Teoría

Índice

1. Anillo de los polinomios

Se llama **polinomio en la indeterminada** (o variable) x a toda expresión reducible a la forma:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

donde n es un número natural y $a_0, a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n$ son números reales cualesquiera. La letra x que aparece en el polinomio no designa nada en particular y, por esto, se la llama indeterminada; en realidad, puede sustituirse por cualquier otra letra o signo. Si $a_n \neq 0$, entonces se dice que n es el **grado** del polinomio; se admite que un número real distinto de cero es un polinomio de grado cero y que el número real 0 es un polinomio sin grado, se llama **polinomio cero**. A cada uno de los sumandos $a_i x^i$ $(i = 1, 2, ..., n)$ del polinomio lo llamamos **monomio de grado** i y entonces a_i se llama **coeficiente del monomio de grado** i. A a_0 se le llama **término independiente** del polinomio (o coeficiente del monomio de grado cero si $a_0 \neq 0$).
En general, a los números reales $a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n$ se les llama también **coeficientes del polinomio** y para referirse a uno de ellos, diremos también que a_i es el **coeficiente del término de grado** i del polinomio. Se llama **número de términos** del polinomio al número de monomios no nulos que aparecen en el polinomio; si son dos, el polinomio se llama **binomio**, y si son tres, **trinomio**. Finalmente, para referirnos a un polinomio en la indeterminada x utilizaremos la notación $p(x)$. De este modo, si $p(x)$ es un polinomio de grado n con coeficientes $a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n$, escribiremos

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

Dos polinomios son **iguales** si coinciden los coeficientes de todos los términos del mismo grado en uno y otro polinomio. Es claro que si dos polinomios son iguales, entonces ambos tienen el mismo grado; en particular, dados dos polinomios de grado n

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n \quad (a_n \neq 0)$$

y

$$q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_{n-1} x^{n-1} + b_n x^n \quad (b_n \neq 0)$$

diremos que $p(x) = q(x)$ si

$$a_k = b_k \qquad (k = 0, 1, 2, ..., n)$$

Por ejemplo,

$$p(x) = -1 + 2x - 3x^2 + 5x^4$$

es un polinomio de grado 3 con coeficientes $-1, 2, -3$ y 5, siendo su término independiente -1. Observa que $p(x)$ está formado por una suma de monomios: -1 es un monomio de grado cero, $2x$ es un monomio de grado 1, $-3x^2$ es un monomio de grado 2 y $5x^4$ es un monomio de grado 4 ¿cuál es el monomio de grado 4?. Por ejemplo, el coeficiente del monomio de grado 2 es -3 y el coeficiente del monomio de grado 3 es 0 ¿cuál es el coeficiente del monomio de grado 3?
A veces un polinomio no viene dado en forma reducida. Esto ocurre, por ejemplo, con el siguiente polinomio

$$p(x) = x^3 - 3x^2 - \sqrt{2} + \sqrt{3}x - 7x^2 + 5x^3 + 1 - 6x^3 + 10x^2 + x$$

Entonces, efectuando operaciones con los monomios del mismo grado, denominados **términos semejantes**, obtenemos

$$\begin{aligned} p(x) &= -\sqrt{2} + 1 + (\sqrt{3} + 1)x + (-3 - 7 + 10)x^2 + (1 + 5 - 6)x^3 \\ &= -\sqrt{2} + 1 + (\sqrt{3} + 1)x \end{aligned}$$

Mediante esta **reducción de términos semejantes** vemos que resulta un polinomio de grado 1 con coeficientes $-\sqrt{2} + 1$ y $\sqrt{3} + 1$.

1.1. Valor numérico de un polinomio

Hemos dicho que la indeterminada de un polinomio puede ser cualquier cosa. En particular, un polinomio

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

toma un valor cuando a la indeterminada x le asignamos un número real. Se llama **valor numérico** de un polinomio $p(x)$ para $x = k$ (k es un número real cualquiera) al número

$$p(k) = a_0 + a_1 k + a_2 k^2 + \cdots + a_{n-1} k^{n-1} + a_n k^n$$

es decir, al resultado de sustituir la x por el número k y efectuar después las operaciones.

Por ejemplo, el valor numérico del polinomio $p(x) = 1 + x - x^3$ para $x = -1$ es

$$\begin{aligned} p(-1) &= 1 + (-1) - (-1)^3 \\ &= 1 - 1 + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

1.2. Suma de polinomios

Dados dos polinomios

$$\begin{aligned} p(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n \\ q(x) &= b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_{m-1}x^{m-1} + b_mx^m \end{aligned}$$

con $a_n \neq 0$ y $b_m \neq 0$, o sea, de grados n y m respectivamente. Definimos la **suma de dos monomios del mismo grado** i como sigue

$$a_ix^i + b_ix^i = (a_i + b_i)x^i$$

Observa que, cuando x tome algún valor numérico, esta definición será consistente con el hecho de que el producto de números reales sea distributivo respecto de la suma. Entonces, definimos **polinomio suma** al polinomio $p(x) + q(x)$ que resulta de sumar los monomios del mismo grado. Así, tenemos

$$p(x) + q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \cdots$$

Si en un polinomio o en ambos falta algún monomio, se ha de suponer que su coeficiente es cero. Por ejemplo, si

$$\begin{aligned} p(x) &= 2 - 3x + 5x^2 \\ q(x) &= -1 + 3x^2 - 2x^3 \end{aligned}$$

entonces el polinomio suma $p(x) + q(x)$ es

$$\begin{array}{ccrrrr} p(x) & = & 2 & -3x & 5x^2 & 0x^3 \\ q(x) & = & -1 & 0x & 3x^2 & -2x^3 \\ \hline p(x)+q(x) & = & 1 & -3x & 8x^2 & -2x^3 \end{array}$$

es decir,

$$p(x) + q(x) = 1 - 3x + 8x^2 - 2x^3$$

1.2.1. Propiedades de la suma

(1) **Asociativa**: cualesquiera que sean los polinomios $p(x), q(x)$ y $r(x)$ se cumple

$$[p(x) + q(x)] + r(x) = p(x) + [q(x) + r(x)]$$

(2) **Conmutativa**: cualesquiera que sean los polinomios $p(x)$ y $q(x)$ se cumple

$$p(x) + q(x) = q(x) + p(x)$$

(3) **Existencia de elemento neutro**: para cualquier polinomio $p(x)$ se cumple

$$p(x) + 0 = p(x)$$

siendo 0 el polinomio cero, es decir, el polinomio que tiene todos sus coeficientes iguales a 0.

(4) **Existencia de elemento opuesto**: para cada polinomio $p(x)$ existe $-p(x)$, denominado **polinomio opuesto** de $p(x)$, tal que

$$p(x) + [-p(x)] = 0$$

Este polinomio es único para cada $p(x)$ y, si $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$, entonces

$$-p(x) = (-a_0) + (-a_1)x + (-a_2)x^2 + \cdots + (-a_{n-1})x^{n-1} + (-a_n)x^n$$

es decir, $-p(x)$ tiene por coeficientes los opuestos de los coeficientes de $p(x)$. Como es habitual, definimos

$$p(x) - q(x) = p(x) + [-q(x)]$$

es decir, la **resta** de dos polinomios $p(x) - q(x)$ es la suma de $p(x)$ con el opuesto de $q(x)$.

(5) **Grado del polinomio suma**: el grado del polinomio suma es más pequeño o igual que el máximo de los grados de los polinomios sumandos

$$\text{grad}\ [p(x) + q(x)] \leq \text{máx}\{\text{grad}\ \ p(x), \text{grad}\, q(x)\}$$

Por ejemplo, si

$$\begin{aligned} p(x) &= -16 + x^2 - 6x^4 + x^5 \\ q(x) &= 1 + 2x^2 - 5x^3 \end{aligned}$$

entonces

$$p(x) + q(x) = -15 + 3x^2 - 5x^3 - 6x^4 + x^5$$

y se cumple

$$\text{grad}\ [p(x) + q(x)] = 5 \leq 5 = \text{máx}\{\text{grad}\, p(x), \text{grad}\, q(x)\}$$

Pero, si

$$\begin{aligned} p(x) &= -16 + x^2 - 6x^4 + x^5 \\ q(x) &= 1 + 2x^2 - x^5 \end{aligned}$$

entonces

$$p(x) + q(x) = -15 + 3x^2 - 6x^4$$

y también se cumple

$$\text{grad}\ [p(x) + q(x)] = 4 \leq 5 = \text{máx}\{\text{grad}\, p(x), \text{grad}\, q(x)\}$$

1.3. Producto de polinomios

Dados dos polinomios

$$\begin{aligned} p(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n \\ q(x) &= b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_{m-1} x^{m-1} + b_m x^m \end{aligned}$$

con $a_n \neq 0$ y $b_m \neq 0$, o sea, de grados n y m respectivamente. Definimos el **producto de dos monomios** cualesquiera como sigue

$$\left(a_i x^i\right) \cdot \left(b_j x^j\right) = (a_i b_j)\ \ x^{i+j}$$

Observa que, cuando x tome algún valor numérico, esta definición será consistente con las propiedades conmutativa y asociativa del producto de números reales y también con la propiedad del producto de potencias. Entonces, definimos **polinomio producto** al polinomio $p(x) \cdot q(x)$ que resulta de multiplicar cada monomio de $p(x)$ por todos los monomios de $q(x)$ y después sumarlos todos. Así, tenemos

$$p(x) \cdot q(x) = (a_0 b_0) + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)x^2 + \cdots$$

Por ejemplo, si

$$\begin{aligned} p(x) &= 2 - 3x + 5x^2 \\ q(x) &= -1 + 3x^2 - 2x^3 \end{aligned}$$

entonces el polinomio producto $p(x) \cdot q(x)$ es

$$\begin{array}{cccccccccccccc} p(x) & = & & & & & & & & 2 & - & 3x & + & 5x^2 \\ q(x) & = & & & & & & & - & 1 & + & 3x^2 & - & 2x^3 \\ \hline & & - & 2 & & & + & 6x^2 & - & 4x^3 & & & & \\ & & & & & 3x & & & - & 9x^3 & + & 6x^4 & & \\ & & & & & & - & 5x^2 & & & + & 15x^4 & - & 10x^5 \\ \hline p(x) \cdot q(x) & = & - & 2 & + & 3x & + & x^2 & - & 13x^3 & + & 21x^4 & - & 10x^5 \end{array}$$

1.3.1. Propiedades del producto

(1) **Asociativa**: cualesquiera que sean los polinomios $p(x), q(x)$ y $r(x)$ se cumple

$$[p(x) \cdot q(x)] \cdot r(x) = p(x) \cdot [q(x) \cdot r(x)]$$

(2) **Conmutativa**: cualesquiera que sean los polinomios $p(x)$ y $q(x)$ se cumple

$$p(x) \cdot q(x) = q(x) \cdot p(x)$$

(3) **Existencia de elemento unidad**: para cualquier polinomio $p(x)$ se cumple

$$p(x) \cdot 1 = p(x)$$

siendo 1 la unidad de los números reales, es decir, un polinomio de grado cero. A 1 se le llama entonces **polinomio unidad**.

(4) **Distributiva del producto respecto de la suma**: cualesquiera que sean los polinomios $p(x), q(x)$ y $r(x)$ se cumple

$$p(x) \cdot [q(x) + r(x)] = p(x) \cdot q(x) + p(x) \cdot r(x)$$

(5) **No tiene divisores de cero**: si $p(x) \neq 0$ y $q(x) \neq 0$, entonces

$$p(x) \cdot q(x) \neq 0$$

o dicho de otra forma equivalente, si $p(x) \cdot q(x) = 0$, entonces $p(x) = 0$ o $q(x) = 0$.

(6) **Grado del polinomio producto**: si los polinomios multiplicandos son no nulos, entonces el grado del polinomio producto es igual a la suma de los grados de los polinomios

$$\text{grad}\ [p(x) \cdot q(x)] = \text{grad}\, p(x) + \text{grad}\, q(x)$$

con $p(x) \neq 0$ y $q(x) \neq 0$. Por ejemplo, si

$$\begin{aligned} p(x) &= 2 - 3x + 5x^2 \\ q(x) &= -1 + 3x^2 - 2x^3 \end{aligned}$$

entonces

$$p(x) \cdot q(x) = -2 + 3x + x^2 - 13x^3 + 21x^4 - 10x^5$$

y se cumple

$$\text{grad}\ [p(x) \cdot q(x)] = 5 = 2 + 3 = \text{grad}\, p(x) + \text{grad}\, q(x)$$

1.4. Anillo de los polinomios

Si designamos por $\mathbb{R}[x]$ el conjunto de todos los polinomios con coeficientes reales, entonces decimos que $\mathbb{R}[x]$ tiene estructura de **anillo unitario conmutativo sin divisores de cero**. Esto es así, porque las operaciones de suma y producto de polinomios son internas (la suma de dos polinomios es otro polinomio, y el producto de dos polinomios es otro polinomio) y, (i) la suma de polinomios cumple las propiedades (1) a (4) y (ii) el producto de polinomios cumple las propiedades (1) a (5).
Designamos por $\mathbb{Z}[x]$ el conjunto de todos los polinomios con coeficientes enteros y por $\mathbb{Q}[x]$, el conjunto de todos los polinomios con coeficientes racionales.
Observa que $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}[x]$, pues, hemos asumido el convenio de considerar los números reales distintos de cero como polinomios de grado cero; el número real 0 es un polinomio sin grado. Esta inclusión de los números reales en el anillo de los polinomios es tal que toda propiedad relativa a dicho anillo será consistente con las propiedades ya conocidas de los números reales. Por ejemplo, las propiedades de la suma de polinomios se traducen en las propiedades de la suma de números reales al considerar los polinomios de grado cero y el número real 0.

2. Potencia de un binomio. Fórmula de Newton

Consideramos ahora el caso particular de que el polinomio $p(x)$ sea un binomio. Se llama potencia n-ésima del binomio al producto de $p(x)$ por sí mismo n veces, es decir,

$$[p(x)]^n = p(x) \cdot \overset{n \text{ veces}}{\cdots} \cdot\ p(x)$$

Para hallar una expresión general de dicha potencia vamos a suponer que el binomio es de la forma $A + B$, siendo A y B monomios de grados cualesquiera. A partir de las propiedades de la suma y producto de monomios así como de las propiedades de los números combinatorios [1], se cumple la **fórmula de Newton**

$$(A+B)^n = \binom{n}{0}A^n + \binom{n}{1}A^{n-1}B + \binom{n}{2}A^{n-2}B + \cdots + \binom{n}{n-1}AB^{n-1} + \binom{n}{n}B^n$$

En efecto, demostraremos dicha fórmula por inducción [2]. Para $n = 1$, debemos demostrar que se cumple la siguiente igualdad

$$(A+B)^1 = \binom{1}{0}A^1 + \binom{1}{1}A^0B$$

Pero, esto es evidente ya que

$$\binom{1}{0} = \binom{1}{1} = 1$$

y por definición $A^0 = 1$ (Este hecho es consistente con la propiedad de que $a^0 = 1$ para todo número real distinto de cero). Supongamos ahora que la fórmula se cumple para $n = k$ (hipótesis de inducción), siendo k cualquier número natural

$$(A+B)^k = \binom{k}{0}A^k + \binom{k}{1}A^{k-1}B + \binom{k}{2}A^{k-2}B + \cdots + \binom{k}{k-1}AB^{k-1} + \binom{k}{k}B^k$$

Se trata ahora de demostrar que también se cumple para $n = k + 1$. En efecto,

$$\begin{aligned}
(A+B)^{k+1} &= (A+B)^k(A+B) \\
&= \left[\binom{k}{0}A^k + \binom{k}{1}A^{k-1}B + \binom{k}{2}A^{k-2}B + \cdots + \binom{k}{k-1}AB^{k-1} + \binom{k}{k}B^k\right](A+B) \\
&= \binom{k}{0}A^{k+1} + \binom{k}{1}A^kB + \binom{k}{2}A^{k-1}B + \cdots + \binom{k}{k-1}A^2B^{k-1} + \binom{k}{k}AB^k + \\
&\quad \binom{k}{0}A^kB + \binom{k}{1}A^{k-1}B^2 + \binom{k}{2}A^{k-2}B^2 + \cdots + \binom{k}{k-1}AB^k + \binom{k}{k}B^{k+1} \\
&= \binom{k}{0}A^{k+1} + \left[\binom{k}{0} + \binom{k}{1}\right]A^kB + \left[\binom{k}{1} + \binom{k}{2}\right]A^{k-1}B^2 + \cdots + \left[\binom{k}{k-2} + \binom{k}{k-1}\right]A^2B^{k-1} + \\
&\quad \left[\binom{k}{k-1} + \binom{k}{k}\right]AB^k + \binom{k}{k}B^{k+1} \\
&= \binom{k+1}{0}A^{k+1} + \binom{k+1}{1}A^kB + \binom{k+1}{2}A^{k-1}B^2 + \cdots + \binom{k+1}{k-1}A^2B^{k-1} + \binom{k+1}{k}AB^k + \binom{k+1}{k+1}
\end{aligned}$$

pues, sabemos que se cumplen las siguientes propiedades de los números combinatorios

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

[1] Recuerda que el número combinatorio

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}$$

es el número de subconjuntos de m elementos que pueden obtenerse a partir de un conjunto de n elementos o, de forma equivalente, es el número de colecciones de m objetos que se pueden hacer a partir de una colección de n objetos, prescindiendo del orden.

[2] El método de demostración denominado por inducción se utiliza a menudo para probar que una determinada propiedad o fórmula es válida para todo número natural. La prueba consiste en demostrar dos hechos: (1) que la propiedad o fórmula se cumple para $n = 1$ y (2) que para todo número natural k, si la propiedad se cumple para $n = k$ (hipótesis de inducción), entonces también se cumple para su siguiente $n = k + 1$. Una vez demostrados estos dos hechos, por el principio de inducción de los números naturales, la propiedad se cumple para todo número natural n.

y

$$\binom{n}{m} + \binom{n}{m+1} = \binom{n+1}{m+1}$$

Por ejemlo, si

$$A = x^2$$
$$B = 1$$

entonces

$$\begin{aligned}(x^2+1)^4 &= \binom{4}{0}\left(x^2\right)^4 + \binom{4}{1}\left(x^2\right)^3 \cdot 1 + \binom{4}{2}\left(x^2\right)^2 \cdot 1^2 + \binom{4}{3}\left(x^2\right) \cdot 1^3 + \binom{4}{4}1^4 \\ &= x^8 + 4x^6 + 6x^4 + 4x^2 + 1\end{aligned}$$

Es importante observar que la fórmula de Newton no sólo será válida para desarrollar expresiones de la forma $(A+B)^n$, con A y B monomios de grados cualesquiera, sino que también lo será para desarrollar expresiones del mismo tipo donde A y B sean números reales o expresiones sujetas a las mismas propiedades.

2.1. Cálculo de los coeficientes en la fórmula de Newton

Para calcular los números combinatorios que aparecen en la fórmula de Newton es útil formar el **triángulo de Tartaglia**

$$\begin{array}{ccccccccccc} & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\ 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\ 1 \; & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & \; 1 \\ \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots & & \ldots \end{array}$$

Este triángulo tiene como base la propiedad de los números combinatorios según la cual

$$\binom{n}{m} + \binom{n}{m+1} = \binom{n+1}{m+1}$$

además de que

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

Por ejemplo, para calcular $(a+b)^5$ primero construiremos el triángulo de Tartaglia hasta la fila 5. Los números de esta fila se corresponden en orden con los números combinatorios que aparecen en el desarrollo por la fórmula de Newton de $(a+b)^5$. Así tenemos

$$\begin{aligned}(a+b)^5 &= \binom{5}{0}a^5 + \binom{5}{1}a^4b + \binom{5}{2}a^3b^2 + \binom{5}{3}a^2b^3 + \binom{5}{4}ab^4 + \binom{5}{5}b^5 \\ &= 1 \cdot a^5 + 5 \cdot a^4b + 10 \cdot a^3b^2 + 10 \cdot a^2b^3 + 5 \cdot ab^4 + 1 \cdot b^5 \\ &= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5\end{aligned}$$

2.2. Cálculo de un término del desarrollo de un binomio

Observa que en la fórmula de Newton

$$(A+B)^n = \binom{n}{0}A^n + \binom{n}{1}A^{n-1}B + \binom{n}{2}A^{n-2}B + \cdots + \binom{n}{n-1}AB^{n-1} + \binom{n}{n}B^n$$

aparecen $n+1$ términos y en cada término hay un número combinatorio que tiene como numerador siempre n y como denominador un número que es una unidad menor que el lugar que ocupa dicho término como sumando del desarrollo. Además, tomando por definición que $A^0 = B^0 = 1$, en cada término aparece el producto de una potencia de A por otra de B de manera que el exponente de A es la diferencia de los dos números que forman el número combinatorio y el exponente de B es el denominador del número combinatorio. Con estas observaciones previas no es difícil comprender que el término que ocupa el lugar k $(1 \leq k \leq n+1)$ en el desarrollo de $(A+B)^n$ sea

$$t_k = \binom{n}{k-1} \cdot A^{n-(k-1)} \cdot B^{k-1}$$

Por ejemplo, se trata de calcular el término 5^o del desarrollo de $(x^2-3x)^6$ sin necesidad de hacer todo el desarrollo. Así, tenemos

$$\begin{aligned} t_5 &= \binom{6}{4} \cdot \left(x^2\right)^{6-4} \cdot (-3x)^4 \\ &= 15 \cdot x^4 \cdot 81x^4 \\ &= 1215x^8 \end{aligned}$$

Observa que hemos tomado $A = x^2$ y $B = -3x$, pues $(x^2-3x)^6 = \left[x^2 + (-3x)\right]^6$.

3. División de polinomios

Dados dos polinomios cualesquiera $p(x)$ y $q(x)$ tales que $\operatorname{grad} p(x) \geq \operatorname{grad} q(x)$, se puede demostrar que siempre existen dos polinomios $c(x)$ y $r(x)$ tales que

$$p(x) = q(x) \cdot c(x) + r(x)$$

con $\operatorname{grad} r(x) < \operatorname{grad} q(x)$ o $r(x) = 0$. De la operación que consiste en hallar los polinomios $c(x)$ y $r(x)$ se la llama **división** de $p(x)$ por $q(x)$. Entonces a los polinomios $c(x)$ y $r(x)$ se llaman **cociente** y **resto** de la división respectivamente, y a $p(x)$ y $q(x)$, **dividendo** y **divisor** de la división, respectivamente.
Observa que, al ser $\operatorname{grad} r(x) < \operatorname{grad} q(x)$, el grado del cociente de una división de polinomios siempre es la diferencia de los grados del dividendo y divisor. En efecto, puesto que

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} p(x) &= \operatorname{grad}\ (q(x) \cdot c(x) + r(x)) \\ &= \operatorname{grad}\ (q(x) \cdot c(x)) \text{ Pues } \operatorname{grad} r(x) < \operatorname{grad} q(x) \\ &= \operatorname{grad} q(x) + \operatorname{grad} c(x) \end{aligned}$$

de donde

$$\operatorname{grad} c(x) = \operatorname{grad} p(x) - \operatorname{grad} q(x)$$

3.1. Algoritmo de la división

Exponemos a continuación un método para encontrar el cociente y el resto de una división de polinomios.

1. Ordenamos los polinomios $p(x)$ y $q(x)$, dividendo y divisor de la división, en forma de potencias decrecientes en lugar de crecientes como hasta ahora. El monomio de mayor grado del cociente se obtiene dividiendo el monomio de mayor grado de $p(x)$ por el monomio de mayor grado de $q(x)$. Entonces, se multiplica el divisor por este monomio y se resta este producto del dividendo. La diferencia que resulta es el primer resto parcial.

$$\begin{array}{rrrrrrr|rrrrr} -2x^3 & + & 3x^2 & + & 0x & - & 1 & 5x^2 & - & 3x & + & 2 \\ \cline{8-12} 2x^3 & - & \frac{6}{5}x^2 & + & \frac{4}{5}x & & & -\frac{2}{5}x & & & & \\ \cline{1-5} \diagup & & \frac{9}{5}x^2 & + & \frac{4}{5}x & - & 1 & & & & & \end{array}$$

2. Si el resto parcial obtenido antes es de grado igual o mayor que el del divisor, repetimos el paso anterior hasta obtener un resto de grado menor que el del divisor.

$$\begin{array}{rrrrrrr|rrr} -2x^3 & + & 3x^2 & + & 0x & - & 1 & 5x^2 - 3x + 2 \\ \cline{8-8} 2x^3 & - & \frac{6}{5}x^2 & + & \frac{4}{5}x & & & -\frac{2}{5}x + \frac{9}{25} \\ \cline{1-5} \diagup & & \frac{9}{5}x^2 & + & \frac{4}{5}x & - & 1 & \\ & - & \frac{9}{5}x^2 & + & \frac{27}{25}x & - & \frac{18}{25} & \\ \cline{2-7} & & \diagup & & \frac{47}{25}x & - & \frac{43}{25} & \end{array}$$

Observa que el resto es ahora
$$\frac{47}{25}x - \frac{43}{25}$$
de grado menor que el del divisor y, por tanto, la división ha finalizado.

Como consecuencia tenemos que al dividir $p(x) = -2x^3 + 3x^2 - 1$ por $q(x) = 5x^2 - 3x + 2$ se obtiene como resto y cociente, respectivamente,

$$r(x) = \frac{47}{25}x - \frac{43}{25} \quad \text{y} \quad c(x) = -\frac{2}{5}x + \frac{9}{25}$$

y se cumple
$$-2x^3 + 3x^2 - 1 = (5x^2 - 3x + 2)\left(-\frac{2}{5}x + \frac{9}{25}\right) + \frac{47}{25}x - \frac{43}{25}$$

3.2. Divisibilidad de polinomios

Dados dos polinomios $p(x)$ y $q(x)$, decimos que $p(x)$ es **divisible** por $q(x)$ o también que $q(x)$ es un **divisor** de $p(x)$ si existe un polinomio $c(x)$ tal que

$$p(x) = q(x) \cdot c(x)$$

Esta relación también se expresa diciendo que $p(x)$ es un **múltiplo** de $q(x)$. Observa que si $p(x)$ es un múltiplo de $q(x)$, entonces el resto de la división de $p(x)$ por $q(x)$ es exacta, es decir, se tiene resto igual a 0.
Por ejemplo, $x^2 - 1$ es un múltiplo de $x + 1$, pues

$$x^2 - 1 = (x + 1) \cdot (x - 1)$$

Un polinomio de grado n

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

se llama **mónico** o **unitario** si el coeficiente del monomio de mayor grado es igual a la unidad, es decir, $a_n = 1$. Por ejemplo, los polinomios $x^2 + 1$, $2 - 3x + x^2$ o $1 + x^4$, son mónicos.
Todo polinomio puede escribirse como producto de un polinomio mónico del mismo grado por un número real, pues

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n = a_n \cdot \left(\frac{a_0}{a_n} + \frac{a_1}{a_n}x + \frac{a_2}{a_n}x^2 + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n}x^{n-1} + x^n\right)$$

Por ejemplo, el polinomio $p(x) = 1 - 3x - 4x^3$ puede escribirse como sigue

$$p(x) = (-4) \cdot \left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{4}x + x^3\right)$$

y, en tal caso, se dice que el polinomio

$$-\frac{1}{4} + \frac{3}{4}x + x^3$$

es el polinomio mónico de $p(x)$.
Un polinomio $p(x)$ se llama **irreducible** si los únicos divisores mónicos de $p(x)$ son el polinomio unidad 1 y su polinomio mónico correspondiente. Por ejemplo, los polinomios $x + 1$, $x^2 + 1$, $2x - 3$ o $x^2 + x + 1$ son irreducibles.

3.3. Máximo común divisor de dos polinomios

Se llama **máximo común divisor** de los polinomios $p(x)$ y $q(x)$ al polinomio mónico $d(x)$ que satisface la siguiente propiedad: $d(x)$ es el polinomio de mayor grado que es divisor de $p(x)$ y de $q(x)$. Escribiremos
$$d(x) = \text{m.c.d.}\,(p(x), q(x))$$

Por ejemplo, el máximo común divisor de los polinomios $p(x) = x^2 + 2x + 1$ y $q(x) = x^2 - 1$ es $d(x) = x + 1$, pues,

$$\begin{aligned} p(x) &= (x+1)^2 \\ q(x) &= (x+1)(x-1) \end{aligned}$$

siendo, por tanto, $x + 1$ el divisor común de mayor grado. Así, escribiremos

$$\text{m.c.d.}\left(x^2 + 2x + 1, x^2 - 1\right) = x + 1$$

Si $p(x)$ y $q(x)$ son dos polinomios tales que grad $p(x) \geq$ grad $q(x)$, entonces se cumple

$$\text{m.c.d.}\,(p(x), q(x)) = \text{m.c.d.}\,(q(x), r(x))$$

donde $r(x)$ es el resto de la división de $p(x)$ por $q(x)$.
En efecto, dividiendo $p(x)$ por $q(x)$ obtenemos

$$p(x) = q(x) \cdot c(x) + r(x) \tag{1}$$

y, por tanto,

$$r(x) = p(x) - q(x) \cdot c(x) \tag{2}$$

Puesto que $d(x) = \text{m.c.d.}(p(x), q(x))$ es un divisor de $p(x)$ y de $q(x)$, entonces, por (2), $d(x)$ será también un divisor de $r(x)$. Como consecuencia, $d(x)$ es un divisor de $\text{m.c.d.}(q(x), r(x))$. Por otra parte, y del mismo modo, como $\text{m.c.d.}(q(x), r(x))$ es un divisor de $q(x)$ y $r(x)$, entonces, por (1), $\text{m.c.d.}(q(x), r(x))$ será también un divisor de $p(x)$. Como consecuencia, $\text{m.c.d.}(q(x), r(x))$ es un divisor de $d(x)$. Hemos demostrado así que $d(x)$ divide a $\text{m.c.d.}(q(x), r(x))$ y que $\text{m.c.d.}(q(x), r(x))$ divide a $d(x)$. Por tanto, al ser ambos polinomios mónicos, se deduce[3]

$$\text{m.c.d.}\,(p(x), q(x)) = d(x) = \text{m.c.d.}\,(q(x), r(x))$$

Este resultado es la base del algoritmo de Euclides para hallar el máximo común divisor de dos polinomios.

3.3.1. Algoritmo de Euclides

Dados dos polinomios $p(x)$ y $q(x)$ tales que grad $p(x) \geq$ grad $q(x)$, efectuamos la división de $p(x)$ por $q(x)$ obteniendo un resto $r_1(x)$. Entonces se cumple

$$\text{m.c.d.}\,(p(x), q(x)) = \text{m.c.d.}\,(q(x), r_1(x))$$

con grad $r_1(x) <$ grad $q(x)$. Si $r_1(x)$ no es un número real, efectuamos la división de $q(x)$ por $r_1(x)$ obteniendo un resto $r_2(x)$. Entonces se cumple

$$\text{m.c.d.}\,(q(x), r_1(x)) = \text{m.c.d.}\,(r_1(x), r_2(x))$$

con grad $r_2(x) <$ grad $r_1(x)$. Si todavía $r_2(x)$ no es un número real, continuamos dividiendo hasta obtener resto $r_n(x)$ que sea un número real; observa que esto ocurrirá con seguridad pues

$$\text{grad } p(x) \geq \text{grad } q(x) > \text{grad } r_1(x) > \text{grad } r_2(x) > \cdots$$

Como consecuencia, obtendremos

$$\begin{aligned} \text{m.c.d.}\,(p(x), q(x)) &= \text{m.c.d.}\,(q(x), r_1(x)) \\ &= \text{m.c.d.}\,(r_1(x), r_2(x)) \\ &\quad \cdots \\ &= \text{m.c.d.}\,(r_{n-1}(x), r_n(x)) \\ &= r_{n-1}^*(x) \end{aligned}$$

siendo $r_n(x)$ un número real y $r_{n-1}^*(x)$ el polinomio mónico de $r_{n-1}(x)$.

[3] Es fácil demostrar que dados dos polinomios mónicos, si el primero divide al segundo y el segundo al primero, entonces los dos polinomios son iguales.

Para efectuar las sucesivas divisiones y hallar $r_{n-1}(x)$ suele utilizarse el esquema siguiente

$$
\begin{array}{c|c|c|c|c|c}
 & c_1(x) & c_2(x) & & c_{n-1}(x) & \\ \hline
p(x) & q(x) & r_1(x) & \cdots & r_{n-2}(x) & r_{n-1}(x) \\ \hline
r_1(x) & r_2(x) & r_3(x) & & r_n(x) \in \mathbb{R} &
\end{array}
$$

Por ejemplo, calcularemos el máximo común divisor de los polinomios

$$
\begin{aligned}
p(x) &= x^5 + 2x^3 + 3x^2 - 15x - 9 \\
q(x) &= x^4 - 9
\end{aligned}
$$

según el esquema considerado:

$$
\begin{array}{ccccc|ccccc|cccc|cc}
 & & & & & x & & & & & \frac{1}{2}x & -\frac{3}{4} & & & 2x & +3 \\ \cline{6-16}
x^5 & +2x^3 & +3x^2 & -15x & -9 & x^4 & 0 & 0 & 0 & -9 & 2x^3 & +3x^2 & -6x & -9 & x^2 & -3 \\
-x^5 & & & +9x & & -x^4 & -\frac{3}{2}x^3 & +3x^2 & +\frac{9}{2}x & & -2x^3 & & +6x & & & \\ \cline{1-9} \cline{11-13}
\diagup & +2x^3 & +3x^2 & -6x & -9 & \diagup & -\frac{3}{2}x^3 & +3x^2 & +\frac{9}{2}x & -9 & \diagup & 3x^2 & \diagup & -9 & & \\
 & & & & & & \frac{3}{2}x^3 & +\frac{9}{4}x^2 & -\frac{9}{2}x & -\frac{27}{4} & & -3x^2 & & +9 & & \\ \cline{7-10} \cline{12-14}
 & & & & & & \diagup & \frac{21}{4}x^2 & \diagup & -\frac{63}{4} & & \diagup & & \diagup & & \\
 & & & & & & & x^2 & & -3 & & & & & &
\end{array}
$$

es decir, hemos obtenido que

$$
\text{m.c.d.}\left(x^5 + 2x^3 + 3x^2 - 15x - 9, x^4 - 9\right) = \text{m.c.d.}\left(x^2 - 3, 0\right) = x^2 - 3
$$

Observa que hemos aplicado en el esquema el siguiente hecho

$$
\text{m.c.d.}\left(2x^3 + 3x^2 - 6x - 9, \frac{21}{4}(x^2 - 3)\right) = \text{m.c.d.}\left(2x^3 + 3x^2 - 6x - 9, x^2 - 3\right)
$$

lo cual es evidente.

3.4. Mínimo común múltiplo de dos polinomios

Se llama **mínimo común múltiplo** de los polinomios $p(x)$ y $q(x)$ al polinomio mónico $m(x)$ que satisface la siguiente propiedad: $m(x)$ es el polinomio de menor grado que es múltiplo de $p(x)$ y de $q(x)$. Escribiremos

$$
m(x) = \text{m.c.m.}\left(p(x), q(x)\right)
$$

Por ejemplo, el mínimo común múltiplo de los polinomios $p(x) = x^2 + 2x + 1$ y $q(x) = x^2 - 1$ es $m(x) = (x+1)^2(x-1)$, pues,

$$
\begin{aligned}
p(x) &= (x+1)^2 \\
q(x) &= (x+1)(x-1)
\end{aligned}
$$

siendo, por tanto, $(x+1)^2(x-1)$ el múltiplo común de menor grado. Así, escribiremos

$$
\text{m.c.m.}\left(x^2 + 2x + 1, x^2 - 1\right) = (x+1)^2(x-1)
$$

Es claro que si $p(x)$ es múltiplo de $q(x)$, entonces el mínimo común múltiplo es $p(x)$. Se demuestra en cursos superiores que se cumple la siguiente relación

$$
\text{m.c.d.}\left(p(x), q(x)\right) \cdot \text{m.c.m.}\left(p(x), q(x)\right) = \frac{p(x) \cdot q(x)}{a_n \cdot b_m}
$$

donde a_n y b_m son los coeficientes de los monomios de mayor grado de $p(x)$ y $q(x)$, respectivamente. Esta relación nos sirve para hallar el mínimo común múltiplo a partir del máximo común divisor, pues,

$$
\text{m.c.m.}\left(p(x), q(x)\right) = \frac{1}{a_n \cdot b_m} \frac{p(x) \cdot q(x)}{\text{m.c.d.}\left(p(x), q(x)\right)}
$$

Por ejemplo, si

$$
\begin{aligned}
p(x) &= x^5 + 2x^3 + 3x^2 - 15x - 9 \\
q(x) &= x^4 - 9
\end{aligned}
$$

entonces

$$\begin{aligned}\text{m.c.m.}\left(x^5+2x^3+3x^2-15x-9, x^4-9\right) &= \frac{(x^5+2x^3+3x^2-15x-9)(x^4-9)}{x^2-3}\\ &= x^7+5x^5+3x^4-9x^3-45x-27\end{aligned}$$

En otro apartado veremos como la descomposición factorial de un polinomio da otro método de cálculo del máximo común divisor y mínimo común múltiplo.

4. Regla de Ruffini y teorema del resto

En este apartado veremos como se pueden calcular el cociente y el resto de la división de un polinomio por un binomio de primer grado de la forma $x-a$ por un método más sencilla que la aplicación del algoritmo clásico de la división. Este método se conoce como la regla de Ruffini. También daremos un teorema con el que podremos saber si un polinomio es o no divisible por un binomio de primer grado de la forma $x-a$ con sólo calcular el valor númérico del polinomio para $x=a$ y ver si es o no cero. Este resultado se conoce como el teorema del resto.

4.1. Regla de Ruffini

Dado un polinomio cualquiera $p(x)$, ahora queremos dividirlo por el binomio de primer grado $x-a$, es decir, queremos hallar los polinomios cociente $c(x)$ y resto $r(x)$ tales que

$$p(x) = (x-a)\cdot c(x) + r(x) \tag{3}$$

Observa primero que grad $r(x)=0$ o bien $r(x)=0$, pues, sabemos que grad $r(x) <$ grad $(x-a)=1$. Por tanto, $r(x)$ será un número real r. Observa también que

$$\text{grad } c(x) = \text{grad } p(x) - \text{grad } (x-a) = \text{grad } p(x) - 1$$

Por tanto, si

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

entonces

$$c(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_{n-2}x^{n-2} + b_{n-1}x^{n-1}$$

y según (3), tenemos

$$\begin{aligned}a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n &= (x-a)(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_{n-2}x^{n-2} + b_{n-1}x^{n-1}) + r\\ &= (r-ab_0) + (b_0-ab_1)x + (b_1-ab_2)x^2 + \cdots +\\ &\quad (b_{n-2}-ab_{n-1})x^{n-1} + b_{n-1}x^n\end{aligned}$$

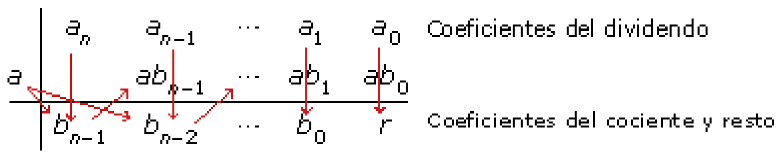
y, por tanto,

$$\begin{aligned}&a_0 = r - ab_0\\ &a_1 = b_0 - ab_1\\ &a_2 = b_1 - ab_2\\ &\qquad\cdots\\ &a_{n-1} = b_{n-2} - ab_{n-1}\\ &a_n = b_{n-1}\end{aligned}$$

y, en consecuencia, obtenemos las siguientes fórmulas que nos permitirán determinar $c(x)$ y r

$$\begin{aligned}&b_{n-1} = a_n\\ &b_{n-2} = a_{n-1} + a\cdot b_{n-1}\\ &\qquad\cdots\\ &b_1 = a_2 + ab_2\\ &b_0 = a_1 + ab_1\\ &r = a_0 + ab_0\end{aligned}$$

Sin embargo, el cálculo de los coeficientes b_i $(0 \le i \le n-1)$ y r puede hacerse de forma muy sencilla mediante el siguiente esquema denominado **regla de Ruffini**.



Por ejemplo, calcularemos el cociente y el resto de dividir $p(x) = x^3 - 2x + 7$ por $x - 2$. Para ello, utilizaremos la regla de Ruffini.

	1	0	-2	7
2		2	4	4
	1	2	2	11

Dicho en palabras, bajamos el primer coeficiente del dividendo. Luego, multiplicamos por 2 y colocamos el resultado debajo del segundo coeficiente del dividendo y, después, los sumamos. Repetimos este proceso hasta completar el cuadro. La última fila del cuadro son los coeficientes del cociente (su grado es una unidad inferior al del dividendo) y el último número es el resto. Así, tenemos $c(x) = x^2 + 2x + 2$ y $r = 11$.
Observa que se colocan ceros para los coeficientes de los monomios que no aparecen en el polinomio dividendo.

4.2. Teorema del resto

El valor numérico del polinomio $p(x)$ para $x = a$ coincide con el resto de dividir $p(x)$ por $x - a$.
En efecto, si dividimos $p(x)$ por $x - a$ obtenemos un cociente $c(x)$ y un resto r de forma que

$$p(x) = (x - a) \cdot c(x) + r$$

Entonces, el valor numérico de $p(x)$ para $x = a$ es

$$p(a) = (a - a) \cdot c(a) + r = 0 + r = r$$

es decir, se cumple que $p(a) = r$.
Por ejemplo, calcularemos el resto r de dividir $x^3 - 2x + 7$ por $x - 2$. Según el teorema del resto, se cumple

$$r = p(2) = 2^3 - 2 \cdot 2 + 7 = 11$$

Entonces, observa que un polinomio será divisible por el binomio de primer grado $x - a$ si el valor numérico del polinomio es cero para $x = a$.
Por ejemplo, queremos averiguar si el polinomio $p(x) = x^3 - 2x + 1$ es divisible por $x - 1$. Para contestar a esta pregunta sólo tenemos que calcular el valor numérico de $p(x)$ para $x = 1$ y ver si es cero o no. En concreto,

$$p(1) = 1 - 2 + 1 = 0$$

Por tanto, $p(x)$ es divisible por $x - 1$.

5. Raíces y descomposición factorial de un polinomio

Decimos que un número real a es una **raíz** o **cero** de un polinomio $p(x)$ si $p(a) = 0$. Así, 1 es una raíz del polinomio $p(x) = x^2 - 1$ porque $p(1) = 0$, así como $\sqrt{3}$ es una raíz de $q(x) = x^2 - 3$, pues,

$$q(\sqrt{3}) = \left(\sqrt{3}\right)^2 - 3 = 0$$

Según el teorema del resto, si a es una raíz de $p(x)$, entonces $p(x)$ es divisible por $x - a$ y, por tanto, podemos escribir

$$p(x) = (x - a) \cdot c(x)$$

Entonces, decimos que a es una **raíz simple** de $p(x)$ si $c(a) \neq 0$, es decir, cuando el cociente de dividir $p(x)$ por $x - a$ no vuelve a ser divisible por $x - a$.

Por ejemplo, 3 es una raíz simple del polinomio $p(x) = x^3 + x^2 - 9x - 9$, ya que por Ruffini

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 1 & -9 & -9 \\ 3 & & 3 & 12 & 9 \\ \hline & 1 & 4 & 3 & 0 \end{array}$$

obtenemos

$$p(x) = (x-3)(x^2+4x+3)$$

y además se cumple

$$c(3) = 3^2 + 4 \cdot 3 + 3 = 24 \neq 0$$

Decimos que a es una **raíz múltiple** de $p(x)$ si a es una raíz simple

$$p(x) = (x-a) \cdot c(x)$$

y además se cumple $c(a) = 0$, es decir, si $c(x)$ vuelve a ser divisible por $x - a$.
Por ejemplo, 1 es una raíz múltiple del polinomio $p(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$, pues, por Ruffini

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 1 & -5 & 3 \\ 1 & & 1 & 2 & -3 \\ \hline & 1 & 2 & -3 & 0 \end{array}$$

obtenemos

$$p(x) = (x-1)(x^2+2x-3)$$

y se cumple

$$c(1) = 1 + 2 - 3 = 0$$

Además, observa que si ahora aplicamos de nuevo Ruffini al cociente,

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & 2 & -3 \\ 1 & & 1 & 3 \\ \hline & 1 & 3 & 0 \end{array}$$

entonces obtenemos

$$c(x) = (x-1)(x+3)$$

y, como consecuencia,

$$\begin{aligned} p(x) &= (x-1)(x-1)(x+3) \\ &= (x-1)^2(x+3) \end{aligned}$$

Nos damos cuenta que en este caso hemos podido dividir dos veces $p(x)$ por $x - 1$. Entonces, decimos que 1 es una raíz múltiple de orden 2 o simplemente una raíz doble.
En general, si a es una raíz de $p(x)$ y se cumple

$$p(x) = (x-a)^s \cdot c(x)$$

con $c(a) \neq 0$, entonces decimos que a es una **raíz múltiple de orden** s o también que a es una **raíz de multiplicidad** s.
Por ejemplo, queremos averiguar la mutiplicidad de la raíz -1 en el polinomio

$$p(x) = x^5 - x^4 - 5x^3 + x^2 + 8x + 4$$

Para ello, aplicaremos repetidas veces la regla de Ruffini

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & -1 & -5 & 1 & 8 & 4 \\ -1 & & -1 & 2 & 3 & -4 & -4 \\ \hline & 1 & -2 & -3 & 4 & 4 & 0 \\ -1 & & -1 & 3 & 0 & -4 & \\ \hline & 1 & -3 & 0 & 4 & 0 & \\ -1 & & -1 & 4 & -4 & & \\ \hline & 1 & -4 & 4 & 0 & & \\ -1 & & -1 & 5 & & & \\ \hline & 1 & -5 & 9 & & & \end{array}$$

Observamos que $p(x)$ puede dividirse 3 veces por $x+1$. Además, se cumple

$$p(x) = (x+1)^3(x^2 - 4x + 4)$$

y el tercer cociente que se obtiene de la tercera división por $x+1$ cumple

$$c_3(-1) = 1 + 4 + 4 = 9 \neq 0$$

Por tanto, -1 es una raíz de $p(x)$ de multiplicidad 3.

5.1. Raíces enteras de un polinomio con coeficientes enteros

Consideremos ahora un polinomio $p(x)$ con coeficientes enteros, es decir,

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

y $a_i \in \mathbb{Z}$ $(0 \leq i \leq n)$. Supongamos que k es una raíz entera $(k \in \mathbb{Z})$ de $p(x)$. Entonces, se cumple

$$\begin{array}{rcl} a_0 + a_1k + a_2k^2 + \cdots + a_{n-1}k^{n-1} + a_nk^n & = & 0 \\ (a_1 + a_2k + \cdots + a_{n-1}k^{n-2} + a_nk^{n-1})\ k & = & -a_0 \\ a_1 + a_2k + \cdots + a_{n-1}k^{n-2} + a_nk^{n-1} & = & -\dfrac{a_0}{k} \end{array}$$

y como $a_1 + a_2k + \cdots + a_{n-1}k^{n-2} + a_nk^{n-1} \in \mathbb{Z}$, k ha de ser necesariamente un divisor del término independiente a_0. De esta manera, las raíces enteras de un polinomio con coeficientes enteros se han de encontrar entre los divisores de su término independiente.
Por ejemplo, si queremos calcular las raíces enteras del polinomio $p(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x + 3$, deberemos probar sólo con ± 1 y ± 3, que son los divisores del término independiente. Una simple cálculo muestra que 3 y -1 son las únicas raíces enteras de este polinomio.

5.2. Descomposición factorial de un polinomio

Del mismo modo que todo número entero puede descomponerse como producto de números primos, todo polinomio puede descomponerse en producto de polinomios irreducibles. La descomposición varía según el anillo de polinomios que consideremos. Por ejemplo, $x^2 - 2$ es irreducible en $\mathbb{Q}[x]$ y, en cambio, puede descomponerse en

$$(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$$

en $\mathbb{R}[x]$. Admitimos, sin demostrarlo, que los polinomios irreducibles en $\mathbb{R}[x]$ son de primer grado o bien de segundo grado. Cualquier polinomio de primer grado $a + bx$ es irreducible, pues, no tiene otros divisores mónicos más que la unidad y el polinomio

$$\frac{a}{b} + x$$

Un polinomio de segundo grado es irreducible si la ecuación $c + bx + ax^2 = 0$ no tiene raíces reales, es decir, cuando $b^2 - 4ac < 0$.
Ya hemos visto en el apartado anterior que si k_1 es una raíz de $p(x)$, entonces

$$p(x) = (x - k_1) \cdot c_1(x)$$

Si ahora $c_1(x)$ admite otra raíz k_2, también será raíz de $p(x)$ y se cumple

$$p(x) = (x - k_1) \cdot (x - k_2) \cdot c_2(x)$$

Reiterando este proceso, si $p(x)$ admite n raíces reales $k_1, k_2, ..., k_n$, entonces podremos descomponer $p(x)$ en factores lineales (polinomios de primer grado) de la forma siguiente

$$p(x) = a_n \cdot (x - k_1) \cdot (x - k_2) \cdot \cdots \cdot (x - k_n) \tag{4}$$

donde a_n es el coeficiente del monomio de grado n de $p(x)$.

Observa que un polinomio de grado n no puede tener más que n raíces reales distintas, pues, de lo contrario, si k_{n+1} fuera otra raíz real distinta a todas las anteriores, entonces debería cumplirse

$$p(k_{n+1}) = a_n \cdot (k_{n+1} - k_1) \cdot (k_{n+1} - k_2) \cdot \dots \cdot (k_{n+1} - k_n) = 0$$

lo que implicaría $a_n = 0$, y esto es contradictorio con el hecho de que el polinomio es de grado n.
Observa que no siempre podrá efectuarse una descomposición como (4), pues, como ya hemos dicho, existen polinomios de segundo grado que son irreducibles y, por tanto, no pueden descomponerse en factores lineales. Por ejemplo,

$$x^3 - 1 = (x + 1) \cdot (x^2 - x + 1)$$

y el factor $x^2 - x + 1$ no puede descomponerse más ya que $b^2 - 4ac = -3 < 0$.
En general, podremos obtener una descomposición de un polinomio $p(x)$ de la forma

$$p(x) = p_1(x) \cdot p_2(x) \cdot \dots \cdot p_r(x) \tag{5}$$

con

$$\text{grad } p(x) = \text{grad } p_1(x) + \text{grad } p_2(x) + \dots + \text{grad } p_r(x)$$

donde cada $p_i(x)$ $(1 \le i \le r)$ es un polinomio irreducible de $\mathbb{R}[x]$.
Por ejemplo, el polinomio $p(x) = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$ admite la siguiente descomposición

$$p(x) = (x^2 + 1) \cdot (x^2 + x + 1)$$

cuyos factores son polinomios irreducibles.
Si cada $p_i(x)$ es lineal, es decir, si $p(x)$ admite todas las raíces y son simples, entonces (5) se escribirá como

$$p(x) = a_n \cdot (x - k_1) \cdot (x - k_2) \cdot \dots \cdot (x - k_n)$$

siendo k_i $(1 \le i \le n)$ las raíces de $p(x)$.
Por ejemplo, es inmediato comprobar que el polinomio $2x^4 - 10x^2 + 8$ tiene raíces ± 1 y ± 2 y, por tanto, se descompone en factores lineales de la forma siguiente

$$2x^4 - 10x^2 + 8 = 2 \cdot (x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (x - 2) \cdot (x + 2)$$

Si el polinomio $p(x)$ admite todas las raíces y algunas son múltiples, agrupando los factores lineales iguales, obtendremos una descomposición de la forma

$$p(x) = a_n \cdot (x - k_1)^{n_1} \cdot (x - k_2)^{n_2} \cdot \dots \cdot (x - k_r)^{n_r}$$

con $n_1 + n_2 + \dots + n_r = n$, siendo n_i $(1 \le i \le r)$ la multiplicidad de la raíz k_i.
Por ejemplo, para descomponer el polinomio $p(x) = x^5 - 5x^4 + 3x^3 + 13x^2 - 8x - 12$ podemos utilizar la regla de Ruffini. Además, como sus coeficientes son enteros, las raíces serán divisores del término independiente, es decir, estarán entre ± 1, ± 2, ± 3, ± 4, ± 6 y ± 12. Observa que se cumple

	1	−5	3	13	−8	−12
−1		−1	6	−9	−4	12
	1	−6	9	4	−12	0
−1		−1	7	−16	12	
	1	−7	16	−12	0	
2		2	−10	12		
	1	−5	6	0		
2		2	−6			
	1	−3	0			
3		3				
	1	0				

o sea, las raíces de $p(x)$ son -1 (doble), 2 (doble) y 3. Por tanto, $p(x)$ se descompondrá de la forma siguiente

$$p(x) = (x + 1)^2 (x - 2)^2 (x - 3)$$

5.2.1. Cálculo del m.c.d. y m.c.m.

Conocidas las descomposiciones factoriales en $\mathbb{R}[x]$ de dos polinomios $p(x)$ y $q(x)$, el máximo común divisor se obtendrá multiplicando los factores irreducibles comunes elevados al exponente más pequeño que figure en las dos descomposiciones, y el mínimo común múltiplo se obtendrá multiplicando los factores irreducibles comunes y no comunes elevados al exponente más grande que figure en ambas descomposiciones.
Por ejemplo, calcularemos el m.c.d. y el m.c.m. de los polinomios

$$\begin{aligned} p(x) &= 2x^5 - 2x^4 - 10x^3 + 2x^2 + 16x + 8 \\ q(x) &= 3x^3 - 6x^2 - 3x + 6 \end{aligned}$$

Primero, buscaremos las descomposiciones de ambos polinomios. Los polinomios mónicos de cada polinomio son

$$\begin{aligned} p^*(x) &= x^5 - x^4 - 5x^3 + x^2 + 8x + 4 \\ q^*(x) &= x^3 - 2x^2 - x + 2 \end{aligned}$$

Entonces, para $p^*(x)$ tenemos

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 1 & -1 & -5 & 1 & 8 & 4 \\ -1 & & -1 & 2 & 3 & -4 & -4 \\ \hline & 1 & -2 & -3 & 4 & 4 & 0 \\ -1 & & -1 & 3 & 0 & -4 & \\ \hline & 1 & -3 & 0 & 4 & 0 & \\ -1 & & -1 & 4 & -4 & & \\ \hline & 1 & -4 & 4 & 0 & & \\ 2 & & 2 & -4 & & & \\ \hline & 1 & -2 & 0 & & & \end{array}$$

y, por tanto,

$$p^*(x) = (x+1)^3 \cdot (x-2)^2$$

y

$$p(x) = 2 \cdot (x+1)^3 \cdot (x-2)^2$$

Para $q^*(x)$ tenemos

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -1 & 2 \\ -1 & & -1 & 3 & -2 \\ \hline & 1 & -3 & 2 & 0 \\ 1 & & 1 & -2 & \\ \hline & 1 & -2 & 0 & \end{array}$$

y, por tanto,

$$q^*(x) = (x+1) \cdot (x-1) \cdot (x-2)$$

y

$$q(x) = 3 \cdot (x+1) \cdot (x-1) \cdot (x-2)$$

Ahora ya podemos determinar m.c.d. y m.c.m. de $p(x)$ y $q(x)$. Así, tenemos

$$\text{m.c.d.}\,(p(x), q(x)) = (x+1) \cdot (x-2)$$

y

$$\text{m.c.m.}\,(p(x), q(x)) = (x+1) \cdot (x+1)^3 \cdot (x-2)^2$$

6. Fracciones racionales

Del mismo modo que la ecuación

$$3 \cdot x = 2$$

no tiene solución en el anillo de los números enteros y para resolver este problema tuvimos que ampliar $\mathbb{Z}$ construyendo el conjunto de los números racionales, la ecuación

$$(x-1)\cdot A(x)=x^2+1$$

no tiene solución en el anillo de polinomios $\mathbb{R}[x]$ (ya que x^2+1 no es múltiplo de $x-1$) y para solucionar este problema deberemos ampliar $\mathbb{R}[x]$ construyendo el conjunto de las fracciones racionales.

Se llama **fracción algebraica** o **polinómica** a toda expresión de la forma

$$\frac{p(x)}{q(x)}$$

donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios y $q(x)$ es distinto del polinomio cero.

Por ejemplo,

$$\frac{x^2+1}{x},\frac{x-1}{2},\frac{x^3}{x^2-1}$$

son fracciones algebraicas.

En el conjunto de todas las fracciones algebraicas definimos una relación de equivalencia de la forma siguiente: decimos que dos fracciones algebraicas

$$\frac{p(x)}{q(x)} \quad \text{y} \quad \frac{r(x)}{s(x)}$$

son **equivalentes** si y sólo si

$$p(x)\cdot s(x)=q(x)\cdot r(x)$$

Esta relación de equivalencia da lugar a una clasificación de las fracciones algebraicas en clases. Cada fracción

$$\frac{p(x)}{q(x)}$$

define una clase, que se puede representar por

$$\left\{\frac{p(x)}{q(x)}\right\}$$

a la que pertenecen todas las fracciones equivalentes, es decir,

$$\left\{\frac{p(x)}{q(x)}\right\}=\left\{\frac{r(x)}{s(x)}:p(x)\cdot s(x)=q(x)\cdot r(x)\right\}$$

Llamamos **fracción racional** a cada clase de fracciones algebraicas. Como resulta muy engorroso escribir cada fracción racional mediante llaves, convendremos en escribirla simplemente por un representante de la clase. Así, en lugar de escribir

$$\left\{\frac{p(x)}{q(x)}\right\}$$

escribiremos

$$\frac{p(x)}{q(x)}$$

tomando esta fracción como representante de la fracción racional. De este modo, si

$$\frac{p(x)}{q(x)} \quad \text{y} \quad \frac{r(x)}{s(x)}$$

son equivalentes, puesto que pertenecen a la misma clase y cada una de ellas representa una fracción racional, escribiremos

$$\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{r(x)}{s(x)}$$

Así, con este convenio,

$$\frac{x-1}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2(x-1)}$$

no significa que sean iguales las fracciones algebraicas, sino que son iguales las fracciones racionales que determinan.
Una fracción algebraica

$$\frac{p(x)}{q(x)}$$

se llama **irreducible** si $p(x)$ y $q(x)$ son primos entre sí, es decir, si no tienen ningún factor común de grado mayor o igual que 1. Por ejemplo, las fracciones siguientes son irreducibles

$$\frac{x-1}{x^2}, \frac{x^2+1}{x-1}, \frac{x^3}{x^2+1}$$

mientras que las fracciones siguientes

$$\frac{x}{x^2-x}, \frac{x^2-1}{x+1}, \frac{x^3+1}{x^2-1}$$

no lo son.
Se entiende por **simplificar** una fracción algebraica el buscar la fracción irreducible equivalente. En la práctica y para facilitar los cálculos, a menudo se toma como representante de una fracción racional la fracción irreducible.
Por ejemplo, queremos simplificar la siguiente fracción

$$\frac{x^3+5x^2+6x}{x^3+3x^2+2x}$$

Descomponiendo en factores los polinomios numerador y denominador, obtenemos

$$\frac{x^3+5x^2+6x}{x^3+3x^2+2x} = \frac{x(x+3)(x+2)}{x(x+1)(x+2)} = \frac{x+3}{x+1}$$

Por tanto,

$$\frac{x+3}{x+1}$$

es la fracción irreducible equivalente a la fracción dada.

6.1. Operaciones en el conjunto de las fracciones racionales

Las definiciones y reglas para efectuar la suma y el producto de dos fracciones racionales son totalmente análogas a las definiciones y reglas para las operaciones con números racionales.

6.1.1. Suma de fracciones racionales

Dadas dos fracciones racionales, definimos la fracción racional **suma** como la que tiene como representante la suma de los representantes de las fracciones racionales dadas. Para efectuar la suma se aplica la regla

$$\frac{p(x)}{q(x)} + \frac{r(x)}{s(x)} = \frac{p(x)\cdot s(x) + q(x)\cdot r(x)}{q(x)\cdot s(x)}$$

Observa que esta fracción es algebraica, pues, ni $q(x)$ ni $s(x)$ son el polinomio cero, y, por tanto, $q(x)\cdot s(x)$ tampoco lo es. Además, es fácil demostrar que esta suma no depende de los representantes escogidos y, en consecuencia, la operación está bien definida.
Las propiedades asociativa y conmutativa, así como la existencia del elemento neutro y de la fracción racional opuesta de una cualquiera se deduce de la misma manera ya conocida para los números racionales. Recordemos, simplemente, que el elemento neutro es

$$\frac{0}{q(x)}$$

con el polinomio cero en el numerador y cualquier polinomio no nulo en el denominador, y que la fracción racional opuesta de

$$\frac{p(x)}{q(x)}$$

es

$$\frac{-p(x)}{q(x)}$$

Por ejemplo, queremos efectuar la siguiente suma de fracciones

$$\frac{x+3}{x^2+x}+\frac{x-2}{x^2+3x+2}$$

Evidentemente podemos utilizar la regla que hemos dado al definir la suma de fracciones. Sin embargo, resulta mucho más cómodo utilizar el m.c.m. de los polinomios denominadores y convertir las dos fracciones dadas en otras de equivalentes con el mismo denominador; observa, pues, que se procede del mismo modo que la suma de fracciones numéricas. Las descomposiciones factoriales de los polinomios denominadores son

$$\begin{array}{l} x^2+x=x(x+1) \\ x^2+3x+2=(x+1)(x+2) \end{array}$$

y, por tanto, obtenemos

$$\text{m.c.m.}\left(x^2+x,x^2+3x+2\right)=x(x+1)(x+2)$$

Entonces, podemos escribir

$$\begin{aligned} \frac{x+3}{x^2+x}+\frac{x-2}{x^2+3x+2} &= \frac{(x+3)(x+2)}{x(x+1)(x+2)}+\frac{x(x-2)}{x(x+1)(x+2)} \\ &= \frac{(x+3)(x+2)+x(x-2)}{x(x+1)(x+2)} \\ &= \frac{2x^2+3x+6}{x^3+3x^2+2x} \end{aligned}$$

6.1.2. Producto de fracciones racionales

Dadas dos fracciones racionales, definimos la fracción racional **producto** como la que tiene como representante el producto de los representantes de las fracciones racionales dadas. Para efectuar el producto se aplica la regla

$$\frac{p(x)}{q(x)}\cdot\frac{r(x)}{s(x)}=\frac{p(x)\cdot r(x)}{q(x)\cdot s(x)}$$

Observa que esta fracción es algebraica, pues, ni $q(x)$ ni $s(x)$ son el polinomio cero, y, por tanto, $q(x)\cdot s(x)$ tampoco lo es. Además, es fácil demostrar que este producto no depende de los representantes escogidos y, en consecuencia, la operación está bien definida.
Las propiedades asociativa y conmutativa se demuestran del mismo modo que para los números racionales. El elemento neutro está constituido por la fracción racional que tiene como representante cualquier fracción algebraica de numerador igual al denominador. La fracción racional inversa de

$$\frac{p(x)}{q(x)}$$

es

$$\frac{q(x)}{p(x)}$$

Observa que esta fracción será algebraica si $p(x)$ no es el polinomio nulo. Luego tienen inversa todas las fracciones racionales excepto la fracción racional cero

$$\frac{0}{q(x)}$$

donde $q(x)$ es cualquier polinomio no nulo. También se cumple la propiedad distributiva respecto de la suma.
Por ejemplo, queremos encontrar la fracción irreducible equivalente al siguiente producto de fracciones

$$\frac{1+x}{1-x}\cdot\frac{x}{1-x^2}$$

Dicho en otras palabras, se trata de efectuar el producto y simplicar después la fracción resultante. Así, tenemos

$$\begin{aligned}\frac{1+x}{1-x}\cdot\frac{x}{1-x^2} &= \frac{x(1+x)}{(1-x)(1-x^2)}\\ &= \frac{x(1+x)}{(1-x)^2(1+x)}\\ &= \frac{x}{(1-x)^2}\\ &= \frac{1}{1-2x+x^2}\end{aligned}$$

6.2. El cuerpo de las fracciones racionales

Las propiedades de la suma y el producto de fracciones racionales se enuncian conjuntamente diciendo que el conjunto de las fracciones racionales con la suma y el producto constituyen un cuerpo conmutativo, denominado **cuerpo de las fracciones racionales** de $\mathbb{R}[x]$.
Ahora ya podemos dar respuesta al problema planteado al inicio de esta sección. Recordemos que se trataba de resolver la siguiente ecuación

$$(x-1)\cdot A(x) = x^2+1$$

Evidentemente podemos escribir esta ecuación mediante fracciones racionales como sigue

$$\frac{x-1}{1}\cdot\frac{A(x)}{1} = \frac{x^2+1}{1}$$

donde hemos identificado cada polinomio $p(x)$ con la fracción

$$\frac{p(x)}{1}$$

Multiplicando ahora los dos miembros de la ecuación por la fracción racional inversa de

$$\frac{x-1}{1}$$

es decir, multiplicando por

$$\frac{1}{x-1}$$

obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{x-1}\cdot\left(\frac{x-1}{1}\cdot\frac{p(x)}{1}\right) &= \frac{1}{x-1}\cdot\frac{x^2+1}{1}\\ \left(\frac{1}{x-1}\cdot\frac{x-1}{1}\right)\cdot\frac{p(x)}{1} &= \frac{x^2+1}{x-1}\\ \frac{x-1}{x-1}\cdot\frac{p(x)}{1} &= \frac{x^2+1}{x-1}\\ p(x) &= \frac{x^2+1}{x-1}\end{aligned}$$

7. Funciones polinómicas

Se llama **función polinómica** de grado n a toda función real de variable real f definida por

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, con $a_i \in \mathbb{R}$ $(1 \leq i \leq n)$ y $a_n \neq 0$.
Observa que las operaciones que hay que hacer para obtener la imagen de un elemento x puede hacerse para cualquier número real y, por tanto, una función polinómica tiene como dominio todo el conjunto de los números reales.

El valor que toma la función para $x = 0$ coincide con el término independiente del polinomio

$$f(0) = a_0$$

y, por tanto, la gráfica de la función cortará al eje de ordenadas en el punto $(0, a_0)$. Los puntos de corte de la gráfica con el eje de abscisas serán los puntos x tales que $f(x) = 0$, es decir, los ceros de la función; estos puntos se corresponden con las raíces del polinomio.
A continuación trataremos algunos casos particulares de funciones polinómicas así como sus gráficas.

7.1. Funciones constantes

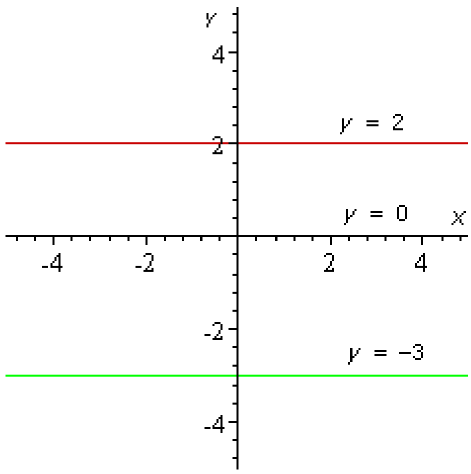
Una **función constante** es una función polinómica de grado cero. Toda función constante f viene definida por

$$f(x) = a$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, con $a \in \mathbb{R}$.
Es fácil ver que la gráfica de esta función es una recta paralela al eje de abscisas que pasa por el punto $(0, a)$ y cuya ecuación es

$$y = a$$

Por tanto, el recorrido de esta función se reduce a un sólo punto $y = a$.
En la figura siguiente, hemos dibujado distintas funciones de este tipo para diferentes valores de a. La función constante igual a 0, o también llamada **función nula**, viene dada por $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$; la gráfica de esta función es la recta $y = 0$ que coincide con el eje de abscisas.



7.2. Funciones afines

Una **función afin** es una función polinómica de primer grado. Toda función afín f viene definida por

$$f(x) = ax + b$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, con $a, b \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$.
Es fácil ver que la gráfica de esta función es una recta que pasa por los puntos $(0, b)$ y $(-b/a, 0)$, y cuya ecuación es

$$y = ax + b$$

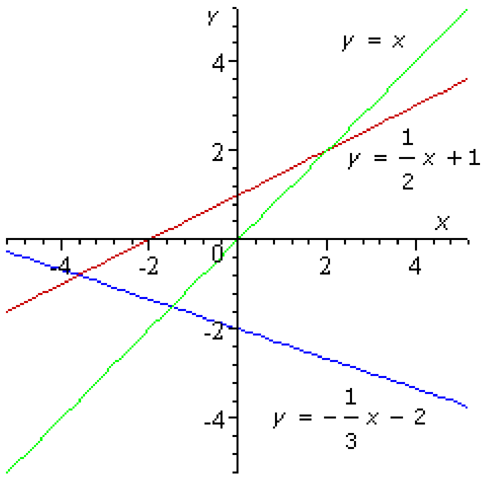
Por tanto, el recorrido de esta función es todo el conjunto de los números reales.
Observa que si $a > 0$, entonces se cumple

$$x_1 \leq x_2 \implies ax_1 \leq ax_2 \implies f(x_1) = ax_1 + b \leq ax_2 + b = f(x_2)$$

y, por tanto, la función es creciente. Del mismo modo, si $a < 0$, entonces se cumple

$$x_1 \leq x_2 \implies ax_1 \geq ax_2 \implies f(x_1) = ax_1 + b \geq ax_2 + b = f(x_2)$$

y, por tanto, la función es decreciente.
Si $b = 0$, la función se llama **lineal** y su gráfica es una recta de pendiente a que pasa por el origen de coordenadas. En la siguiente figura hemos dibujado las gráficas de algunas funciones de este tipo.



7.3. Funciones cuadráticas

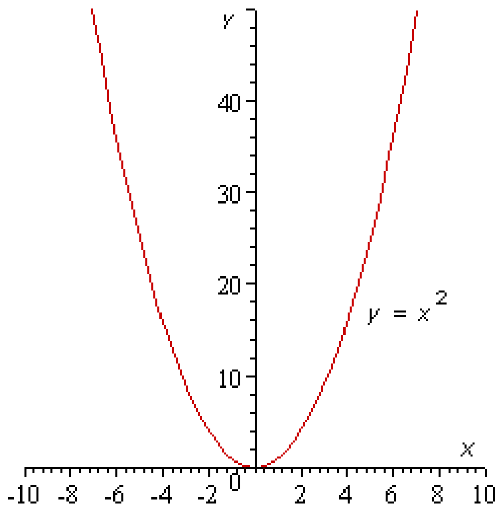
Una **función cuadrática** es una función polinómica de segundo grado. Toda función cuadrática f viene definida por

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$.
Antes de pasar a estudiar este caso general, trataremos algunos casos especiales más sencillos.

1. $f(x) = x^2$

Es el caso más sencillo de función cuadrática. La gráfica de esta función viene representada por la parábola $y = x^2$; hemos dibujado esta curva en la figura siguiente



A partir de la gráfica de esta función podemos observar las siguientes propiedades:

- La función es siempre positiva
- Es simétrica respecto al eje de ordenadas, ya que $f(-x) = f(x)$; al eje de simetría se le llama eje de la parábola.
- Presenta un punto de ordenada mínima (mínimo) en el punto $(0, 0)$; a este punto se le llama vértice de la parábola.

- Para valores positivos de la x la función es creciente, pues

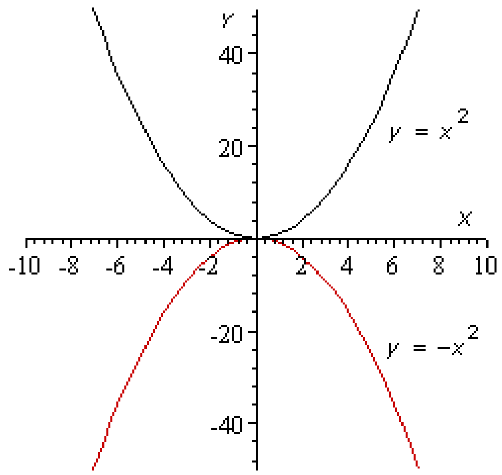
$$0 < x_1 \leq x_2 \implies f(x_1) = x_1^2 \leq x_2^2 = f(x_2)$$

y para valores negativos de la x la función es decreciente, pues

$$x_1 \leq x_2 < 0 \implies f(x_1) = x_1^2 \geq x_2^2 = f(x_2)$$

2. $f(x) = -x^2$

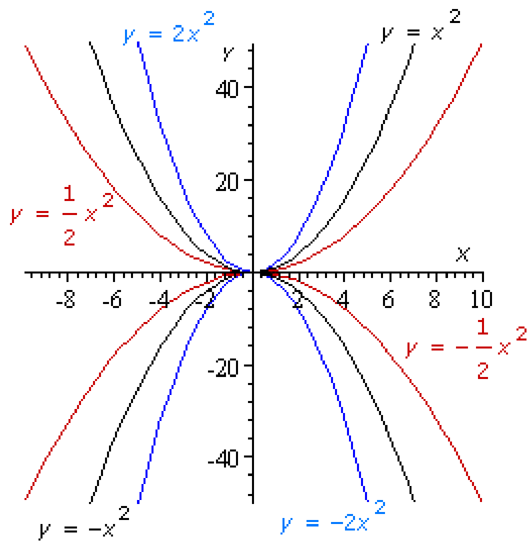
La gráfica de esta función se obtiene por simetría respecto al eje de abscisas de la parábola $y = x^2$.



En este caso la función en lugar de ser positiva siempre es negativa. La simetría respecto al eje de ordenadas se conserva pero cambia el crecimiento de la función. Ahora la función es creciente para valores negativos de la x y decreciente para valores positivos. En lugar de tener un punto de ordenada mínima en $(0, 0)$ ahora tiene un punto de ordenada máxima (máximo).

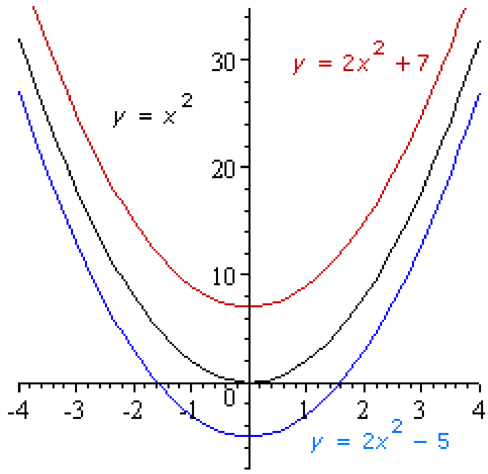
3. $f(x) = ax^2$, con $a \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$

La gráfica de esta función se obtendrá a partir de la parábola $y = x^2$ multiplicando sus ordenadas por la constante a. Será una parábola con las mismas características que $y = x^2$ o $y = -x^2$, según que a sea positivo o negativo, respectivamente. En la figura siguiente hemos dibujado varias parábolas del tipo $y = ax^2$; es importante observar que las ramas de la parábola serán más cerradas o abiertas según que a aumente o disminuya en valor absoluto.



4. $f(x) = ax^2 + c$, con $a, c \in \mathbb{R}$ y a, c no nulos

La gráfica de esta función se obtendrá a partir de la parábola $y = ax^2$ trasladándola c unidades siguiendo el eje de ordenadas; se trasladará c unidades en el sentido positivo del eje de ordenadas si $c > 0$, y c unidades en el sentido negativo de dicho eje si $c < 0$. Observa la siguiente figura para darte cuenta de este hecho.



Es importante observar que ahora el vértice de la parábola se ha traslado del punto $(0, 0)$ al punto $(0, c)$. También es importante saber que ahora la función no tiene porque ser siempre positiva o siempre negativa. En efecto, si $a > 0$ y $c < 0$, entonces la parábola $y = ax^2 + c$ cortará al eje de abscisas en los puntos

$$\left(\sqrt{-\frac{c}{a}}, 0\right) \quad \text{y} \quad \left(-\sqrt{-\frac{c}{a}}, 0\right)$$

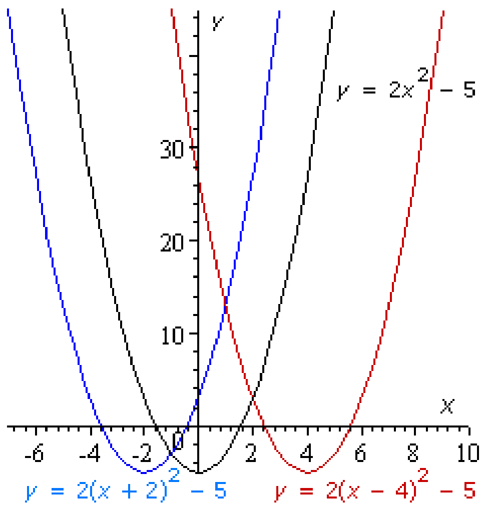
ya que

$$a\left(\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}\right)^2 + c = a\left(-\frac{c}{a}\right) + c = 0$$

Observa que ocurre lo mismo si $a < 0$ y $c > 0$. En resumen, si a y c tienen signos opuestos, la parábola corta al eje de abscisas en dos puntos distintos y, como consecuencia, la función cambia de signo.

5. $f(x) = a(x - p)^2 + q$, con $a, p, q \in \mathbb{R}$ y a, p, q no nulos

La gráfica de esta función se obtendrá a partir de la parábola $y = ax^2 + q$ trasladándola p unidades siguiendo el eje de abscisas; se trasladará p unidades en el sentido positivo del eje de abscisas si $p > 0$, y p unidades en el sentido negativo de dicho eje si $p < 0$. Observa la siguiente figura para darte cuenta de este hecho.



Es importante observar que ahora el vértice de la parábola se ha traslado del punto $(0, q)$ al punto (p, q). El eje de simetría de la parábola es ahora paralelo al eje de ordenadas y pasa por el punto (p, q). Es fácil comprobar que para $a > 0$, la función es decreciente a la izquierda del vértice y creciente a su derecha, y su gráfica presenta un mínimo en el vértice; análogamente, se comprueba que si $a < 0$, la función es creciente a la izquierda del vértice y decreciente a su derecha, y su gráfica presenta un máximo en el vértice.

6. $f(x) = ax^2 + bx + c$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$

Consideramos finalmente el caso general. Observa en primer lugar que podemos escribir

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)$$

Por ejemplo,

$$2x^2 + 16x + 34 = 2(x + 4)^2 + 2$$

Por tanto, si hacemos

$$\begin{aligned} p &= -\frac{b}{2a} \\ q &= c - \frac{b^2}{4a} \end{aligned}$$

entonces

$$ax^2 + bx + c = a(x - p)^2 + q$$

resultando que la gráfica de esta función es una parábola de la forma

$$y = a(x - p)^2 + q$$

Como ya hemos visto las características de esta parábola son:

- Vértice en el punto $\left(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right)$
- Eje de simetría paralelo al eje de ordenadas y pasa por el vértice
- Para $a > 0$, la función presenta un punto de ordenada mínima en el vértice (mínimo) y, para $a < 0$, la función presenta un punto de ordenada máxima en el vértice (máximo). Por tanto, si $a > 0$, el recorrido de la función es $\left[c - \frac{b^2}{4a}, +\infty\right)$, y si $a < 0$, es $\left(-\infty, c - \frac{b^2}{4a}\right]$
- Para $a > 0$, decimos que la parábola tiene concavidad positiva (convexa) y, para $a < 0$, decimos que la parábola tiene concavidad negativa (cóncava)
- La parábola corta al eje de ordenadas en el punto $(0, c)$; corta al eje de abscisas si a y $c - \frac{b^2}{4a}$ tienen signos opuestos o $c - \frac{b^2}{4a} = 0$ (la parábola es entonces tangente al eje de abscisas y el punto de contacto es el vértice). Observa que para que la parábola corte al eje de abscisas el polinomio $ax^2 + bx + c$ ha de tener raíces reales y, por tanto, si $a > 0$ la condición para que esto ocurra es

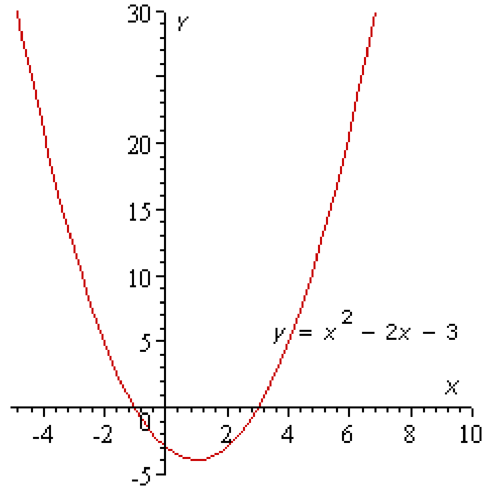
  $$c - \frac{b^2}{4a} \leq 0$$

  equivalente a

  $$b^2 - 4ac \geq 0$$

  Como consecuencia, el polinomio $ax^2 + bx + c$ no tendrá raíces reales si $b^2 - 4ac < 0$.

Por ejemplo, en la siguiente figura hemos representado la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 2x - 3$.



Puesto que

$$x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 4$$

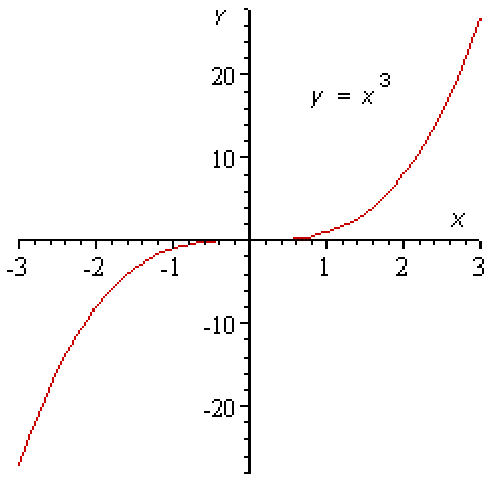
entonces $(1,-4)$ es el vértice de la parábola. Su eje de simetría es la recta vertical de ecuación $x = 1$. La función tiene un mínimo en $x = 1$ cuyo valor es -4. La gráfica es convexa y corta al eje de ordenadas en el punto $(0,-3)$. Los puntos de corte con el eje de abscisas son las raíces del polinomio $x^2 - 2x - 3$. Puesto que

$$x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$$

entonces las raíces son -1 y 3, y, por tanto, los punto de corte con el eje de abscisas son $(-1,0)$ y $(3,0)$.

7.4. Otras funciones polinómicas sencillas

En el apartado anterior se ha visto cómo a partir de la parábola $y = x^2$ se puede representar cualquier otra parábola de la forma $y = ax^2 + bx + c$, mediante simetrías o traslaciones de los ejes. La misma técnica puede servirnos para representar otras funciones polinómicas sencillas.
Por ejemplo, a partir de la gráfica de la función $f(x) = x^3$, obtenida mediante una tabla de valores,



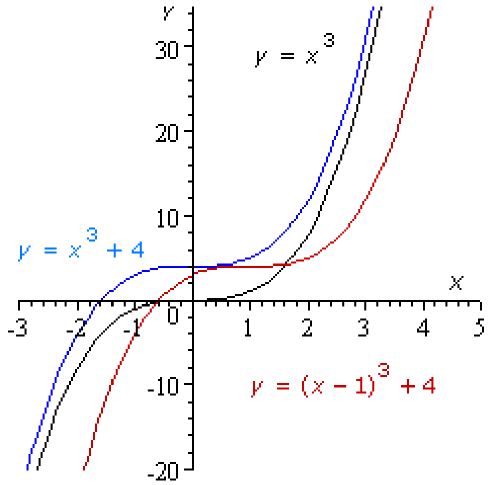
podemos obtener otras gráficas de funciones polinómicas de tercer grado.
Por ejemplo, la gráfica de la función

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 3$$

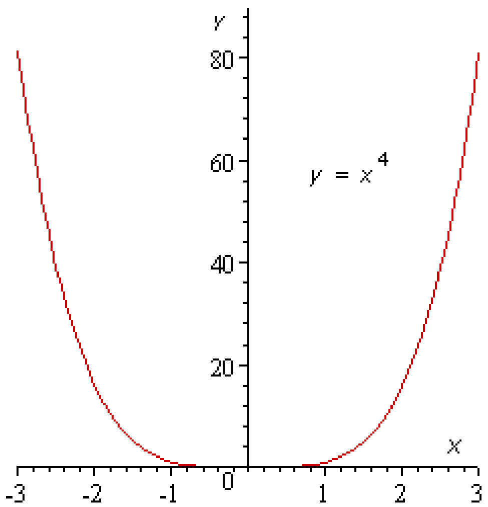
puede obtenerse a partir de $y = x^3$, pues

$$x^3 - 3x^2 + 3x + 3 = (x-1)^3 + 4$$

En efecto, de la gráfica de $y = x^3$, mediante una traslación vertical, siguiendo el eje de ordenadas en el sentido positivo 4 unidades, obtendremos la gráfica de $y = x^3 + 4$. De esta gráfica, mediante una traslación horizontal, siguiendo el eje de abscisas en el sentido positivo 1 unidad, obtendremos la gráfica de $y = (x-1)^3 + 4$,



y, a partir de su gráfica, podemos deducir algunas de sus propiedades.
Evidentemente, a partir de la gráfica de la función $f(x) = x^4$, obtenida mediante una tabla de valores,



podemos obtener otras gráficas de funciones polinómicas de cuarto grado.
Por ejemplo, la gráfica de la función

$$f(x) = -x^4 - 4x^3 - 6x^3 - 4x + 4$$

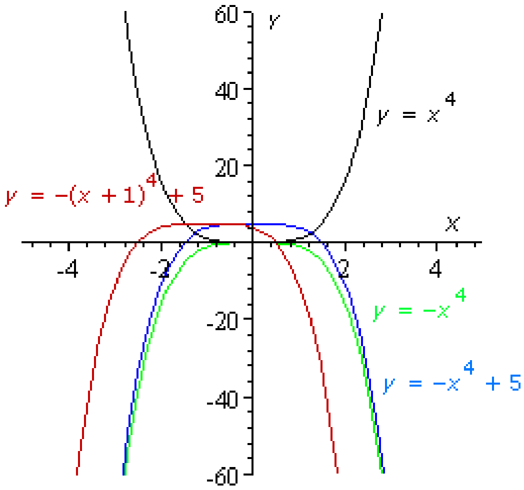
puede obtenerse a partir de $y = x^4$, pues

$$-x^4 - 4x^3 - 6x^3 - 4x + 4 = -(x+1)^4 + 5$$

Recuerda que

$$(x+1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$$

En efecto, de la gráfica de $y = x^4$, mediante una simetría respecto del eje de abscisas, obtendremos la gráfica de $y = -x^4$. Ahora, mediante una traslación vertical, siguiendo el eje de ordenadas en el sentido positivo 5 unidades, obtendremos la gráfica de $y = -x^4 + 5$. De esta gráfica, mediante una traslación horizontal, siguiendo el eje de abscisas en el sentido negativo 1 unidad, obtendremos la gráfica de $y = -(x+1)^4 + 5$,



y, a partir de su gráfica, podemos deducir algunas de sus propiedades.

8. Funciones racionales

Así como cada polinomio da lugar a una función polinómica, cada fracción algebraica da lugar a una función que se llama **función racional**, asociada a una fracción algebraica. Una función racional es toda función real de variable real f definida por

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, donde $p(x), q(x) \in \mathbb{R}[x]$ y $q(x)$ no es el polinomio cero.
Por ejemplo,

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{3x - 2}$$

es una función racional. Aunque no trataremos aquí este tipo de funciones, sólo haremos algunas observaciones. Al buscar la imagen de un número real por f puede suceder que para este valor se anule el denominador, en cuyo caso el cociente no tiene sentido. Estos valores de x que anulan el denominador no tienen imagen y debe prescindirse de ellos. Por tanto, el dominio de una función racional será

$$\begin{aligned}\text{Dom } f &= \{x \in \mathbb{R} : p(x) \neq 0\}\\ &= \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} : p(x) = 0\}\end{aligned}$$

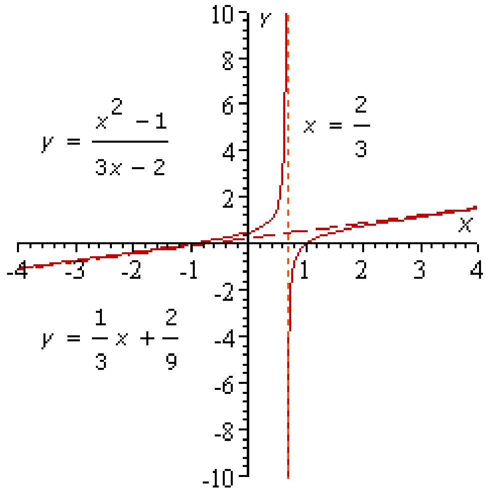
En el ejemplo anterior, el valor $x = \frac{2}{3}$ no tiene imagen y, por tanto,

$$\begin{aligned}\text{Dom } f &= \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} : 3x - 2 = 0\}\\ &= \mathbb{R} - \left\{\frac{2}{3}\right\}\end{aligned}$$

Si se efectúa la representación gráfica de una función racional deberá tomarse la precaución de señalar los puntos x que no tienen imagen. Por el momento, para efectuar la representación gráfica de la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{3x - 2}$$

podemos utilizar una tabla de valores y señalar el valor $x = \frac{2}{3}$. Ningún valor de y asociado a $\frac{2}{3}$ puede ser punto de la gráfica, es decir, no es posible que la recta vertical $x = \frac{2}{3}$ corte a la gráfica de la función. Puesto que el valor $\frac{2}{3}$ no se puede dar, trataremos de completar la tabla con valores próximos a este punto. En la figura siguiente se muestra la gráfica de esta función



En esta gráfica hemos dibujado también la recta

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}$$

a la que las ramas de la gráfica se aproximan conforme x aumenta o disminuye indefinidamente. Veremos en otro apartado el significado de esta recta así como el de la recta

$$x = \frac{2}{3}$$