Práctica

Índice

1. Definiciones. Anillo de los polinomios

Ejercicio 1 Indica cuáles de las siguientes expresiones son monomios y, en caso afirmativo, indica su grado y coeficiente.

$a)\ -4x^3 \qquad b)\ -\frac{25}{x^3} \qquad c)\ -\frac{2y^4}{3} \qquad d)\ -\frac{1}{2}$

$e)\ 3z^3-2z^2 \qquad f)\ 4\sqrt[3]{x^2} \qquad g)\ 4\sqrt{2}t \qquad h)\ -2x^2+x^2$

Solución:

a) Se trata de un monomio en la indeterminada x de grado 3 y coeficiente -4.

b) No se trata de un monomio pues
$$-\frac{25}{x^3}=-25x^{-3}$$
y el exponente de x no es un número natural.

c) Se trata de un monomio en la indeterminada y de grado 4 y coeficiente $-\frac{2}{3}$, ya que
$$-\frac{2y^4}{3}=-\frac{2}{3}y^4$$

d) Se trata de un monomio de grado cero y coeficiente $-\frac{1}{2}$ en una cierta indeterminada.

e) Por la forma de la expresión, no se trata de un monomio; en realidad es un binomio, es decir, la suma de dos monomios, $3z^3$ y $-2z^2$.

f) No se trata de un monomio pues
$$4\sqrt[3]{x^2}=4x^{\frac{2}{3}}$$
y el exponente de x no es un número natural.

g) Se trata de un monomio en la indeterminada t de grado 1 y coeficiente $4\sqrt{2}$.

h) Se trata de un monomio en la ideterminada x de grado 2 y y coeficiente -1, pues
$$-2x^2+x^2=(-2+1)x^2=-x^2$$

■

Ejercicio 2 Indica cuáles de las siguientes expresiones son monomios en la indeterminada x, y, en caso afirmativo, indica su grado y coeficiente.

a) $3x^3 \cdot x^2$ *b)* $3x^4 + x^2$ *c)* $-\frac{3x^5}{x^3}$ *d)* $\sqrt[3]{-\frac{x^9}{27}}$

e) $3x^5 - \frac{x^5}{2}$ *f)* $-\frac{4x^3}{x^4}$ *g)* $(x^2 + x^3)^2$ *h)* $(3x^2 + x^2)^3$

Solución:

a) Se trata de un monomio de grado 5 y coeficiente 3, ya que

$$3x^3 \cdot x^2 = 3x^5$$

b) Por la forma de la expresión, no se trata de un monomio; en realidad es un binomio de grado 4.

c) Se trata de un monomio de grado 2 y coeficiente -3, pues

$$-\frac{3x^5}{x^3} = -3x^2$$

d) Se trata de un monomio de grado 3 y coeficiente $-\frac{1}{3}$, pues

$$\sqrt[3]{-\frac{x^9}{27}} = \sqrt[3]{\left(-\frac{x^3}{3}\right)^3} = -\frac{1}{3}x^3$$

e) Se trata de un monomio de grado 5 y coeficiente $\frac{5}{2}$, pues

$$3x^5 - \frac{x^5}{2} = \left(3 - \frac{1}{2}\right)x^5 = \frac{5}{2}x^5$$

f) No se trata de un monomio ya que

$$-\frac{4x^3}{x^4} = -4x^{3-4} = -4x^{-1}$$

es decir, el exponente de x no es un número natural.

g) No se trata de un monomio, pues

$$\begin{aligned}(x^2 + x^3)^2 &= (x^2)^2 + 2x^2 \cdot x^3 + (x^3)^2 \\ &= x^4 + 2x^5 + x^6\end{aligned}$$

es decir, es un trinomio de grado 6.

h) Se trata de un monomio de grado 6 y coeficiente -64.

$$(3x^2 + x^2)^3 = (4x^2)^3 = 64x^6$$

■

Ejercicio 3 Indica cuáles de las siguientes expresiones son polinomios en la indeterminada x y, en caso afirmativo, cuál es su grado, su coeficiente de grado 3 y su término independiente:

a) $-3x^3 + 4x^5 - 2x + \frac{1}{3}$ *b)* $-x^3 + x^4 - \frac{1}{x} + 1$

c) $\sqrt{3}x - 4x^5 + \frac{3x}{11}$ *d)* $4x^5 - \sqrt{3x} + 2$

Solución:

a) Se trata de un polinomio de grado 5, pues

$$\frac{1}{3} - 2x - 3x^3 + 4x^5$$

Además, su coeficiente de grado 3 es -3 y su término independiente es $\frac{1}{3}$.

b) No se trata de un polinomio, pues, el término

$$\frac{1}{x} = x^{-1}$$

no es un monomio.

c) Es un polinomio de grado 5, ya que

$$\sqrt{3}x - 4x^5 + \frac{3x}{11} = \left(\sqrt{3} + \frac{3}{11}\right) x - 4x^5$$

Es claro que el coeficiente de grado 3 es 0 y su término independiente es también 0.

d) No se trata de un polinomio, pues el término

$$-\sqrt{3x} = -\sqrt{3}x^{\frac{1}{2}}$$

no es un monomio.

■

Ejercicio 4 Para cada uno de los polinomios siguientes indica cuál de los anillos de polinomios $\mathbb{Z}[x], \mathbb{Q}[x]$ o $\mathbb{R}[x]$ es el más pequeño que lo contiene:

a) $1 - x + x^2 + x^4$ *b)* $1 + x + \sqrt{3} \cdot x^2$
c) $x - x^2$ *d)* $\frac{1}{3}x + 4{,}25x^{10}$
e) $\sqrt{2} + \frac{3}{4}x - 5x^2$

Solución: a) Puesto que todos los coeficientes del polinomio son números enteros, se tiene

$$1 - x + x^2 + x^4 \in \mathbb{Z}[x]$$

b) Al ser el coeficiente del monomio de mayor grado un número irracional, se tiene

$$1 + x + \sqrt{3} \cdot x^2 \in \mathbb{R}[x]$$

c) Puesto que todos los coeficientes del polinomio son números enteros, se tiene

$$x - x^2 \in \mathbb{Z}[x]$$

d) Observa que

$$\frac{1}{3}x + 4{,}25x^{10} = \frac{1}{3}x + \frac{17}{4}x^{10}$$

y al ser todos los coeficientes del polinomio números racionales, se tiene

$$\frac{1}{3}x + 4{,}25x^{10} \in \mathbb{Q}[x]$$

e) Al ser el término independiente un número irracional, se tiene

$$\sqrt{2} + \frac{3}{4}x - 5x^2 \in \mathbb{R}[x]$$

■

Ejercicio 5 Reduce términos semejantes y ordena en potencias decrecientes las siguientes expresiones:

a) $3x - x^3 + 4x + 2x^3 - x^2 + 2x - 7x^2 + 4x^3 + 8$
b) $4x^5 - 2x^3 + 3x^2 + \frac{1}{2}x^3 - x^5 + x^2 - 3$

Solución: a)

$$\begin{aligned} & 3x - x^3 + 4x + 2x^3 - x^2 + 2x - 7x^2 + 4x^3 + 8 \\ = \;& 8 + (3+4+2)x - (1+7)x^2 + (-1+2+4)x^3 \\ = \;& 8 + 9x - 8x^2 + 5x^3 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} & 4x^5 - 2x^3 + 3x^2 + \frac{1}{2}x^3 - x^5 + x^2 - 3 \\ = \;& -3 + (3+1)x^2 + \left(-2 + \frac{1}{2}\right)x^3 + (4-1)x^5 \\ = \;& -3 + 4x^2 - \frac{3}{2}x^3 + 3x^5 \end{aligned}$$

■

Ejercicio 6 Halla m y n para que los polinomios siguientes sean iguales

$$p(x) = (3+m) \cdot x^2 + 7x + 21$$
$$q(x) = 7x^2 + (2+n) \cdot x + 21$$

Solución: Sabemos que dos polinomios son iguales si coinciden los coeficientes de todos los términos del mismo grado en uno y otro polinomio. Así, tenemos

$$\begin{aligned} 3 + m &= 7 \\ 7 &= 2 + n \end{aligned}$$

de donde $m = 4$ y $n = 5$. ■

Ejercicio 7 ¿Existen valores de A, B y C para que se cumpla la siguiente igualdad?

$$3x^2 - 8x + 10 = Ax^2 + Bx + A - Cx + Bx^2 + C$$

Solución: Agrupando términos semejantes en un miembro de la igualdad, obtenemos

$$3x^2 - 8x + 10 = (A+B)x^2 + (B-C)x + A + C$$

Al tratarse de una igualdad de polinomios se han de cumplir las siguientes ecuaciones simultáneamente

$$\begin{aligned} A + B &= 3 \\ B - C &= -8 \\ A + C &= 10 \end{aligned}$$

Restando las dos primeras, obtenemos

$$A + C = 11$$

lo cual no es posible, ya que $A + C = 10$. Por consiguiente, no hay valores de A, B y C para que se cumple la igualdad. ■

Ejercicio 8 Halla el valor numérico de los polinomios siguientes para los x indicados:

a) $p(x) = 2 + \frac{3}{4}x - x^2$ $\quad x = -1/3$
b) $q(x) = \sqrt{3} + \sqrt{3}x^3$ $\quad x = \sqrt{3}$
c) $r(x) = \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{5}x^3$ $\quad x = -\sqrt{2}$

Solución: a)

$$\begin{aligned} p(-1/3) &= 2+\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)-\left(-\frac{1}{3}\right)^2 \\ &= 2-\frac{1}{4}-\frac{1}{9} \\ &= \frac{59}{36} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} q(\sqrt{3}) &= \sqrt{3}+\sqrt{3}\left(\sqrt{3}\right)^3 \\ &= \sqrt{3}+\left(\sqrt{3}\right)^4 \\ &= \sqrt{3}+9 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} r(-\sqrt{2}) &= \frac{1}{3}\left(-\sqrt{2}\right)+\frac{1}{2}\left(-\sqrt{2}\right)^2+\frac{4}{5}\left(-\sqrt{2}\right)^3 \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{1}{2}\cdot 2+\frac{4}{5}\cdot\left(-2\sqrt{2}\right) \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{3}+1-\frac{8\sqrt{2}}{5} \\ &= 1-\frac{29\sqrt{2}}{15} \end{aligned}$$

■

Ejercicio 9 Calcula m para que el valor numérico de $p(x)=3x^6+7x^4+mx^2+2mx+1$ sea 121 para $x=2$.
Solución: La condición impuesta por el enunciado es equivalente a escribir

$$p(2)=121$$

Luego,

$$\begin{aligned} 3\cdot 2^6+7\cdot 2^4+m\cdot 2^2+2m\cdot 2+1 &= 121 \\ 192+112+4m+4m+1 &= 121 \\ 8m &= -184 \\ m &= -23 \end{aligned}$$

■

Ejercicio 10 Dados los polinomios

$$\begin{aligned} &p(x)=3-x+\tfrac{1}{2}x^2 \\ &q(x)=4+5x^3+6x^4 \\ &r(x)=3-x^4 \end{aligned}$$

calcula

a) $p(x)+q(x)-r(x)$
b) $p(x)-q(x)+r(x)$
c) $-p(x)+q(x)+r(x)$

Solución: a)

$$\begin{array}{rcrrrrrrrrr} p(x) & = & & 3 & - & x & + & \frac{1}{2}x^2 & & & & \\ q(x) & = & & 4 & & & & & + & 5x^3 & + & 6x^4 \\ -r(x) & = & - & 3 & & & & & & & + & x^4 \\ \hline p(x)+q(x)-r(x) & = & & 4 & - & x & + & \frac{1}{2}x^2 & + & 5x^3 & + & 7x^4 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{rcrlrlrlrlrl}
p(x) & = & & 3 & - & x & + & \frac{1}{2}x^2 & & & & \\
-q(x) & = & - & 4 & & & & & - & 5x^3 & - & 6x^4 \\
r(x) & = & & 3 & & & & & & & - & x^4 \\
\hline
p(x)-q(x)+r(x) & = & & 2 & - & x & + & \frac{1}{2}x^2 & - & 5x^3 & - & 7x^4
\end{array}$$

c)

$$\begin{array}{rcrlrlrlrlrl}
-p(x) & = & - & 3 & + & x & - & \frac{1}{2}x^2 & & & & \\
q(x) & = & & 4 & & & & & + & 5x^3 & + & 6x^4 \\
r(x) & = & & 3 & & & & & & & - & x^4 \\
\hline
-p(x)+q(x)+r(x) & = & & 4 & + & x & - & \frac{1}{2}x^2 & + & 5x^3 & + & 5x^4
\end{array}$$

■

Ejercicio 11 Halla el polinomio $p(x)$ que sumado con $q(x) = 3 - x^2 + 5x^3$ da el polinomio $r(x) = 8 + x^2 + 5x^3 + x^4$.
Solución: La condición del enunciado se traduce de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
p(x) + q(x) &= r(x) \\
p(x) + \left(3 - x^2 + 5x^3\right) &= 8 + x^2 + 5x^3 + x^4 \\
p(x) &= 8 + x^2 + 5x^3 + x^4 - \left(3 - x^2 + 5x^3\right) \\
p(x) &= 8 + x^2 + 5x^3 + x^4 - 3 + x^2 - 5x^3 \\
p(x) &= 5 + 2x^2 + x^4
\end{aligned}$$

■

Ejercicio 12 Dados los polinomios

$$\begin{array}{l}
p(x) = \sqrt{3} + 5x - \sqrt{3}x^2 \\
q(x) = -\sqrt{3} + 2\sqrt{3}x \\
r(x) = 2\sqrt{3} - 5\sqrt{3}x + x^3
\end{array}$$

calcula

a) $-\left[p(x) + q(x)\right] + r(x)$
b) $p(x) - \left[p(x) + q(x) + r(x)\right]$
c) $q(x) - r(x)$
d) $p(x) + q(x) - r(x)$

Solución: a) Puesto que

$$-\left[p(x) + q(x)\right] + r(x) = -p(x) - q(x) + r(x)$$

tenemos

$$\begin{array}{rcrlrlrlrl}
-p(x) & = & - & \sqrt{3} & - & 5x & + & \sqrt{3}x^2 & & \\
-q(x) & = & & \sqrt{3} & - & 2\sqrt{3}x & & & & \\
r(x) & = & & 2\sqrt{3} & - & 5\sqrt{3}x & & & + & x^3 \\
\hline
-p(x)-q(x)+r(x) & = & & 2\sqrt{3} & - & (5+7\sqrt{3})x & + & \sqrt{3}x^2 & + & x^3
\end{array}$$

b) Puesto que

$$\begin{aligned}
p(x) - \left[p(x) + q(x) + r(x)\right] &= p(x) - p(x) - q(x) - r(x) \\
&= -q(x) - r(x)
\end{aligned}$$

tenemos

$$\begin{aligned}
-q(x) - r(x) &= -\left(-\sqrt{3} + 2\sqrt{3}x\right) - \left(2\sqrt{3} - 5\sqrt{3}x + x^3\right) \\
&= \sqrt{3} - 2\sqrt{3}x - 2\sqrt{3} + 5\sqrt{3}x - x^3 \\
&= -\sqrt{3} + 3\sqrt{3}x - x^3
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} q(x) - r(x) &= -\sqrt{3} + 2\sqrt{3}x - \left(2\sqrt{3} - 5\sqrt{3}x + x^3\right) \\ &= -\sqrt{3} + 2\sqrt{3}x - 2\sqrt{3} + 5\sqrt{3}x - x^3 \\ &= -3\sqrt{3} + 7\sqrt{3}x - x^3 \end{aligned}$$

d)

$$\begin{array}{rcrrrrrrr} p(x) & = & & \sqrt{3} & + & 5x & - & \sqrt{3}x^2 & & \\ q(x) & = & - & \sqrt{3} & + & 2\sqrt{3}x & & & & \\ -r(x) & = & - & 2\sqrt{3} & + & 5\sqrt{3}x & & & - & x^3 \\ \hline p(x)+q(x)-r(x) & = & - & 2\sqrt{3} & + & (5+7\sqrt{3})x & - & \sqrt{3}x^2 & - & x^3 \end{array}$$

■

Ejercicio 13 Efectúa el producto de las parejas de polinomios que se indican:

a) $3 + x - x^2 + \sqrt{3}x^3$ y $x + 3x^2 - 5x^3$
b) $\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}x^2 - \sqrt{2}x^3$ y $\sqrt{2}x + \sqrt{2}x^2$

Solución: a)

$$\begin{array}{ccccccccccccc} & & & & 3 & + & x & - & x^2 & + & \sqrt{3}x^3 \\ & & & & & & x & + & 3x^2 & - & 5x^3 \\ \hline 3x & + & x^2 & - & x^3 & + & \sqrt{3}x^4 & & & & \\ & & 9x^2 & + & 3x^3 & - & 3x^4 & + & 3\sqrt{3}x^5 & & \\ & & & - & 15x^3 & - & 5x^4 & + & 5x^5 & - & 5\sqrt{3}x^6 \\ \hline 3x & + & 10x^2 & - & 13x^3 & + & (\sqrt{3}-8)x^4 & + & (3\sqrt{3}+5)x^5 & - & 5\sqrt{3}x^6 \end{array}$$

b) Puesto que

$$\begin{aligned} \sqrt{2}x + 2\sqrt{2}x^2 - \sqrt{2}x^3 &= \sqrt{2}x\left(1 + 2x - x^2\right) \\ \sqrt{2}x + \sqrt{2}x^2 &= \sqrt{2}x(1+x) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 1 & + & 2x & - & x^2 \\ & & & & 1 & + & x \\ \hline 1 & + & 2x & - & x^2 & & \\ & & x & + & 2x^2 & - & x^3 \\ \hline 1 & + & 3x & + & x^2 & - & x^3 \end{array}$$

Luego,

$$\begin{aligned} & \left(\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}x^2 - \sqrt{2}x^3\right) \cdot \left(\sqrt{2}x + \sqrt{2}x^2\right) \\ = \; & \sqrt{2}x\left(1 + 2x - x^2\right) \cdot \sqrt{2}x(1+x) \\ = \; & \left(\sqrt{2}\right)^2 x^2 \cdot \left(1 + 3x + x^2 - x^3\right) \\ = \; & 2x^2 \cdot \left(1 + 3x + x^2 - x^3\right) \\ = \; & 2x^2 + 6x^3 + 2x^4 - 2x^5 \end{aligned}$$

■

Ejercicio 14 Efectúa los productos siguientes:

a) $(x-1)\cdot(x+1)$
b) $(x-a)\cdot(x+a)$
c) $(x+3)\cdot(x+1)\cdot(x-3)$
d) $(-x-1)\cdot(-x-1)$

Solución: a) Se trata de una suma por diferencia y, por tanto, tenemos

$$(x-1)\cdot(x+1) = x^2 - 1$$

b) Análogamente, tenemos

$$(x-a)\cdot(x+a)=x^2-a^2$$

c) Del mismo modo, tenemos

$$\begin{aligned}(x+3)\cdot(x+1)\cdot(x-3) &= (x^2-9)\cdot(x+1)\\ &= x^3+x^2-9x-9\end{aligned}$$

d) Se trata del cuadrado de un binomio y, por tanto, tenemos

$$\begin{aligned}(-x-1)\cdot(-x-1) &= (-1)^2\cdot(x+1)^2\\ &= x^2+2x+1\end{aligned}$$

■

Ejercicio 15 Dados los polinomios

$$\begin{aligned}&p(x)=x^3-\sqrt{2}x+3\\ &q(x)=2x-7x^3\\ &r(x)=1+x^2\end{aligned}$$

calcula

a) $2\cdot p(x)-q(x)+r(x)$
b) $p(x)\cdot q(x)-2\cdot p(x)$
c) $p(x)\cdot p(x)-q(x)\cdot q(x)$
d) $p(x)\cdot r(x)-q(x)\cdot r(x)$

Solución: a)

$$\begin{aligned}2\cdot p(x)-q(x)+r(x) &= 2\left(x^3-\sqrt{2}x+3\right)-\left(2x-7x^3\right)+1+x^2\\ &= 2x^3-2\sqrt{2}x+6-2x+7x^3+1+x^2\\ &= (2+7)x^3+x^2-(2\sqrt{2}+2)x+6+1\\ &= 9x^3+x^2-(2\sqrt{2}+2)x+7\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}p(x)\cdot q(x)-2\cdot p(x) &= \left(x^3-\sqrt{2}x+3\right)\cdot\left(2x-7x^3\right)-2\left(x^3-\sqrt{2}x+3\right)\\ &= 2x^4-7x^6-2\sqrt{2}x^2+7\sqrt{2}x^4+6x-21x^3-2x^3+2\sqrt{2}x-6\\ &= -7x^6+(2+7\sqrt{2})x^4-23x^3-2\sqrt{2}x^2+(6+2\sqrt{2})x-6\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}p(x)\cdot p(x)-q(x)\cdot q(x) &= [p(x)]^2-[q(x)]^2\\ &= \left(x^3-\sqrt{2}x+3\right)^2-\left(2x-7x^3\right)^2\\ &= -48x^6+(28-2\sqrt{2})x^4+6x^3-2x^2-6\sqrt{2}x+9\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}p(x)\cdot r(x)-q(x)\cdot r(x) &= [p(x)-q(x)]\cdot r(x)\\ &= \left(x^3-\sqrt{2}x+3-2x+7x^3\right)\cdot\left(1+x^2\right)\\ &= \left[8x^3-\left(2+\sqrt{2}\right)x+3\right]\cdot\left(1+x^2\right)\\ &= 8x^5+\left(6-\sqrt{2}\right)x^3+3x^2-\left(2+\sqrt{2}\right)x+3\end{aligned}$$

■

Ejercicio 16 Efectúa las operaciones siguientes:

$$\begin{array}{l} a)\ x\cdot(x^2-5)^2-(x+1)\cdot(x+3)^2 \\ b)\ \left(\frac{2}{3}x+5\right)\cdot\left(\frac{2}{3}x-5\right)-\left(\frac{1}{3}x+5\right)^2 \\ c)\ (3x+5)\cdot(x^2-x+3)-(2x+5)\cdot(x^2-x+3) \end{array}$$

Solución: a)

$$\begin{aligned} x\cdot(x^2-5)^2-(x+1)\cdot(x+3)^2 &= x\cdot\left(x^4-10x^2+25\right)-(x+1)\cdot(x^2+6x+9) \\ &= x^5-10x^3+25x-x^3-6x^2-9x-x^2-6x-9 \\ &= x^5-11x^3-7x^2+10x-9 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{3}x+5\right)\cdot\left(\frac{2}{3}x-5\right)-\left(\frac{1}{3}x+5\right)^2 &= \frac{4}{9}\cdot x^2-25-\frac{1}{9}\cdot x^2-\frac{10}{3}\cdot x-25 \\ &= \frac{1}{3}\cdot x^2-\frac{10}{3}\cdot x-50 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} (3x+5)\cdot(x^2-x+3)-(2x+5)\cdot(x^2-x+3) &= (3x+5-2x-5)\cdot(x^2-x+3) \\ &= x\cdot(x^2-x+3) \\ &= x^3-x^2+3x \end{aligned}$$

■

2. Potencia de un binomio. Fórmula de Newton

Ejercicio 17 Calcula

$$a)\ (3x-1)^3 \qquad b)\ \left(\sqrt{2}+\frac{3}{x}\right)^4 \qquad c)\ \left(2\sqrt{2}+3\sqrt{3}\right)^4 \qquad d)\ \left(\sqrt{2}x+\frac{x^2}{2}\right)^3$$

Solución: a) Mediante la fórmula de Newton, obtenemos

$$\begin{aligned} (3x-1)^3 &= \binom{3}{0}(3x)^3+\binom{3}{1}(3x)^2\cdot(-1)+\binom{3}{2}3x\cdot(-1)^2+\binom{3}{3}(-1)^3 \\ &= \binom{3}{0}\cdot 27x^3-\binom{3}{1}\cdot 9x^2+\binom{3}{2}\cdot 3x-\binom{3}{3} \end{aligned}$$

Ahora calcularemos los números combinatorios mediante el triángulo de Tartaglia

$$\begin{array}{ccccccc} & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \end{array}$$

Luego,

$$(3x-1)^3=27x^3-27x^2+9x-1$$

b) Mediante la fórmula de Newton, obtenemos

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{2}+\frac{3}{x}\right)^4 &= \binom{4}{0}(\sqrt{2})^4+\binom{4}{1}(\sqrt{2})^3\cdot\frac{3}{x}+\binom{4}{2}(\sqrt{2})^2\cdot\left(\frac{3}{x}\right)^2+\binom{4}{3}\sqrt{2}\cdot\left(\frac{3}{x}\right)^3+\binom{4}{4}\left(\frac{3}{x}\right)^4 \\ &= \binom{4}{0}\cdot 4+\binom{4}{1}\cdot\frac{6\sqrt{2}}{x}+\binom{4}{2}\cdot\frac{18}{x^2}+\binom{4}{3}\cdot\frac{27\sqrt{2}}{x^3}+\binom{4}{4}\cdot\frac{81}{x^4} \end{aligned}$$

Ahora calcularemos los números combinatorios mediante el triángulo de Tartaglia

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

Luego,

$$\left(\sqrt{2}+\frac{3}{x}\right)^4 = 4+\frac{24\sqrt{2}}{x}+\frac{108}{x^2}+\frac{108\sqrt{2}}{x^3}+\frac{81}{x^4}$$

c) Del mismo modo, obtenemos

$$\begin{aligned}\left(2\sqrt{2}+3\sqrt{3}\right)^4 &= \binom{4}{0}(2\sqrt{2})^4+\binom{4}{1}(2\sqrt{2})^3\cdot 3\sqrt{3}+\binom{4}{2}(2\sqrt{2})^2\cdot\left(3\sqrt{3}\right)^2+\binom{4}{3}2\sqrt{2}\cdot\left(3\sqrt{3}\right)^3+\binom{4}{4}\left(3\sqrt{3}\right)^4\\ &= 64+192\sqrt{6}+1296+648\sqrt{6}+729\\ &= 2089+840\sqrt{6}\end{aligned}$$

d) Del mismo modo, obtenemos

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{2}x+\frac{x^2}{2}\right)^3 &= \left[\left(\sqrt{2}+\frac{x}{2}\right)\cdot x\right]^3\\ &= x^3\cdot\left(\sqrt{2}+\frac{x}{2}\right)^3\\ &= x^3\cdot\left[\binom{3}{0}(\sqrt{2})^3+\binom{3}{1}(\sqrt{2})^2\cdot\frac{x}{2}+\binom{3}{2}\sqrt{2}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2+\binom{3}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^3\right]\\ &= x^3\cdot\left(2\sqrt{2}+3x+\frac{3\sqrt{2}}{4}x^2+\frac{1}{8}x^3\right)\\ &= 2\sqrt{2}\cdot x^3+3\cdot x^4+\frac{3\sqrt{2}}{4}\cdot x^5+\frac{1}{8}\cdot x^6\end{aligned}$$

■

Ejercicio 18 Calcula

a) $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}$
b) $\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+(-1)^{n-1}\cdot\binom{n}{n-1}+(-1)^n\cdot\binom{n}{n}$

Solución: a) Observa que se cumple

$$(1+1)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}$$

Luego,

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}=2^n$$

b) Del mismo modo, tenemos

$$(1-1)^n=\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+(-1)^{n-1}\cdot\binom{n}{n-1}+(-1)^n\cdot\binom{n}{n}$$

Luego,

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+(-1)^{n-1}\cdot\binom{n}{n-1}+(-1)^n\cdot\binom{n}{n}=0$$

■

Ejercicio 19 Del desarrollo de $\left(2x+\frac{1}{2}\right)^{15}$ calcula: (a) el término cuarto, (b) el término independiente, y (c) el coeficiente del término de lugar 14.
Solución: Recuerda que el término k-ésimo del desarrollo $(A+B)^n$ viene dado por

$$t_k=\binom{n}{k-1}\cdot A^{n-(k-1)}\cdot B^{k-1}$$

a)

$$\begin{aligned}
t_4 &= \binom{15}{4-1} \cdot (2x)^{15-(4-1)} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{4-1} \\
&= \binom{15}{3} \cdot 2^{12} \cdot x^{12} \cdot \frac{1}{2^3} \\
&= 455 \cdot 2^9 \cdot x^{12} \\
&= 232960 \cdot x^{12}
\end{aligned}$$

pues,

$$\binom{15}{3} = \frac{15!}{3! \cdot (15-3)!} = 455$$

b) El término independiente es aquel que no contiene x. Por tanto, como el término general viene dado por la expresión

$$t_k = \binom{15}{k-1} \cdot (2x)^{15-(k-1)} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

debe cumplirse

$$\begin{aligned}
15-(k-1) &= 0 \\
k &= 16
\end{aligned}$$

Como era de esperar, en este caso el término independiente es último término. Luego,

$$\begin{aligned}
t_{16} &= \binom{15}{15} \cdot (2x)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{15} \\
&= \frac{1}{2^{15}}
\end{aligned}$$

c) El término de lugar 14 vendrá dado por

$$\begin{aligned}
t_{14} &= \binom{15}{14-1} \cdot (2x)^{15-(14-1)} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{14-1} \\
&= \binom{15}{13} \cdot (2x)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{13} \\
&= \binom{15}{13} \cdot \frac{1}{2^{11}} \cdot x^2
\end{aligned}$$

y, por tanto, su coeficiente es

$$\binom{15}{13} \cdot \frac{1}{2^{11}} = \frac{105}{2048}$$

■

Ejercicio 20 De la potencia del binomio $\left(3x - \frac{1}{3x}\right)^6$ escribe el término general de su desarrollo por la fórmula de Newton. Halla el término tercero y el central.
Solución: El término k-ésimo del desarrollo $(A+B)^n$ viene dado por

$$t_k = \binom{n}{k-1} \cdot A^{n-(k-1)} \cdot B^{k-1}$$

Luego, en nuestro caso, es

$$\begin{aligned}
t_k &= \binom{6}{k-1} \cdot (3x)^{6-(k-1)} \cdot \left(-\frac{1}{3x}\right)^{k-1} \\
&= (-1)^{k-1} \cdot \binom{6}{k-1} \cdot (3x)^{7-k} \cdot \frac{1}{(3x)^{k-1}} \\
&= (-1)^{k-1} \cdot \binom{6}{k-1} \cdot (3x)^{8-2k}
\end{aligned}$$

Entonces, el término tercero es

$$\begin{aligned} t_3 &= (-1)^{3-1} \cdot \binom{6}{3-1} \cdot (3x)^{8-6} \\ &= \binom{6}{2} \cdot (3x)^2 \\ &= 135x^2 \end{aligned}$$

Puesto que el desarrollo contiene siete términos, el término central es el cuarto término. Por tanto,

$$\begin{aligned} t_4 &= (-1)^{4-1} \cdot \binom{6}{4-1} \cdot (3x)^{8-8} \\ &= -\binom{6}{3} \\ &= -20 \end{aligned}$$

■

Ejercicio 21 Del desarrollo de $(x-1)^{200}$ calcula: (a) el término de lugar 198, (b) el último término, y (c) el término en el que aparece x^{198}.
Solución: El término k-ésimo del desarrollo $(A+B)^n$ viene dado por

$$t_k = \binom{n}{k-1} \cdot A^{n-(k-1)} \cdot B^{k-1}$$

a) Entonces, el término de lugar 198 es

$$\begin{aligned} t_{198} &= \binom{200}{197} \cdot x^{200-197} \cdot (-1)^{197} \\ &= -\binom{200}{197} \cdot x^3 \end{aligned}$$

b) El último término es el de lugar 201 y, por tanto, tenemos

$$\begin{aligned} t_{201} &= \binom{200}{200} \cdot x^{200-200} \cdot (-1)^{200} \\ &= \binom{200}{200} = 1 \end{aligned}$$

c) Para calcular el término en el que aparece x^{198}, primero, calculamos el término general

$$t_k = \binom{200}{k-1} \cdot x^{200-(k-1)} \cdot (-1)^{k-1}$$

Entonces, se ha de cumplir que

$$\begin{aligned} 200-(k-1) &= 198 \\ k &= 3 \end{aligned}$$

Luego, el término pedido es

$$\begin{aligned} t_3 &= \binom{200}{2} \cdot x^{200-2} \cdot (-1)^2 \\ &= \binom{200}{2} \cdot x^{198} \end{aligned}$$

■

Ejercicio 22 Halla el término de lugar 16 en el desarrollo de $\left(\sqrt{3}-\sqrt[5]{3}\right)^{19}$, expresándolo del modo más sencillo posible.
Solución: El término k-ésimo del desarrollo $(A+B)^n$ viene dado por

$$t_k = \binom{n}{k-1} \cdot A^{n-(k-1)} \cdot B^{k-1}$$

Por tanto, en nuestro caso, obtenemos

$$\begin{aligned} t_{16} &= \binom{19}{15} \cdot \left(\sqrt{3}\right)^{19-15} \cdot \left(-\sqrt[5]{3}\right)^{15} \\ &= -\binom{19}{15} \cdot \left(\sqrt{3}\right)^{4} \cdot \left(\sqrt[5]{3}\right)^{15} \\ &= -\binom{19}{15} \cdot 3^2 \cdot 3^3 \\ &= -\binom{19}{15} \cdot 3^5 \end{aligned}$$

■

3. División de polinomios. Algoritmo de Euclides

Ejercicio 23 Calcula el cociente y el resto de las siguientes divisiones

a) $(3x^2+2x-7) : (x^2+3)$
b) $(x^3+5x-6) : (2x+3)$
c) $(4x^4-1) : (3x^2+5x+3)$
d) $\left(\frac{3}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-7\right) : (x^2+x-1)$
e) $(x^5-1) : (x+1)$

Solución: a) Observa que

$$\begin{array}{rrrrr|l} 3x^2 & + & 2x & - & 7 & x^2 + 3 \\ \cline{6-6} -3x^2 & & & - & 9 & 3 \\ \cline{1-5} \diagup & & 2x & - & 16 & \end{array}$$

y, por tanto, el cociente es 3, y el resto, $2x-16$.
b) Del mismo modo,

$$\begin{array}{rrrrrrr|l} x^3 & + & 0x^2 & + & 5x & - & 6 & 2x + 3 \\ \cline{8-8} -x^3 & - & \frac{3}{2}x^2 & & & & & \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{29}{8} \\ \cline{1-5} \diagup & - & \frac{3}{2}x^2 & + & 5x & & & \\ & & \frac{3}{2}x^2 & + & \frac{9}{4}x & & & \\ \cline{3-7} & & \diagup & & \frac{29}{4}x & - & 6 & \\ & & & & -\frac{29}{4}x & - & \frac{87}{8} & \\ \cline{5-7} & & & & \diagup & - & \frac{135}{8} & \end{array}$$

y, por tanto, el cociente es

$$\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}x + \frac{29}{8}$$

y el resto, es $-135/8$.
c) Tenemos,

$$\begin{array}{rrrrrrrrr|l} 4x^4 & + & 0x^3 & + & 0x^2 & + & 0x & - & 1 & 3x^2 + 5x + 3 \\ \cline{10-10} -4x^4 & - & \frac{20}{3}x^3 & - & 4x^2 & & & & & \frac{4}{3}x^2 - \frac{20}{9}x + \frac{64}{27} \\ \cline{1-5} \diagup & - & \frac{20}{3}x^3 & - & 4x^2 & & & & & \\ & & \frac{20}{3}x^3 & + & \frac{100}{9}x^2 & + & \frac{20}{3}x & & & \\ \cline{3-7} & & \diagup & & \frac{64}{9}x^2 & + & \frac{20}{3}x & - & 1 & \\ & & & - & \frac{64}{9}x^2 & - & \frac{320}{27}x & - & \frac{64}{9} & \\ \cline{5-9} & & & & \diagup & - & \frac{140}{27}x & - & \frac{73}{9} & \end{array}$$

y, por tanto, el cociente es

$$\frac{4}{3}x^2 - \frac{20}{9}x + \frac{64}{27}$$

y el resto, es

$$-\frac{140}{27}x - \frac{73}{9}$$

d) Tenemos

$$\begin{array}{rrrrr|l}
\frac{3}{4}x^4 & -\frac{1}{3}x^3 & +0x^2 & +0x & -7 & x^2+x-1 \\ \cline{6-6}
-\frac{3}{4}x^4 & -\frac{3}{4}x^3 & +\frac{3}{4}x^2 & & & \frac{3}{4}x^2-\frac{13}{12}x+\frac{11}{6} \\ \cline{1-3}
\diagup & -\frac{13}{12}x^3 & +\frac{3}{4}x^2 & & & \\
 & \frac{13}{12}x^3 & +\frac{13}{12}x^2 & -\frac{13}{12}x & & \\ \cline{2-4}
 & \diagup & \frac{11}{6}x^2 & -\frac{13}{12}x & -7 & \\
 & & -\frac{11}{6}x^2 & -\frac{11}{6}x & +\frac{11}{6} & \\ \cline{3-5}
 & & \diagup & -\frac{35}{12}x & -\frac{31}{6} &
\end{array}$$

y, por tanto, el cociente es

$$\frac{3}{4}x^2 - \frac{13}{12}x + \frac{11}{6}$$

y el resto,

$$-\frac{35}{12}x - \frac{31}{6}$$

e) Tenemos

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
x^5 & +0x^4 & +0x^3 & +0x^2 & +0x & -1 & x+1 \\ \cline{7-7}
-x^5 & -x^4 & & & & & x^4-x^3+x^2-x+1 \\ \cline{1-2}
\diagup & -x^4 & & & & & \\
 & x^4 & +x^3 & & & & \\ \cline{2-3}
 & \diagup & x^3 & & & & \\
 & & -x^3 & -x^2 & & & \\ \cline{3-4}
 & & \diagup & -x^2 & & & \\
 & & & x^2 & +x & & \\ \cline{4-5}
 & & & \diagup & x & -1 & \\
 & & & & -x & -1 & \\ \cline{5-6}
 & & & & \diagup & -2 &
\end{array}$$

y, por tanto, el cociente es

$$x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$$

y el resto, -2. ■

Ejercicio 24 Halla un polinomio de tercer grado que dividido por $x+1$ dé de cociente x^2+3 y resto -2.

Solución: Si $p(x)$ es el polinomio que dividido por $x+1$ da como cociente x^2+3 y como resto -2, entonces se ha de cumplir la siguiente condición:

$$\begin{array}{rcl}
p(x) & = & (x+1)\cdot(x^2+3)-2 \\
 & = & x^3+3x+x^2+3-2 \\
 & = & x^3+x^2+3x+1
\end{array}$$

■

Ejercicio 25 Averiguar si las siguientes divisiones son o no exactas:

a) $(x^2+2x+1):(x+1)$
b) $(x^3-3x^2+x-3):(x^2+1)$
c) $\left(x^3+2x^2+\frac{15}{4}x+\frac{9}{4}\right):\left(x^2+\frac{1}{2}x+3\right)$

Solución: Un método para averiguar si la división es exacta o no es efectuarla y ver si el resto es cero o no. Sin embargo, aquí no procederemos así y, en su lugar, utilizaremos otras alternativas más sencillas.

a) Es evidente que la división de x^2+2x+1 por $x+1$ es exacta, pues, x^2+2x+1 es un múltiplo de $x+1$ al cumplirse

$$x^2+2x+1=(x+1)^2=(x+1)\cdot(x+1)$$

b) Si la división de x^3-3x^2+x-3 por x^2+1 fuera exacta, existiría un polinomio de primer grado (cociente) $c(x)=ax+b$ tal que

$$\begin{aligned} x^3-3x^2+x-3 &= (x^2+1)(ax+b) \\ &= ax^3+bx^2+ax+b \end{aligned}$$

y, por tanto, debería cumplirse

$$a=1 \quad \text{y} \quad b=-3$$

Al existir tales coeficientes, podemos asegurar que la división es exacta y, además, se cumple

$$x^3-3x^2+x-3=(x^2+1)\cdot(x-3)$$

c) Análogamente, si la división de

$$x^3+2x^2+\frac{15}{4}x+\frac{9}{4}$$

por

$$x^2+\frac{1}{2}x+3$$

fuera exacta, existiría un polinomio de primer grado (cociente) $c(x)=ax+b$ tal que

$$\begin{aligned} x^3+2x^2+\frac{15}{4}x+\frac{9}{4} &= \left(x^2+\frac{1}{2}x+3\right)\cdot(ax+b) \\ &= ax^3+\frac{1}{2}x^2+3ax+bx^2+\frac{b}{2}x+3b \\ &= ax^3+\left(\frac{1}{2}+b\right)x^2+\left(3a+\frac{b}{2}\right)x+3b \end{aligned}$$

y, por tanto, deberían cumplirse simultáneamente las siguientes ecuaciones

$$\begin{gathered} a=1 \\ \tfrac{1}{2}+b=2 \\ 3a+\tfrac{b}{2}=\tfrac{15}{4} \\ 3b=\tfrac{9}{4} \end{gathered}$$

Ahora bien, la segunda y la cuarta son incompatibles, pues, de la segunda se deduce $b=3/2$ y, de la cuarta, $b=3/4$, resultando dos valores distintos para b. Por consiguiente, la división en este caso no es exacta. ■

Ejercicio 26 Calcula a para que x^3-3x^2+x-a sea divisible por x^2+1.
Solución: Si x^3-3x^2+x-a es divisible por x^2+1 significa que la división de x^3-3x^2+x-a por x^2+1 es exacta y, en consecuencia, existe un polinomio de primer grado (cociente) $c(x)=mx+n$ tal que

$$\begin{aligned} x^3-3x^2+x-a &= (x^2+1)\cdot(mx+n) \\ &= mx^3+nx^2+mx+n \end{aligned}$$

Luego, se han de satisfacer conjuntamente las siguientes condiciones

$$\begin{gathered} m=1 \\ n=-3 \\ n=-a \end{gathered}$$

y, por tanto, $a=3$. ■

Ejercicio 27 Dado el polinomio $3x^5 + 7x^2 - 5$, halla su polinomio mónico.
Solución: Recuerda que un polinomio se llama mónico si el coeficiente del monomio de mayor grado es igual a la unidad. Es claro que

$$3x^5 + 7x^2 - 5 = 3\left(x^5 + \frac{7}{3}x^2 - \frac{5}{3}\right)$$

y, por tanto,

$$x^5 + \frac{7}{3}x^2 - \frac{5}{3}$$

es el polinomio mónico de $3x^5 + 7x^2 - 5$. ■

Ejercicio 28 Utilizando el algoritmo de Euclides, calcula m.c.d. y m.c.m. de los polinomios $p(x)$ y $q(x)$, en los casos siguientes:

a) $p(x) = x^4 - 5x^2 + 6$ y $q(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3$
b) $p(x) = x^6 + x^4 - x^2 - 1$ y $q(x) = x^5 - x^4 - x + 1$
c) $p(x) = x^3 + \sqrt{2}x^2 + 3x + 3\sqrt{2}$ y $q(x) = x^2 + 2$

Solución: Recuerda que el algoritmo de Euclides consiste en hacer sucesivas divisiones, de manera que

$$\begin{aligned}
\text{m.c.d.}\,(p(x), q(x)) &= \text{m.c.d.}\,(q(x), r_1(x)) \\
&= \text{m.c.d.}\,(r_1(x), r_2(x)) \\
&\dots \\
&= \text{m.c.d.}\,(r_{n-1}(x), r_n(x)) \\
&= r^*_{n-1}(x)
\end{aligned}$$

siendo $r_n(x)$ un número real y $r^*_{n-1}(x)$ el polinomio mónico de $r_{n-1}(x)$. Una vez calculado el m.c.d., calcularemos m.c.m. mediante

$$\text{m.c.m.}\,(p(x), q(x)) = \frac{1}{a_n \cdot b_m} \frac{p(x) \cdot q(x)}{\text{m.c.d.}\,(p(x), q(x))}$$

a)

$$\begin{array}{ccccc|cccc|cc}
 & & & & & x & -1 & & & x & +1 \\ \cline{6-11}
x^4 & 0 & -5x^2 & 0 & +6 & x^3 & +x^2 & -3x & -3 & x^2 & -3 \\
-x^4 & -x^3 & +3x^2 & +3x & & -x^3 & & +3x & & & \\ \cline{1-4} \cline{6-8}
\diagup & -x^3 & -2x^2 & +3x & +6 & \diagup & x^2 & 0 & -3 & & \\
 & x^3 & x^2 & -3x & -3 & & -x^2 & & +3 & & \\ \cline{2-5} \cline{7-9}
 & \diagup & -x^2 & 0 & 3 & & \diagup & & \diagup & & \\
 & & x^2 & & -3 & & & & & &
\end{array}$$

Por tanto, tenemos

$$\begin{aligned}
\text{m.c.d.}\left(x^4 - 5x^2 + 6, x^3 + x^2 - 3x - 3\right) &= \text{m.c.d.}\left(x^3 + x^2 - 3x - 3, x^2 - 3\right) \\
&= \text{m.c.d.}\left(x^2 - 3, 0\right) \\
&= x^2 - 3
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\text{m.c.m.}\left(x^4 - 5x^2 + 6, x^3 + x^2 - 3x - 3\right) &= \frac{\left(x^4 - 5x^2 + 6\right) \cdot \left(x^3 + x^2 - 3x - 3\right)}{x^2 - 3} \\
&= x^5 - 5x^3 + x^4 - 5x^2 + 6x + 6
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{array}{ccccccc|cccccc|cc}
 & & & & & & & x & +1 & & & & & x & -1 \\ \cline{8-15}
x^6 & 0 & +x^4 & 0 & -x^2 & 0 & -1 & x^5 & -x^4 & 0 & 0 & -x & +1 & x^4 & -1 \\
-x^6 & +x^5 & & & +x^2 & -x & & -x^5 & & & & +x & & & \\ \cline{1-6} \cline{8-12}
\diagup & x^5 & +x^4 & 0 & & -x & -1 & \diagup & -x^4 & 0 & 0 & 0 & 1 & & \\
 & -x^5 & +x^4 & & & +x & -1 & & x^4 & & & & -1 & & \\ \cline{2-7} \cline{9-13}
 & \diagup & 2x^4 & 0 & 0 & 0 & -2 & & \diagup & & & & 0 & & \\
 & & x^4 & & & & -1 & & & & & & & &
\end{array}$$

Luego,

$$
\begin{aligned}
\text{m.c.d.}\left(x^6+x^4-x^2-1, x^5-x^4-x+1\right) &= \text{m.c.d.}\left(x^3+x^2-3x-3, x^5-x^4-x+1\right)\\
&= \text{m.c.d.}\left(x^5-x^4-x+1, x^4-1\right)\\
&= \text{m.c.d.}\left(x^4-1, 0\right)\\
&= x^4-1
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
\text{m.c.m.}\left(x^6+x^4-x^2-1, x^5-x^4-x+1\right) &= \frac{\left(x^6+x^4-x^2-1\right)\cdot\left(x^5-x^4-x+1\right)}{x^4-1}\\
&= x^7+x^5-x^6-x^4-x^3-x+x^2+1
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{array}{cccc|ccc|cc|cc}
 & & & & x & +\sqrt{2} & & x & -\sqrt{2} & x & +\sqrt{2}\\
\hline
x^3 & +\sqrt{2}x^2 & +3x & +3\sqrt{2} & x^2 & 0 & +2 & x & +\sqrt{2} & 1 & \\
-x^3 & & -2x & & -x^2 & -\sqrt{2}x & & -x & -\sqrt{2} & & \\
\diagup & \sqrt{2}x^2 & +x & +3\sqrt{2} & \diagup & -\sqrt{2}x & +2 & \diagup & 0 & & \\
 & -\sqrt{2}x^2 & & -2\sqrt{2} & & \sqrt{2}x & +2 & & & & \\
 & \diagup & x & +\sqrt{2} & & \diagup & 4 & & & & \\
 & & & & & & 1 & & & &
\end{array}
$$

Luego, tenemos

$$
\begin{aligned}
\text{m.c.d.}\left(x^3+\sqrt{2}x^2+3x+3\sqrt{2}, x^2+2\right) &= \text{m.c.d.}\left(x^2+2, x+\sqrt{2}\right)\\
&= \text{m.c.d.}\left(x+\sqrt{2}, 1\right)\\
&= 1
\end{aligned}
$$

Observa que los dos polinomios son primos entre sí y, por tanto,

$$
\begin{aligned}
\text{m.c.m.}\left(x^3+\sqrt{2}x^2+3x+3\sqrt{2}, x^2+2\right) &= \left(x^3+\sqrt{2}x^2+3x+3\sqrt{2}\right)\cdot\left(x^2+2\right)\\
&= x^5+5x^3+\sqrt{2}x^4+5\sqrt{2}x^2+6x+6\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

■

Ejercicio 29 Calcula a y b para que el polinomio m.c.d. de $p(x)=x^2+ax+b$ y $q(x)=x^2-9$ sea $x+3$. ¿Hay una única solución?
Solución: Según el enunciado, tenemos que

$$\text{m.c.d.}\left(x^2+ax+b, x^2-9\right)=x+3$$

Por tanto, x^2+ax+b y x^2-9 han de ser divisibles por $x+3$. Es claro que

$$x^2-9=(x+3)\cdot(x-3)$$

y, por tanto, debe verificarse

$$
\begin{aligned}
x^2+ax+b &= (x+3)\cdot(x+k)\\
&= x^2+(k+3)x+3k
\end{aligned}
$$

y, de aquí, se deduce que se han de cumplir las siguientes relaciones

$$
\begin{aligned}
k+3 &= a\\
3k &= b
\end{aligned}
$$

es decir,

$$3(a-3)=b$$

Por consiguiente, hay más de una solución. Por ejemplo, si hacemos $a=1$, entonces $b=-6$, y se cumple

$$\text{m.c.d.}\left(x^2+x-6, x^2-9\right)=x+3$$

■

Ejercicio 30 ¿Es divisible $p(x) = 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$ por $q(x) = x^3 + 1$? Calcula el m.c.d. y el m.c.m. de ambos polinomios.
Solución: Al ser $p(x)$ y $q(x)$ del mismo grado, es evidente que $p(x)$ no es divisible por $q(x)$. Por el algoritmo de Euclides, tenemos

$$
\begin{array}{rrrr|rrrr|rrr|rr}
 & & & & 2 & & & & x & -\frac{2}{3} & & x & -\frac{1}{3} \\ \cline{5-13}
2x^3 & +3x^2 & +2x & +1 & x^3 & 0 & 0 & 1 & x^2 & +\frac{2}{3}x & -\frac{1}{3} & x & +1 \\
-2x^3 & & & -2 & -x^3 & -\frac{2}{3}x^2 & +\frac{1}{3}x & & -x^2 & -x & & & \\ \cline{1-7} \cline{9-10}
\diagup & 3x^2 & +2x & -1 & \diagup & -\frac{2}{3}x^2 & +\frac{1}{3}x & 1 & \diagup & -\frac{1}{3}x & -\frac{1}{3} & & \\
 & x^2 & +\frac{2}{3}x & -\frac{1}{3} & & \frac{2}{3}x^2 & +\frac{4}{9}x & -\frac{2}{9} & & \frac{1}{3}x & +\frac{1}{3} & & \\ \cline{6-8} \cline{10-11}
 & & & & & \diagup & \frac{7}{9}x & +\frac{7}{9} & & \diagup & 0 & & \\
 & & & & & & x & +1 & & & & &
\end{array}
$$

Por tanto, tenemos

$$
\begin{aligned}
\text{m.c.d.}\left(2x^3 + 3x^2 + 2x + 1, x^3 + 1\right) &= \text{m.c.d.}\left(x^3 + 1, x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}\right) \\
&= \text{m.c.d.}\left(x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}, x + 1\right) \\
&= \text{m.c.d.}\,(x + 1, 0) \\
&= x + 1
\end{aligned}
$$

Por otra parte, tenemos

$$
\begin{aligned}
\text{m.c.m.}\left(2x^3 + 3x^2 + 2x + 1, x^3 + 1\right) &= \frac{1}{2}\frac{\left(2x^3 + 3x^2 + 2x + 1\right)\left(x^3 + 1\right)}{x + 1} \\
&= x^5 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

■

4. Regla de Ruffini y teorema del resto

Ejercicio 31 Utiliza la regla de Ruffini para determinar el cociente y el resto de las siguientes divisiones:

a) $(x^5 - x^3 - x - 1) : (x - 3)$
b) $(x^3 - 4) : \left(x - \frac{1}{2}\right)$
c) $(x^4 - 3) : (x - \sqrt{3})$
d) $(x^3 - 2x^2 + 5) : \left(x - \frac{1}{3}\right)$

Solución: a) Mediante la regla de Ruffini, tenemos

$$
\begin{array}{r|rrrrrr}
 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\
3 & & 3 & 9 & 24 & 72 & 213 \\ \hline
 & 1 & 3 & 8 & 24 & 71 & 212
\end{array}
$$

y, por tanto, el cociente es $c(x) = x^4 + 3x^3 + 8x^2 + 24x + 71$, y el resto, $r(x) = 212$.
b) Mediante la regla de Ruffini, tenemos

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 0 & 0 & -4 \\
\frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ \hline
 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{31}{8}
\end{array}
$$

y, por tanto, el cociente es $c(x) = x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$, y el resto, $r(x) = -\frac{31}{8}$.
c) Mediante la regla de Ruffini, tenemos

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & 0 & 0 & 0 & -3 \\
\sqrt{3} & & \sqrt{3} & 3 & 3\sqrt{3} & 9 \\ \hline
 & 1 & \sqrt{3} & 3 & 3\sqrt{3} & 6
\end{array}
$$

y, por tanto, el cociente es $c(x) = x^3 + \sqrt{3}x^2 + 3x + 3\sqrt{3}$, y el resto, $r(x) = 6$.

d) Mediante la regla de Ruffini, tenemos

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -2 & 0 & 5 \\ \frac{1}{3} & & \frac{1}{3} & -\frac{5}{9} & -\frac{5}{27} \\ \hline & 1 & -\frac{5}{3} & -\frac{5}{9} & \frac{130}{27} \end{array}$$

y, por tanto, el cociente es $c(x) = x^2 - \frac{5}{3}x - \frac{5}{9}$, y el resto, $r(x) = \frac{130}{27}$. ■

Ejercicio 32 Utiliza el teorema del resto para determinar el resto de cada una de las siguientes divisiones:

a) $(x^2 + x + 1) : \left(x - \frac{1}{3}\right)$
b) $(x^3 - 2x + \sqrt{2}) : (x - \sqrt{2})$
c) $\left(\frac{3}{4}x^5 + 8x - \frac{5}{7}\right) : \left(x + \frac{2}{3}\right)$
d) $(4x^4 + 5x^3 - 7x^2) : (x + 2)$

Solución: Recuerda que, según el teorema del resto, el valor numérico del polinomio $p(x)$ para $x = a$ coincide con el resto de dividir $p(x)$ por $x - a$.
a) Si hacemos $p(x) = x^2 + x + 1$, entonces el resto de la división por $x - \frac{1}{3}$ es

$$\begin{aligned} p\left(\frac{1}{3}\right) &= \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} + 1 \\ &= \frac{13}{9} \end{aligned}$$

b) Si hacemos $p(x) = x^3 - 2x + \sqrt{2}$, entonces el resto de la división por $x - \sqrt{2}$ es

$$\begin{aligned} p\left(\sqrt{2}\right) &= \left(\sqrt{2}\right)^3 - 2\sqrt{2} + \sqrt{2} \\ &= 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2} + \sqrt{2} \\ &= \sqrt{2} \end{aligned}$$

c) Si hacemos $p(x) = \frac{3}{4}x^5 + 8x - \frac{5}{7}$, entonces el resto de la división por $x + \frac{2}{3}$ es

$$\begin{aligned} p\left(-\frac{2}{3}\right) &= \frac{3}{4}\left(-\frac{2}{3}\right)^5 + 8\left(-\frac{2}{3}\right) - \frac{5}{7} \\ &= -\frac{8}{81} - \frac{16}{3} - \frac{5}{7} \\ &= -\frac{3485}{567} \end{aligned}$$

d) Si hacemos $p(x) = 4x^4 + 5x^3 - 7x^2$, entonces el resto de la división por $x + 2$ es

$$\begin{aligned} p(-2) &= 4\,(-2)^4 + 5\,(-2)^3 - 7\,(-2)^2 \\ &= 64 - 40 - 28 \\ &= -4 \end{aligned}$$

■

Ejercicio 33 Sin efectuar la división, averigua si los polinomios que siguen son divisibles por los que se indican

a) $x^4 - x^2 + 6$ y $x + \sqrt{3}$
b) $x^2 - x - 1$ y $x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
c) $x^6 - x^4 - x^2 - 1$ y $x - 1$

Solución: a) El polinomio $p(x) = x^4 - x^2 + 6$ será divisible por $x + \sqrt{3}$, si el resto de la división es cero. Aplicando el teorema del resto, tenemos

$$\begin{aligned} p\left(-\sqrt{3}\right) &= \left(-\sqrt{3}\right)^4 - \left(-\sqrt{3}\right)^2 + 6 \\ &= 9 - 3 + 6 \\ &= 12 \end{aligned}$$

y, como consecuencia, $p(x)$ no es divisible por $x+\sqrt{3}$.
b) El polinomio $p(x)=x^2-x-1$ será divisible por $x-\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, si el resto de la división es cero. Aplicando el teorema del resto, tenemos

$$\begin{aligned} p\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2-\frac{1+\sqrt{5}}{2}-1 \\ &= \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4}-\frac{1+\sqrt{5}}{2}-1 \\ &= \frac{6+2\sqrt{5}-2-2\sqrt{5}-4}{4} \\ &= 0 \end{aligned}$$

y, por tanto, el polinomio es divisible por $x-\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
c) El polinomio $p(x)=x^6-x^4-x^2-1$ será divisible por $x-1$, si el resto de la división es cero. Aplicando el teorema del resto, tenemos

$$\begin{aligned} p(1) &= 1^6-1^4-1^2-1 \\ &= -2 \end{aligned}$$

y, como consecuencia, $p(x)$ no es divisible por $x-1$. ■

Ejercicio 34 Escribe un polinomio de tercer grado que sea divisible por los polinomios $x-3+\frac{\sqrt{2}}{2}$ y $x-3-\frac{\sqrt{2}}{2}$.
Solución: Si el polinomio que buscamos $p(x)$ es divisible por $x-3+\frac{\sqrt{2}}{2}$, entonces

$$p(x)=\left(x-3+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot c_1(x)$$

donde $c_1(x)$ es un polinomio de segundo grado. Si, además, $p(x)$ es divisible por $x-3-\frac{\sqrt{2}}{2}$, entonces por el teorema del resto, obtenemos

$$c_1(x)=\left(x-3-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot c_2(x)$$

donde $c_2(x)$ es un polinomio de primer grado. Por lo tanto, se cumple

$$p(x)=\left(x-3+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\left(x-3-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot c_2(x)$$

Si ahora tomamos $c_2(x)=x$, obtenemos

$$p(x)=x^3-6x^2+\frac{17}{2}x$$

que cumple las condiciones del enunciado. ■

Ejercicio 35 Calcula los valores de a y b para que el polinomio $p(x)=x^4-5x^3+4x^2+ax-b$ sea divisible por los binomios $x-3$ y $x+1$.
Solución: Si $p(x)$ es divisible por $x-3$, entonces por el teorema del resto, obtenemos

$$p(3)=3^4-5\cdot 3^3+4\cdot 3^2+a\cdot 3-b=0$$

o sea,

$$\begin{aligned} 81-135+36+3a-b &= 0 \\ 3a-b &= 18 \end{aligned}$$

Si, además, $p(x)$ es divisible por $x+1$, entonces por el teorema del resto, obtenemos

$$p(-1)=(-1)^4-5(-1)^3+4(-1)^2+a(-1)-b=0$$

es decir,

$$\begin{aligned} 1+5+4-a-b &= 0 \\ -a-b &= -10 \\ a+b &= 10 \end{aligned}$$

En resumen, para que se cumplan las condiciones del enunciado se han de satisfacer conjuntamente las ecuaciones

$$\begin{aligned} 3a-b &= 18 \\ a+b &= 10 \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema, obtenemos $a = 7$ y $b = 3$. ■

Ejercicio 36 Halla el valor de a para que el polinomio $p(x) = x^3 + ax + 3$ dé de resto -4 al dividirlo por $x - 1$.
Solución: Recuerda que, según el teorema del resto, el valor numérico del polinomio $p(x)$ para $x = a$ coincide con el resto de dividir $p(x)$ por $x - a$. Por tanto, se ha de verificar que

$$p(1) = -4$$

es decir,

$$\begin{aligned} 1+a+3 &= -4 \\ a &= -8 \end{aligned}$$

■

Ejercicio 37 Se sabe que un polinomio $p(x)$ es divisible por $x+1$ y, además, el resto de la división de $p(x)$ por $x+2$ es 4. Calcula el resto que se obtiene al dividirlo por $(x+1)(x+2)$.
Solución: Si dividimos $p(x)$ por $(x+1)(x+2)$, según el algoritmo de la división, obtendremos un cociente $c(x)$ y un resto $r(x)$ de manera que

$$p(x) = (x+1)(x+2) \cdot c(x) + r(x)$$

y grad $r(x) < 2$; de esta última condición obtenemos que $r(x)$ será un polinomio de primer grado, o sea de la forma $ax + b$. Utilizando ahora las condiciones del enunciado, por el teorema del resto, tenemos

$$p(-1) = (-1+1)(-1+2) \cdot c(-1) + r(-1) = 0$$

y

$$p(-2) = (-2+1)(-2+2) \cdot c(-2) + r(-2) = 4$$

Luego, se cumple

$$\begin{aligned} r(-1) &= -a+b = 0 \\ r(-2) &= -2a+b = 4 \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema, obtenemos que $a = b = -4$ y, por tanto, el resto es

$$r(x) = -4x - 4$$

■

Ejercicio 38 Halla el valor de a para que el polinomio $p(x) = x^4 - 2x^3 + ax^2 - 5x + 10$ sea divisible por $x + 2$.
Solución: Recuerda que, según el teorema del resto, el valor numérico del polinomio $p(x)$ para $x = a$ coincide con el resto de dividir $p(x)$ por $x - a$. Por tanto, se ha de verificar que

$$p(-2) = 0$$

es decir,

$$\begin{aligned} (-2)^4 - 2\,(-2)^3 + a\,(-2)^2 - 5\,(-2) + 10 &= 0 \\ 16 + 16 + 4a + 10 + 10 &= 0 \\ 4a &= -52 \\ a &= -13 \end{aligned}$$

■

Ejercicio 39 Halla a y b para que el polinomio $p(x) = x^2 + ax - b$ dé de resto 1 al dividirlo por $x - 1$, y resto 3 al dividirlo por $x - 3$.
Solución: Recuerda que, según el teorema del resto, el valor numérico del polinomio $p(x)$ para $x = a$ coincide con el resto de dividir $p(x)$ por $x - a$. Por tanto, se ha de verificar que

$$p(1) = 1$$

y

$$p(3) = 3$$

es decir, se han de satisfacer las dos ecuaciones siguientes

$$\begin{aligned} 1^2 + a \cdot 1 - b &= 1 \\ 3^2 + a \cdot 3 - b &= 3 \end{aligned}$$

Resolviendo este sistema, obtenemos $a = b = -3$. ■

5. Raíces y descomposición factorial de un polinomio

Ejercicio 40 Comprueba que los valores que se indican son raíces de los polinomios que se acompañan

a)	1	$p(x) = x^3 - 1$
b)	$1/2$	$q(x) = 16x^3 - 2x^2 + x - 2$
c)	$\sqrt{3}$	$r(x) = x^4 - 5x^2 + 6$

Solución: Recuerda que decimos que un número real a es una raíz de un polinomio $p(x)$ si $p(a) = 0$.
a) Tenemos

$$p(1) = 1^3 - 1 = 0$$

luego, 1 es raíz del polinomio.
b) Tenemos

$$\begin{aligned} q\left(\frac{1}{2}\right) &= 16\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} - 2 \\ &= 2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

luego, $1/2$ es raíz del polinomio.
c) Tenemos

$$\begin{aligned} r\left(\sqrt{3}\right) &= \left(\sqrt{3}\right)^4 - 5\left(\sqrt{3}\right)^2 + 6 \\ &= 9 - 15 + 6 \\ &= 0 \end{aligned}$$

luego, $\sqrt{3}$ es raíz del polinomio. ■

Ejercicio 41 Comprueba si son ciertas o falsas las afirmaciones siguientes: (a) 1 es una raíz doble del polinomio x^3+1, (b) $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ es una raíz simple del polinomio $4x^2-4x-1$, y (c) 2 es una raíz triple del polinomio $x^4-6x^3+12x^2-8x$.
Solución: a) Observamos que 1 no es raíz del polinomio $p(x)=x^3+1$, ya que $p(1)\neq 0$, y, por tanto, no es raíz doble.
b) Si hacemos $p(x)=4x^2-4x-1$, entonces tenemos

$$\begin{aligned} p\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right) &= 4\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)^2-4\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)-1 \\ &= 1+2\sqrt{2}+2-2-2\sqrt{2}-1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

luego, $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ es raíz de $p(x)$. Si ahora dividimo $p(x)$ por $x-\frac{1+\sqrt{2}}{2}$, obtenemos

$$4x^2-4x-1=\left(x-\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)\left(4x-2+2\sqrt{2}\right)$$

y si hacemos $c(x)=4x-2+2\sqrt{2}$, entonces

$$\begin{aligned} c\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right) &= 4\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)-2+2\sqrt{2} \\ &= 2+2\sqrt{2}-2+2\sqrt{2} \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

y, por tanto, $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ es raíz simple de $p(x)$.
c) Si hacemos $p(x)=x^4-6x^3+12x^2-8x$, entonces tenemos

$$\begin{aligned} p(2) &= 2^4-6\cdot 2^3+12\cdot 2^2-8\cdot 2 \\ &= 16-48+48-16 \\ &= 0 \end{aligned}$$

y, por tanto, 2 es raíz de $p(x)$. Observamos que

$$p(x)=x\cdot\left(x^3-6x^2+12x-8\right)$$

y ahora, mediante la regla de Ruffini, tenemos

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -6 & 12 & -8 \\ 2 & & 2 & -8 & 8 \\ \hline & 1 & -4 & 4 & 0 \\ 2 & & 2 & -4 & \\ \hline & 1 & -2 & 0 & \\ 2 & & 2 & & \\ \hline & 1 & 0 & & \end{array}$$

y, por tanto, deducimos que 2 es raíz triple del polinomio. ∎

Ejercicio 42 Halla la multiplicidad de la raíz 2 para el polinomio $p(x)=x^4-8x^3+24x^2-32x+16$.
Solución: Mediante la regla de Ruffini, obtenemos

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -8 & 24 & -32 & 16 \\ 2 & & 2 & -12 & 24 & -16 \\ \hline & 1 & -6 & 12 & -8 & 0 \\ 2 & & 2 & -8 & 8 & \\ \hline & 1 & -4 & 4 & 0 & \\ 2 & & 2 & -4 & & \\ \hline & 1 & -2 & 0 & & \\ 2 & & 2 & & & \\ \hline & 1 & 0 & & & \end{array}$$

y, por tanto, 2 es una raíz múltiple de orden 4. Observa que se cumple

$$x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16 = (x-2)^4$$

■

Ejercicio 43 Calcula las raíces enteras del polinomio $p(x) = x^5 - 2x^4 - 6x^3 - 6x^2 - 7x - 4$. ¿Cuáles son sus multiplicidades? ¿Tiene $p(x)$ alguna raíz real que no sea entera?
Solución: Puesto que el polinomio $p(x)$ tiene todos sus coeficientes enteros, las raíces enteras se obtendrán de los divisores de su término independiente. Luego, las posibles raíces enteras son $\pm1, \pm2$ o ±4. Mediante la regla de Ruffini podemos ahora averiguar cuáles de ellas son efectivamente raíces del polinomio.

$$\begin{array}{r|rrrrrr}
 & 1 & -2 & -6 & -6 & -7 & -4 \\
-1 & & -1 & 3 & 3 & 3 & 4 \\
\hline
 & 1 & -3 & -3 & -3 & -4 & 0 \\
-1 & & -1 & 4 & -1 & 4 & \\
\hline
 & 1 & -4 & 1 & -4 & 0 & \\
4 & & 4 & 0 & 4 & & \\
\hline
 & 1 & 0 & 1 & & &
\end{array}$$

Por tanto, las raíces enteras de $p(x)$ son -1 y 4; además, -1 es raíz doble de $p(x)$. De este modo, hemos obtenido la siguiente descomposición factorial del polinomio

$$p(x) = (x+1)^2 \cdot (x-4) \cdot (x^2+1)$$

Observa que $x^2 + 1$ no tiene raíces, pues, no hay ningún número real que su cuadrado sumado con 1 dé como resultado cero. Luego, $p(x)$ no tiene ninguna raíz real que no sea entera. ■

Ejercicio 44 Escribe un polinomio de tercer grado que tenga -2 como raíz múltiple de orden dos.
Solución: Si el polinomio $p(x)$ ha de tener a -2 como raíz de multiplicidad 2, su descomposición factorial contendrá el factor $(x+2)^2$. Si ahora hacemos que también tenga, por ejemplo, la raíz 0, entonces

$$\begin{aligned} p(x) &= (x+2)^2 \cdot x \\ &= x^3 + 4x^2 + 4x \end{aligned}$$

Por tanto, $x^3 + 4x^2 + 4x$ es un polinomio de tercer grado que tiene -2 como raíz doble. ■

Ejercicio 45 Calcula el valor que ha de tener a para que el polinomio $p(x) = x^3 - 3x + a$ tenga la raíz 1.
Solución: Recuerda que decimos que un número real a es una raíz de un polinomio $p(x)$ si $p(a) = 0$. Luego, se ha de cumplir que

$$p(1) = 0$$

es decir,

$$\begin{aligned} 1^3 - 3 \cdot 1 + a &= 0 \\ a &= 2 \end{aligned}$$

■

Ejercicio 46 Indica las raíces del polinomio $p(x) = (x-1)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$.
Solución: Como el polinomio $p(x)$ viene descompuesto en factores lineales, obtenemos en seguida sus raíces. Sus raíces son 1, $-\sqrt{2}$ y $\sqrt{2}$. ■

Ejercicio 47 Halla un polinomio de segundo grado que tenga por raíces $\sqrt{3}$ y $-\sqrt{2}$.
Solución: Si el polinomio $p(x)$ que buscamos es de segundo grado y tiene raíces $\sqrt{3}$ y $-\sqrt{2}$, entonces $p(x)$ admitirá la siguiente descomposición en factores lineales

$$\begin{aligned} p(x) &= \left(x - \sqrt{3}\right) \cdot \left(x + \sqrt{2}\right) \\ &= x^2 + \left(\sqrt{2} - \sqrt{3}\right) x - \sqrt{6} \end{aligned}$$

■

Ejercicio 48 Calcula la descomposición factorial de los siguientes polinomios:

a) $(x-1)^2-(x-1)(x+1)$
b) $(x-1)(x^2-4)$
c) x^4+2x^3-2x-1
d) x^3-1
e) $3x^4-27x^3+39x^2+27x-42$

Solución: a) Tenemos,

$$\begin{aligned}(x-1)^2-(x-1)\cdot(x+1) &= (x-1)\cdot(x-1-x-1)\\ &= -2\cdot(x-1)\end{aligned}$$

en donde hemos sacado factor común para obtener la descomposición.
b) Tenemos,

$$(x-1)(x^2-4)=(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x+2)$$

pues, sabemos que $x^2-4=(x-2)\cdot(x+2)$.
c) Mediante la regla de Ruffini, obtenemos

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 2 & 0 & -2 & -1 \\ 1 & & 1 & 3 & 3 & 1 \\ \hline & 1 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & & -1 & -2 & -1 & \\ \hline & 1 & 2 & 1 & 0 & \\ -1 & & -1 & -1 & & \\ \hline & 1 & 1 & 0 & & \\ -1 & & -1 & & & \\ \hline & 1 & 0 & & & \end{array}$$

Por tanto, tenemos la siguiente descomposición factorial

$$x^4+2x^3-2x-1=(x-1)\cdot(x+1)^3$$

d) Mediante la regla de Ruffini, obtenemos

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

Por tanto, tenemos

$$x^3-1=(x-1)\cdot(x^2+x+1)$$

Ahora bien x^2+x+1 no admite raíces reales, pues, de lo contrario, la ecuación de segundo grado siguiente

$$x^2+x+1=0$$

tendría soluciones y esto no es posible porque

$$b^2-4ac=1-4<0$$

En resumen, la descomposición factorial del polinomio es

$$x^3-1=(x-1)\cdot(x^2+x+1)$$

e) Observa primero que se cumple

$$3x^4-27x^3+39x^2+27x-42=3\cdot\left(x^4-9x^3+13x^2+9x-14\right)$$

Ahora, mediante la regla de Ruffini, obtenemos

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -9 & 13 & 9 & -14 \\ 1 & & 1 & -8 & 5 & 14 \\ \hline & 1 & -8 & 5 & 14 & 0 \\ -1 & & -1 & 9 & -14 & \\ \hline & 1 & -9 & 14 & 0 & \\ 2 & & 2 & -14 & & \\ \hline & 1 & -7 & 0 & & \\ 7 & & 7 & & & \\ \hline & 1 & 0 & & & \end{array}$$

Por tanto, tenemos

$$3x^4 - 27x^3 + 39x^2 + 27x - 42 = 3 \cdot (x-1) \cdot (x+1) \cdot (x-2) \cdot (x-7)$$

■

Ejercicio 49 Halla el m.c.d. y m.c.m. de $p(x)$ y $q(x)$ en los casos siguientes:

a) $p(x) = (x-1)^2(x-2)$ y $q(x) = (x+1)(x+2)^2$
b) $p(x) = (x-\sqrt{2})^2(x+3)$ y $q(x) = (x-\sqrt{2})^3(x+\sqrt{2})$
c) $p(x) = x^6 - 1$ y $q(x) = x^3 - x$
d) $p(x) = 3x^4 - 14x^3 + 20x^2 - 11x + 2$ y $q(x) = 3x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 10x - 4$

Solución: Recuerda que el máximo común divisor se obtendrá multiplicando los factores irreducibles comunes elevados al exponente más pequeño que figure en las dos descomposiciones, y el mínimo común múltiplo se obtendrá multiplicando los factores irreducibles comunes y no comunes elevados al exponente más grande que figure en ambas descomposiciones.
a) Puesto que los dos polinomios vienen dados por sus descomposiciones factoriales, tenemos en seguida que

$$\text{m.c.d.}\,(p(x), q(x)) = 1$$

y

$$\text{m.c.m.}\,(p(x), q(x)) = (x-1)^2 \cdot (x-2) \cdot (x+1) \cdot (x+2)^2$$

b) Por la misma razón, tenemos que

$$\text{m.c.d.}\,(p(x), q(x)) = (x-\sqrt{2})^2$$

y

$$\text{m.c.m.}\,(p(x), q(x)) = (x-\sqrt{2})^3 \cdot (x+3) \cdot (x+\sqrt{2})$$

c) En este caso, debemos primero calcular las descomposiciones de los dos polinomios. Por la regla de Ruffini, obtenemos

$$\begin{array}{r|rrrrrrr}
 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
1 & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
\hline
 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
-1 & & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & \\
\hline
 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 &
\end{array}$$

y, por tanto,

$$x^6 - 1 = (x-1) \cdot (x+1) \cdot (x^4 + x^2 + 1)$$

Observa que el factor $x^4 + x^2 + 1$ es irreducible, pues, si no lo fuera, la ecuación (bicuadrada)

$$x^4 + x^2 + 1 = 0$$

admitiría soluciones, pero, si hacemos el cambio $x^2 = t$, entonces obtenemos la ecuación de segundo grado

$$t^2 + t + 1 = 0$$

que no tiene soluciones reales, pues,

$$b^2 - 4ac = 1 - 4 < 0$$

Por otra parte, tenemos

$$x^3 - x = x \cdot (x^2 - 1) = x \cdot (x-1) \cdot (x+1)$$

Por consiguiente, tenemos

$$\begin{aligned}
p(x) &= (x-1) \cdot (x+1) \cdot (x^4 + x^2 + 1) \\
q(x) &= x \cdot (x-1) \cdot (x+1)
\end{aligned}$$

y, por tanto,

$$\text{m.c.d.}\,(p(x), q(x)) = (x-1) \cdot (x+1)$$

y

$$\text{m.c.m.}\,(p(x), q(x)) = x \cdot (x-1) \cdot (x+1) \cdot (x^4 + x^2 + 1)$$

d) Calcularemos primero la descomposición factorial de $p(x) = 3x^4 - 14x^3 + 20x^2 - 11x + 2$. Como todos sus coeficientes son números enteros, las raíces enteras de este polinomio se obtendrán a partir de los divisores del término independiente. En este caso, los posibles candidatos son ± 1 y ± 2. Mediante la regla de Ruffini, observamos que sólo 1 es raíz entera de $p(x)$, pues,

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 3 & -14 & 20 & -11 & 2 \\ 1 & & 3 & -11 & 9 & -2 \\ \hline & 3 & -11 & 9 & -2 & 0 \end{array}$$

De aquí, obtenemos

$$p(x) = (x-1) \cdot (3x^3 - 11x^2 + 9x - 2)$$

Las otras posibles raíces, pertenecientes al polinomio $3x^3 - 11x^2 + 9x - 2$, serán números reales que no son números enteros. Debido a la dificultad de calcularlas, al ser el polinomio aún de tercer grado, vemos que para calcular el m.c.d. de estos dos polinomios será más conveniente usar el algoritmo de Euclides. Así, tenemos

					1					x	$+1$			$3x$	-3	
$3x^4$	$-14x^3$	$+20x^2$	$-11x$	$+2$	$3x^4$	$-5x^3$	$-4x^2$	$+10x$	-4	$3x^3$	$-8x^2$	$+7x$	-2	x^2	$-\frac{5}{3}x$	$+\frac{2}{3}$
$-3x^4$	$+5x^3$	$+4x^2$	$-10x$	$+4$	$-3x^4$	$+8x^3$	$-7x^2$	$+2x$		$-3x^3$	$+5x^2$	$-2x$				
/	$-9x^3$	$+24x^2$	$-21x$	$+6$	/	$3x^3$	$-11x^2$	$12x$	-4	/	$-3x^2$	$+5x$	-2			
	$3x^3$	$-8x^2$	$+7x$	-2		$-3x^3$	$+8x^2$	$-7x$	$+2$		$+3x^2$	$-5x$	$+2$			
						/	$-3x^2$	$+5x$	-2		/	0	0			
							x^2	$-\frac{5}{3}x$	$+\frac{2}{3}$							

Por tanto, tenemos

$$\begin{aligned} \text{m.c.d.}\,(p(x), q(x)) &= \text{m.c.d.}\,\big(3x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 10x - 4, 3x^3 - 8x^2 + 7x - 2\big) \\ &= \text{m.c.d.}\left(3x^3 - 8x^2 + 7x - 2, x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{2}{3}\right) \\ &= \text{m.c.d.}\left(x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{2}{3}, 0\right) \\ &= x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

y, entonces, obtenemos

$$\begin{aligned} \text{m.c.m.}\,(p(x), q(x)) &= \frac{1}{3 \cdot 3} \cdot \frac{\big(3x^4 - 14x^3 + 20x^2 - 11x + 2\big) \cdot \big(3x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 10x - 4\big)}{x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{2}{3}} \\ &= x^6 - \frac{14}{3}x^5 + \frac{14}{3}x^4 + \frac{17}{3}x^3 - \frac{38}{3}x^2 + \frac{22}{3}x - \frac{4}{3} \end{aligned}$$

■

Ejercicio 50 Dos polinomios se llaman primos entre sí cuando su m.c.d. es 1, es decir, cuando el único divisor común es el polinomio unidad. Indica cuáles de las siguientes parejas de polinomios son primos entre sí

a) $p(x) = x^2 - 2x + 1$ y $q(x) = x^2 + 2x + 1$
b) $p(x) = x^3 - 3x^2$ y $q(x) = x^3 + 3x^2$
c) $p(x) = x^2 + x + 1$ y $q(x) = x^2 - x - 1$

Solución: a) Puesto que

$$x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$$

y

$$x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$$

entonces,

$$\text{m.c.d.}\,(p(x), q(x)) = 1$$

y los dos polinomios son primos entre sí.
b) Puesto que

$$x^3 - 3x^2 = x^2 \cdot (x-3)$$

y

$$x^3 + 3x^2 = x^2 \cdot (x+3)$$

entonces,

$$\text{m.c.d.}\,(p(x), q(x)) = x^2$$

y los dos polinomios no son primos entre sí.
c) Puesto que $p(x)$ es irreducible y grad $q(x) = 2$, es claro que los dos polinomios son primos entre sí. ■

Ejercicio 51 Resuelve las siguientes ecuaciones polinómicas

$$\begin{array}{l} a)\ x^3 + 21x^2 + 98x - 120 = 0 \\ b)\ x^3 - 14x^2 + 63x - 90 = 0 \end{array}$$

Solución: Observa que buscar las soluciones reales de la ecuación

$$p(x) = 0$$

es equivalente, por definición, a encontrar las raíces del polinomio $p(x)$.
a) Como todos los coeficientes del polinomio son números enteros, las raíces enteras se encontrarán entre los divisores del término independiente. Probaremos dichos divisores mediante la regla de Ruffini,

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 21 & 98 & -120 \\ 1 & & 1 & 22 & 120 \\ \hline & 1 & 22 & 120 & 0 \end{array}$$

De aquí, obtenemos

$$x^3 + 21x^2 + 98x - 120 = (x-1) \cdot (x^2 + 22x + 120)$$

Podríamos continuar buscando más raíces por Ruffini, pero será más sencillo proceder de otro manera. Observa que la ecuación inicial puede ahora escribirse como sigue

$$(x-1) \cdot (x^2 + 22x + 120) = 0$$

y, por tanto, las soluciones de la ecuación son

$$x - 1 = 0 \implies x = 1$$

y las otras soluciones se obtendrán de la siguiente ecuación de segundo grado

$$x^2 + 22x + 120 = 0$$

que, resolviéndola, obtenemos $x = -10$ o $x = -12$. Por consiguiente, las soluciones de la ecuación

$$x^3 + 21x^2 + 98x - 120 = 0$$

son 1, -10 y -12.
b) Procederemos del mismo modo, primero, mediante la regla de Ruffini, obtenemos

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -14 & 63 & -90 \\ 3 & & 3 & -33 & 90 \\ \hline & 1 & -11 & 30 & 0 \end{array}$$

Por tanto, la ecuación original puede escribirse como sigue

$$(x-3) \cdot (x^2 - 11x + 30) = 0$$

Las soluciones de esta ecuación son

$$x - 3 = 0 \implies x = 3$$

y las que se obtienen de la siguiente ecuación de segundo grado

$$x^2 - 11x + 30 = 0$$

cuyas soluciones son 5 y 6. Por consiguiente, las soluciones de la ecuación

$$x^3 - 14x^2 + 63x - 90 = 0$$

son 3, 5 y 6. ∎

6. El cuerpo de las fracciones racionales

Ejercicio 52 Indica si son o no equivalentes las siguientes parejas de fracciones algebraicas:

$$\begin{array}{lll} a) & \frac{x^2-1}{x^3-1} & \frac{x+1}{x^2+x+1} \\ b) & \frac{x^3+x^2+x+1}{x^2+1} & \frac{x^2+x}{x} \\ c) & \frac{1}{x} & \frac{x+1}{x^2+x} \end{array}$$

Solución: Recuerda que decimos que dos fracciones algebraicas

$$\frac{p(x)}{q(x)} \quad \text{y} \quad \frac{r(x)}{s(x)}$$

son equivalentes si y sólo si

$$p(x) \cdot s(x) = q(x) \cdot r(x)$$

a) Puesto que

$$\left(x^2 - 1\right) \cdot \left(x^2 + x + 1\right) = x^4 + x^3 - x - 1$$

y

$$\left(x^3 - 1\right) \cdot (x + 1) = x^4 + x^3 - x - 1$$

se tiene

$$\frac{x^2 - 1}{x^3 - 1} = \frac{x + 1}{x^2 + x + 1}$$

o sea, son equivalentes.
b) Puesto que

$$\left(x^3 + x^2 + x + 1\right) \cdot x = x^4 + x^4 + x^2 + x$$

y

$$\left(x^2 + 1\right) \cdot \left(x^2 + x\right) = x^4 + x^3 + x^2 + x$$

se tiene

$$\frac{x^3 + x^2 + x + 1}{x^2 + 1} = \frac{x^2 + x}{x}$$

c) Puesto que

$$1 \cdot \left(x^2 + x\right) = x \cdot (x + 1)$$

también se tiene

$$\frac{1}{x} = \frac{x + 1}{x^2 + x}$$

∎

Ejercicio 53 Escribir tres fracciones algebraicas pertenecientes a la fracción racional

$$\left\{\frac{x}{x + 3}\right\}$$

Solución: De la definición de equivalencia de fracciones algebraicas, es claro que se cumple

$$\begin{aligned} \frac{x}{x + 3} &= \frac{x^2}{x^2 + 3x} \\ &= \frac{x^2 - x}{x^2 + 2x - 3} \\ &= \frac{x^3 - x^2}{x^3 + 2x^2 - 3x} \end{aligned}$$

∎

Ejercicio 54 Simplificar las fracciones algebraicas siguientes:

a) $\frac{x+2}{x^2-4}$ *b)* $\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-2\sqrt{2}x+2}$ *c)* $\frac{x}{x^4-x}$

d) $\frac{2x^2-3x+1}{3x^3-3x^2+x-1}$ *e)* $\frac{(x+3)^2-(5x-4)^2}{36x^2-1}$ *f)* $\frac{x^2-1}{x^3-2x^2+x}$

Solución: Recuerda que simplificar una fracción algebraica es buscar la fracción irreducible equivalente.

a)

$$\begin{aligned}\frac{x+2}{x^2-4} &= \frac{x+2}{(x+2)(x-2)} \\ &= \frac{1}{x-2}\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\frac{x-\sqrt{2}}{x^2-2\sqrt{2}x+2} &= \frac{x-\sqrt{2}}{\left(x-\sqrt{2}\right)^2} \\ &= \frac{1}{x-\sqrt{2}}\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\frac{x}{x^4-x} &= \frac{x}{x(x^3-1)} \\ &= \frac{1}{x^3-1}\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}\frac{2x^2-3x+1}{3x^3-3x^2+x-1} &= \frac{(x-1)(2x-1)}{(x-1)(3x^2+1)} \\ &= \frac{2x-1}{3x^2+1}\end{aligned}$$

pues, por la regla de Ruffini, tenemos

$$\begin{array}{r|rrr} & 2 & -3 & 1 \\ 1 & & 2 & -1 \\ \hline & 2 & -1 & 0 \end{array}$$

y

$$\begin{array}{r|rrrr} & 3 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & & 3 & 0 & 1 \\ \hline & 3 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

e)

$$\begin{aligned}\frac{(x+3)^2-(5x-4)^2}{36x^2-1} &= \frac{(x+3+5x-4)\cdot(x+3-5x+4)}{(6x+1)(6x-1)} \\ &= \frac{(6x-1)(-4x+7)}{(6x+1)(6x-1)} \\ &= \frac{-4x+7}{6x+1}\end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned}\frac{x^2-1}{x^3-2x^2+x} &= \frac{(x+1)(x-1)}{x(x^2-2x+1)} \\ &= \frac{(x+1)(x-1)}{x(x-1)^2} \\ &= \frac{x+1}{x(x-1)}\end{aligned}$$

■

Ejercicio 55 Efectúa las siguientes operaciones indicadas

a) $\frac{1+x}{1-x}+x-\frac{x}{1-x^2}$
b) $3-\frac{1}{1+x}+\frac{x^2-1}{1-x}$
c) $\frac{x+1}{3}+\frac{x^2-1}{9(x+1)}+\frac{x+1}{6(x^2-1)}$
d) $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{x+1}$

Solución: a)

$$\begin{aligned}\frac{1+x}{1-x}+x-\frac{x}{1-x^2} &= \frac{(1+x)^2}{1-x^2}+\frac{x(1-x^2)}{1-x^2}-\frac{x}{1-x^2}\\ &= \frac{1+2x+x^2+x-x^3-x}{1-x^2}\\ &= \frac{1+2x+x^2-x^3}{1-x^2}\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}3-\frac{1}{1+x}+\frac{x^2-1}{1-x} &= \frac{3(1+x)(1-x)}{(1+x)(1-x)}-\frac{1-x}{(1+x)(1-x)}+\frac{(1+x)(x^2-1)}{(1+x)(1-x)}\\ &= \frac{3-3x^2-1+x+x^2-1+x^3-x}{(1+x)(1-x)}\\ &= \frac{x^3-2x^2+1}{(1+x)(1-x)}\\ &= -\frac{(1-x)(x^2-x-1)}{(1+x)(1-x)}\\ &= -\frac{x^2-x-1}{1+x}\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\frac{x+1}{3}+\frac{x^2-1}{9(x+1)}+\frac{x+1}{6(x^2-1)} &= \frac{6(x+1)^2(x-1)}{18(x^2-1)}+\frac{2(x-1)(x^2-1)}{18(x^2-1)}+\frac{3(x+1)}{18(x^2-1)}\\ &= \frac{-6+6x^2-6x+6x^3+2-2x^2-2x+2x^3+3x+3}{18(x^2-1)}\\ &= \frac{8x^3+4x^2-5x-1}{18(x^2-1)}\\ &= \frac{(x+1)(8x^2-4x-1)}{18(x+1)(x-1)}\\ &= \frac{8x^2-4x-1}{18(x-1)}\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x^2-1}-\frac{1}{x+1} &= \frac{x+1}{x^2-1}+\frac{1}{x^2-1}-\frac{x-1}{x^2-1}\\ &= \frac{x+1+1-x+1}{x^2-1}\\ &= \frac{3}{x^2-1}\end{aligned}$$

■

Ejercicio 56 Efectúa las siguientes operaciones, simplificando al máximo el resultado:

a) $\frac{1+x}{1-x}\cdot\frac{x}{1-x^2}$
b) $\frac{3x^2+1}{x^2+2x+1}\cdot\frac{x^2-1}{x+2}$
c) $\frac{x^2-4x+4}{x+1}\cdot\frac{x^2-1}{x-2}$
d) $\frac{8x}{x+1}\cdot\frac{3x}{x-1}\cdot\frac{x^2-1}{x^2+1}$

Solución: a)

$$\begin{aligned}
\frac{1+x}{1-x}\cdot\frac{x}{1-x^2} &= \frac{x(1+x)}{(1-x)^2(1+x)}\\
&= \frac{x}{(1-x)^2}\\
&= \frac{x}{1-2x+x^2}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\frac{3x^2+1}{x^2+2x+1}\cdot\frac{x^2-1}{x+2} &= \frac{(3x^2+1)(x+1)(x-1)}{(x+1)^2(x+2)}\\
&= \frac{(3x^2+1)(x-1)}{(x+1)(x+2)}\\
&= \frac{3x^3-3x^2+x-1}{x^2+3x+2}
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
\frac{x^2-4x+4}{x+1}\cdot\frac{x^2-1}{x-2} &= \frac{(x-2)^2(x+1)(x-1)}{(x+1)(x-2)}\\
&= \frac{(x-2)(x-1)}{1}\\
&= x^2-3x+2
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
\frac{8x}{x+1}\cdot\frac{3x}{x-1}\cdot\frac{x^2-1}{x^2+1} &= \frac{8x}{x+1}\cdot\left(\frac{3x}{x-1}\cdot\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)\\
&= \frac{8x}{x+1}\cdot\frac{3x(x+1)(x-1)}{(x-1)(x^2+1)}\\
&= \frac{8x}{x+1}\cdot\frac{3x(x+1)}{x^2+1}\\
&= \frac{24x^2(x+1)}{(x+1)(x^2+1)}\\
&= \frac{24x^2}{x^2+1}
\end{aligned}$$

■

Ejercicio 57 Efectúa las siguientes operaciones, simplificando al máximo el resultado:

a) $\frac{x^2}{x+1} : \frac{3x^2+1}{x^2+2x+1}$

b) $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}\right) : \frac{x^2+x}{x^3-1}$

c) $\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{x^2}{x+1}-\frac{x^3}{x-1}\right)$

d) $\frac{a(x+1)}{b} : \left(\frac{a+b}{x+1}-\frac{a-b}{bx+b}\right)$

Solución: a)

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{x+1} : \frac{3x^2+1}{x^2+2x+1} &= \frac{x^2}{x+1}\cdot\frac{x^2+2x+1}{3x^2+1}\\
&= \frac{x^2(x+1)^2}{(x+1)(3x^2+1)}\\
&= \frac{x^2(x+1)}{3x^2+1}\\
&= \frac{x^3+x^2}{3x^2+1}
\end{aligned}$$

b)

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}\right) \quad : \quad \frac{x^2+x}{x^3-1} &= \left(\frac{x+1}{x(x+1)}+\frac{x}{x(x+1)}\right):\frac{x^2+x}{x^3-1}\\
&= \frac{x+1+x}{x(x+1)}:\frac{x^2+x}{x^3-1}\\
&= \frac{2x+1}{x(x+1)}\cdot\frac{x^3-1}{x^2+x}\\
&= \frac{(2x+1)(x^3-1)}{x^2(x+1)^2}\\
&= \frac{2x^4+x^3-2x-1}{x^4+2x^3+x^2}
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{x^2}{x+1}-\frac{x^3}{x-1}\right) &= \frac{1}{x}\cdot\left[\frac{x^2(x-1)}{(x+1)(x-1)}-\frac{x^3(x+1)}{(x+1)(x-1)}\right]\\
&= \frac{1}{x}\cdot\frac{x^2(x-1-x^2-x)}{x^2-1}\\
&= \frac{x^2(-1-x^2)}{x(x^2-1)}\\
&= -\frac{x+x^3}{x^2-1}
\end{aligned}
$$

d)

$$
\begin{aligned}
\frac{a(x+1)}{b} \quad : \quad \left(\frac{a+b}{x+1}-\frac{a-b}{bx+b}\right) &= \frac{a(x+1)}{b}:\left[\frac{b(a+b)}{b(x+1)}-\frac{a-b}{b(x+1)}\right]\\
&= \frac{a(x+1)}{b}:\frac{b(a+b)-a+b}{b(x+1)}\\
&= \frac{a(x+1)}{b}\cdot\frac{b(x+1)}{b(a+b)-a+b}\\
&= \frac{ab(x+1)^2}{b(ab+b^2-a+b)}\\
&= \frac{a(x+1)^2}{ab+b^2-a+b}
\end{aligned}
$$

■

Ejercicio 58 Determinar la solución de la ecuación

$$
\frac{x^2}{x^2-1}\cdot A(x)=\frac{x^2-1}{x^2+x}+\frac{x+1}{x}
$$

Solución: Resolviendo esta ecuación en el cuerpo de las fracciones racionales, tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{x^2-1}{x^2}\cdot\left(\frac{x^2}{x^2-1}\cdot A(x)\right) &= \frac{x^2-1}{x^2}\cdot\left(\frac{x^2-1}{x^2+x}+\frac{x+1}{x}\right)\\
\left(\frac{x^2-1}{x^2}\cdot\frac{x^2}{x^2-1}\right)\cdot A(x) &= \frac{x^2-1}{x^2}\cdot\left(\frac{x^2-1}{x^2+x}+\frac{x+1}{x}\right)\\
\frac{1}{1}\cdot A(x) &= \frac{x^2-1}{x^2}\cdot\left[\frac{x^2-1}{x(x+1)}+\frac{(x+1)^2}{x(x+1)}\right]\\
A(x) &= \frac{x^2-1}{x^2}\cdot\frac{x^2-1+x^2+2x+1}{x(x+1)}\\
A(x) &= \frac{x^2-1}{x^2}\cdot\frac{2x(x+1)}{x(x+1)}\\
A(x) &= \frac{x^2-1}{x^2}\cdot\frac{2}{1}\\
A(x) &= \frac{2x^2-2}{x^2}
\end{aligned}$$

■

Ejercicio 59 Comprueba que se cumple

$$\left(x+1+\frac{x^2}{1-x}\right):\left(1-\frac{x}{1+x}\cdot\frac{x+1}{x^2-x}\right)=-\frac{1}{x-2}$$

Solución:

$$\begin{aligned}
\left(x+1+\frac{x^2}{1-x}\right) &: \left(1-\frac{x}{1+x}\cdot\frac{x+1}{x^2-x}\right)\\
&= \left[\frac{(x+1)(1-x)}{1-x}+\frac{x^2}{1-x}\right]:\left[1-\frac{x(x+1)}{x(x-1)(x+1)}\right]\\
&= \frac{x-x^2+1-x+x^2}{1-x}:\left(1-\frac{1}{x-1}\right)\\
&= \frac{1}{1-x}:\frac{x-1-1}{x-1}\\
&= \frac{1}{1-x}\cdot\frac{x-1}{x-2}\\
&= -\frac{1-x}{(1-x)(x-2)}\\
&= -\frac{1}{x-2}
\end{aligned}$$

■

Ejercicio 60 Simplifica:

a)

$$\frac{1+\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2}{1-\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2}$$

b)

$$\frac{1-\frac{x+a}{x-a}}{1+\frac{x+a}{x-a}}$$

Solución: a)

$$\begin{aligned}
\frac{1+\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2}{1-\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2} &= \left[1+\frac{(1-x)^2}{(1+x)^2}\right] : \left[1-\frac{(1-x)^2}{(1+x)^2}\right] \\
&= \frac{1+2x+x^2+1-2x+x^2}{(1+x)^2} : \frac{1+2x+x^2-1+2x-x^2}{(1+x)^2} \\
&= \frac{2(1+x^2)}{(1+x)^2} \cdot \frac{(1+x)^2}{4x} \\
&= \frac{2(1+x^2)(1+x)^2}{4x(1+x)^2} \\
&= \frac{1+x^2}{2x}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
\frac{1-\frac{x+a}{x-a}}{1+\frac{x+a}{x-a}} &= \left(1-\frac{x+a}{x-a}\right) : \left(1+\frac{x+a}{x-a}\right) \\
&= \frac{x-a-x-a}{x-a} : \frac{x-a+x+a}{x-a} \\
&= \frac{-2a}{x-a} \cdot \frac{x-a}{2x} \\
&= \frac{-2a(x-a)}{2x(x-a)} \\
&= -\frac{a}{x}
\end{aligned}$$

■

7. Funciones polinómicas

Ejercicio 61 Calcula $f(-1)$, $f(1/3)$ y $f(\sqrt{2})$ para las siguientes funciones: (a) $f(x) = 2x + 5$; (b) $f(x) = -x^2 + 2x - 3$; y (c) $f(x) = 1$.
Solución: Se trata de encontrar las imágenes de los puntos -1, $1/3$ y $\sqrt{2}$ por cada una de las funciones dadas.
a)

$$\begin{array}{l}
f(-1) = 2 \cdot (-1) + 5 = 3 \\
f(1/3) = 2 \cdot \frac{1}{3} + 5 = \frac{17}{3} \\
f(\sqrt{2}) = 2 \cdot \sqrt{2} + 5
\end{array}$$

b)

$$\begin{array}{l}
f(-1) = -(-1)^2 + 2 \cdot (-1) - 3 = -1 - 2 - 3 = -6 \\
f(1/3) = -\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2 \cdot \frac{1}{3} - 3 = -\frac{1}{9} + \frac{2}{3} - 3 = -\frac{22}{9} \\
f(\sqrt{2}) = -\left(\sqrt{2}\right)^2 + 2 \cdot \sqrt{2} - 3 = -2 + 2\sqrt{2} - 3 = -5 + 2\sqrt{2}
\end{array}$$

c)

$$\begin{array}{l}
f(-1) = 1 \\
f(1/3) = 1 \\
f(\sqrt{2}) = 1
\end{array}$$

pues la función es, en este caso, la función constante igual a 1, es decir, la imagen de cualquier número real es siempre igual a 1. ■

Ejercicio 62 Calcula, si existen, las antiimágenes de 0, 1 y -1 para las siguientes funciones: (a) $f(x) = 2x - 1$; (b) $f(x) = 2x^2$; (c) $f(x) = x^3$; y (d) $f(x) = -1$.
Solución: Recuerda que dada una función f, si y es la imagen de x por f, escribimos

$$f(x) = y$$

y entonces también se dice que y es una antiimagen de x por f. Se trata de encontrar los valores de x para los valores de y dados en el enunciado.
a)

$$\begin{array}{lll} f(x)=y & \Longrightarrow & x=\ ??? \\ 2x-1=0 & \Longrightarrow & x=1/2 \\ 2x-1=1 & \Longrightarrow & x=1 \\ 2x-1=-1 & \Longrightarrow & x=0 \end{array}$$

b)

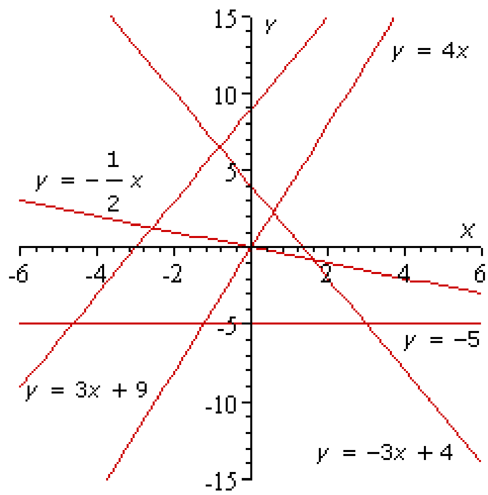
$$\begin{array}{lll} f(x)=y & \Longrightarrow & x=\ ??? \\ 2x^2=0 & \Longrightarrow & x=0 \\ 2x^2=1 & \Longrightarrow & x=\pm\sqrt{1/2} \\ 2x^2=-1 & \Longrightarrow & \text{No hay antiimágenes de } -1 \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{lll} f(x)=y & \Longrightarrow & x=\ ??? \\ x^3=0 & \Longrightarrow & x=0 \\ x^3=1 & \Longrightarrow & x=1 \\ x^3=-1 & \Longrightarrow & x=\sqrt[3]{-1}=-1 \end{array}$$

d) En este caso, la función es constante igual a -1, es decir, la imagen de cualquier número real por esta función es siempre igual a -1. Por consiguiente, sólo -1 tiene antiimagen por la función y ésta es -1 y, cualquier otro número real no tiene antiimagen. ∎

Ejercicio 63 Construye la gráfica de las funciones cuyas imágenes vienen definidas por las siguientes relaciones: (a) $y=-5$; (b) $y=4x$; (c) $y=-\frac{1}{2}x$; (d) $y=-3x+4$; (e) $y=3x+9$.
Solución: Las gráficas de todas las funciones indicadas se muestran en la siguiente figura.



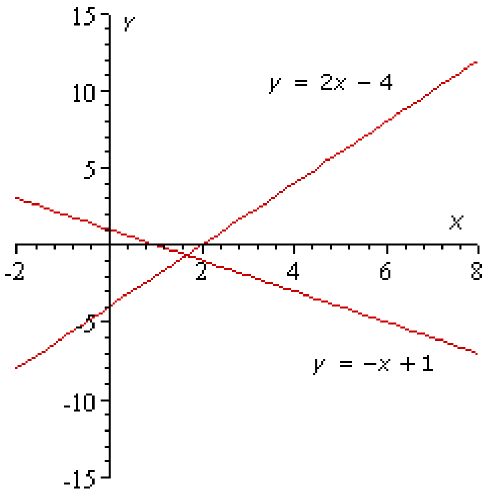
a) La relación $y=-5$ establece una función f definida por $f(x)=-5$, para todo $x\in\mathbb{R}$. Se trata de una función constante y, por tanto, su representación gráfica será una recta horizontal.
b) La relación $y=4x$ establece una función f definida por $f(x)=4x$, para todo $x\in\mathbb{R}$. Se trata de una función lineal y, por tanto, su representación gráfica será una recta de pendiente 4 que pasa por el origen de coordenadas. Puesto que la pendiente es positiva, la función es creciente y toma valores positivos para $x>0$ y, negativos, para $x<0$.
c) La relación $y=-\frac{1}{2}x$ establece una función f definida por $f(x)=-\frac{1}{2}x$, para todo $x\in\mathbb{R}$. Se trata de una función lineal y, por tanto, su representación gráfica será una recta de pendiente $-\frac{1}{2}$ que pasa por el origen de coordenadas. Puesto que la pendiente es negativa, la función es decreciente y toma valores positivos para $x<0$ y, negativos, para $x>0$.
d) La relación $y=-3x+4$ establece una función f definida por $f(x)=-3x+4$, para todo $x\in\mathbb{R}$. Se trata de una función afín y, por tanto, su representación gráfica será una recta de pendiente -3 que pasa por el punto de coordenadas $(0,4)$. Puesto que la pendiente es negativa, la función es decreciente y toma valores positivos para $x<\frac{4}{3}$ y, negativos, para $x>\frac{4}{3}$, pues, la función se anula para $x=\frac{4}{3}$.

e) La relación $y = 3x + 9$ establece una función f definida por $f(x) = 3x + 9$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Se trata de una función afín y, por tanto, su representación gráfica será una recta de pendiente 3 que pasa por el punto de coordenadas $(0, 9)$. Puesto que la pendiente es positiva, la función es creciente y toma valores positivos para $x > -3$ y, negativos, para $x < -3$, pues, la función se anula para $x = -3$. ■

Ejercicio 64 ¿En qué puntos corta la gráfica de las funciones que se indican a los ejes de coordenadas? ¿En qué punto se cortan las dos gráficas? ¿Para qué valores de x las funciones toman valores positivos y valores negativos?

$$f(x) = -x + 1$$
$$g(x) = 2x - 4$$

Solución: Las gráficas de las dos funciones indicadas se muestran en la siguiente figura. Evidentemente, son funciones afines y, por tanto, las gráficas son rectas.



Los puntos de corte con el eje de abscisas se obtienen como las antiimagénes de 0, es decir, como los valores de x que verifican

$$f(x) = 0$$

y los puntos de corte con el eje de ordenadas se obtienen como las imágenes de 0. Así, para la función $f(x) = -x + 1$, tenemos

$$-x + 1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 1$$

y

$$f(0) = 1$$

Por tanto, la gráfica corta al eje X en el punto $(1, 0)$ y al eje Y en $(0, 1)$. Para la función $g(x) = 2x - 4$, tenemos

$$2x - 4 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 2$$

y

$$g(0) = -4$$

y, por tanto, la gráfica corta al eje X en el punto $(2, 0)$ y al eje Y en $(0, -4)$.
Los puntos de corte de las dos gráficas se corresponden con los valores de x para los que las imágenes por ambas funciones son iguales, es decir, para los que se cumple la relación

$$f(x) = g(x)$$

En nuestro caso, tenemos

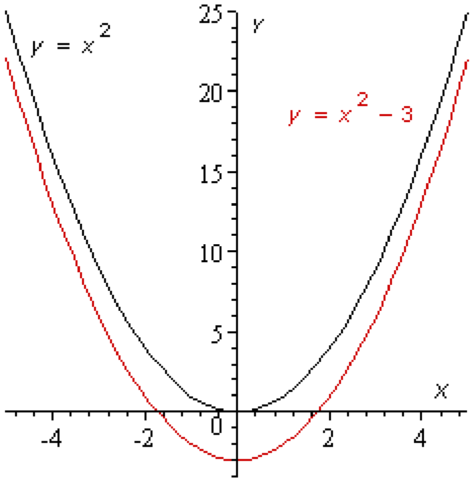
$$-x + 1 = 2x - 4 \quad \Longrightarrow \quad x = \tfrac{5}{3}$$

y, además, la imagen de $5/3$ es

$$f(5/3) = -\frac{5}{3} + 1 = -\frac{2}{3}$$

Luego, las dos gráficas se cortan el punto de coordenadas $(5/3, -2/3)$.
Al tratarse de funciones afines, cuya representación gráfica son rectas, averiguaremos los valores de x para los que la función es positiva o negativa a partir del valor en el que la función se anula (corta al eje X). A partir de este valor, según sea la función creciente o decreciente, determinaremos los valores de x para los que la función es positiva y negativa. Así, la función $f(x) = -x + 1$ es decreciente, pues su gráfica es una recta de pendiente negativa, y como se anula en $x = 1$, entonces f es positiva para $x < 1$ y negativa para $x > 1$. En cambio, la función $g(x) = 2x - 4$ es creciente, pues su gráfica es una recta de pendiente positiva, y como se anula en $x = 2$, entonces g es positiva para $x > 2$ y negativa para $x < 2$. ■

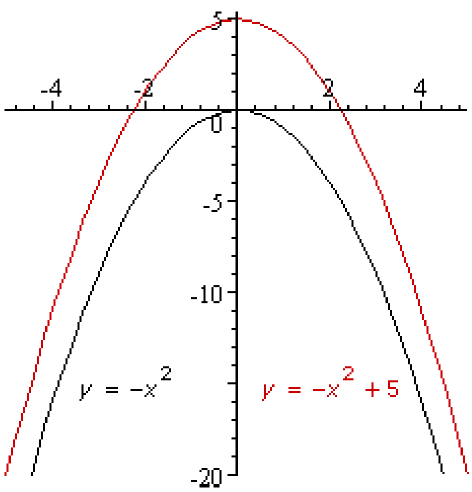
Ejercicio 65 Construye la gráfica de las funciones cuyas imágenes vienen definidas por las siguientes relaciones: (a) $y = x^2 - 3$; (b) $y = -x^2 + 5$; (c) $y = (x + 2)^2 - 3$; (d) $y = -2(x - 3)^2 + 3$. Averiguar si cortan o no al eje de abscisas.
Solución: Evidentemente, todas las funciones indicadas son polinómicas de segundo grado y, por tanto, tendrán como gráfica una parábola.
a) La relación $y = x^2 - 3$ establece una función cuadrática f definida por $f(x) = x^2 - 3$, para todo $x \in \mathbb{R}$. La gráfica de esta función se obtendrá a partir de la parábola $y = x^2$ mediante una traslación siguiendo el eje de ordenadas 3 unidades en el sentido negativo.



A partir de la gráfica observamos que hay dos cortes con el eje de abscisas. Estos puntos son los ceros de la función, es decir, los valores de x que verifican la ecuación

$$x^2 - 3 = 0$$

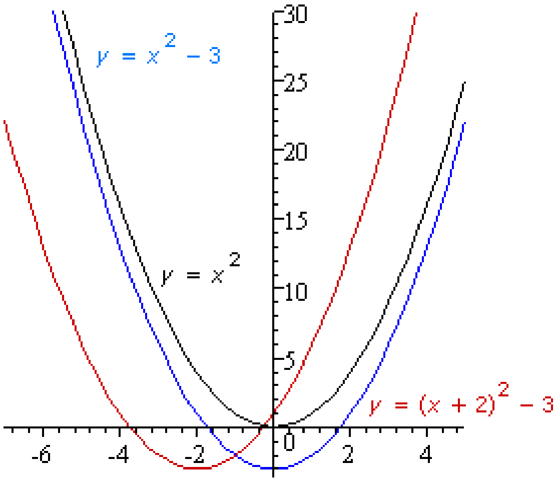
cuyas soluciones son $\pm\sqrt{3}$.
b) La relación $y = -x^2 + 5$ establece una función cuadrática f definida por $f(x) = -x^2 + 5$, para todo $x \in \mathbb{R}$. La gráfica de esta función se obtendrá a partir de la parábola $y = -x^2$ mediante una traslación siguiendo el eje de ordenadas 5 unidades en el sentido positivo.



A partir de la gráfica observamos que hay dos cortes con el eje de abscisas. Estos puntos son los ceros de la función, es decir, los valores de x que verifican la ecuación

$$-x^2 + 5 = 0$$

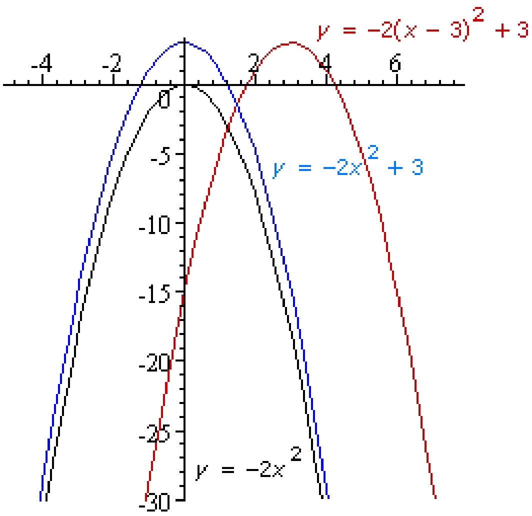
cuyas soluciones son $\pm\sqrt{5}$.
c) La relación $y = (x+2)^2 - 3$ establece una función cuadrática f definida por $f(x) = (x+2)^2 - 3$, para todo $x \in \mathbb{R}$. La gráfica de esta función se obtendrá a partir de la parábola $y = x^2$ haciendo primero una traslación siguiendo el eje de ordenadas 3 unidades en el sentido negativo, y, luego, una traslación siguiendo el eje de abscisas 2 unidades en el sentido negativo.



A partir de la gráfica observamos que hay dos cortes con el eje de abscisas. Estos puntos son los ceros de la función, es decir, los valores de x que verifican la ecuación

$$\begin{aligned} (x+2)^2 - 3 &= 0 \\ (x+2)^2 &= 3 \end{aligned}$$

cuyas soluciones son $-2 \pm \sqrt{3}$.
d) La relación $y = -2(x-3)^2 + 3$ establece una función cuadrática f definida por $f(x) = -2(x - 3)^2 + 3$, para todo $x \in \mathbb{R}$. La gráfica de esta función se obtendrá a partir de la parábola $y = -2x^2$ haciendo primero una traslación siguiendo el eje de ordenadas 3 unidades en el sentido positivo, y, luego, una traslación siguiendo el eje de abscisas 3 unidades en el sentido positivo.



A partir de la gráfica observamos que hay dos cortes con el eje de abscisas. Estos puntos son los ceros de la función, es decir, los valores de x que verifican la ecuación2

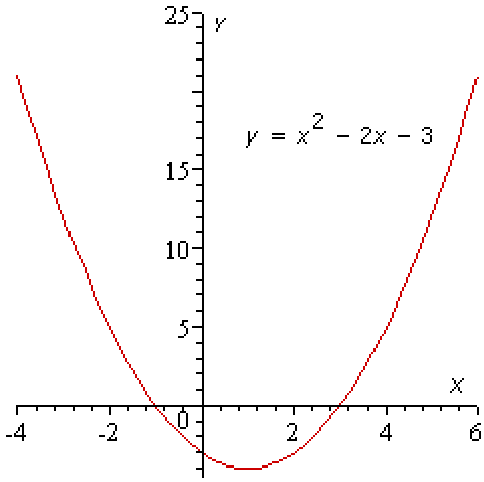
$$\begin{aligned} -2(x-3)^2 + 3 &= 0 \\ 2(x-3)^2 &= 3 \\ (x-3)^2 &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

cuyas soluciones son $3 \pm \sqrt{3/2}$. ■

Ejercicio 66 Representa las gráficas de las siguientes funciones cuyas imágenes vienen definidas por las siguientes relaciones: (a) $y = x^2 - 2x - 3$; (b) $y = -2x^2 + 4x - 3$; y (c) $y = 2x^2 - 4x$. Caracteriza cada una de estas gráficas.
Solución: Todas las funciones indicadas son cuadráticas y, por tanto, tendrán como gráfica una parábola.
a) La relación $y = x^2 - 2x - 3$ establece una función cuadrática f definida por $f(x) = x^2 - 2x - 3$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Observa que podemos escribir

$$x^2 - 2x - 3 = (x - 1)^2 - 4$$

y, por tanto, la gráfica de esta función se obtendrá a partir de la parábola $y = x^2$ haciendo primero una traslación de 4 unidades en la dirección del eje Y en sentido negativo, y, luego, una traslación de 1 unidad en la dirección del eje X en sentido positivo.



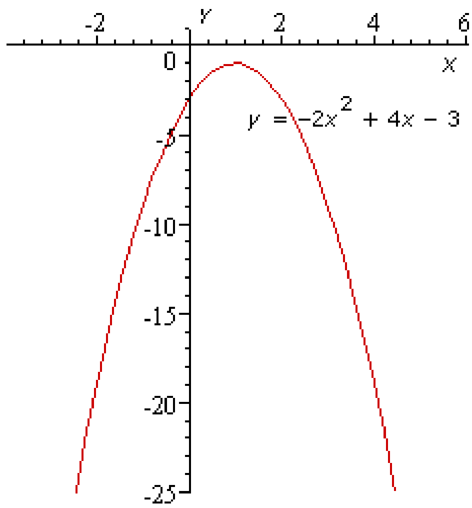
Es claro que el vértice de la parábola se encuentra en el punto de coordenadas $(1, -4)$, que es el transformado de $(0, 0)$ por las operaciones indicadas antes. El eje de simetría es la recta vertical $x = 1$. La función tiene un punto de ordenada mínima en $x = 1$, cuyo valor es -4. La función es creciente para $x > 1$ y decreciente para $x < 1$. La gráfica corta al eje Y en el punto $(0, -3)$ y al eje X en los puntos de abscisa que verifican la ecuación

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

es decir, en $x = -1$ y en $x = 3$. La función es positiva en $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$ y negativa en $(-1, 3)$.
b) La relación $y = -2x^2 + 4x - 3$ establece una función cuadrática f definida por $f(x) = -2x^2 + 4x - 3$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Observa que podemos escribir

$$\begin{aligned} -2x^2 + 4x - 3 &= -2\left(x^2 - 2x + \frac{3}{2}\right) \\ &= -2\left[(x - 1)^2 + \frac{1}{2}\right] \\ &= -2(x - 1)^2 - 1 \end{aligned}$$

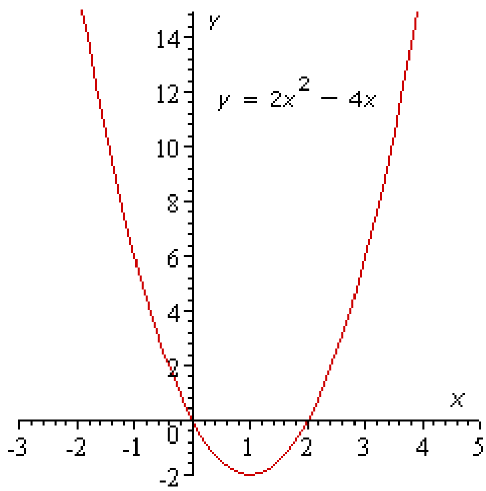
y, por tanto, la gráfica de esta función se obtendrá a partir de la parábola $y = -2x^2$ haciendo primero una traslación de 1 unidad en la dirección del eje Y en sentido negativo, y, luego, una traslación de 1 unidad en la dirección del eje X en sentido positivo.



Es claro que el vértice de la parábola se encuentra en el punto de coordenadas $(1, -1)$, que es el transformado de $(0, 0)$ por las operaciones antes indicadas. El eje de simetría es la recta vertical $x = 1$. La función tiene un punto de ordenada máxima en $x = 1$, cuyo valor es -1. La función es creciente para $x < 1$ y decreciente para $x > 1$. La gráfica corta al eje Y en el punto $(0, -3)$ y no corta al eje X. La función es siempre negativa.
c) La relación $y = 2x^2 - 4x$ establece una función cuadrática f definida por $f(x) = 2x^2 - 4x$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Observa que podemos escribir

$$\begin{aligned} 2x^2 - 4x &= 2(x^2 - 2x) \\ &= 2\left[(x-1)^2 - 1\right] \\ &= 2(x-1)^2 - 2 \end{aligned}$$

y, por tanto, la gráfica de esta función se obtendrá a partir de la parábola $y = 2x^2$ haciendo primero una traslación de 2 unidades en la dirección del eje Y en sentido negativo, y, luego, una traslación de 1 unidad en la dirección del eje X en sentido positivo.

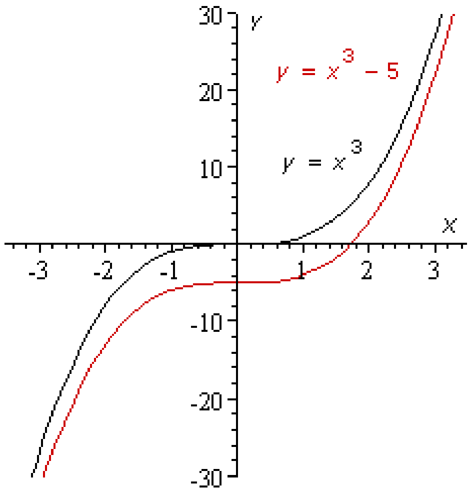


Es claro que el vértice de la parábola se encuentra en el punto de coordenadas $(1, -2)$, que es el transformado de $(0, 0)$ por las operaciones indicadas antes. El eje de simetría es la recta vertical $x = 1$. La función tiene un punto de ordenada mínima en $x = 1$, cuyo valor es -2. La función es creciente para $x > 1$ y decreciente para $x < 1$. La gráfica corta al eje Y en el punto $(0, 0)$ y al eje X en los puntos de abscisa que verifican la ecuación

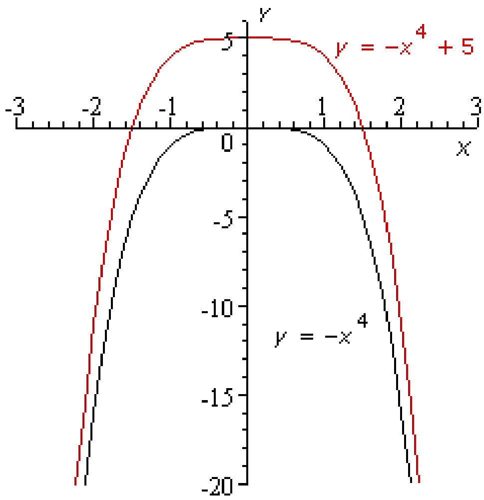
$$\begin{aligned} 2x^2 - 4x &= 0 \\ 2x(x-2) &= 0 \end{aligned}$$

es decir, en $x = 0$ y en $x = 2$. La función es positiva en $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ y negativa en $(0, 2)$. ■

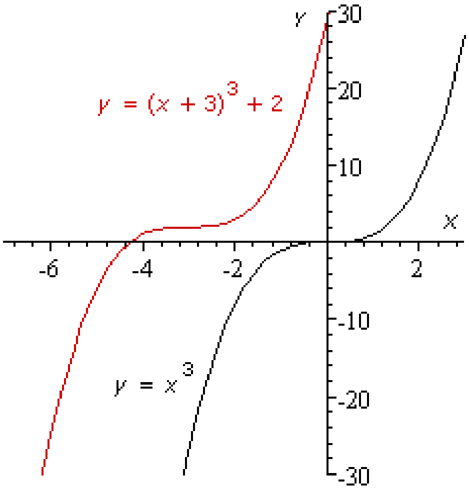
Ejercicio 67 Construye las gráficas de las siguientes funciones: (a) $f(x) = x^3 - 5$; (b) $f(x) = -x^4 + 5$; y (c) $f(x) = (x+3)^3 + 2$.
Solución: Todas las funciones de este ejercicio son polinómicas de grado mayor que 2.
a) La gráfica de la función $f(x) = x^3 - 5$ se obtendrá a partir de la de $y = x^3$ mediante una traslación de 5 unidades en la dirección del eje de ordenadas en sentido negativo.



b) La gráfica de $f(x) = -x^4 + 5$ se obtendrá a partir de la de $y = x^4$, haciendo primero una simetría respecto al eje X y después trasladándola 5 unidades en la dirección del eje de ordenadas en el sentido positivo.



c) La gráfica de $f(x) = (x+3)^3 + 2$ se obtendrá a partir de la de $y = x^3$ haciendo primero una traslación de 2 unidades en la dirección del eje Y en sentido positivo y, después, una traslación de 3 unidades en la dirección del eje X en el sentido negativo.


y
30
20
10
x
-6
-4
-2
2
-10
-20
-30
y = (x + 3)^3 + 2
y = x^3

■