Ejercicios propuestos

Índice

1. Definiciones. Anillo de los polinomios

1. Indica cuáles de las siguientes expresiones son monomios y, en caso afirmativo, indica su grado y coeficiente.

   a) $-4x^3$ *b*) $-\frac{25}{x^3}$ *c*) $-\frac{2y^4}{3}$ *d*) $-\frac{1}{2}$

   e) $3z^3-2z^2$ *f*) $4\sqrt[3]{x^2}$ *g*) $4\sqrt{2}t$ *h*) $-2x^2+x^2$

2. Indica cuáles de las siguientes expresiones son monomios en la indeterminada x, y, en caso afirmativo, indica su grado y coeficiente.

   a) $3x^3\cdot x^2$ *b*) $3x^4+x^2$ *c*) $-\frac{3x^5}{x^3}$ *d*) $\sqrt[3]{-\frac{x^9}{27}}$

   e) $3x^5-\frac{x^5}{2}$ *f*) $-\frac{4x^3}{x^4}$ *g*) $(x^2+x^3)^2$ *h*) $(3x^2+x^2)^3$

3. Indica cuáles de las siguientes expresiones son polinomios en la indeterminada x y, en caso afirmativo, cuál es su grado, su coeficiente de grado 3 y su término independiente:

   a) $-3x^3+4x^5-2x+\frac{1}{3}$ *b*) $-x^3+x^4-\frac{1}{x}+1$

   c) $\sqrt{3}x-4x^5+\frac{3x}{11}$ *d*) $4x^5-\sqrt{3x}+2$

4. Para cada uno de los polinomios siguientes indica cuál de los anillos de polinomios $\mathbb{Z}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$ o $\mathbb{R}[x]$ es el más pequeño que lo contiene:

   a) $1-x+x^2+x^4$ *b*) $1+x+\sqrt{3}\cdot x^2$
   c) $x-x^2$ *d*) $\frac{1}{3}x+4{,}25x^{10}$
   e) $\sqrt{2}+\frac{3}{4}x-5x^2$

5. Reduce términos semejantes y ordena en potencias decrecientes las siguientes expresiones:

   a) $3x-x^3+4x+2x^3-x^2+2x-7x^2+4x^3+8$
   b) $4x^5-2x^3+3x^2+\frac{1}{2}x^3-x^5+x^2-3$

6. Halla m y n para que los polinomios siguientes sean iguales

$$\begin{aligned} p(x) &= (3+m)\cdot x^2 + 7x + 21 \\ q(x) &= 7x^2 + (2+n)\cdot x + 21 \end{aligned}$$

7. ¿Existen valores de A, B y C para que se cumpla la siguiente igualdad?

$$3x^2 - 8x + 10 = Ax^2 + Bx + A - Cx + Bx^2 + C$$

8. Halla el valor numérico de los polinomios siguientes para los x indicados:

$$\begin{array}{ll} p(x) = 2 + \frac{3}{4}x - x^2 & x = -1/3 \\ q(x) = \sqrt{3} + \sqrt{3}x^3 & x = \sqrt{3} \\ r(x) = \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{5}x^3 & x = -\sqrt{2} \end{array}$$

9. Calcula m para que el valor numérico de $p(x) = 3x^6 + 7x^4 + mx^2 + 2mx + 1$ sea 121 para $x = 2$.

10. Dados los polinomios

$$\begin{aligned} p(x) &= 3 - x + \tfrac{1}{2}x^2 \\ q(x) &= 4 + 5x^3 + 6x^4 \\ r(x) &= 3 - x^4 \end{aligned}$$

calcula

$$\begin{array}{l} a)\ p(x) + q(x) - r(x) \\ b)\ p(x) - q(x) + r(x) \\ c)\ -p(x) + q(x) + r(x) \end{array}$$

11. Halla el polinomio $p(x)$ que sumado con $q(x) = 3 - x^2 + 5x^3$ da el polinomio $r(x) = 8 + x^2 + 5x^3 + x^4$.

12. Dados los polinomios

$$\begin{aligned} p(x) &= \sqrt{3} + 5x - \sqrt{3}x^2 \\ q(x) &= -\sqrt{3} + 2\sqrt{3}x \\ r(x) &= 2\sqrt{3} - 5\sqrt{3}x + x^3 \end{aligned}$$

calcula

$$\begin{array}{l} a)\ -[p(x) + q(x)] + r(x) \\ b)\ p(x) - [p(x) + q(x) + r(x)] \\ c)\ q(x) - r(x) \\ d)\ p(x) + q(x) - r(x) \end{array}$$

13. Efectúa el producto de las parejas de polinomios que se indican:

$$\begin{array}{l} a)\ 3 + x - x^2 + \sqrt{3}x^3 \text{ y } x + 3x^2 - 5x^3 \\ b)\ \sqrt{2}x + 2\sqrt{2}x^2 - \sqrt{2}x^3 \text{ y } \sqrt{2}x + \sqrt{2}x^2 \end{array}$$

14. Efectúa los productos siguientes:

$$\begin{array}{l} a)\ (x-1)(x+1) \\ b)\ (x-a)(x+a) \\ c)\ (x+3)(x+1)(x-3) \\ d)\ (-x-1)(-x-1) \end{array}$$

15. Dados los polinomios

$$\begin{aligned} p(x) &= x^3 - \sqrt{2}x + 3 \\ q(x) &= 2x - 7x^3 \\ r(x) &= 1 + x^2 \end{aligned}$$

calcula

$$\begin{array}{l} a)\ 2\cdot p(x) - q(x) + r(x) \\ b)\ p(x)\cdot q(x) - 2\cdot p(x) \\ c)\ p(x)\cdot p(x) - q(x)\cdot q(x) \\ d)\ p(x)\cdot r(x) - q(x)\cdot r(x) \end{array}$$

16. Efectúa las operaciones siguientes:

$$\begin{aligned}
&a)\ x(x^2-5)^2-(x+1)(x+3)^2\\
&b)\ \left(\tfrac{2}{3}x+5\right)\left(\tfrac{2}{3}x-5\right)-\left(\tfrac{1}{3}x+5\right)^2\\
&c)\ (3x+5)(x^2-x+3)-(2x+5)(x^2-x+3)
\end{aligned}$$

2. Potencia de un binomio. Fórmula de Newton

1. Calcula

$$a)\ (3x-1)^3 \qquad b)\ \left(\sqrt{2}+\tfrac{3}{x}\right)^4 \qquad c)\ \left(2\sqrt{2}+3\sqrt{3}\right)^4 \qquad d)\ \left(\sqrt{2}x+\tfrac{x^2}{2}\right)^3$$

2. Calcula

$$\begin{aligned}
&a)\ \tbinom{n}{0}+\tbinom{n}{1}+\tbinom{n}{2}+\cdots+\tbinom{n}{n-1}+\tbinom{n}{n}\\
&b)\ \tbinom{n}{0}-\tbinom{n}{1}+\tbinom{n}{2}+\cdots+(-1)^{n-1}\cdot\tbinom{n}{n-1}+(-1)^n\cdot\tbinom{n}{n}
\end{aligned}$$

3. Del desarrollo de $\left(2x+\frac{1}{2}\right)^{15}$ calcula: (a) el término cuarto, (b) el término independiente, y (c) el coeficiente del término de lugar 14.

4. De la potencia del binomio $\left(3x-\frac{1}{3x}\right)^6$ escribe el término general de su desarrollo por la fórmula de Newton. Halla el término tercero y el central.

5. Del desarrollo de $(x-1)^{200}$ calcula: (a) el término de lugar 198, (b) el último término, y (c) el término en el que aparece x^{198}.

6. Halla el término de lugar 16 en el desarrollo de $\left(\sqrt{3}-\sqrt[5]{3}\right)^{19}$, expresándolo del modo más sencillo posible.

3. División de polinomios. Algoritmo de Euclides

1. Calcula el cociente y el resto de las siguientes divisiones

$$\begin{aligned}
&a)\ (3x^2+2x-7):(x^2+3)\\
&b)\ (x^3+5x-6):(2x+3)\\
&c)\ (4x^4-1):(3x^2+5x+3)\\
&d)\ \left(\tfrac{3}{4}x^4-\tfrac{1}{3}x^3-7\right):(x^2+x-1)\\
&e)\ (x^5-1):(x+1)
\end{aligned}$$

2. Halla un polinomio de tercer grado que dividido por $x+1$ dé de cociente x^2+3 y resto -2.

3. Averiguar si las siguientes divisiones son o no exactas:

$$\begin{aligned}
&a)\ (x^2+2x+1):(x+1)\\
&b)\ (x^3-3x^2+x-3):(x^2+1)\\
&c)\ \left(x^3+2x^2+\tfrac{15}{4}x+\tfrac{9}{4}\right):\left(x^2+\tfrac{1}{2}x+3\right)
\end{aligned}$$

4. Calcula a para que x^3-3x^2+x-a sea divisible por x^2+1.

5. Dado el polinomio $3x^5+7x^2-5$, halla su polinomio mónico.

6. Utilizando el algoritmo de Euclides, calcula m.c.d. y m.c.m. de los polinomios $p(x)$ y $q(x)$, en los casos siguientes:

$$\begin{aligned}
&a)\ p(x)=x^4-5x^2+6 \text{ y } q(x)=x^3+x^2-3x-3\\
&b)\ p(x)=x^6+x^4-x^2-1 \text{ y } q(x)=x^5-x^4-x+1\\
&c)\ p(x)=x^3+\sqrt{2}x^2+3x+3\sqrt{2} \text{ y } q(x)=x^2+2
\end{aligned}$$

7. Calcula a y b para que el polinomio m.c.d. de $p(x)=x^2+ax+b$ y $q(x)=x^2-9$ sea $x+3$. ¿Hay una única solución?

8. ¿Es divisible $p(x)=2x^3+3x^2+2x+1$ por $q(x)=x^3+1$? Calcula el m.c.d. y el m.c.m. de ambos polinomios.

4. Regla de Ruffini y teorema del resto

1. Utiliza la regla de Ruffini para determinar el cociente y el resto de las siguientes divisiones:

$$\begin{array}{l} a)\ (x^5 - x^3 - x - 1) : (x - 3) \\ b)\ (x^3 - 4) : \left(x - \frac{1}{2}\right) \\ c)\ (x^4 - 3) : (x - \sqrt{3}) \\ d)\ (x^3 - 2x^2 + 5) : \left(x - \frac{1}{3}\right) \end{array}$$

2. Utiliza el teorema del resto para determinar el resto de cada una de las siguientes divisiones:

$$\begin{array}{l} a)\ (x^2 + x + 1) : \left(x - \frac{1}{3}\right) \\ b)\ (x^3 - 2x + \sqrt{2}) : (x - \sqrt{2}) \\ c)\ \left(\frac{3}{4}x^5 + 8x - \frac{5}{7}\right) : \left(x + \frac{2}{3}\right) \\ d)\ (4x^4 + 5x^3 - 7x^2) : (x + 2) \end{array}$$

3. Sin efectuar la división, averigua si los polinomios que siguen son divisibles por los que se indican

$$\begin{array}{l} a)\ x^4 - x^2 + 6 \text{ y } x + \sqrt{3} \\ b)\ x^2 - x - 1 \text{ y } x - \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ c)\ x^6 - x^4 - x^2 - 1 \text{ y } x - 1 \end{array}$$

4. Escribe un polinomio de tercer grado que sea divisible por los polinomios $x - 3 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ y $x - 3 - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

5. Calcula los valores de a y b para que el polinomio $p(x) = x^4 - 5x^3 + 4x^2 + ax - b$ sea divisible por los binomios $x - 3$ y $x + 1$.

6. Halla el valor de a para que el polinomio $p(x) = x^3 + ax + 3$ dé de resto -4 al dividirlo por $x - 1$.

7. Se sabe que un polinomio $p(x)$ es divisible por $x + 1$ y, además, el resto de la división de $p(x)$ por $x + 2$ es 4. Calcula el resto que se obtiene al dividirlo por $(x + 1)(x + 2)$.

8. Halla el valor de a para que el polinomio $p(x) = x^4 - 2x^3 + ax^2 - 5x + 10$ sea divisible por $x + 2$.

9. Halla a y b para que el polinomio $p(x) = x^2 + ax - b$ dé de resto 1 al dividirlo por $x - 1$, y resto 3 al dividirlo por $x - 3$.

5. Raíces y descomposición factorial de un polinomio

1. Comprueba que los valores que se indican son raíces de los polinomios que se acompañan

$$\begin{array}{lll} a) & 1 & p(x) = x^3 - 1 \\ b) & 1/2 & q(x) = 16x^3 - 2x^2 + x - 2 \\ c) & \sqrt{3} & r(x) = x^4 - 5x^2 + 6 \end{array}$$

2. Comprueba si son ciertas o falsas las afirmaciones siguientes: (a) 1 es una raíz doble del polinomio $x^3 + 1$, (b) $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ es una raíz simple del polinomio $4x^2 - 4x - 1$, y (c) 2 es una raíz triple del polinomio $x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 8x$.

3. Halla la multiplicidad de la raíz 2 para el polinomio $p(x) = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16$.

4. Calcula las raíces enteras del polinomio $p(x) = x^5 - 2x^4 - 6x^3 - 6x^2 - 7x - 4$. ¿Cuáles son sus multiplicidades? ¿Tiene $p(x)$ alguna raíz real que no sea entera?

5. Escribe un polinomio de tercer grado que tenga -2 como raíz múltiple de orden dos.

6. Calcula el valor que ha de tener a para que el polinomio $p(x) = x^3 - 3x + a$ tenga la raíz 1.

7. Indica las raíces del polinomio $p(x) = (x - 1)(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$.

8. Halla un polinomio de segundo grado que tenga por raíces $\sqrt{3}$ y $-\sqrt{2}$.

9. Calcula la descomposición factorial de los siguientes polinomios:

$$\begin{aligned}
&a)\ (x-1)^2-(x-1)(x+1)\\
&b)\ (x-1)(x^2-4)\\
&c)\ x^4+2x^3-2x-1\\
&d)\ x^3-1\\
&e)\ 3x^4-27x^3+39x^2+27x-42
\end{aligned}$$

10. Halla el m.c.d. y m.c.m. de $p(x)$ y $q(x)$ en los casos siguientes:

$$\begin{aligned}
&a)\ p(x)=(x-1)^2(x-2) \text{ y } q(x)=(x+1)(x+2)^2\\
&b)\ p(x)=(x-\sqrt{2})^2(x+3) \text{ y } q(x)=(x-\sqrt{2})^3(x+\sqrt{2})\\
&c)\ p(x)=x^6-1 \text{ y } q(x)=x^3-x\\
&d)\ p(x)=3x^4-14x^3+20x^2-11x+2 \text{ y } q(x)=3x^4-5x^3-4x^2+10x-4
\end{aligned}$$

11. Dos polinomios se llaman primos entre sí cuando su m.c.d. es 1, es decir, cuando el único divisor común es el polinomio unidad. Indica cuáles de las siguientes parejas de polinomios son primos entre sí

$$\begin{aligned}
&a)\ p(x)=x^2-2x+1 \text{ y } q(x)=x^2+2x+1\\
&b)\ p(x)=x^3-3x^2 \text{ y } q(x)=x^3+3x^2\\
&c)\ p(x)=x^2+x+1 \text{ y } q(x)=x^2-x-1
\end{aligned}$$

12. Resuelve las siguientes ecuaciones polinómicas

$$\begin{aligned}
&a)\ x^3+21x^2+98x-120=0\\
&b)\ x^3-14x^2+63x-90=0
\end{aligned}$$

6. El cuerpo de las fracciones racionales

1. Indica si son o no equivalentes las siguientes parejas de fracciones algebraicas:

$$\begin{array}{lcc}
a) & \frac{x^2-1}{x^3-1} & \frac{x+1}{x^2+x+1}\\
b) & \frac{x^3+x^2+x+1}{x^2+1} & \frac{x^2+x}{x}\\
c) & \frac{1}{x} & \frac{x+1}{x^2+x}
\end{array}$$

2. Escribir tres fracciones algebraicas pertenecientes a la fracción racional

$$\left\{\frac{x}{x+3}\right\}$$

3. Simplificar las fracciones algebraicas siguientes:

$$\begin{array}{lll}
a)\ \frac{x+2}{x^2-4} & b)\ \frac{x-\sqrt{2}}{x^2-2\sqrt{2}x+2} & c)\ \frac{x}{x^4-x}\\
d)\ \frac{2x^2-3x+1}{3x^3-3x^2+x-1} & e)\ \frac{(x+3)^2-(5x-4)^2}{36x^2-1} & f)\ \frac{x^2-1}{x^3-2x^2+x}
\end{array}$$

4. Efectúa las siguientes operaciones indicadas

$$\begin{array}{ll}
a) & \frac{1+x}{1-x}+x-\frac{x}{1-x^2}\\
b) & 3-\frac{1}{1+x}+\frac{x^2-1}{1-x}\\
c) & \frac{x+1}{3}+\frac{x^2-1}{9(x+1)}+\frac{x+1}{6(x^2-1)}\\
d) & \frac{1}{x-1}+\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{x+1}
\end{array}$$

5. Efectúa las siguientes operaciones, simplificando al máximo el resultado:

$$\begin{array}{ll}
a) & \frac{1+x}{1-x}\cdot\frac{x}{1-x^2}\\
b) & \frac{3x^2+1}{x^2+2x+1}\cdot\frac{x^2-1}{x+2}\\
c) & \frac{x^2-4x+4}{x+1}\cdot\frac{x^2-1}{x-2}\\
d) & \frac{8x}{x+1}\cdot\frac{3x}{x-1}\cdot\frac{x^2-1}{x^2+1}
\end{array}$$

6. Efectúa las siguientes operaciones, simplificando al máximo el resultado:

$$\begin{array}{ll} a) & \frac{x^2}{x+1} : \frac{3x^2+1}{x^2+2x+1} \\ b) & \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}\right) : \frac{x^2+x}{x^3-1} \\ c) & \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{x^2}{x+1} - \frac{x^3}{x-1}\right) \\ d) & \frac{a(x+1)}{b} : \left(\frac{a+b}{x+1} - \frac{a-b}{bx+b}\right) \end{array}$$

7. Determinar la solución de la ecuación

$$\frac{x^2}{x^2-1} \cdot A(x) = \frac{x^2-1}{x^2+x} + \frac{x+1}{x}$$

8. Comprueba que se cumple

$$\left(x+1+\frac{x^2}{1-x}\right) : \left(1 - \frac{x}{1+x} \cdot \frac{x+1}{x^2-x}\right) = -\frac{1}{x-2}$$

9. Simplifica:

   a)

$$\frac{1+\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2}{1-\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2}$$

   b)

$$\frac{1-\frac{x+a}{x-a}}{1+\frac{x+a}{x-a}}$$

7. Funciones polinómicas

1. Calcula $f(-1)$, $f(1/3)$ y $f(\sqrt{2})$ para las siguientes funciones: (a) $f(x) = 2x + 5$; (b) $f(x) = -x^2 + 2x - 3$; y (c) $f(x) = 1$.

2. Calcula, si existen, las antiimágenes de 0, 1 y -1 para las siguientes funciones: (a) $f(x) = 2x - 1$; (b) $f(x) = 2x^2$; (c) $f(x) = x^3$; y (d) $f(x) = -1$.

3. Construye la gráfica de las funciones cuyas imágenes vienen definidas por las siguientes relaciones: (a) $y = -5$; (b) $y = 4x$; (c) $y = -\frac{1}{2}x$; (d) $y = -3x + 4$; (e) $y = 3x + 9$.

4. ¿En qué puntos corta la gráfica de las funciones que se indican a los ejes de coordenadas? ¿En qué punto se cortan las dos gráficas? ¿Para qué valores de x las funciones toman valores positivos y valores negativos?

$$\begin{array}{l} f(x) = -x + 1 \\ g(x) = 2x - 4 \end{array}$$

5. Construye la gráfica de las funciones cuyas imágenes vienen definidas por las siguientes relaciones: (a) $y = x^2 - 3$; (b) $y = -x^2 + 5$; (c) $y = (x+2)^2 - 3$; (d) $y = -2(x-3)^2 + 3$. Averiguar si cortan o no al eje de abscisas.

6. Representa las gráficas de las siguientes funciones cuyas imágenes vienen definidas por las siguientes relaciones: (a) $y = x^2 - 2x - 3$; (b) $y = -2x^2 + 4x - 3$; y (c) $y = 2x^2 - 4x$. Caracteriza cada una de estas gráficas.

7. Construye las gráficas de las siguientes funciones: (a) $f(x) = x^3 - 5$; (b) $f(x) = -x^4 + 5$; y (c) $f(x) = (x + 3)^3 + 2$.