3 \times 10^{-4}\right) \cdot \left(5 \times 10^{5}\right) \\ &= 15 \times 10 \\ &= 1{,}5 \times 10^{2} \end{aligned}$$

Entonces, tenemos

$$\begin{aligned} (AB)^3\,(CD)^4 &= \left(7{,}2 \times 10^{-4}\right)^3 \cdot \left(1{,}5 \times 10^{2}\right)^4 \\ &= \left(373{,}248 \times 10^{-12}\right) \cdot \left(5{,}0625 \times 10^{8}\right) \\ &= 1889{,}568 \times 10^{-4} \\ &= 1{,}889568 \times 10^{-1} \\ &\simeq 1{,}89 \times 10^{-1} \end{aligned}$$

■

## 2. Raíces de números reales

**Ejercicio 9** Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 = 49$

b) $x^4 = 16$

c) $x^3 - 27 = 0$

d) $x^3 + 125 = 0$

e) $x^2 + 25 = 0$

f) $x^5 + 32 = 0$

**Solución:** a) Es claro que las soluciones de la ecuación $x^2 = 49$ son $x_1 = \sqrt{49} = 7$ y $x_2 = -\sqrt{49} = -7$.

b) Puesto que $16 = 2^4 = (-2)^4$, entonces las soluciones de la ecuación $x^4 = 16$ son $\pm 2$.

c) Puesto que $27 = 3^3$, entonces la ecuación $x^3 = 27$ tiene como solución $x = 3$.

d) Puesto que $-125 = (-5)^3$, entonces la ecuación $x^3 = -125$ tiene como solución $x = -5$.

e) La ecuación $x^2 = -25$ no tiene solución, pues un número real al cuadrado siempre es no negativo.

f) Puesto que $-32 = (-2)^5$, entonces la ecuación $x^5 = -32$ tiene como solución $x = -2$. ■

**Ejercicio 10** Calcula $x$ para que sean ciertas las siguientes igualdades:

a) $\sqrt[3]{x} = a^2bc^4$

b) $\sqrt[4]{5ax} = 5a^3c$

c) $\sqrt{x} = 7 + a$

**Solución:** a) Si $a^2bc^4$ es la raíz cúbica de $x$, entonces

$$\begin{aligned} x &= (a^2bc^4)^3 \\ &= (a^2)^3b^3(c^4)^3 \\ &= a^6b^3c^{12} \end{aligned}$$

Luego

$$\sqrt[3]{a^6b^3c^{12}} = a^2bc^4$$

b) Si $5a^3c$ es la raíz cuarta de $5ax$, entonces

$$\begin{aligned} 5ax &= (5a^3c)^4 \\ &= 5^4(a^3)^4c^4 \\ &= 5^4a^{12}c^4 \\ x &= \frac{5^4a^{12}c^4}{5a} \\ &= 5^3a^{11}c^4 \end{aligned}$$

Luego

$$\sqrt[4]{5a \cdot 5^3a^{11}c^4} = 5a^3c$$

c) Si $7 + a$ es la raíz cuadrada de $x$, entonces

$$\begin{aligned} x &= (7+a)^2 \\ &= 49 + 14a + a^2 \end{aligned}$$

Luego

$$\sqrt{49 + 14a + a^2} = 7 + a$$

$\blacksquare$

**Ejercicio 11** Calcula: (a) $\left(-\sqrt{25}\right)^2$ (b) $\left(\sqrt{-25}\right)^2$ (c) $-\left(\sqrt{25}\right)^2$ (d) $\left(-\sqrt[3]{-27}\right)^3$ (e) $\left(\sqrt[3]{-27}\right)^3$ (f) $\left(-\sqrt[3]{27}\right)^2$.

**Solución:** (a) Puesto que $\sqrt{25} = 5$, entonces $\left(-\sqrt{25}\right)^2 = (-5)^2 = 25$.

(b) Sabemos que $\sqrt{-25}$ no es un número real y, por tanto, $\left(\sqrt{-25}\right)^2$ no tiene sentido.

(c) Es evidente que $-\left(\sqrt{25}\right)^2 = -5^2 = -25$.

(d) Puesto que $(-3)^3 = -27$, entonces $\sqrt[3]{-27} = -3$ y, por tanto, $\left(-\sqrt[3]{-27}\right)^3 = [-(-3)]^3 = 3^3 = 27$.

(e) Es evidente que $\left(\sqrt[3]{-27}\right)^3 = (-3)^3 = -27$.

(f) Puesto que $3^3 = 27$, es evidente que $\left(-\sqrt[3]{27}\right)^2 = (-3)^2 = 9$. $\blacksquare$

**Ejercicio 12** Calcula y simplifica: (a) $\left(3\sqrt{7}\right)^2$ (b) $\left(2+\sqrt{3}\right)^2$ (c) $\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}\right)^2$ (d) $\left(2\sqrt[3]{3}\right)^4$ (e) $(\sqrt{3} - 2\sqrt{2})(\sqrt{3} + 2\sqrt{2})$ (f) $\left(9 - 5\sqrt{2}\right) + \left(6 + 7\sqrt{2}\right)$.

**Solución:** (a) Es claro que por las propiedades de las operaciones en $\mathbb{R}$ y la definición de raíz, tenemos

$$\begin{aligned} \left(3\sqrt{7}\right)^2 &= 3\sqrt{7}\cdot 3\sqrt{7} \\ &= 9\left(\sqrt{7}\right)^2 \\ &= 9 \cdot 7 \\ &= 63 \end{aligned}$$

(b) Es claro que por las propiedades de las operaciones en $\mathbb{R}$ y la definición de raíz, tenemos

$$\begin{aligned}\left(2+\sqrt{3}\right)^2 &= 4+4\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2\\ &= 4+4\sqrt{3}+3\\ &= 7+4\sqrt{3}\end{aligned}$$

(c) Es claro que por la propiedad de la potencia de un producto y la definición de raíz, tenemos

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}\right)^2 &= \left(\sqrt{2}\right)^2\cdot\left(\sqrt{5}\right)^2\\ &= 2\cdot 5\\ &= 10\end{aligned}$$

(d) Es claro que por la propiedad de la potencia de un producto y la definición de raíz, tenemos

$$\begin{aligned}\left(2\sqrt[3]{3}\right)^4 &= 2^4\cdot\left(\sqrt[3]{3}\right)^4\\ &= 16\cdot\left(\sqrt[3]{3}\right)^3\cdot\left(\sqrt[3]{3}\right)\\ &= 16\cdot 3\cdot\sqrt[3]{3}\\ &= 48\sqrt[3]{3}\end{aligned}$$

(e) Es claro que por las propiedades de las operaciones en $\mathbb{R}$ y la definición de raíz, tenemos

$$\begin{aligned}(\sqrt{3}-2\sqrt{2})(\sqrt{3}+2\sqrt{2}) &= \left(\sqrt{3}\right)^2-\left(2\sqrt{2}\right)^2\\ &= 3-4\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2\\ &= 3-4\cdot 2\\ &= -5\end{aligned}$$

(f) Es claro que por las propiedades de las operaciones en $\mathbb{R}$ y la definición de raíz, tenemos

$$\begin{aligned}\left(9-5\sqrt{2}\right)+\left(6+7\sqrt{2}\right) &= 54+63\sqrt{2}-30\sqrt{2}-35\left(\sqrt{2}\right)^2\\ &= 54+(63-30)\sqrt{2}-70\\ &= -16-33\sqrt{2}\end{aligned}$$

■

**Ejercicio 13** Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $\sqrt{2x-1}=5$

b) $(2x-5)^2-25=0$

c) $\left(2\sqrt[3]{2x-1}\right)^3=4$

d) $\sqrt[4]{x-1}=1$

**Solución:** a) Es claro que si 5 es la raíz cuadrada de $2x-1$, entonces

$$\begin{aligned}2x-1 &= 25\\ 2x &= 26\\ x &= 13\end{aligned}$$

b) Para que $(2x-5)^2$ sea 25 debe cumplirse que $2x-5=\pm\sqrt{25}=\pm 5$. Si $2x-5=5$, entonces $x=5$, y, si $2x-5=-5$, entonces $x=0$.

c) Por la propiedad de la potencia de un producto y la definición de raíz, tenemos

$$\begin{aligned}
\left(2\sqrt[3]{2x-1}\right)^3 &= 4 \\
2^3 \cdot \left(\sqrt[3]{2x-1}\right)^3 &= 4 \\
8(2x-1) &= 4 \\
16x-8 &= 4 \\
16x &= 12 \\
x &= \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

d) Si $\sqrt[4]{x-1} = 1$, entonces

$$\begin{aligned}
x-1 &= 1^4 \\
x-1 &= 1 \\
x &= 2
\end{aligned}$$

■

**Ejercicio 14** Calcula las siguientes raíces, descomponiendo los radicandos en factores:

a) $\sqrt{0{,}0144}$

b) $\sqrt[4]{81}$

c) $\sqrt[5]{-\frac{1}{3125}}$

d) $\sqrt[6]{117649}$

**Solución:** a) Primero, observa

$$\begin{aligned}
0{,}0144 &= 144 \cdot 10^{-4} \\
&= 12^2 \cdot 10^{-4} \\
&= \left(12 \cdot 10^{-2}\right)^2
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\sqrt{0{,}0144} = 12 \cdot 10^{-2} = 0{,}12$$

b) Puesto que $81 = 3^4$, se cumple

$$\sqrt[4]{81} = 3$$

c) Puesto que $-3125 = (-5)^5$, entonces

$$-\frac{1}{3125} = \left(-\frac{1}{5}\right)^5$$

y, por tanto,

$$\sqrt[5]{-\frac{1}{3125}} = -\frac{1}{5}$$

d) Como $117649 = 7^6$, tenemos

$$\sqrt[6]{117649} = 7$$

■

**Ejercicio 15** Se toma un cuadrado y se hacen las siguientes transformaciones: Se dobla el lado y a continuación se alarga una unidad cada lado. El área final vale 16 $m^2$. ¿Cuál era la longitud inicial del lado del cuadrado?

**Solución:** Si la longitud original del lado del cuadrado es $x$, entonces la longitud del cuadrado una vez hecha la primera transformación es $2x$ y, después de haber hecho la segunda es $2x+1$. Por tanto, ha de cumplirse que

$$(2x+1)^2 = 16$$

El cuadrado de $2x+1$ será 16 si

$$2x+1=\pm\sqrt{16}=\pm 4$$

Si $2x+1=4$, entonces $x=3/2$, y si $2x+1=-4$, entonces $x=-5/2$. Como la longitud del lado se expresa como un número real positivo, debe ser $x=1{,}5\ m^2$. ∎

**Ejercicio 16** Si aumentamos el lado de un cubo en dos unidades se obtiene otro cubo de volumen 27 unidades cúbicas. ¿Qué arista tenía el cubo original?

**Solución:** Si la arista del cubo original es $x$, entonces la arista del segundo cubo es $x+2$ y, por tanto, se ha de cumplir que

$$(x+2)^3=27$$

El cubo de $x+2$ será 27 si

$$x+2=\sqrt[3]{27}=3$$

Por tanto, $x=1$, es decir, la longitud de la arista es 1. ∎

**Ejercicio 17** Se considera la función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^+$ definida por $f(x)=x^2$. (a) Calcula las imágenes de los números siguientes: $5,-7,3{,}5,0{,}05$ y $-0{,}05$. (b) Calcula las antiimágenes de los números siguientes: $0{,}0169, 0{,}000225$ y $53{,}29$.

**Solución:** (a) La imagen de un número $x$ por $f$ es el número $y$ tal que

$$\begin{aligned} y &= f(x) \\ &= x^2 \end{aligned}$$

Las imágenes pedidas son

$$\begin{array}{l} f(5)=5^2=25 \\ f(-7)=(-7)^2=49 \\ f(3{,}5)=f(\frac{7}{2})=\left(\frac{7}{2}\right)^2=\frac{49}{4} \\ f(0{,}05)=f(5\times10^{-2})=\left(5\times10^{-2}\right)^2=25\times10^{-4}=0{,}0025 \\ f(-0{,}05)=f(-5\times10^{-2})=\left(-5\times10^{-2}\right)^2=25\times10^{-4}=0{,}0025 \end{array}$$

(b) Las antiimágenes de un número $y$ por $f$ son los números $x$ tales que

$$\begin{aligned} f(x) &= y \\ x^2 &= y \\ x &= \pm\sqrt{y} \end{aligned}$$

Por tanto, las antiimágenes de 0,0169 son

$$\begin{aligned} x &= \pm\sqrt{0{,}0169} \\ &= \pm 0{,}13 \end{aligned}$$

Las antiimágenes de 0,000225 son

$$\begin{aligned} x &= \pm\sqrt{0{,}000225} \\ &= \pm 0{,}015 \end{aligned}$$

y las de 53,29,

$$\begin{aligned} x &= \pm\sqrt{53{,}29} \\ &= \pm 7{,}3 \end{aligned}$$

∎

## 3. Cálculo con radicales

**Ejercicio 18** Completa las siguientes igualdades

$$\sqrt[4]{4a^2b^6} = \sqrt{\phantom{xx}} = \sqrt[6]{\phantom{xx}} = \sqrt[8]{\phantom{xx}}$$

**Solución:** Sabiendo que la propiedad según la cual

$$\sqrt[n]{x} = \sqrt[m\cdot n]{x^m}$$

convierte un radical $\sqrt[n]{x}$ en otro de semejante $\sqrt[m\cdot n]{x^m}$ de índice $m \cdot n$. Tenemos

$$\sqrt[4]{4a^2b^6} = \sqrt[2\cdot 2]{(2^2 \cdot a \cdot b^3)^2} = \sqrt{4ab^3}$$

$$\sqrt[4]{4a^2b^6} = \sqrt{4ab^3} = \sqrt[3\cdot 2]{(4ab^3)^3} = \sqrt[6]{4^3a^3b^9} = \sqrt[6]{64a^3b^9}$$

$$\sqrt[4]{4a^2b^6} = \sqrt[2\cdot 4]{(4a^2b^6)^2} = \sqrt[8]{4^2a^4b^{12}} = \sqrt[8]{16a^4b^{12}}$$

■

**Ejercicio 19** Convierte en una sola raíz las expresiones siguientes:

a) $2ab^2 \cdot \sqrt{2ab}$

b) $6a \cdot \sqrt{b}$

c) $\frac{a}{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{16a}{3}}$

**Solución:** Para convertir cada una de estas expresiones en una raíz debemos introducir dentro del radical todo lo que está fuera del mismo. Para ello, utilizaremos la siguiente propiedad

$$x^m \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x^{m\cdot n} \cdot y}$$

a)

$$\begin{aligned} 2ab^2 \cdot \sqrt{2ab} &= \sqrt{(2ab^2)^2 \cdot (2ab)} \\ &= \sqrt{(4a^2b^4) \cdot (2ab)} \\ &= \sqrt{8a^3b^5} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 6a \cdot \sqrt{b} &= \sqrt{(6a)^2 \cdot b} \\ &= \sqrt{36a^2b} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \frac{a}{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{16a}{3}} &= \sqrt[3]{\left(\frac{a}{2}\right)^3 \cdot \frac{16a}{3}} \\ &= \sqrt[3]{\frac{a^3}{8} \cdot \frac{16a}{3}} \\ &= \sqrt[3]{\frac{2a^4}{3}} \end{aligned}$$

■

**Ejercicio 20** Simplifica las siguientes raíces:

a) $\sqrt[5]{16a^9b^8c^{26}}$

b) $\sqrt[3]{2648a^{173}b^{40}}$

c) $\sqrt[4]{\frac{32a^8}{81b^5}}$

d) $\sqrt{4a^2+8ab+4b^2}$

e) $\sqrt{(a^2-b^2)(a+b)}$

**Solución:** Para simplificar estas expresiones debemos extraer fuera del radical todo lo que podamos. Para ello, utilizaremos la siguiente propiedad

$$\sqrt[n]{x^{m\cdot n+p}\cdot y}=x^m\cdot\sqrt[n]{x^p\cdot y}$$

a)

$$\begin{aligned}\sqrt[5]{16a^9b^8c^{26}} &= \sqrt[5]{16a^{5+4}b^{5+3}c^{5\cdot 5+1}}\\ &= abc^5\cdot\sqrt[5]{16a^4b^3c}\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{2648a^{173}b^{40}} &= \sqrt[3]{2^3\cdot 331a^{57\cdot 3+2}b^{13\cdot 3+1}}\\ &= 2a^{57}b^{13}\cdot\sqrt[3]{331a^2b}\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{\frac{32a^8}{81b^5}} &= \frac{\sqrt[4]{2^{4+1}a^{2\cdot 4}}}{\sqrt[4]{3^4b^{4+1}}}\\ &= \frac{2a^2\cdot\sqrt[4]{2}}{3b\cdot\sqrt[4]{b}}\\ &= \frac{2a^2}{3b}\sqrt[4]{\frac{2}{b}}\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}\sqrt{4a^2+8ab+4b^2} &= \sqrt{(2a+2b)^2}\\ &= 2a+2b\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}\sqrt{(a^2-b^2)(a+b)} &= \sqrt{(a-b)(a+b)(a+b)}\\ &= \sqrt{(a-b)(a+b)^2}\\ &= (a+b)\sqrt{a-b}\end{aligned}$$

■

**Ejercicio 21** Convierte las siguientes expresiones en una sola raíz

a) $\frac{\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{2b}}$

b) $\frac{3\cdot\sqrt[3]{2a^2bc^2}\cdot\sqrt[3]{6a^4b^2}}{2a\cdot\sqrt[3]{ab^4c}}$

c) $\frac{\left(\sqrt[7]{a^6}\right)^2\cdot\left(\sqrt[7]{a}\right)^5}{a^2\cdot\left(\sqrt[7]{a}\right)^2}$

d) $a\cdot\left(\sqrt[3]{a\cdot\sqrt[4]{a^3}}\right)^5$

**Solución:** a)

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{2b}} &= \frac{\sqrt[3]{3a}}{\sqrt[3]{2b}}\\ &= \sqrt[3]{\frac{3a}{2b}}\end{aligned}$$

b)

$$
\begin{aligned}
\frac{3\cdot\sqrt[3]{2a^2bc^2}\cdot\sqrt[3]{6a^4b^2}}{2a\cdot\sqrt[3]{ab^4c}} &= \frac{3\cdot\sqrt[3]{(2a^2bc^2)\cdot(6a^4b^2)}}{2a\cdot\sqrt[3]{ab^4c}}\\
&= \frac{3\cdot\sqrt[3]{12a^6b^3c^2}}{2a\cdot\sqrt[3]{ab^4c}}\\
&= \frac{3}{2a}\cdot\sqrt[3]{\frac{12a^6b^3c^2}{ab^4c}}\\
&= \frac{3}{2a}\cdot\sqrt[3]{\frac{12a^5c}{b}}\\
&= \sqrt[3]{\left(\frac{3}{2a}\right)^3\cdot\frac{12a^5c}{b}}\\
&= \sqrt[3]{\frac{27}{8a^3}\cdot\frac{12a^5c}{b}}\\
&= \sqrt[3]{\frac{81a^2c}{2b}}
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
\frac{\left(\sqrt[7]{a^6}\right)^2\cdot\left(\sqrt[7]{a}\right)^5}{a^2\cdot\left(\sqrt[7]{a}\right)^2} &= \frac{\sqrt[7]{a^{12}}\cdot\sqrt[7]{a^5}}{a^2\cdot\sqrt[7]{a^2}}\\
&= \frac{\sqrt[7]{a^{12}\cdot a^5}}{a^2\cdot\sqrt[7]{a^2}}\\
&= \frac{\sqrt[7]{a^{17}}}{\sqrt[7]{a^{14}\cdot a^2}}\\
&= \sqrt[7]{\frac{a^{17}}{a^{16}}}\\
&= \sqrt[7]{a}
\end{aligned}
$$

d)

$$
\begin{aligned}
a\cdot\left(\sqrt[3]{a\cdot\sqrt[4]{a^3}}\right)^5 &= a\cdot\sqrt[3]{\left(a\cdot\sqrt[4]{a^3}\right)^5}\\
&= a\cdot\sqrt[3]{a^5\cdot\left(\sqrt[4]{a^3}\right)^5}\\
&= a\cdot\sqrt[3]{a^5\cdot\sqrt[4]{a^{15}}}\\
&= a\cdot\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^{20}\cdot a^{15}}}\\
&= a\cdot\sqrt[12]{a^{35}}\\
&= \sqrt[12]{a^{12}\cdot a^{35}}\\
&= \sqrt[12]{a^{47}}
\end{aligned}
$$

■

**Ejercicio 22** Convierte en una sola raíz las expresiones siguientes:

a) $\sqrt[3]{4a^2}\cdot\sqrt[6]{2a}\cdot\sqrt[4]{4a}$

b) $\frac{\sqrt[4]{5a^3}\cdot\sqrt[6]{5a}}{\sqrt[3]{5a^2}\cdot\sqrt{a}}$

c) $\frac{a\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[6]{a^5}\cdot\sqrt[5]{a^4}}$

d) $\sqrt{a\cdot\sqrt[3]{a^2}}\cdot\sqrt[3]{a\cdot\sqrt{a^3}}\cdot\sqrt[3]{a\cdot\sqrt[4]{a^3}}\cdot\sqrt[3]{a^2\sqrt{\sqrt{a}}}$

**Solución:** a)

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{4a^2}\cdot\sqrt[6]{2a}\cdot\sqrt[4]{4a} &= \sqrt[12]{(4a^2)^4}\cdot\ \sqrt[12]{(2a)^2}\cdot\ \sqrt[12]{(4a)^3}\\ &= \sqrt[12]{2^8a^8}\cdot\ \sqrt[12]{2^2a^2}\cdot\ \sqrt[12]{2^6a^3}\\ &= \sqrt[12]{(2^8a^8)\cdot(2^2a^2)\cdot(2^6a^3)}\\ &= \sqrt[12]{2^{16}a^{13}}\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt[4]{5a^3}\cdot\sqrt[6]{5a}}{\sqrt[3]{5a^2}\cdot\sqrt{a}} &= \frac{\sqrt[12]{(5a^3)^3}\cdot\ \sqrt[12]{(5a)^2}}{\sqrt[12]{(5a^2)^4}\cdot\ \sqrt[12]{a^6}}\\ &= \frac{\sqrt[12]{5^3a^9}\cdot\ \sqrt[12]{5^2a^2}}{\sqrt[12]{5^4a^8}\cdot\ \sqrt[12]{a^6}}\\ &= \frac{\sqrt[12]{5^5a^{11}}}{\sqrt[12]{5^4a^{14}}}\\ &= \sqrt[12]{\frac{5^5a^{11}}{5^4a^{14}}}\\ &= \sqrt[12]{\frac{5}{a^3}}\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\frac{a\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[6]{a^5}\cdot\sqrt[5]{a^4}} &= \frac{a\cdot\ \sqrt[30]{a^{15}}\cdot\ \sqrt[30]{a^{20}}}{\sqrt[30]{a^{25}}\cdot\ \sqrt[30]{a^{24}}}\\ &= \frac{a\cdot\ \sqrt[30]{a^{35}}}{\sqrt[30]{a^{49}}}\\ &= a\cdot\ \sqrt[30]{\frac{a^{35}}{a^{49}}}\\ &= a\cdot\ \sqrt[30]{\frac{1}{a^{14}}}\\ &= \sqrt[30]{\frac{a^{30}}{a^{14}}}\\ &= \sqrt[30]{a^{16}}\\ &= \sqrt[15]{a^8}\end{aligned}$$

d)

$$\sqrt{a\cdot\sqrt[3]{a^2}}\cdot\sqrt[3]{a\cdot\sqrt{a^3}}\cdot\sqrt[3]{a\cdot\sqrt[4]{a^3}}\cdot\sqrt[3]{a^2\sqrt{\sqrt{a}}}=$$

$$=\sqrt{\sqrt[3]{a^3\cdot a^2}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{a^2\cdot a^3}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^4\cdot a^3}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{a^4\sqrt{a}}}}$$

$$=\sqrt{\sqrt[3]{a^5}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{a^5}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^7}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{a^8\cdot a}}}$$

$$\begin{aligned}&= \sqrt[6]{a^5}\cdot\sqrt[6]{a^5}\cdot\ \sqrt[12]{a^7}\cdot\ \sqrt[12]{a^9}\\ &= \sqrt[12]{a^{10}}\cdot\ \sqrt[12]{a^{10}}\cdot\ \sqrt[12]{a^7}\cdot\ \sqrt[12]{a^9}\\ &= \sqrt[12]{a^{10}\cdot a^{10}\cdot a^7\cdot a^9}\\ &= \sqrt[12]{a^{36}}\\ &= a^3\end{aligned}$$

■

**Ejercicio 23** Simplifica las siguientes expresiones

a) $2\sqrt{75}-3\sqrt{27}+\sqrt{48}$

b) $\sqrt[3]{250}-2\sqrt[3]{54}+3\sqrt[3]{16}$

c) $\sqrt{27a^5}+\sqrt{1875a^5}-\sqrt{48a^5}$

d) $\sqrt[3]{\frac{81}{8}}-\sqrt[3]{\frac{375}{64}}+\sqrt[3]{\frac{81}{125}}$

e) $3\sqrt{12}-2\sqrt{45}+\sqrt{75}+2\sqrt{20}$

**Solución:** a)

$$\begin{aligned}
2\sqrt{75}-3\sqrt{27}+\sqrt{48} &= 2\sqrt{5^2\cdot 3}-3\sqrt{3^{2+1}}+\sqrt{2^{2\cdot 2}\cdot 3}\\
&= 2\cdot 5\sqrt{3}-3\cdot 3\sqrt{3}+2^2\sqrt{3}\\
&= 10\sqrt{3}-9\sqrt{3}+4\sqrt{3}\\
&= (10-9+4)\sqrt{3}\\
&= 5\sqrt{3}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{250}-2\sqrt[3]{54}+3\sqrt[3]{16} &= \sqrt[3]{5^3\cdot 2}-2\sqrt[3]{3^3\cdot 2}+3\sqrt[3]{2^{3+1}}\\
&= 5\sqrt[3]{2}-2\cdot 3\sqrt[3]{2}+3\cdot 2\sqrt[3]{2}\\
&= (5-6+6)\sqrt[3]{2}\\
&= 5\sqrt[3]{2}
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
\sqrt{27a^5}+\sqrt{1875a^5}-\sqrt{48a^5} &= \sqrt{3^{2+1}\cdot a^{2\cdot 2+1}}+\sqrt{5^{2\cdot 2}\cdot 3\cdot a^{2\cdot 2+1}}-\sqrt{2^{2\cdot 2}\cdot 3\cdot a^{2\cdot 2+1}}\\
&= 3\cdot a^2\sqrt{3a}+5^2\cdot a^2\sqrt{3a}-2^2\cdot a^2\sqrt{3a}\\
&= (3a^2+25a^2-4a^2)\sqrt{3a}\\
&= 24a^2\sqrt{3a}
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{\frac{81}{8}}-\sqrt[3]{\frac{375}{64}}+\sqrt[3]{\frac{81}{125}} &= \frac{\sqrt[3]{3^{3+1}}}{\sqrt[3]{2^3}}-\frac{\sqrt[3]{5^3\cdot 3}}{\sqrt[3]{2^{2\cdot 3}}}+\frac{\sqrt[3]{3^{3+1}}}{\sqrt[3]{5^3}}\\
&= \frac{3\sqrt[3]{3}}{2}-\frac{5\sqrt[3]{3}}{2^2}+\frac{3\sqrt[3]{3}}{5}\\
&= \left(\frac{3}{2}-\frac{5}{4}+\frac{3}{5}\right)\sqrt[3]{3}\\
&= \frac{17}{20}\cdot\sqrt[3]{3}
\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}
3\sqrt{12}-2\sqrt{45}+\sqrt{75}+2\sqrt{20} &= 3\sqrt{2^2\cdot 3}-2\sqrt{3^2\cdot 5}+\sqrt{5^2\cdot 3}+2\sqrt{2^2\cdot 5}\\
&= 3\cdot 2\sqrt{3}-2\cdot 3\sqrt{5}+5\sqrt{3}+2\cdot 2\sqrt{5}\\
&= (6+5)\sqrt{3}+(4-6)\sqrt{5}\\
&= 11\sqrt{3}-2\sqrt{5}
\end{aligned}$$

■

**Ejercicio 24** Desarrolla y simplifica las siguientes expresiones:

a) $(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})-(2-\sqrt{6})^2$

b) $(2+\sqrt{5})(3-2\sqrt{5})-(\sqrt{5}+2)^2-(\sqrt{5}-3)(\sqrt{5}+3)$

**Solución:** a)

$$
\begin{aligned}
(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})-(2-\sqrt{6})^2 = 3\left(\sqrt{2}\right)^2+3\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}-2\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}-2\left(\sqrt{3}\right)^2 - \\
-\left[2^2-2\cdot 2\cdot\sqrt{6}+\left(\sqrt{6}\right)^2\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= 6+3\sqrt{6}-2\sqrt{6}-6-4+4\sqrt{6}-6 \\
&= -10+5\sqrt{6}
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
(2+\sqrt{5})(3-2\sqrt{5})-(\sqrt{5}+2)^2-(\sqrt{5}-3)(\sqrt{5}+3) = 6-4\sqrt{5}+3\sqrt{5}-2\left(\sqrt{5}\right)^2 - \\
-\left[\left(\sqrt{5}\right)^2+4\sqrt{5}+4\right]-\left[\left(\sqrt{5}\right)^2-9\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= 6-4\sqrt{5}+3\sqrt{5}-10-5-4\sqrt{5}-4-5+9 \\
&= -9-5\sqrt{5}
\end{aligned}
$$

■

**Ejercicio 25** Racionaliza las siguientes expresiones:

a) $\frac{1}{2\sqrt{7a}}$

b) $\frac{1}{\sqrt[3]{4a^2}}$

c) $\frac{2a}{\sqrt[3]{81a^2}}$

d) $\frac{6ab}{\sqrt[4]{288a^2b^5}}$

e) $\frac{a^2-b^2}{\sqrt{a+b}}$

**Solución:** a)

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\sqrt{7a}} &= \frac{1}{2\sqrt{7a}}\cdot\frac{\sqrt{7a}}{\sqrt{7a}} \\
&= \frac{\sqrt{7a}}{2\left(\sqrt{7a}\right)^2} \\
&= \frac{\sqrt{7a}}{2\cdot(7a)} \\
&= \frac{\sqrt{7a}}{14a}
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt[3]{4a^2}} &= \frac{1}{\sqrt[3]{(2a)^2}}\cdot\frac{\sqrt[3]{2a}}{\sqrt[3]{2a}} \\
&= \frac{\sqrt[3]{2a}}{\sqrt[3]{(2a)^3}} \\
&= \frac{\sqrt[3]{2a}}{2a}
\end{aligned}
$$

c)

$$\begin{aligned}
\frac{2a}{\sqrt[3]{81a^2}} &= \frac{2a}{\sqrt[3]{(9a)^2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{9a}}{\sqrt[3]{9a}} \\
&= \frac{2a \cdot \sqrt[3]{9a}}{\sqrt[3]{(9a)^3}} \\
&= \frac{2a \cdot \sqrt[3]{9a}}{9a} \\
&= \frac{2 \cdot \sqrt[3]{9a}}{9}
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
\frac{6ab}{\sqrt[4]{288a^2b^5}} &= \frac{6ab}{\sqrt[4]{2^{4+1} \cdot 3^2 \cdot a^2 \cdot b^{4+1}}} \\
&= \frac{6ab}{2b\sqrt[4]{2 \cdot 3^2 \cdot a^2 \cdot b}} \\
&= \frac{3a}{\sqrt[4]{2 \cdot 3^2 \cdot a^2 \cdot b}} \cdot \frac{\sqrt[4]{2^3 \cdot 3^2 \cdot a^2 \cdot b^3}}{\sqrt[4]{2^3 \cdot 3^2 \cdot a^2 \cdot b^3}} \\
&= \frac{3a \cdot \sqrt[4]{2^3 \cdot 3^2 \cdot a^2 \cdot b^3}}{\sqrt[4]{2^4 \cdot 3^4 \cdot a^4 \cdot b^4}} \\
&= \frac{3a \cdot \sqrt[4]{72a^2b^3}}{2 \cdot 3 \cdot a \cdot b} \\
&= \frac{\sqrt[4]{72a^2b^3}}{2b}
\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}
\frac{a^2-b^2}{\sqrt{a+b}} &= \frac{a^2-b^2}{\sqrt{a+b}} \cdot \frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a+b}} \\
&= \frac{(a^2-b^2)\sqrt{a+b}}{\left(\sqrt{a+b}\right)^2} \\
&= \frac{(a+b)(a-b)\sqrt{a+b}}{a+b} \\
&= (a-b)\sqrt{a+b}
\end{aligned}$$

■

**Ejercicio 26** Racionaliza las siguientes expresiones:

a) $\frac{2\sqrt{3}}{7-\sqrt{3}}$

b) $\frac{3\sqrt{7}}{2\sqrt{7}+3\sqrt{2}}$

c) $\frac{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{7\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$

**Solución:** a)

$$\begin{aligned}
\frac{2\sqrt{3}}{7-\sqrt{3}} &= \frac{2\sqrt{3}}{7-\sqrt{3}}\cdot\frac{7+\sqrt{3}}{7+\sqrt{3}} \\
&= \frac{14\sqrt{3}+2\left(\sqrt{3}\right)^2}{7^2-\left(\sqrt{3}\right)^2} \\
&= \frac{14\sqrt{3}+6}{49-3} \\
&= \frac{14\sqrt{3}+6}{46} \\
&= \frac{7\sqrt{3}+3}{23}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\frac{3\sqrt{7}}{2\sqrt{7}+3\sqrt{2}} &= \frac{3\sqrt{7}}{2\sqrt{7}+3\sqrt{2}}\cdot\frac{2\sqrt{7}-3\sqrt{2}}{2\sqrt{7}-3\sqrt{2}} \\
&= \frac{6\left(\sqrt{7}\right)^2-9\sqrt{14}}{\left(2\sqrt{7}\right)^2-\left(3\sqrt{2}\right)^2} \\
&= \frac{42-9\sqrt{14}}{28-18} \\
&= \frac{42-9\sqrt{14}}{10}
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
\frac{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{7\sqrt{2}-2\sqrt{3}} &= \frac{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{7\sqrt{2}-2\sqrt{3}}\cdot\frac{7\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{7\sqrt{2}+2\sqrt{3}} \\
&= \frac{21\sqrt{6}+6\left(\sqrt{3}\right)^2-14\left(\sqrt{2}\right)^2-4\sqrt{6}}{\left(7\sqrt{2}\right)^2-\left(2\sqrt{3}\right)^2} \\
&= \frac{17\sqrt{6}+18-28}{98-12} \\
&= \frac{17\sqrt{6}-10}{86}
\end{aligned}$$

■

**Ejercicio 27** Convierte las siguientes expresiones en potencias:

a) $\sqrt[3]{a^2}$

b) $\sqrt[6]{a^{-7}}$

c) $1/\sqrt[4]{a^9}$

**Solución:** Sabiendo que

$$\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$$

tenemos: a)

$$\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}}$$

b)

$$\begin{aligned}
\sqrt[6]{a^{-7}} &= a^{\frac{-7}{6}} \\
&= a^{-\frac{7}{6}}
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt[4]{a^9}} &= \frac{1}{a^{\frac{9}{4}}} \\ &= a^{-\frac{9}{4}}\end{aligned}$$

■

**Ejercicio 28** Convierte las siguientes expresiones en forma de radical:

a) $a^{4/5}$

b) $1/a^{-1/2}$

c) $a^{-5/4}$

**Solución:** Sabiendo que

$$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$$

tenemos: a)

$$a^{\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{a^4}$$

b)

$$\begin{aligned}\frac{1}{a^{-\frac{1}{2}}} &= a^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{a}\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}a^{-\frac{5}{4}} &= a^{\frac{-5}{4}} \\ &= \sqrt[4]{a^{-5}}\end{aligned}$$

■

**Ejercicio 29** Calcula el valor de las siguientes expresiones:

a) $16^{0{,}25}$

b) $0{,}008^{1/3}$

c) $\sqrt[11]{\frac{9}{27^{-3}}}$

d) $\sqrt{\frac{81^{-1}}{3^{-2}}}$

**Solución:** a)

$$\begin{aligned}16^{0{,}25} &= 16^{\frac{1}{4}} \\ &= \sqrt[4]{2^4} \\ &= 2\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}0{,}008^{1/3} &= \left(8\cdot 10^{-3}\right)^{\frac{1}{3}} \\ &= \sqrt[3]{2^3\cdot 10^{-3}} \\ &= \sqrt[3]{\left(2\cdot 10^{-1}\right)^3} \\ &= 2\cdot 10^{-1} \\ &= 0{,}2\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
\sqrt[11]{\frac{9}{27^{-3}}} &= \sqrt[11]{\frac{3^2}{(3^3)^{-3}}} \\
&= \sqrt[11]{\frac{3^2}{3^{-9}}} \\
&= \sqrt[11]{3^{11}} \\
&= 3
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{81^{-1}}{3^{-2}}} &= \sqrt{\frac{(3^4)^{-1}}{3^{-2}}} \\
&= \sqrt{\frac{3^{-4}}{3^{-2}}} \\
&= \sqrt{3^{-2}} \\
&= \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}$$

■

**Ejercicio 30** Convierte en una sola potencia de $a$ las expresiones siguientes:

a) $a^3 \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt[5]{a^3}$

b) $\frac{\sqrt[7]{a^3}}{\sqrt[5]{a^2}}$

c) $\sqrt[5]{a^3 \cdot \sqrt[5]{a}}$

d) $\sqrt{a^2 \cdot \sqrt[4]{a \cdot \sqrt[5]{a}}}$

**Solución:** Sabiendo que

$$\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$$

y teniendo presentes las propiedades de las potencias, tenemos:

a)

$$\begin{aligned}
a^3 \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt[5]{a^3} &= a^3 \cdot a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{3}{5}} \\
&= a^{3+\frac{1}{2}+\frac{3}{5}} \\
&= a^{\frac{41}{10}}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt[7]{a^3}}{\sqrt[5]{a^2}} &= \frac{a^{\frac{3}{7}}}{a^{\frac{2}{5}}} \\
&= a^{\frac{3}{7}-\frac{2}{5}} \\
&= a^{\frac{1}{35}}
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
\sqrt[5]{a^3 \cdot \sqrt[5]{a}} &= \sqrt[5]{a^3 \cdot a^{\frac{1}{5}}} \\
&= \sqrt[5]{a^{3+\frac{1}{5}}} \\
&= \sqrt[5]{a^{\frac{16}{5}}} \\
&= a^{\frac{16/5}{5}} \\
&= a^{\frac{16}{25}}
\end{aligned}$$

d)

$$
\begin{aligned}
\sqrt{a^2\cdot\sqrt[4]{a\cdot\sqrt[5]{a}}} &= \sqrt{a^2\cdot\sqrt[4]{a\cdot a^{\frac{1}{5}}}}\\
&= \sqrt{a^2\cdot\sqrt[4]{a^{\frac{6}{5}}}}\\
&= \sqrt{a^2\cdot a^{\frac{6/5}{4}}}\\
&= \sqrt{a^2\cdot a^{\frac{3}{10}}}\\
&= \sqrt{a^{2+\frac{3}{10}}}\\
&= \sqrt{a^{\frac{23}{10}}}\\
&= a^{\frac{23/10}{2}}\\
&= a^{\frac{23}{20}}
\end{aligned}
$$

■

**Ejercicio 31** Expresa en forma $a^m\cdot b^n$ las expresiones siguientes:

a) $\sqrt[3]{a^2\cdot\sqrt{b^5}}\cdot\sqrt[4]{b^3}$

b) $\frac{\sqrt[5]{a^2\cdot\sqrt[3]{b^{-8}\cdot a^{-4}}}}{\sqrt[4]{a^{-2}\cdot b^3\cdot\sqrt[3]{a^5\cdot b^4}}}$

**Solución:** a)

$$
\begin{aligned}
\sqrt[3]{a^2\cdot\sqrt{b^5}}\cdot\sqrt[4]{b^3} &= \sqrt[3]{a^2\cdot b^{\frac{5}{2}}}\cdot b^{\frac{3}{4}}\\
&= \left(a^2\cdot b^{\frac{5}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot b^{\frac{3}{4}}\\
&= \left(a^{\frac{2}{3}}\cdot b^{\frac{5}{6}}\right)\cdot b^{\frac{3}{4}}\\
&= a^{\frac{2}{3}}\cdot b^{\frac{5}{6}+\frac{3}{4}}\\
&= a^{\frac{2}{3}}\cdot b^{\frac{19}{12}}
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
\frac{\sqrt[5]{a^2\cdot\sqrt[3]{b^{-8}\cdot a^{-4}}}}{\sqrt[4]{a^{-2}\cdot b^3\cdot\sqrt[3]{a^5\cdot b^4}}} &= \frac{\sqrt[5]{a^2\cdot(b^{-8}\cdot a^{-4})^{\frac{1}{3}}}}{\sqrt[4]{a^{-2}\cdot b^3\cdot(a^5\cdot b^4)^{\frac{1}{3}}}}\\
&= \frac{\sqrt[5]{a^2\cdot b^{-\frac{8}{3}}\cdot a^{-\frac{4}{3}}}}{\sqrt[4]{a^{-2}\cdot b^3\cdot a^{\frac{5}{3}}\cdot b^{\frac{4}{3}}}}\\
&= \frac{\sqrt[5]{a^{2-\frac{4}{3}}\cdot b^{-\frac{8}{3}}}}{\sqrt[4]{a^{-2+\frac{5}{3}}\cdot b^{3+\frac{4}{3}}}}\\
&= \frac{\sqrt[5]{a^{\frac{2}{3}}\cdot b^{-\frac{8}{3}}}}{\sqrt[4]{a^{-\frac{1}{5}}\cdot b^{\frac{13}{3}}}}\\
&= \frac{\left(a^{\frac{2}{3}}\cdot b^{-\frac{8}{3}}\right)^{\frac{1}{5}}}{\left(a^{-\frac{1}{5}}\cdot b^{\frac{13}{3}}\right)^{\frac{1}{4}}}\\
&= \frac{a^{\frac{2}{15}}\cdot b^{-\frac{8}{15}}}{a^{-\frac{1}{20}}\cdot b^{\frac{13}{12}}}\\
&= a^{\frac{1}{15}+\frac{1}{20}}\cdot b^{-\frac{8}{15}-\frac{13}{12}}\\
&= a^{\frac{7}{60}}\cdot b^{-\frac{97}{60}}
\end{aligned}
$$

■

**Ejercicio 32** Demuestra las igualdades siguientes:

a) $\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}} = \frac{2}{3+\sqrt{5}}$

b) $\sqrt{1+\frac{1}{2}\sqrt{3}} + \sqrt{1-\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

**Solución:** a) Sabiendo que $\sqrt{a} = b$ si $b^2 = a$, entonces calculamos

$$\begin{aligned}
\left(\frac{2}{3+\sqrt{5}}\right)^2 &= \frac{4}{(3+\sqrt{5})^2} \\
&= \frac{4}{(3+\sqrt{5})^2} \cdot \frac{3-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} \\
&= \frac{4(3-\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})\left[3^2-\left(\sqrt{5}\right)^2\right]} \\
&= \frac{4(3-\sqrt{5})}{4(3+\sqrt{5})} \\
&= \frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}
\end{aligned}$$

Este resultado prueba que

$$\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}} = \frac{2}{3+\sqrt{5}}$$

b) Supongamos que

$$A = \sqrt{1+\frac{1}{2}\sqrt{3}} + \sqrt{1-\frac{1}{2}\sqrt{3}}$$

entonces

$$\begin{aligned}
A^2 &= \left(\sqrt{1+\frac{1}{2}\sqrt{3}}\right)^2 + 2\sqrt{1+\frac{1}{2}\sqrt{3}} \cdot \sqrt{1-\frac{1}{2}\sqrt{3}} + \left(\sqrt{1-\frac{1}{2}\sqrt{3}}\right)^2 \\
&= 1+\frac{1}{2}\sqrt{3} + 2\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2} + 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3} \\
&= 2+2\sqrt{1-\frac{3}{4}} \\
&= 2+2\sqrt{\frac{1}{4}} \\
&= 2+1 \\
&= 3
\end{aligned}$$

Luego, $A = \sqrt{3}$, o sea, se cumple

$$\sqrt{1+\frac{1}{2}\sqrt{3}} + \sqrt{1-\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

■

**Ejercicio 33** Demuestra que $\sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}}$ es un número entero.
**Solución:** Supongamos que

$$A = \sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{7-4\sqrt{3}}$$

entonces

$$\begin{aligned}
A^2 &= \left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}\right)^2 + 2\sqrt{7+4\sqrt{3}}\cdot\sqrt{7-4\sqrt{3}} + \left(\sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)^2 \\
&= 7+4\sqrt{3}+2\sqrt{49-\left(4\sqrt{3}\right)^2}+7-4\sqrt{3} \\
&= 14+2\sqrt{49-48} \\
&= 14+2 \\
&= 16
\end{aligned}$$

Luego, $A = 4$, o sea,

$$\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}} = 4$$

■

**Ejercicio 34** Racionaliza el denominador de las siguientes expresiones:

a) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$

b) $\frac{2}{\sqrt[3]{10}-\sqrt[3]{4}}$

**Solución:** a)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}} &= \frac{1}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{5}}\cdot\frac{(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{5}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})+\sqrt{5}} \\
&= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2} \\
&= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\left(\sqrt{2}\right)^2+2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2} \\
&= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2+2\sqrt{6}+3-5} \\
&= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2\sqrt{6}}\cdot\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} \\
&= \frac{\sqrt{12}+\sqrt{18}+\sqrt{30}}{2\left(\sqrt{6}\right)^2} \\
&= \frac{\sqrt{2^2\cdot 3}+\sqrt{3^2\cdot 2}+\sqrt{30}}{12} \\
&= \frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}+\sqrt{30}}{12}
\end{aligned}$$

b) Teniendo en cuenta la siguiente identidad

$$x^3-y^3=(x-y)(x^2-xy+y^2)$$

tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\sqrt[3]{10}-\sqrt[3]{4}} &= \frac{2}{\sqrt[3]{10}-\sqrt[3]{4}}\cdot\frac{\left(\sqrt[3]{10}\right)^2-\sqrt[3]{10}\cdot\sqrt[3]{4}+\left(\sqrt[3]{4}\right)^2}{\left(\sqrt[3]{10}\right)^2-\sqrt[3]{10}\cdot\sqrt[3]{4}+\left(\sqrt[3]{4}\right)^2} \\
&= \frac{2\cdot\sqrt[3]{100}-2\cdot\sqrt[3]{40}+2\cdot\sqrt[3]{16}}{\left(\sqrt[3]{10}\right)^3-\left(\sqrt[3]{4}\right)^3} \\
&= \frac{2\cdot\sqrt[3]{100}-2\cdot\sqrt[3]{2^3\cdot 5}+2\cdot\sqrt[3]{2^{3+1}}}{10-4} \\
&= \frac{2\cdot\sqrt[3]{100}-2\cdot 2\cdot\sqrt[3]{5}+2\cdot 2\cdot\sqrt[3]{2}}{6} \\
&= \frac{\sqrt[3]{100}-2\cdot\sqrt[3]{5}+2\cdot\sqrt[3]{2}}{3}
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

**Ejercicio 35** Simplifica las sumas siguientes:

a) $\sqrt{108}+\frac{6}{\sqrt{27}}+\frac{8}{\sqrt{32}}-\frac{5}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

b) $\frac{3-\sqrt{2}}{3+\sqrt{5}}+\frac{2\sqrt{2}-1}{3-\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$

**Solución:** a) Primero, racionalizaremos los denominadores de las fracciones. Así tenemos,

$$\begin{aligned}\frac{6}{\sqrt{27}} &= \frac{6}{\sqrt{3^{2+1}}}\\ &= \frac{6}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{8}{\sqrt{32}} &= \frac{8}{\sqrt{2^{2\cdot 2+1}}}\\ &= \frac{8}{2^2\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\\ &= \frac{2\sqrt{2}}{2}\\ &= \sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{5}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}} &= \frac{5}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}\cdot\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}\\ &= \frac{10\sqrt{3}+5\sqrt{2}}{\left(2\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}\\ &= \frac{10\sqrt{3}+5\sqrt{2}}{4\cdot 3-2}\\ &= \frac{10\sqrt{3}+5\sqrt{2}}{10}\\ &= \frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

Por tanto, tenemos

$$\begin{aligned}\sqrt{108}+\frac{6}{\sqrt{27}}+\frac{8}{\sqrt{32}}-\frac{5}{2\sqrt{3}-\sqrt{2}} &= \sqrt{108}+\frac{2\sqrt{3}}{3}+\sqrt{2}-\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}\\ &= \frac{6\sqrt{2^2\cdot 3^{2+1}}+4\sqrt{3}+6\sqrt{2}-6\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{6}\\ &= \frac{36\sqrt{3}+4\sqrt{3}+6\sqrt{2}-6\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{6}\\ &= \frac{(36+4-6)\sqrt{3}+(6-3)\sqrt{2}}{6}\\ &= \frac{34\sqrt{3}+3\sqrt{2}}{6}\end{aligned}$$

b) Del mismo modo que antes, primero, racionalizaremos los denominadores de las fracciones. Así tenemos,

$$\begin{aligned}\frac{3-\sqrt{2}}{3+\sqrt{5}} &= \frac{3-\sqrt{2}}{3+\sqrt{5}}\cdot\frac{3-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}\\ &= \frac{9-3\sqrt{5}-3\sqrt{2}+\sqrt{10}}{3^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}\\ &= \frac{9-3\sqrt{5}-3\sqrt{2}+\sqrt{10}}{4}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{2\sqrt{2}-1}{3-\sqrt{5}} &= \frac{2\sqrt{2}-1}{3-\sqrt{5}} \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} \\
&= \frac{6\sqrt{2}+2\sqrt{10}-3-\sqrt{5}}{3^2-\left(\sqrt{5}\right)^2} \\
&= \frac{6\sqrt{2}+2\sqrt{10}-3-\sqrt{5}}{4}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} &= \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} \\
&= \frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2} \\
&= \frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{3}
\end{aligned}
$$

Por tanto, tenemos

$$
\begin{aligned}
\frac{3-\sqrt{2}}{3+\sqrt{5}} + \frac{2\sqrt{2}-1}{3-\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} &= \frac{9-3\sqrt{5}-3\sqrt{2}+\sqrt{10}}{4} + \frac{6\sqrt{2}+2\sqrt{10}-3-\sqrt{5}}{4} + \frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{3} \\
&= \frac{6-4\sqrt{5}+3\sqrt{2}+3\sqrt{10}}{4} + \frac{\sqrt{5}+\sqrt{2}}{3} \\
&= \frac{18-12\sqrt{5}+9\sqrt{2}+9\sqrt{10}+4\sqrt{5}+4\sqrt{2}}{12} \\
&= \frac{18-8\sqrt{5}+13\sqrt{2}+9\sqrt{10}}{12}
\end{aligned}
$$

$\blacksquare$