Teoría

Índice

1. Identidades y ecuaciones en un conjunto

Al estudiar el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros aprendimos a hacer operaciones como las siguientes:

$$(-1) \cdot [2 + (-3)] = (-1) \cdot (-1) = 1$$

y

$$(-1) \cdot 2 + (-1) \cdot (-3) = -2 + 3 = 1$$

Viendo los resultados obtenidos, podemos escribir

$$(-1) \cdot [2 + (-3)] = (-1) \cdot 2 + (-1) \cdot (-3)$$

Ahora bien, esta última relación de igualdad no expresa nada nuevo de los números enteros pues se trata de la propiedad distributiva del producto respecto de la suma, que siempre se cumple en $\mathbb{Z}$. Expresábamos esta propiedad diciendo que para todo $x, y, z \in \mathbb{Z}$ se cumple

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

Esto es, sustituyendo x, y, z por números enteros cualesquiera la igualdad se satisface, es decir, se obtiene una igualdad numérica que es verdadera. Decimos entonces que la relación de igualdad

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

es una **identidad** de los números enteros.

La estructura de anillo unitario conmutativo de los enteros permite escribir identidades como las siguientes:

$$\begin{array}{ll} (1) & x \cdot y = y \cdot x \\ (2) & x + 0 = 0 \\ (3) & x + (-x) = 0 \\ (4) & 1 \cdot x = x \\ \cdots & \cdots \end{array}$$

y a partir de éstas pueden deducirse otras como por ejemplo

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

En efecto,

$$\begin{array}{rcl} (x+y)^2 & = & (x+y) \cdot (x+y) \\ & = & (x+y) \cdot x + (x+y) \cdot y \\ & = & x^2 + y \cdot x + x \cdot y + y^2 \\ & = & x^2 + x \cdot y + x \cdot y + y^2 \\ & = & x^2 + 2xy + y^2 \end{array}$$

Ejemplo 1 Averigua si la igualdad siguiente

$$(x-3)^2 + 6x = x^2 + 9$$

es una identidad de los números enteros.
Solución: Desarrollando el primer miembro de la igualdad, obtenemos

$$\begin{array}{rcl} (x-3)^2 + 6x & = & x^2 - 6x + 9 + 6x \\ & = & x^2 + 9 \end{array}$$

Luego, la igualdad es una identidad. ■

No obstante, hay igualdades como la siguiente

$$x - y = y - x$$

que no son identidades de los números enteros. En efecto, si sustituimos x e y por 0 y 1, respectivamente, se obtiene una igualdad numérica que es evidentemente falsa

$$\begin{array}{rcl} 0 - 1 & = & 1 - 0 \\ -1 & = & 1 \end{array}$$

En estos casos tiene sentido plantearnos el problema de encontrar los números enteros para los que se cumple la igualdad anterior. Así, tenemos

$$\begin{array}{rcl} x - y & = & y - x \\ (x-y) + x & = & (y-x) + x \\ x + (-y + x) & = & y + (-x + x) \\ x + (x - y) & = & y + 0 \\ (x + x) - y & = & y \\ (2x - y) + (-y) & = & y + (-y) \\ 2x + (-y - y) & = & 0 \\ 2x - 2y & = & 0 \\ 2(x - y) & = & 0 \\ x - y & = & 0 \\ (x - y) + y & = & 0 + y \\ x + (-y + y) & = & y \\ x + 0 & = & y \\ x & = & y \end{array}$$

Por tanto, la igualdad anterior sólo se cumple si los dos números enteros son iguales. Las igualdades que sólo se satisfacen para cierto subconjunto propio de $\mathbb{Z}$ se llaman **ecuaciones** y al subconjunto se le llama **solución** de la ecuación.
Sin embargo, hay ecuaciones que no tienen solución en $\mathbb{Z}$. En efecto, consideremos una ecuación tan sencilla como la siguiente:

$$2x = 1$$

Es evidente que no hay ningún número entero que multiplicado por 2 sea igual a 1. Por tanto, la solución de esta ecuación en $\mathbb{Z}$ es el conjunto vacío $\emptyset$. La ausencia de solución en $\mathbb{Z}$ se debe a su propia estructura algebraica de anillo. Todos sabemos que en $\mathbb{Z}$ no hay elementos inversibles respecto al producto y, como consecuencia, las ecuaciones de la forma

$$ax = b$$

sólo tienen solución en $\mathbb{Z}$ si a es divisor de b. En efecto, consideremos por ejemplo

$$\begin{aligned} 3x &= 15 \\ 3x - 15 &= 0 \\ 3(x-5) &= 0 \\ x - 5 &= 0 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

No obstante, podemos subsanar el problema de encontrar solución a las ecuaciones de la forma

$$ax = b$$

donde b no es múltiplo de a, considerando conjuntos con una estructura algebraica más rica que la de anillo, como es la de cuerpo. En un cuerpo todo elmento no nulo es inversible. Por consiguiente, si consideramos la ecuación

$$2x = 1$$

en el cuerpo de los números racionales $\mathbb{Q}$, podemos escribir

$$\begin{aligned} 2x &= 1 \\ \frac{1}{2} \cdot (2x) &= \frac{1}{2} \cdot 1 \\ \left(\frac{1}{2} \cdot 2\right) \cdot x &= \frac{1}{2} \\ 1 \cdot x &= \frac{1}{2} \\ x &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

y, en consecuencia, la misma ecuación que no tenía solución en $\mathbb{Z}$ ahora sí tiene solución en $\mathbb{Q}$.
En resumen, para probar una identidad o para encontrar la solución de una ecuación es preciso conocer la estructura algebraica del conjunto con el que se trabaja. Hemos visto que en muchas ocasiones hará falta que este conjunto tenga al menos estructura de cuerpo para encontrar la solución de una ecuación.

Ejemplo 2 ¿Cuál es el conjunto más pequeño en donde podemos econtrar la solución de cada una de las siguientes ecuaciones? (a) $x + 1 = 0$, (b) $2x - 1 = 0$, (c) $x^2 = 2$, y (d) $x^2 + 1 = 0$.
Solución: (a) La ecuación

$$x + 1 = 0$$

no tiene solución en $\mathbb{N}$ (pues $-1 \notin \mathbb{N}$), pero si en $\mathbb{Z}$.
(b) La ecuación

$$2x - 1 = 0$$

no tiene solución en $\mathbb{Z}$ (pues $1/2 \notin \mathbb{Z}$), pero si en $\mathbb{Q}$.
(c) La ecuación

$$x^2 = 2$$

no tiene solución en $\mathbb{Q}$ (pues $\pm\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$), pero si en $\mathbb{R}$.
(d) Finalmente, la ecuación

$$x^2 + 1 = 0$$

no tiene solución en $\mathbb{R}$ (pues no hay ningún número real que elevado al cuadrado sea negativo), pero si en $\mathbb{C}$ (las soluciones son $x = \pm i$, donde i es la imaginaria que formalmente vale $\sqrt{-1}$). ■

En la práctica, las ecuaciones no sólo aparecen como igualdades algebraicas que se satisfacen para ciertos valores de un conjunto dado sino también como el resultado de plantear la información de un problema no necesariamente matemático. Al buscar la solución de las ecuaciones así obtenidas se tomará como conjunto de referencia el de los números reales, que posee estructura de cuerpo conmutativo, y, después, se interpretarán las soluciones escogiendo como buenas las soluciones que sean coherentes con el enunciado del problema.
Por ejemplo, se sabe que la suma de las edades de 3 niños es de 37 años. El mayor tiene 7 años más que el mediano y éste 3 años más el menor. Se quiere saber la edad de cada uno. Si hacemos que x sea la edad del menor, entonces la información del enunciado queda planteada en el cuadro siguiente

Mayor	$7 + (3 + x) = 10 + x$
Mediano	$3 + x$
Menor	x

A partir de esto, como la suma de las edades es 37, podemos plantear la siguiente ecuación

$$10 + x + 3 + x + x = 37$$

La solución de esta ecuación se encuentra de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} 10 + x + 3 + x + x &= 37 \\ 3x + 13 &= 37 \\ 3x &= 37 - 13 \\ 3x &= 24 \\ x &= \frac{24}{3} \\ x &= 8 \end{aligned}$$

Luego, la edades de los tres niños son $8, 11$ y 18 años.

2. Ecuaciones en el conjunto de números reales

Como ya hemos visto en el apartado anterior, la solución de una ecuación depende de la estructura algebraica del conjunto en el que se trabaja. Cuanto más rica sea la estructura del conjunto más posibilidades hay de encontrar la solución de la ecuación. Mientras no se diga lo contrario, desde ahora consideraremos todas las ecuaciones referidas al conjunto de números reales y asumiremos que se conocen las propiedades algebraicas de este conjunto, o lo que es lo mismo, supondremos que se sabe que el conjunto de números reales tiene estructura de cuerpo conmutativo.

2.1. Definiciones generales

En este apartado hacemos un breve repaso de las definiciones de los términos que se utilizan al trabajar con ecuaciones.

1. Se llama **ecuación** a toda igualdad algebraica que no es una identidad.

La igualdad

$$3x - 2x + 1 = x + 1$$

no es una ecuación, ya que si reducimos términos semejantes en el primer miembro de la igualdad, obtenemos

$$x + 1 = x + 1$$

que es evidentemente una identidad. En cambio, la igualdad

$$3x - 1 = 2$$

es una ecuación, ya que si sumamos 1 a ambos lados de la igualdad, obtenemos

$$3x = 3$$

y si ahora dividimos por 3 los dos miembros de la igualdad, obtenemos

$$x = 1$$

y esta igualdad no es una identidad ya que sólo se cumple si x toma el valor 1.

2. Las variables que intervienen en una ecuación se llaman **incógnitas**.

La igualdad

$$x^2 + y^2 - 3xy = 1$$

es una ecuación con dos incógnitas x e y, y

$$(x + y + z)^2 = x^2 - y^2 + 2xz$$

es una ecuación con tres incógnitas x, y y z.

3. El conjunto de valores de las incógnitas para los que se cumple la ecuación se llama **solución**.

Los valores $x = 3$ e $y = 1$ es una solución de la ecuación

$$x^2 + y^2 - 3xy = 1$$

ya que si sustituimos x e y por 3 y 1, respectivamente, la igualdad se cumple. Sin embargo, la ecuación

$$3x - 2 = 1 + 3x$$

no tiene solución ya que si sumamos $-3x$ (Recuerda que ahora las variables de las expresiones algebraicas toman siempre valores que son números reales y, como consecuencia, $-3x$ es un cierto número real) a ambos lados de la igualdad, obtenemos

$$-2 = 1$$

lo que no es posible.

4. **Resolver** una ecuación es encontrar el conjunto de todas sus soluciones.

La ecuación

$$3x - 1 = 2$$

tiene como única solución $x = 1$, pues

$$\begin{aligned} 3x - 1 &= 2 \\ 3x &= 3 \quad \text{Sumando 1 a ambos lados de la igualdad y operando} \\ x &= 1 \quad \text{Multiplicando por } \frac{1}{3} \text{ a ambos lados de la igualdad} \end{aligned}$$

5. **Comprobar** una ecuación significa sustituir las incógnitas por los valores hallados y ver que la igualdad se cumple.

La solución de la ecuación

$$3x - 1 = 2$$

es $x = 1$, pues

$$\begin{aligned} 3 \cdot 1 - 1 &= 2 \\ 2 &= 2 \end{aligned}$$

6. Según el número de soluciones, la ecuación se llama
   - **Compatible**: cuando la ecuación tiene solución
     - **Determinada**: si la ecuación tiene un número finito de soluciones
     - **Indeterminada**: si la ecuación tiene infinitas soluciones
   - **Incompatible**: cuando la ecuación no tiene solución

La ecuación
$$x^2 = 1$$
es compatible determinada porque tiene dos soluciones: $x = 1$ o $x = -1$. La ecuación
$$x - y = 1$$
es compatible indeterminada porque, dando valores arbitrarios a una de las incógnitas, para cada uno de ellos se obtiene una ecuación con una incógnita que, resolviéndola, da el valor de la otra incógnita y, de este modo, obtenemos tantas soluciones como queramos. La ecuación
$$3x - 2 = 1 + 3x$$
es evidentemente incompatible.

2.2. Ecuaciones equivalentes

Dos ecuaciones se llaman **equivalentes** si tienen las mismas soluciones.
Las ecuaciones
$$1 + x + y = 4 \qquad \text{y} \qquad x + y = 3$$
son equivalentes porque si sumamos -1 a ambos miembros de la primera ecuación, obtenemos la segunda, y, por tanto, la primera tiene las mismas soluciones que la segunda. Análogamente, si sumamos 1 a los dos miembros de la segunda ecuación, obtenemos la primera, y, por tanto, la segunda tiene las mismas soluciones que la primera. En cambio, las ecuaciones siguientes no son equivalentes
$$x^2 - x = 0 \qquad \text{y} \qquad x - 1 = 0$$
Aunque ambas tengan la solución $x = 1$, la primera tiene, además, la solución $x = 0$.
Al resolver ecuaciones es común no aplicar una a una, explícitamente, las propiedades algebraicas de los números reales. En su lugar, este procedimiento se sustituye en la práctica por otro que consiste en aplicar sucesivas transformaciones a la ecuación hasta obtener otra de equivalente que sea más sencilla de resover. Naturalmente, estas transformaciones se deducen de forma inmediata de las propiedades algebraicas de los números reales y del hecho de que las variables que aparecen en las expresiones algebraicas toman siempre valores que son números reales. Entre las transformaciones que permiten pasar de una ecuación a otra de equivalente, las más comunes son:

1. Si sumamos a los dos miembros de una ecuación un mismo número o una misma expresión algebraica se obtiene otra ecuación equivalente a la primera
$$A = B \iff A + C = B + C$$

De esta transformación se deduce una regla práctica denominada **transposición de términos**: si en una ecuación se pasa un sumando de un miembro a otro, cambiándole de signo, resulta otra ecuación equivalente a la primera.
$$A + B = C \iff A = C - B$$
Por ejemplo, en la ecuación
$$3x - 1 = 2 - 4x$$
por transposición de términos, obtenemos
$$3x + 4x = 2 + 1$$
Observa que hemos pasado todos los términos con x a un miembro de la ecuación y todos los números al otro.

2. Si multiplicamos los dos miembros de una ecuación por un mismo número distinto de cero o por una misma expresión algebraica no nula se obtiene otra ecuación equivalente a la primera

$$A = B \ \text{ y } \ C \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad AC = BC$$

De esta transformación se deduce también una regla práctica denominada **simplificación de términos**: si en una ecuación se dividen los dos miembros por un mismo número distinto de cero o por una expresión algebraica no nula, resulta otra ecuación equivalente a la primera.

$$AC = BC \ \text{ y } \ C \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad A = B$$

Por ejemplo, en la ecuación

$$x(x^2+1) = 3(x^2+1)$$

por simplificación de términos, obtenemos

$$x = 3$$

Observa que la expresión $x^2+1 \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 3 Resolveremos la ecuación

$$x - \frac{2-x}{3} = \frac{3}{2} - \frac{x+5}{3}$$

mediante el uso de las transformaciones dadas anteriormente.

$$\begin{array}{rcl}
x - \dfrac{2-x}{3} & = & \dfrac{3}{2} - \dfrac{x+5}{3} \\
\dfrac{6x}{6} - \dfrac{2(2-x)}{6} & = & \dfrac{9}{6} - \dfrac{2(x+5)}{6} \ \text{ Ver abajo} \\
6x - 2(2-x) & = & 9 - 2(x+5) \ \text{ Multiplicando los dos miembros de la ecuación por 6} \\
6x - 4 + 2x & = & 9 - 2x - 10 \ \text{ Efectuando operaciones} \\
8x - 4 & = & -2x - 1 \ \text{ Reduciendo términos} \\
8x + 2x & = & 4 - 1 \ \text{ Transponiendo términos} \\
10x & = & 3 \ \text{ Reduciendo términos} \\
x & = & \dfrac{3}{10} \ \text{ Dividiendo por 10 los dos miembros de la ecuación}
\end{array}$$

Expresamos todas las fracciones de la ecuación con el mismo denominador. Para ello, calculamos el m.c.m. de todos los denominadores, que es 6, y escribimos fracciones equivalentes con denominador el m.c.m. calculado. Observa que la ecuación original es equivalente a la ecuación

$$x = \frac{3}{10}$$

que nos da su solución.

2.3. Ecuaciones polinómicas

Las ecuaciones con una incógnita x que son equivalentes a una ecuación de la forma $p(x) = 0$, donde $p(x)$ es un polinomio con coeficientes reales, se llaman **ecuaciones polinómicas**. El grado del polinomio se llama entonces **grado** de la ecuación.
Por ejemplo, la ecuación

$$x^2 - 9 = (x+3)^2$$

es de primer grado, pues

$$\begin{array}{rcl}
x^2 - 9 & = & (x+3)^2 \\
x^2 - 9 & = & x^2 + 6x + 9 \ \text{ Se ha eliminado el paréntesis} \\
x^2 - 9 - x^2 - 6x - 9 & = & 0 \ \text{ Se ha hecho transposición de términos} \\
-6x - 18 & = & 0 \ \text{ Se han reducido términos semejantes} \\
x + 3 & = & 0 \ \text{ Se han dividido por } -6 \text{ los dos miembros de la ecuación}
\end{array}$$

es decir, el primer miembro de la ecuación es un polinomio de primer grado.

Ejemplo 4 Averigua el grado de las siguientes ecuaciones con una incógnita:

a)
$$x(2-x) = 2x(x-3)$$

b)
$$x(x+1)(x+2) = 0$$

c)
$$x(x-1) = x^2 + 3x + 1$$

Solución: a)

$$\begin{array}{rcl} x(2-x) & = & 2x(x-3) \\ 2x - x^2 & = & 2x^2 - 6 \text{ Se han eliminado los paréntesis} \\ -2x^2 + 6 + 2x - x^2 & = & 0 \text{ Se ha hecho transposición de términos} \\ -3x^2 + 2x + 6 & = & 0 \text{ Se han reducido términos} \end{array}$$

Luego, la ecuacióndе es de segundo grado.
b)

$$\begin{array}{rcl} x(x+1)(x+2) & = & 0 \\ x(x^2 + x + 2x + 2) & = & 0 \text{ Se han efectuado operaciones} \\ x(x^2 + 3x + 2) & = & 0 \text{ Se han reducido términos} \\ x^3 + 3x^2 + 2x & = & 0 \text{ Se ha eliminado el paréntesis} \end{array}$$

Luego, la ecuación es de tercer grado.
c)

$$\begin{array}{rcl} x(x-1) & = & x^2 + 3x + 1 \\ x^2 - x & = & x^2 + 3x + 1 \text{ Se ha eliminado el paréntesis} \\ x^2 - x - x^2 - 3x - 1 & = & 0 \text{ Se ha hecho transposición de términos} \\ -4x - 1 & = & 0 \text{ Se han reducido términos} \\ 4x + 1 & = & 0 \text{ Se han multiplicado por } -1 \text{ los dos miembros de la ecuación} \end{array}$$

Luego, la ecuación es de primer grado. ■

2.3.1. Soluciones de una ecuación polinómica

Recordando que un número real k es una raíz de un polinomio $p(x)$ si $p(k) = 0$, es decir, si su valor numérico es cero para $x = k$, deducimos que las soluciones de una ecuación polinómica $p(x) = 0$ coinciden con las raíces del polinomio. Por esta razón, a las soluciones de una ecuación con una incógnita se las llama también raíces. Vimos al estudiar los polinomios que una raíz k de un polinomio $p(x)$ tiene multiplicidad n cuando

$$p(x) = (x-k)^n \cdot q(x)$$

y $q(k) \neq 0$. En estos casos diremos que k es una solución de multiplicidad n de la ecuación

$$p(x) = 0$$

Por ejemplo, la ecuación de segundo grado

$$x^2 = 0$$

tiene como única solución $x = 0$ pero tiene multiplicidad dos. En estos casos, diremos que 0 es una solución doble de la ecuación.

Ejemplo 5 Calcula las soluciones de las siguientes ecuaciones polinómicas:

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$

b) $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$

Solución: a) Podemos calcular las raíces del polinomio $x^2 - 5x + 6$ por Ruffini. De este modo, tenemos

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & -5 & 6 \\ 2 & & 2 & -6 \\ \hline & 1 & -3 & 0 \\ 3 & & 3 & \\ \hline & 1 & 0 & \end{array}$$

y, por tanto, las raíces son 2 y 3. Como consecuencia, las soluciones de la ecuación dada son 2 y 3.
b) Del mismo modo, tenemos

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & & 1 & -1 & -2 \\ \hline & 1 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & & -1 & 2 & \\ \hline & 1 & -2 & 0 & \\ 2 & & 2 & & \\ \hline & 1 & 0 & & \end{array}$$

y, por tanto, las raíces son $-1, 1$ y 2. Como consecuencia, las soluciones de la ecuación dada son $-1, 1$ y 2. ■

Ejemplo 6 Calcula las soluciones de las siguientes ecuaciones polinómicas, indicando en cada caso su multiplicidad:

a) $x^2 - 6x + 9 = 0$

b) $x^3 - 3x + 2 = 0$

Solución: a) Como $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$, 3 es raíz doble del polinomio $x^2 - 6x + 9$ y, en consecuencia, 3 es solución doble de la ecuación dada.
b) Calculando las raíces del polinomio $x^3 - 3x + 2$ mediante Ruffini, obtenemos

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & & 1 & 2 & \\ \hline & 1 & 2 & 0 & \\ -2 & & -2 & & \\ \hline & 1 & 0 & & \end{array}$$

y, por tanto, $x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2)$. De este modo, las soluciones de la ecuación son -2 y 1 (doble). ■

3. Ecuaciones de primer grado con una incógnita

Se llama **ecuación de primer grado** o **lineal con una incógnita** a toda ecuación equivalente a una ecuación polinómica de primer grado

$$ax + b = 0$$

Por ejemplo, la ecuación

$$\frac{(2x-5)(2x+1)}{8} - \frac{(x+3)^2}{6} = \frac{x(x-3)}{3}$$

es de primer grado, pues

$$\begin{array}{rcl}
\dfrac{3(2x-5)(2x+1)}{24} - \dfrac{4(x+3)^2}{24} & = & \dfrac{8x(x-3)}{24} \\
3(2x-5)(2x+1) - 4(x+3)^2 & = & 8x(x-3) \\
3(4x^2-10x+2x-5) - 4(x^2+6x+9) & = & 8x^2-24x \\
3(4x^2-8x-5) - 4(x^2+6x+9) & = & 8x^2-24x \\
12x^2-24x-15-4x^2-24x-36 & = & 8x^2-24x \\
8x^2-48x-51 & = & 8x^2-24x \\
-48x+24x-51 & = & 0 \\
-24x-51 & = & 0 \\
8x+17 & = & 0
\end{array}$$

es decir, la ecuación dada es equivalente a la siguiente ecuación polinómica de primer grado

$$8x+17=0$$

3.1. Discusión de una ecuación de primer grado

Consideremos una ecuación de primer grado con una incógnita en su forma reducida equivalente

$$ax+b=0$$

Mediante transposición de términos, esta ecuación es equivalente a su vez a

$$ax=-b$$

Entonces, tenemos:

1. Si $a \neq 0$, entonces podemos **despejar la incógnita**, dividiendo ambos miembros de la ecuación por a, resultando otra ecuación equivalente

$$x=\frac{b}{a}$$

   de la cual se sigue la solución de la ecuación. En este caso, la ecuación sólo tiene una solución y, por tanto, es determinada.

2. Si $a=0$, distinguimos dos casos:

   - $b=0$, entonces la ecuación es
   $$0 \cdot x = 0$$
   y es evidente que cualquier número real es solución. En este caso, la ecuación es indeterminada.
   - $b \neq 0$, entonces la ecuación es
   $$0 \cdot x = b$$
   y es claro que no hay ninguna solución. En este caso, la ecuación es incompatible.

Ejemplo 7 Discutiremos las soluciones de la ecuación

$$2x-1=mx+1$$

según los valores de $m \in \mathbb{Z}$, cuando se resuelve en (a) el cuerpo $\mathbb{R}$ y (b) en el anillo $\mathbb{Z}$.
Solución: Resolviendo la ecuación, tenemos

$$\begin{array}{rcll}
2x-1 & = & mx+1 & \\
-mx+2x & = & 1+1 & \text{Sumando } -mx \text{ y 1 a ambos miembros de la ecuación} \\
(2-m)x & = & 2 & \text{Sacando factor comun } x \text{ y operando}
\end{array}$$

(a) Podemos distinguir los casos siguientes:

- Si $2-m=0$, es decir, si $m=2$, entonces la ecuación no tiene evidentemente solución.
- Si $m\neq 2$, entonces, dividiendo por $2-m$ ambos miembros de la ecuación, obtenemos

  $$x=\frac{2}{2-m}$$

  y la ecuación es determinada.

(b) Para que tenga solución en $\mathbb{Z}$, además de $m\neq 2$ se ha de cumplir que $2-m$ sea un divisor de 2. Luego,

$$\begin{array}{llllll} 2-m=2 & \Longrightarrow & m=0 & \Longrightarrow & x=1 \\ 2-m=1 & \Longrightarrow & m=1 & \Longrightarrow & x=2 \\ 2-m=-1 & \Longrightarrow & m=3 & \Longrightarrow & x=-2 \\ 2-m=-2 & \Longrightarrow & m=4 & \Longrightarrow & x=-1 \end{array}$$

En cualquier otro caso, la ecuación no tiene solución en $\mathbb{Z}$. ■

3.2. Resolución de una ecuación de primer grado

Para resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita es aconsejable desarrollar los siguientes pasos:

1. **Eliminación de denominadores**: Si los hay, se multiplicará ambos miembros de la ecuación por el mínimo común múltiplo de los denominadores.
2. **Eliminación de paréntesis**: Si los hay, se aplicará la propiedad distributiva del producto respecto de la suma. Hay que tener muy presente que el signo menos delante de un paréntesis hace cambiar de signo a todos los términos que se encuentran dentro del paréntesis.
3. **Transposición de términos**: Agrupar en un miembro todos los términos que contienen la incógnita y en el otro los términos que no la contienen.
4. **Reducción de términos semejantes**: Aunque esta operación debe efectuarse en todo momento, después de transponer términos se harán todas las operaciones para obtener una ecuación de la forma $ax=b$.
5. **Discusión de las soluciones**: Se decidirá si la ecuación es determinada, indeterminada o incompatible y, en caso de que sea compatible se dará la solución de la ecuación.
6. **Comprobación de la solución**: Si la ecuación tiene solución, se sustituirá la incógnita por el valor hallado y se comprobará que la igualdad numérica que se obtiene es cierta.

Ejemplo 8 Resolveremos la siguiente ecuación

$$(x-2)^2-(x+2)(x-3)=4x-3$$

Para ello, aplicaremos los pasos recomendados:

$$\begin{array}{rcl} (x-2)^2-(x+2)(x-3) & = & 4x-3 \\ x^2-4x+4-(x^2+2x-3x-6) & = & 4x-3 \text{ Se han efectuado las operaciones indicadas por los paréntesis} \\ x^2-4x+4-x^2+x+6 & = & 4x-3 \text{ Se ha eliminando el paréntesis} \\ -3x+10 & = & 4x-3 \text{ Se han reducido los términos semejantes} \\ -3x-4x & = & -3-10 \text{ Se ha hecho la transposición de términos} \\ -7x & = & -13 \text{ Se han reducido los términos} \\ 7x & = & 13 \text{ Se han multiplicado por } -1 \text{ los dos miembros de la ecuación} \\ x & = & \dfrac{13}{7} \text{ Se han dividido por 7 los dos miembros de la ecuación} \end{array}$$

Finalmente, comprobaremos que la solución encontrada satisface la igualdad. En efecto, por un lado tenemos

$$(\frac{13}{7}-2)^2-(\frac{13}{7}+2)(\frac{13}{7}-3)=\frac{31}{7}$$

y, por otro,

$$4 \cdot \frac{13}{7} - 3 = \frac{31}{7}$$

Luego,

$$(\frac{13}{7} - 2)^2 - (\frac{13}{7} + 2)(\frac{13}{7} - 3) = 4 \cdot \frac{13}{7} - 3$$

Ejemplo 9 Resolveremos la siguiente ecuación

$$\frac{1}{3}(x-2) + 4 = \frac{2}{5}(x+1) + \frac{x+3}{2}$$

Para ello, seguiremos los pasos recomendados:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3} \cdot (x-2) + 4 &= \frac{2}{5} \cdot (x+1) + \frac{x+3}{2} \\
\frac{x-2}{3} + 4 &= \frac{2x+2}{5} + \frac{x+3}{2} \text{ Se han efectuado los productos indicados} \\
\frac{10(x-2)}{30} + \frac{120}{30} &= \frac{6(2x+2)}{30} + \frac{15(x+3)}{30} \text{ Ver abajo} \\
10(x-2) + 120 &= 6(2x+2) + 15(x+3) \text{ Se han multiplicado por 30 los dos miembros de la ecuación} \\
10x - 20 + 120 &= 12x + 12 + 15x + 45 \text{ Se han eliminado los paréntesis} \\
10x + 100 &= 27x + 57 \text{ Se han reducido términos semejantes} \\
10x - 27x &= 57 - 100 \text{ Se ha hecho la transposición de términos} \\
-17x &= -43 \text{ Se han reducido términos} \\
17x &= 43 \text{ Se han multiplicado por } -1 \text{ los dos miembros de la ecuación} \\
x &= \frac{43}{17} \text{ Se han dividido por 17 los dos miembros de la ecuación}
\end{aligned}$$

Se han convertido las fracciones de la ecuación en otras de equivalentes con el mismo denominador, sacando para ello el m.c.m. de todos los denominadores, que es 30
Finalmente, comprobaremos que la solución encontrada satisface la igualdad. En efecto, por un lado tenemos

$$\frac{1}{3}(\frac{43}{17} - 2) + 4 = \frac{71}{17}$$

y, por otro,

$$\frac{2}{5}(\frac{43}{17} + 1) + \frac{\frac{43}{17} + 3}{2} = \frac{71}{17}$$

Luego,

$$\frac{1}{3}(\frac{43}{17} - 2) + 4 = \frac{2}{5}(\frac{43}{17} + 1) + \frac{\frac{43}{17} + 3}{2}$$

3.3. Planteamiento de problemas

Los problemas que vamos a tratar aquí relacionan datos conocidos con otro desconocido o incógnita. Sólo nos ocuparemos de problemas numéricos, es decir, los datos y la incógnita son números y las relaciones que se establecen entre ellos podrán establecerse mediante expresiones algebraicas.
La solución a cualquiera de los problemas que estudiaremos ahora aquí contiene siempre dos partes bien definidas: La primera es el **planteamiento del problema** que consiste en traducir la información dada por el enunciado a lenguaje algebraico y tendrá como resultado una ecuación de primer grado con una incógnita. La segunda parte es la **resolución del problema** que consiste en resolver la ecuación hallada.
No hay reglas generales para plantear y resolver problemas pero se consideran como de gran utilidad los siguientes consejos:

- Leer con cuidado todo el enunciado del problema
- Determinar lo que se pide; normalmente, esto será la incógnita
- Traducir toda la información a lenguaje algebraico

- Relacionar la información con la incógnita mediante una ecuación
- Resolver la ecuación obtenida y comprobar si la solución es válida
- Interpretar la solución y discutir si es o no coherente con el problema propuesto

3.3.1. Problemas generales

Ejemplo 10 Hallar un número tal que al sumar 20 a su tercera parte resulte el doble de dicho número.
Solución: a) **Planteamiento**: La información del problema se traduce mediante

Número	Tercera parte	Doble
x	$\frac{x}{3}$	$2x$

Entonces, el enunciado .ªl sumar 20 a su tercera parte ($x/3$) resulta (=) el doble de dicho número ($2x$)"se expresa mediante la siguiente ecuación

$$\frac{x}{3} + 20 = 2x$$

b) **Resolución**: Se trata ahora de resolver la ecuación. Así, tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{x}{3} + 20 &= 2x \\
\frac{x}{3} + \frac{60}{3} &= \frac{6x}{3} \\
x + 60 &= 6x \\
60 &= 6x - x \\
5x &= 60 \\
x &= \frac{60}{5} \\
x &= 12
\end{aligned}$$

y, por tanto, el número pedido es 12. ■

Ejemplo 11 De una vasija de aceite se saca el primer día 1/4, el segundo 2/5 y el tercero 1/6 y quedan todavía 22 litros. ¿Cuál es la capacidad de la vasija?
Solución: a) **Planteamiento**: Sea x la capacidad en litros de la vasija, entonces se sacan

1º día 1/4:	$\frac{1}{4}x = \frac{x}{4}$
2º día 2/5:	$\frac{2}{5}x = \frac{2x}{5}$
3º día 1/6:	$\frac{1}{6}x = \frac{x}{6}$
Total	$\frac{x}{4} + \frac{2x}{5} + \frac{x}{6}$

y aún quedan 22 litros en la vasija. Por tanto, sumando a lo que se ha sacado lo que queda en la vasija se obtiene la capacidad de la vasija:

$$\frac{x}{4} + \frac{2x}{5} + \frac{x}{6} + 22 = x$$

b) **Resolución**:

$$\begin{aligned}
\frac{x}{4} + \frac{2x}{5} + \frac{x}{6} + 22 &= x \\
\frac{15x}{60} + \frac{24x}{60} + \frac{10x}{60} + \frac{1320}{60} &= \frac{60x}{60} \\
15x + 24x + 10x + 1320 &= 60x \\
49x + 1320 &= 60x \\
1320 &= 60x - 49x \\
11x &= 1320 \\
x &= \frac{1320}{11} \\
x &= 120
\end{aligned}$$

y, por tanto, la vasija contiene 120 litros de aceite. ■

Ejemplo 12 Un profesor, para estimular a sus alumnos les promete 2 céntimos por cada problema que saquen bien, pero con la condición de que ellos le darán 1 céntimo por cada problema que saquen mal. Después que han hecho 12 problemas, el profesor debe a un alumno 9 céntimos. ¿Cuántos problemas sacó bien?
Solución: a) **Planteamiento**: Sea x el número de problemas que sacó bien el alumno. Entonces, $12-x$ será el número de problemas que sacó mal. Si el alumno cobra 2 céntimos por cada problema resuelto correctamente, cobrará $2x$ al cabo de 12 problemas, y si paga 1 céntimo al profesor por cada problema mal resuelto, pagará $1\cdot(12-x)$ al cabo de 12 problemas. Por tanto, si al cabo de 12 problemas el alumno gana 9 céntimos, entonces

$$2x-1\cdot(12-x)=9$$

b) **Resolución**:

$$\begin{aligned} 2x-(12-x) &= 9 \\ 2x-12+x &= 9 \\ 3x &= 9+12 \\ 3x &= 21 \\ x &= \frac{21}{3} \\ x &= 7 \end{aligned}$$

y, en consecuencia, el alumno resolvió correctamente 7 problemas e hizo mal 5 problemas. ■

Ejemplo 13 Un viajero gastó el primer día de su estancia en Madrid la quinta parte del dinero que tenía; el segundo día gastó la mitad del resto y aún le quedaron 300 euros. ¿Cuánto dinero tenía antes de salir de viaje?
Solución: a) **Planteamiento**: Sea x el dinero que tenía antes de salir de viaje. Entonces,

	Dinero que gasta	Dinero que le queda
1º día	$\frac{x}{5}$	$x-\frac{x}{5}=\frac{5x-x}{5}=\frac{4x}{5}$
2º día	$\frac{1}{2}\cdot\frac{4x}{5}=\frac{4x}{10}=\frac{2x}{5}$	$\frac{4x}{5}-\frac{2x}{5}=\frac{2x}{5}$
Total	$\frac{x}{5}+\frac{2x}{5}$	

y aún le quedan 300 euros. Podemos plantear ahora el problema de dos maneras distintas: (1) Si sumamos el dinero que gasta en los dos días con el que le queda aún, nos dará el dinero que tenía al principio del viaje, es decir,

$$\frac{x}{5}+\frac{2x}{5}+300=x$$

(2) Sabiendo que $\frac{2x}{5}$ es el dinero que le queda al cabo de dos días, entonces

$$\frac{2x}{5}=300$$

b) **Resolución**: Es más fácil resolver la segunda ecuación y por esto tenemos

$$\begin{aligned} \frac{2x}{5} &= 300 \\ 2x &= 1500 \\ x &= \frac{1500}{2} \\ x &= 750 \end{aligned}$$

y, por tanto, el viajero tenía 750 euros antes de salir. ■

3.3.2. Problemas de edades

Ejemplo 14 Un padre tiene 25 años y su hijo tiene 5. ¿Cuántos años faltan para que la edad del padre sea el triple de la de su hijo?

Solución: a) **Planteamiento**: Sea x el número de años que faltan para que la edad del padre sea el triple de la de su hijo. Observa el siguiente cuadro:

	Edad actual	Edad dentro de x años
Padre	25	$25 + x$
Hijo	5	$5 + x$

Entonces el enunciado "dentro de x años, la edad del padre $(25 + x)$ sea (=) el triple de la de su hijo $(3(5 + x))$"se traduce en la siguiente ecuación:

$$25 + x = 3(5 + x)$$

b) **Resolución**:

$$\begin{aligned} 25 + x &= 3(5 + x) \\ 25 + x &= 15 + 3x \\ 25 - 15 &= 3x - x \\ 2x &= 10 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

y, en consecuencia, transcurridos 5 años, la edad del padre, 30, es el triple de la edad de su hijo, 10. ■

Ejemplo 15 La edad de un padre es triple que la de su hijo, y hace 6 años sólo era el doble. Calcula la edad actual de cada uno.
Solución: a) **Planteamiento**: Sea x la edad actual del hijo. Observa ahora el siguiente cuadro:

	Edad hace 6 años	Edad actual
Padre	$3x - 6$	$3x$ (la edad del padre es triple de la su hijo)
Hijo	$x - 6$	x

Entonces el enunciado "hace 6 años, la edad del padre $(3x - 6)$ era (=) el doble de la de su hijo $(2(x - 6))$"se traduce en la siguiente ecuación:

$$3x - 6 = 2(x - 6)$$

b) **Resolución**:

$$\begin{aligned} 3x - 6 &= 2(x - 6) \\ 3x - 6 &= 2x - 12 \\ 3x - 2x &= -12 + 6 \\ x &= -6 \end{aligned}$$

y, por tanto, no es posible que la edad del padre sea actualmente el triple de la de su hijo. ■

3.3.3. Problemas de grifos

Ejemplo 16 Dos grifos llenan juntos un depósito en 3 horas. Si el primero llena el depósito en 4 horas, ¿cuántas horas tardará el segundo en llenar el depósito?
Solución: a) **Planteamiento**: Sea x el tiempo que tarda el segundo grifo en llenar el depósito.

Grifos	Depósito lleno	Depósito en una hora
1º	4 horas	lleno hasta $\frac{1}{4}$ de su capacidad
2º	x horas	lleno hasta $\frac{1}{x}$ de su capacidad
1º + 2º	3 horas	lleno hasta $\frac{1}{3}$ de su capacidad

Si el primero tarda 4 horas en llenarlo, en una hora habrá llenado la cuarta parte del mismo. Por la misma razón, si el segundo tarda x horas en llenarlo, en una hora habrá llenado $1/x$ del depósito. Por tanto, en una hora, los dos grifos llenan

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{x}$$

del depósito. Ahora bien, según el enunciado, los dos grifos llenan el depósito en 3 horas y, por tanto, en una hora habrán llenado su tercera parte. De este modo, se ha de cumplir la siguiente ecuación

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{x}=\frac{1}{3}$$

b) **Resolución**:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}+\frac{1}{x} &= \frac{1}{3} \\ \frac{1}{x} &= \frac{1}{3}-\frac{1}{4} \\ \frac{1}{x} &= \frac{4}{12}-\frac{3}{12} \\ \frac{1}{x} &= \frac{1}{12} \\ x &= 12 \end{aligned}$$

y, en consecuencia, el segundo grifo tardará 12 horas en llenar el depósito. ■

Ejemplo 17 Un grifo A llena una piscina en 6 horas, otro B la llena en 8 horas. Halla el tiempo que tardarán en llenarla los dos juntos.
Solución: a) **Planteamiento**: Sea x el número de horas que tardan los dos en llenar la piscina. Observa el siguiente cuadro:

Grifos	Depósito lleno	Depósito en una hora
A	6 horas	lleno hasta $\frac{1}{6}$ de su capacidad
B	8 horas	lleno hasta $\frac{1}{8}$ de su capacidad
A + B	x horas	lleno hasta $\frac{1}{x}$ de su capacidad

Entonces, es claro que

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{8}=\frac{1}{x}$$

b) **Resolución**:

$$\begin{aligned} \frac{1}{6}+\frac{1}{8} &= \frac{1}{x} \\ \frac{4}{24}+\frac{3}{24} &= \frac{1}{x} \\ \frac{7}{24} &= \frac{1}{x} \\ 7x &= 24 \\ x &= \frac{24}{7} \\ x &= 3{,}4285 \end{aligned}$$

es decir, los dos juntos tardarán 3.4285 horas, o lo que es lo mismo, 3 horas, 25 minutos y 42.6 segundos. ■

3.3.4. Problemas de relojes

Ejemplo 18 Un reloj marca las seis en punto. ¿A qué hora, después de las seis, las agujas del reloj (minutera y horaria) volverán a estar en la misma situación, es decir, una en prolongación de la otra?
Solución: a) **Planteamiento**: En un reloj, el espacio recorrido por la minutera es 12 veces mayor que el espacio recorrido por la horaria; esto es así porque mientras una aguja recorre 60 minutos, la otra sólo recorre 5. Si llamamos x al espacio recorrido por la aguja horaria hasta ponerse en prolongación con la minutera, ésta habrá recorrido $12x$. Ahora bien, son las seis, y, por tanto, la aguja minutera deberá recorrer una hora completa más x, es decir, $60+x$, para poder colocarse en prolongación con la aguja horaria. Como consecuencia, podemos escribir

$$12x = 60 + x$$

b) **Resolución**:

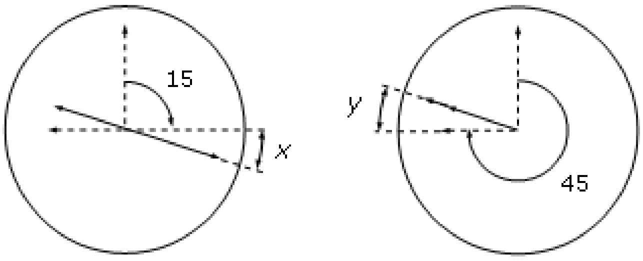
$$\begin{aligned}
12x &= 60 + x \\
12x - x &= 60 \\
11x &= 60 \\
x &= \frac{60}{11} \\
x &= 5{,}45
\end{aligned}$$

es decir, x es 5,4545 minutos, o lo que es lo mismo, 5 minutos y 27.27 segundos. Por lo tanto, las agujas volverán a estar en la misma situación a las 7 horas, 5 minutos y 27.27 segundos. ■

Ejemplo 19 Entre las 9 y las 10 horas de la mañana he comenzado a rellenar el crucigrama del periódico cuando las dos agujas del reloj estaban alineadas, y lo he acabado cuando las agujas han coincidido. ¿Cuánto tiempo he tardado en completar el crucigrama?
Solución: a) **Planteamiento**: Si en el instante en que ha comenzado a rellenar el crucigrama, la posición de la aguja horaria es x, donde x es el espacio recorrido por esta aguja desde las 9 hasta colocarse en línea con la otra aguja formando un ángulo de 180°, entonces la minutera habrá recorrido $15 + x$. Como el espacio recorrido por la minutera es 12 veces mayor que el espacio recorrido por la horaria, tenemos

$$12x = 15 + x$$

De esta ecuación, obtendremos el instante en que ha comenzado el crucigrama.



Por otra parte, si y es el espacio recorrido por la aguja horaria desde las 9 hasta que las dos agujas coinciden, la minutera habrá recorrido $45 + y$. Como el espacio recorrido por la minutera es 12 veces mayor que el espacio recorrido por la horaria, tenemos

$$12y = 45 + y$$

y de esta ecuación obtendremos el instante en que ha acabado el crucigrama.
b) **Resolución**:

$$\begin{aligned}
12x &= 15 + x \\
12x - x &= 15 \\
11x &= 15 \\
x &= \frac{15}{11} \\
x &= 1{,}36
\end{aligned}$$

es decir, se comienza a rellenar el crucigrama a las 9 horas, 16 minutos y 21.8 segundos.

$$\begin{aligned}
12y &= 45 + y \\
12y - y &= 45 \\
11y &= 45 \\
y &= \frac{45}{11} \\
y &= 4{,}09
\end{aligned}$$

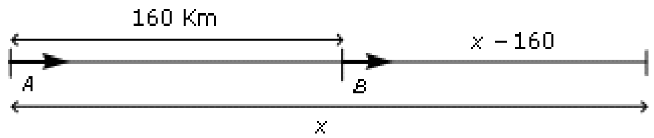
y, por tanto, se termina el crucigrama a las 9 horas, 49 minutos y 5.4 segundos. ■

3.3.5. Problemas de móviles

Ejemplo 20 Dos móviles A y B salen al mismo tiempo de dos puntos que distan 160 Km y caminan en la misma dirección y sentido. La velocidad de A es 60 km/h y la de B es 40 km/h. Hallar el punto donde se encuentran.
Solución: En todos los problemas de móviles se utilizará la relación

$$\text{espacio} = \text{velocidad} \ \times \ \text{tiempo}$$

que es válida sólo para los casos en los que las velocidades de los móviles no varían con el tiempo.
a) **Planteamiento**: Observa el siguiente diagrama



El espacio recorrido por A hasta el punto de encuentro es x y el recorrido por B es $x - 160$. El tiempo transcurrido por ambos en recorrer dichos espacios es el mismo, ya que han salido al mismo tiempo de sus puntos de partida. A partir de la relación

$$\text{tiempo} = \frac{\text{espacio}}{\text{velocidad}}$$

podemos escribir

$$\text{tiempo A} = \frac{x}{60}$$

y

$$\text{tiempo B} = \frac{x-160}{40}$$

y, por tanto,

$$\frac{x}{60} = \frac{x-160}{40}$$

b) **Resolución**:

$$\begin{aligned} \frac{x}{60} &= \frac{x-160}{40} \\ 40x &= 60(x-160) \\ 40x &= 60x - 9600 \\ 9600 &= 60x - 40x \\ 20x &= 9600 \\ x &= \frac{9600}{20} \\ x &= 480 \end{aligned}$$

y, en consecuencia, se encuentran a 480 Km del punto de salida de A, o a 320 Km del punto de salida de B. ■

Ejemplo 21 Un tren A parte de una estación a las 9 horas con una velocidad de 30 Km/h y otro B parte dos horas más tarde de la misma estación y en la misma dirección y sentido con una velocidad de 40 Km/h. Hallar la hora del encuentro y la distancia de este punto a la estación de partida.
Solución: a) **Planteamiento**: Si x es el tiempo que tarda A en recorrer la distancia que va desde el punto de salida hasta el punto de encuentro, el tiempo de B será $x-2$ porque sale dos horas más tarde, o lo que es lo mismo, tardará dos horas menos en recorrer la misma distancia. El espacio recorrido por A es

$$\text{Espacio A } = 30x$$

y el de B es

$$\text{Espacio B } = 40(x-2)$$

y, al ser ambos iguales, tenemos

$$30x = 40(x - 2)$$

b) **Resolución**:

$$\begin{aligned}
30x &= 40(x-2)\\
30x &= 40x - 80\\
80 &= 40x - 30x\\
10x &= 80\\
x &= \frac{80}{10}\\
x &= 8
\end{aligned}$$

es decir, el primer tren es atrapado por el segundo al cabo de 8 horas de haber salido de A. Por tanto, se encuentran a las 17 horas. La distancia de A al punto de encuentro es

$$\text{Espacio A } = 30 \cdot 8 = 240 \text{ Km}$$

■

3.3.6. Problemas de mezclas

Ejemplo 22 Se mezclan dos clases de café. El café de la clase A cuesta 9.85 euros/Kg, y el de la clase B, 8.80 euros/Kg. ¿Cuántos gramos de cada clase habrá que poner para que la mezcla resulte a 9.22 euros/Kg?
Solución: a) **Planteamiento**: Sea x la cantidad en Kg de café de clase A. Entonces, $1 - x$ será la cantidad en Kg de café de clase B para formar un kilo de mezcla de café. Como 1 Kg de mezcla sale a 9.22 euros y se ha obtenido mediante x kilos de café A a 9.85 euros más $1 - x$ kilos de café B a 8.80 euros, tenemos la siguiente ecuación

$$9{,}85x + 8{,}80(1 - x) = 9{,}22 \cdot 1$$

b) **Resolución**:

$$\begin{aligned}
9{,}85x + 8{,}80(1-x) &= 9{,}22\\
9{,}85x + 8{,}80 - 8{,}80x &= 9{,}22\\
1{,}05x &= 9{,}22 - 8{,}80\\
1{,}05x &= 0{,}42\\
x &= \frac{0{,}42}{1{,}05}\\
x &= 0{,}4
\end{aligned}$$

Por tanto, habrá que poner 400 gramos de café de clase A y 600 gramos de café de clase B. ■

Ejemplo 23 Un tabernero compra 400 litros de vino a 60 céntimos el litro. ¿Cuánta agua deberá añadirle para venderlo a 75 céntimos, ganando el 35 % sobre el precio de compra?
Solución: a) **Planteamiento**: Sea x la cantidad de litros de agua que se debe añadir al vino comprado. De este modo tenemos $400 + x$ litros de mezcla (vino más agua). El precio de compra del vino es

$$400 \cdot 0{,}60 = 240 \text{ euros}$$

y el 35 % de esta cantidad es

$$0{,}35 \cdot 240 = 84 \text{ euros}$$

Por tanto, el tabernero quiere ganar

$$240 + 84 = 324 \text{ euros}$$

con la venta de los $400+x$ litros de mezcla. Si el precio de venta del litro de mezcla es a 75 céntimos, entonces tenemos la siguiente ecuación

$$(400 + x) \cdot 0{,}75 = 324$$

b) **Resolución**:

$$\begin{aligned}
(400+x)\cdot 0{,}75 &= 324\\
300+0{,}75x &= 324\\
0{,}75x &= 324-300\\
0{,}75x &= 24\\
x &= \frac{24}{0{,}75}\\
x &= 32
\end{aligned}$$

Por tanto, el tabernero deberá añadir 32 litros de agua. ■

4. Ecuaciones de segundo grado con una incógnita

Se llama **ecuación de segundo grado con una incógnita** a toda ecuación equivalente a una ecuación polinómica de segundo grado

$$ax^2+bx+c=0$$

donde $a\neq 0$. Cuando los coeficientes b y c son distintos de cero, la ecuación de segundo grado se llama **completa** y, en caso contrario, se llama **incompleta**.

Ejemplo 24 Escribe de la forma $ax^2+bx+c=0$ las ecuaciones siguientes:

a)
$$\frac{3x+1}{4x+2}-2=\frac{3x+1}{4}$$

b)
$$4(3x+1)^2-5(2x+1)-\frac{6}{5}=0$$

Solución: a) Las soluciones de esta ecuación deben satisfacer la condición $2x+1\neq 0$.

$$\begin{aligned}
\frac{3x+1}{4x+2}-2 &= \frac{3x+1}{4}\\
2(3x+1)-8(2x+1) &= (2x+1)(3x+1)\ ???\\
6x+2-16x-8 &= 6x^2+2x+3x+1 \text{ Hemos eliminado los paréntesis}\\
-10x-6 &= 6x^2+5x+1 \text{ Hemos reducido términos semejantes}\\
-6x^2-5x-1-10x-6 &= 0 \text{ Hemos hecho transposición de términos}\\
-6x^2-15x-7 &= 0 \text{ Hemos reducido términos}\\
6x^2+15x+7 &= 0 \text{ Hemos multiplicado los dos miembros por } -1
\end{aligned}$$

???Hemos multiplicado los dos miembros de la ecuación por $4(2x+1)$ que es el m.c.m. de los denominadores.
b)

$$\begin{aligned}
4(3x+1)^2-5(2x+1)-\frac{6}{5} &= 0\\
20(3x+1)^2-25(2x+1)-6 &= 0 \text{ Hemos multiplicado los dos miembros por 5 para eliminar denominadores}\\
20(9x^2+6x+1)-50x-25-6 &= 0 \text{ Hemos efectuado operaciones indicadas}\\
180x^2+120x+20-50x-25-6 &= 0 \text{ Hemos efectuado operaciones indicadas}\\
180x^2+70x-11 &= 0 \text{ Hemos reducido términos}
\end{aligned}$$

■

4.1. Resolución de ecuaciones incompletas

La ecuación de segundo grado

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (a \neq 0)$$

es incompleta cuando $b = 0$ o $c = 0$. En estos casos se obtiene una ecuación de segundo grado que es muy sencilla de resolver.

1. **Ecuaciones de la forma** $ax^2 + c = 0$, **con** $a \neq 0$ **y** $c \neq 0$

Este tipo de ecuaciones se resuelven despejando x^2,

$$\begin{aligned} ax^2 + c &= 0 \\ ax^2 &= -c \\ x^2 &= -\frac{c}{a} \end{aligned}$$

Si a y c son de signos contrarios, es decir, si $-\frac{c}{a} > 0$, entonces la ecuación tiene dos soluciones opuestas

$$x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}} \qquad \text{y} \qquad x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

En cambio, si a y c son del mismo signo, es decir, si $-\frac{c}{a} < 0$, entonces la ecuación no tiene solución, ya que no hay ningún número real que elevado al cuadrado sea negativo.

Ejemplo 25 Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado:

a)

$$2x^2 + 3 = 0$$

b)

$$(x+1)^2 = 2(x-1) + 7$$

Solución: a) La ecuación de segundo grado

$$2x^2 + 3 = 0$$

es incompleta. Observa que $a = 2$, $b = 0$ y $c = 0$. Despejando x^2, obtenemos

$$\begin{aligned} 2x^2 &= -3 \\ x^2 &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

y, por tanto, la ecuación no tiene ninguna solución real.
b) Transformando la ecuación, obtenemos

$$\begin{aligned} (x+1)^2 &= 2(x-1) + 7 \\ x^2 + 2x + 1 &= 2x - 2 + 7 \ \text{ Se han eliminado los paréntesis} \\ x^2 + 2x + 1 &= 2x + 5 \ \text{ Se han reducido términos} \\ x^2 + 2x + 1 - 2x - 5 &= 0 \ \text{ Se ha hecho transposición de términos} \\ x^2 - 4 &= 0 \ \text{ Se han reducido términos semejantes} \end{aligned}$$

es decir, la ecuación dada es equivalente a una ecuación de segundo grado incompleta

$$x^2 - 4 = 0$$

donde $a = 1$, $b = 0$ y $c = -4$. Despejando x^2, obtenemos

$$x^2 = 4$$

y, por tanto, la ecuación tiene dos soluciones opuestas, $x_1 = 2$ y $x_2 = -2$. ■

2. **Ecuaciones de la forma** $ax^2 + bx = 0$, **con** $a \neq 0$ **y** $b \neq 0$

Para resolver este tipo de ecuaciones se saca factor común x,

$$\begin{aligned} ax^2 + bx &= 0 \\ x \cdot (ax + b) &= 0 \end{aligned}$$

De esta manera se obtiene un producto de dos factores igual a cero. Ahora bien, como el producto de dos números reales es cero si y sólo si al menos uno de ellos es cero, las soluciones de la ecuación dada se obtienen como reunión de las soluciones de la ecuación $x = 0$ y de

$$ax + b = 0$$

Por tanto, las soluciones de la ecuación son

$$x_1 = 0 \qquad \text{y} \qquad x_2 = -\frac{b}{a}$$

Ejemplo 26 Resuelve la ecuación

$$3x^2 + 4(x + 1) = 2(x - 1) + 6$$

Solución: Transformando la ecuación, obtenemos

$$\begin{aligned} 3x^2 + 4x + 4 &= 2x - 2 + 6 \\ 3x^2 + 4x + 4 &= 2x + 4 \\ 3x^2 + 4x + 4 - 2x - 4 &= 0 \\ 3x^2 + 2x &= 0 \end{aligned}$$

es decir, la ecuación dada es equivalente a una ecuación de segundo grado incompleta

$$3x^2 + 2x = 0$$

donde $a = 3$, $b = 2$ y $c = 0$. Luego, sacando factor común x, obtenemos

$$x(3x + 2) = 0$$

y, por tanto, las soluciones proceden de las ecuaciones

$$x = 0 \qquad \text{y} \qquad 3x + 2 = 0$$

es decir,

$$x_1 = 0 \quad \text{y} \quad x_2 = -\frac{2}{3}$$

■

3. **Ecuaciones de la forma $ax^2 = 0$, con $a \neq 0$**

Al ser $a \neq 0$, la ecuación $ax^2 = 0$ es equivalente a

$$x^2 = 0$$

Es claro que esta ecuación tiene una solución doble cuyo valor es 0.

4.2. Resolución de ecuaciones completas

El procedimiento para despejar x en las ecuaciones completas de segundo grado

$$ax^2 + bx + c = 0$$

no es tan sencillo como en las incompletas. Sin embargo, desarrollando este procedimiento en el caso general, se deduce que las soluciones de esta ecuación son

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Para recordar estas dos fórmulas escribimos abreviadamente las soluciones de la ecuación de segundo grado mediante

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

En efecto, el proceso que se sigue para resolver una ecuación de segundo grado

$$ax^2 + bx + c = 0$$

es el siguiente:

1. Transponemos el término c:

$$ax^2 + bx = -c$$

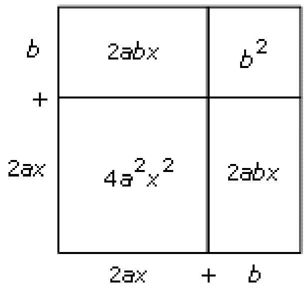
2. Multiplicamos los dos miembros de la ecuación por $4a$:

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$$

3. Sumamos b^2 a los dos miembros de la ecuación:

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = -4ac + b^2$$

De este modo completamos el cuadrado de $2ax + b$ en el primer miembro de la ecuación



y, por tanto, podemos escribir

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

4. Si $b^2 - 4ac \geq 0$, se extrae la raíz cuadrada de los dos miembros de la ecuación:

$$\sqrt{(2ax + b)^2} = \sqrt{b^2 - 4ac}$$

y, por tanto, podemos escribir

$$|2ax + b| = \sqrt{b^2 - 4ac}$$

Con estos cuatro pasos, hemos deducido que la ecuación de segundo grado es equivalente a la ecuación

$$|2ax + b| = \sqrt{b^2 - 4ac}$$

Ahora bien, por las propiedades del valor absoluto, las soluciones de esta ecuación son las soluciones de las dos ecuaciones de primer grado siguientes:

$$2ax + b = \sqrt{b^2 - 4ac} \quad \text{y} \quad 2ax + b = -\sqrt{b^2 - 4ac}$$

que son, respectivamente,

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ejemplo 27 Resolver las ecuaciones

a)

$$2x^2 - 7x + 3 = 0$$

b)
$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}=\frac{5}{12}$$

Solución: a) Es claro que la ecuación
$$2x^2-7x+3=0$$
es de segundo grado y $a=2$, $b=-7$ y $c=3$. Aplicando la fórmula general, tenemos
$$\begin{aligned}
\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} &= \frac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4\cdot 2\cdot 3}}{2\cdot 2}\\
&= \frac{7\pm\sqrt{49-24}}{4}\\
&= \frac{7\pm\sqrt{25}}{4}\\
&= \frac{7\pm 5}{4}\\
&= \begin{cases} \frac{7+5}{4}=3\\ \frac{7-5}{4}=\frac{1}{2}\end{cases}
\end{aligned}$$
y, por tanto, las soluciones son $x_1=3$ y $x_2=1/2$.
Observa que se cumplen
$$2\cdot 3^2-7\cdot 3+3=18-21+3=0$$
y
$$2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2-7\cdot\frac{1}{2}+3=\frac{1}{2}-\frac{7}{2}+3=0$$
lo que significa que la ecuación se ha resuelto correctamente.
b) Para quitar los denominadores de la ecuación
$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}=\frac{5}{12}$$
multiplicamos los dos miembros por $12(x+1)(x-1)$, que es el m.c.m. de los denominadores. Así, obtenemos
$$12(x+1)+12(x-1)=5(x+1)(x-1)$$
Para eliminar los paréntesis, efectuamos operaciones. Así, tenemos
$$\begin{aligned}
12x+12+12x-12 &= 5(x^2-1)\\
24x &= 5x^2-5\\
5x^2-24x-5 &= 0
\end{aligned}$$
En esta ecuación de segundo grado $a=5$, $b=-24$ y $c=-5$. Aplicando la fórmula general, tenemos
$$\begin{aligned}
\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} &= \frac{-(-24)\pm\sqrt{(-24)^2-4\cdot 5\cdot(-5)}}{2\cdot 5}\\
&= \frac{24\pm\sqrt{576+100}}{10}\\
&= \frac{24\pm\sqrt{676}}{10}\\
&= \frac{24\pm 26}{10}\\
&= \begin{cases} \frac{24+26}{10}=5\\ \frac{24-26}{10}=-\frac{1}{5}\end{cases}
\end{aligned}$$
y, por tanto, las soluciones son $x_1=5$ y $x_2=-1/5$.
Comprobemos ahora las soluciones. Para $x=5$, se cumple que
$$\frac{1}{5-1}+\frac{1}{5+1}=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{3+2}{12}=\frac{5}{12}$$

y, para $x = -1/5$ también se cumple que

$$\frac{1}{-\frac{1}{5}-1} + \frac{1}{-\frac{1}{5}+1} = \frac{1}{-\frac{6}{5}} + \frac{1}{\frac{4}{5}} = -\frac{5}{6} + \frac{5}{4} = \frac{-10+15}{12} = \frac{5}{12}$$

Por tanto, la ecuación ha sido bien resuelta. ■

Ejemplo 28 Resuelve la siguiente ecuación

$$2x^2 + 5x - 3 = 0$$

aplicando el proceso de deducción de la fórmula general para hallar las soluciones de una ecuación de segundo grado. Comprueba los resultados obtenidos, aplicando la fórmula general.
Solución: Aplicando, paso a paso, el proceso de deducción de la fórmula general para hallar las soluciones de la ecuación

$$2x^2 + 5x - 3 = 0$$

donde $a = 2$, $b = 5$ y $c = -3$, tenemos:

1. Transponemos el término $c = -3$:
$$2x^2 + 5x = 3$$

2. Multiplicamos los dos miembros de la ecuación por $4a = 8$:
$$16x^2 + 40x = 24$$

3. Sumamos $b^2 = 25$ a los dos miembros de la ecuación:
$$16x^2 + 40x + 25 = 24 + 25$$
y, por tanto, podemos escribir
$$(4x+5)^2 = 49$$

4. Se extrae la raíz cuadrada de los dos miembros de la ecuación:
$$\sqrt{(4x+5)^2} = \sqrt{49}$$
y, por tanto, podemos escribir
$$|4x+5| = 7$$

1. Las soluciones de esta ecuación son las soluciones de las dos ecuaciones de primer grado siguientes:
$$\begin{aligned} 4x+5 &= 7 \\ 4x &= 2 \\ x &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$
y
$$\begin{aligned} 4x+5 &= -7 \\ 4x &= -12 \\ x &= -3 \end{aligned}$$
Por tanto, las soluciones de la ecuación de segundo grado propuesta son $x_1 = 1/2$ y $x_2 = -3$.

Ahora, resolveremos la ecuación

$$2x^2 + 5x - 3 = 0$$

aplicando la fórmula general, y comprobaremos que las soluciones son las que hemos obtenido. Así, tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} &= \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4\cdot 2\cdot(-3)}}{2\cdot 2} \\
&= \frac{-5 \pm \sqrt{25+24}}{4} \\
&= \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{4} \\
&= \frac{-5 \pm 7}{4} \\
&= \begin{cases} \frac{-5+7}{4} = \frac{1}{2} \\ \frac{-5-7}{4} = -3 \end{cases}
\end{aligned}$$

■

4.3. Discusión de una ecuación de segundo grado

Recordemos que discutir una ecuación con una incógnita es analizar los valores que puede tomar, según los que se atribuyen a los coeficientes de la ecuación.
La naturaleza y valor de las soluciones de una ecuación de segundo grado

$$ax^2 + bx + c = 0$$

dependen esencialmente del número $b^2 - 4ac$, llamado también **discriminante** de la ecuación. Distinguimos los tres casos siguientes:

1. Si $b^2 - 4ac > 0$, la ecuación tiene dos soluciones reales distintas

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Por ejemplo, en la ecuación

$$x^2 + 2x - 8 = 0$$

donde $a = 1$, $b = 2$ y $c = -8$, tenemos que el discriminante es

$$2^2 - 4\cdot 1\cdot(-8) = 4 + 32 = 36 > 0$$

y, por tanto, la ecuación tiene dos soluciones reales distintas.

2. Si $b^2 - 4ac = 0$, la ecuación sólo tiene una solución real

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$

y también se dice que la solución es doble.

Por ejemplo, en la ecuación

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

donde $a = c = 1$ y $b = 2$, tenemos que el discriminante es

$$2^2 - 4\cdot 1\cdot 1 = 4 - 4 = 0$$

y, por tanto, la ecuación tiene una solución doble.

3. Si $b^2 - 4ac < 0$, la ecuación no tiene soluciones reales.

Por ejemplo, en la ecuación

$$x^2 + 2x + 5 = 0$$

donde $a = 1$, $b = 2$ y $c = 5$, el discriminante es

$$2^2 - 4\cdot 1\cdot 5 = 4 - 20 = -16 < 0$$

y, por tanto, la ecuación no tiene soluciones reales.

Ejemplo 29 Halla el valor que se ha de dar a m para que la ecuación

$$(m+3)\cdot x^2+2(3m+1)\cdot x+m+3=0$$

tenga una solución doble. Calcula el valor de esta solución.
Solución: La ecuación tendrá una solución doble si su discriminante es cero. En la ecuación

$$(m+3)\cdot x^2+2(3m+1)\cdot x+m+3=0$$

$a=m+3$, $b=2(3m+1)$ y $c=m+3$. Entonces, su discriminante es

$$\begin{aligned} b^2-4ac &= [2(3m+1)]^2-4\cdot(m+3)\cdot(m+3) \\ &= 4(3m+1)^2-4(m+3)^2 \end{aligned}$$

Si el discriminante debe ser cero, entonces tenemos la ecuación siguiente

$$4(3m+1)^2-4(m+3)^2=0$$

Resolviendo esta ecuación, tenemos

$$\begin{aligned} (3m+1)^2-(m+3)^2 &= 0 \\ (3m+1)^2 &= (m+3)^2 \end{aligned}$$

Extrayendo la raíz cuadrada en ambos miembros de la ecuación tenemos

$$\begin{aligned} \sqrt{(3m+1)^2} &= \sqrt{(m+3)^2} \\ |3m+1| &= |m+3| \end{aligned}$$

y, de aquí, por las propiedades del valor absoluto, se obtienen dos ecuaciones

$$3m+1=m+3$$

y

$$3m+1=-(m+3)$$

Resolviéndolas, obtenemos

$$\begin{aligned} 3m+1 &= m+3 \\ 2m &= 2 \\ m &= 1 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} 3m+1 &= -(m+3) \\ 3m+1 &= -m-3 \\ 4m &= -4 \\ m &= -1 \end{aligned}$$

Por tanto, la ecuación propuesta tendrá una solución doble si $m=1$ o $m=-1$.
Para $m=1$, la ecuación es

$$\begin{aligned} 4x^2+8x+4 &= 0 \\ x^2+2x+1 &= 0 \\ (x+1)^2 &= 0 \end{aligned}$$

y, por tanto, la solución doble es $x=-1$.
Para $m=-1$, la ecuación es

$$\begin{aligned} 2x^2-4x+2 &= 0 \\ x^2-2x+1 &= 0 \\ (x-1)^2 &= 0 \end{aligned}$$

y, por tanto, la solución doble en este caso es $x=1$. ■

4.4. Interpretación geométrica de las soluciones

Las soluciones de la ecuación de segundo grado

$$ax^2 + bx + c = 0$$

son también los ceros (Recuerda que los ceros de una función f son los puntos de su dominio tales que

$$f(x) = 0$$

es decir, son los puntos que tienen imagen cero y, por tanto, son los puntos de la gráfica que tienen ordenada cero) de la función polinómica de segundo grado definida mediante

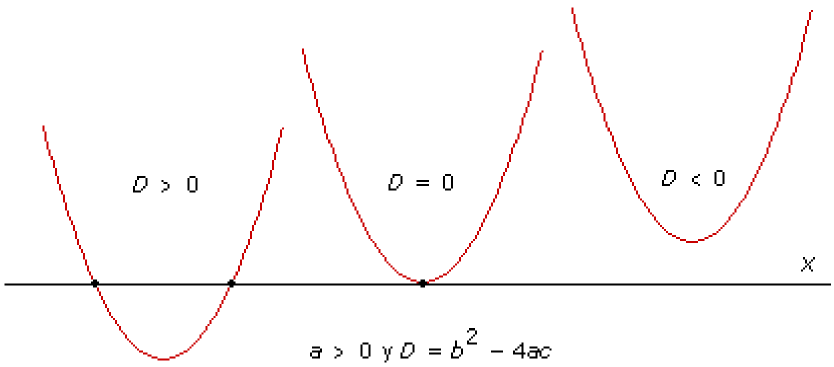
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Como la representación gráfica de esta función es una parábola (vertical), las soluciones de la ecuación de segundo grado serán las abscisas de los puntos de intersección de la parábola con el eje X (Todos los puntos de este eje tienen ordenada cero). Entonces, la discusión de la soluciones de la ecuación de segundo grado se interpreta geométricamente de la siguiente manera: Si $a > 0$, la parábola tiene en su vértice un punto de ordenada mínima y si

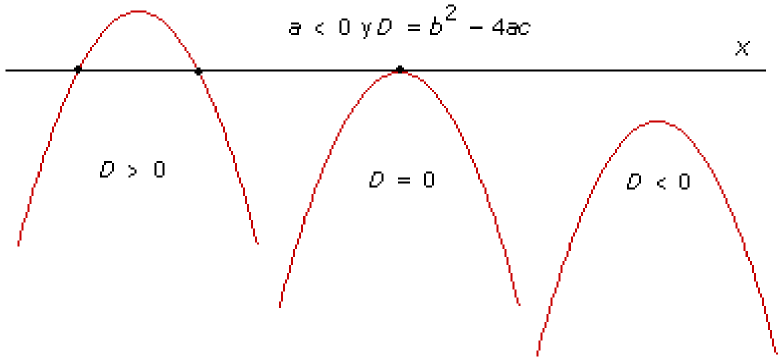
1. $b^2 - 4ac > 0$, la ecuación tiene dos soluciones reales distintas y, por tanto, la parábola corta al eje de abscisas en dos puntos.

2. $b^2 - 4ac = 0$, la ecuación tiene una solución doble y, por tanto, la parábola es tangente al eje de abscisas y su punto de contacto es el vértice, la abscisa del cual es la solución de la ecuación.

3. $b^2 - 4ac < 0$, la ecuación no tiene soluciones reales y, por tanto, la parábola no corta al eje de abscisas.



Si $a < 0$, la parábola tiene en su vértice un punto de ordenada máxima y la interpretación es análoga.



Ejemplo 30 Interpreta geométricamente las soluciones de cada una de las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 + 2x - 3 = 0$

b) $x^2 + 2x + 1 = 0$

c) $x^2 + 2x + 5 = 0$

Solución: a) En la ecuación

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$a = 1$, $b = 2$ y $c = -3$. Su discriminante es

$$D = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16 > 0$$

y, por tanto, la ecuación tiene dos soluciones reales distintas. Geométricamente, significa que la parábola de ecuación

$$y = x^2 + 2x - 3$$

corta al eje de abscisas en dos puntos, las abscisas de los cuales son las soluciones de esta ecuación.
b) En la ecuación

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

$a = c = 1$ y $b = 2$. Su discriminante es

$$D = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0$$

y, por tanto, la ecuación tiene una solución doble. Geométricamente, significa que la parábola de ecuación

$$y = x^2 + 2x + 1$$

es tangente al eje de abscisas y el punto de contacto es su vértice, la abscisa del cual es la solución de la ecuación.
c) En la ecuación

$$x^2 + 2x + 5 = 0$$

$a = 1$, $b = 2$ y $c = 5$. Su discriminante es

$$D = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -16 < 0$$

y, por tanto, la ecuación no tiene soluciones reales. Geométricamente, significa que la parábola de ecuación

$$y = x^2 + 2x + 5$$

no corta al eje de abscisas. ■

4.5. Propiedades de las soluciones

En toda ecuación de segundo grado

$$ax^2 + bx + c = 0$$

se cumple que la suma de sus soluciones es

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

y el producto

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Además, si conocemos la suma s y el producto p de las soluciones de una ecuación de segundo grado, la ecuación puede escribirse de la siguiente manera:

$$x^2 - sx + p = 0$$

Demostración: Toda ecuación de segundo grado

$$ax^2 + bx + c = 0$$

puede considerarse como una ecuación polinómica de la forma $p(x) = 0$, donde

$$p(x) = ax^2 + bx + c \tag{1}$$

y $a \neq 0$. Por tanto, si $b^2 - 4ac \geq 0$, las soluciones

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

son las raíces de $p(x)$ y, en consecuencia, $p(x)$ admite la siguiente descomposión en factores lineales

$$p(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

Si ahora efectuamos los productos indicados y agrupamos términos semejantes, obtenemos

$$p(x) = ax^2 - a \cdot (x_1 + x_2)x + a \cdot x_1 \cdot x_2 \tag{2}$$

Por tratarse del mismo polinomio, los coeficientes de $p(x)$ en (1) y en (2) deben ser iguales y, por tanto, tenemos

$$-a \cdot (x_1 + x_2) = b \quad \text{y} \quad a \cdot x_1 \cdot x_2 = c$$

es decir,

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{y} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

De este modo obtenemos las relaciones entre las soluciones y los coeficientes de una ecuación de segundo grado. Además, si conocemos la suma $s = x_1 + x_2$ y el producto $p = x_1 \cdot x_2$ de las soluciones de una ecuación de segundo grado, la ecuación puede escribirse también de la siguiente manera:

$$ax^2 - a \cdot sx + a \cdot p = 0$$

y, ahora, dividiendo por a los dos miembros de esta ecuación, obtenemos

$$x^2 - sx + p = 0$$

■

Ejemplo 31 Sin resolver la ecuación

$$4x^2 + 20x + 21 = 0$$

calcula la suma y el producto de sus soluciones.
Solución: Sabemos que la suma s y el producto p de las soluciones de la ecuación

$$ax^2 + bx + c = 0$$

son

$$s = -\frac{b}{a} \quad \text{y} \quad p = \frac{c}{a}$$

Por tanto, si la ecuación es

$$4x^2 + 20x + 21 = 0$$

donde $a = 4$, $b = 20$ y $c = 21$, entonces la suma es

$$s = -\frac{b}{a} = -\frac{20}{4} = -5$$

y el producto es

$$p = \frac{c}{a} = \frac{21}{4}$$

■

Ejemplo 32 Determinar una ecuación de segundo grado, sabiendo que la suma de sus soluciones es $1/4$ y el producto es $-3/8$.
Solución: Una ecuación de segundo grado con estas propiedades viene dada por

$$x^2 - sx + p = 0$$

donde s es la suma de sus soluciones y p es el producto. Por tanto, como $s = 1/4$ y $p = -3/8$, obtenemos la ecuación

$$x^2 - \frac{1}{4}x - \frac{3}{8} = 0$$

o su equivalente,

$$8x^2 - 2x - 3 = 0$$

■

De la demostración del resultado anterior, es claro que, conocidas las soluciones x_1 y x_2 de una ecuación de segundo grado

$$ax^2 + bx + c = 0$$

también conocemos las raíces del polinomio de segundo grado correspondiente

$$p(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$$

y, recíprocamente, conocidas las raíces x_1 y x_2 de un polinomio de segundo grado, podemos formar una ecuación de segundo grado mediante

$$(x - x_1) \cdot (x - x_2) = 0$$

que tiene por soluciones las raíces de este polinomio.
Por lo tanto, conocidas las soluciones x_1 y x_2 de una ecuación de segundo grado podemos determinarla enseguida mediante la ecuación anterior.
Por ejemplo, una ecuación de segundo grado que tiene por soluciones

$$x_1 = 1 + \sqrt{3} \qquad \text{y} \qquad x_2 = 1 - \sqrt{3}$$

es

$$\begin{aligned}
(x - 1 - \sqrt{3})(x - 1 + \sqrt{3}) &= 0 \\
\left[(x-1) - \sqrt{3}\right]\left[(x-1) + \sqrt{3}\right] &= 0 \\
(x-1)^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2 &= 0 \\
x^2 - 2x + 1 - 3 &= 0 \\
x^2 - 2x - 2 &= 0
\end{aligned}$$

Otra aplicación del resultado que hemos obtenido al principio de este apartado es que podemos determinar, sin resolver la ecuación de segundo grado, el signo de sus soluciones, una vez que se ha probado que existen.
Por ejemplo, consideremos la ecuación

$$3x^2 - 14x + 8 = 0$$

Por ser el discriminante

$$D = b^2 - 4ac = (-14)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 8 = 100 > 0$$

la ecuación propuesta tendrá dos soluciones reales distintas. Ahora bien, por ser el producto de sus soluciones

$$p = \frac{c}{a} = \frac{8}{3} > 0$$

las dos soluciones tendrán el mismo signo, y como, por otra parte, se cumple que la suma

$$s = -\frac{b}{a} = \frac{14}{3} > 0$$

dichas dos soluciones serán positivas.

Ejemplo 33 Sin resolver la ecuación

$$3x^2 - 14x - 8 = 0$$

determina el signo de sus soluciones.
Solución: Como el discriminante es

$$D = b^2 - 4ac = (-14)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-8) = 292 > 0$$

la ecuación tendrá dos soluciones reales distintas. Además, por ser

$$p = \frac{c}{a} = -\frac{8}{3} < 0$$

las soluciones tendrán signos contrarios, y como, por otra parte, la suma es

$$s = -\frac{b}{a} = \frac{14}{3} > 0$$

corresponderá signo positivo a la solución de mayor valor absoluto. ■

Ejemplo 34 ¿Sabrías decir qué valor debe tener q en la ecuación

$$x^2 - 12x + q = 0$$

para que la diferencia de sus soluciones sea 16?
Solución: Si designamos por x e y las soluciones de esta ecuación, por el enunciado tenemos

$$x - y = 16$$

Por otra parte, sabemos que la suma de las soluciones es

$$x + y = -\frac{b}{a} = 12$$

Por tanto, obtenemos el siguiente sistema

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} x & - & y & = & 16 \\ x & + & y & = & 12 \end{array} \right.$$

Sumando miembro a miembro ambas ecuaciones, obtenemos

$$\begin{aligned} 2x &= 28 \\ x &= 14 \end{aligned}$$

y sustituyendo este valor de x en la segunda ecuación del sistema, obtenemos

$$\begin{aligned} 14 + y &= 12 \\ y &= -2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, las soluciones de la ecuación propuesta son 14 y -2. Ahora bien, como el producto de la soluciones es

$$x \cdot y = \frac{c}{a} = q$$

deducimos que

$$q = 14 \cdot (-2) = -28$$

■

4.6. Ecuaciones bicuadradas

Se llama **ecuación bicuadrada** a toda ecuación equivalente a una ecuación polinómica de cuarto grado de la forma

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

donde $a \neq 0$.
Estas ecuaciones pueden escribirse de la forma

$$a(x^2)^2 + bx^2 + c = 0$$

por lo que haciendo el cambio $x^2 = t$, obtenemos una ecuación de segundo grado

$$at^2 + bt + c = 0$$

Si t_1 y t_2 son las soluciones de esta ecuación, entonces las soluciones de la ecuación bicuadrada son

$$\begin{array}{lcl} x^2 = t_1 & \Longrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \sqrt{t_1} \\ x_2 = -\sqrt{t_1} \end{array} \right. \\ x^2 = t_2 & \Longrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} x_3 = \sqrt{t_2} \\ x_4 = -\sqrt{t_2} \end{array} \right. \end{array}$$

Por tanto, una ecuación bicuadrada puede tener hasta cuatro soluciones.

Ejemplo 35 Resuelve la ecuación

$$x^4 - 29x^2 + 100 = 0$$

Solución: Es claro que se trata de una ecuación bicuadrada. Si hacemos $x^2 = t$, la ecuación dada se convierte en la siguiente ecuación de segundo grado

$$t^2 - 29t + 100 = 0$$

Resolviendo esta ecuación,

$$\begin{aligned} \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} &= \frac{-(-29) \pm \sqrt{(-29)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 100}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{29 \pm \sqrt{841 - 400}}{2} \\ &= \frac{29 \pm \sqrt{441}}{2} \\ &= \frac{29 \pm 21}{2} \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \frac{29+21}{2} = 25 \\ \frac{29-21}{2} = 4 \end{array} \right. \end{aligned}$$

se obtienen las soluciones $t_1 = 25$ y $t_2 = 4$. Entonces,

$$\begin{array}{lcl} x^2 = 25 & \Longrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \sqrt{25} = 5 \\ x_2 = -\sqrt{25} = -5 \end{array} \right. \\ x^2 = 4 & \Longrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} x_3 = \sqrt{4} = 2 \\ x_4 = -\sqrt{4} = -2 \end{array} \right. \end{array}$$

Como vemos, los cuatro valores obtenidos para x son reales. ■

Ejemplo 36 Resuelve la ecuación

$$x^4 + 3x^2 - 28 = 0$$

Solución: Es claro que se trata de una ecuación bicuadrada. Si hacemos $x^2 = t$, la ecuación dada se convierte en la siguiente ecuación de segundo grado

$$t^2 + 3t - 28 = 0$$

Resolviendo esta ecuación,

$$\begin{aligned}
\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} &= \frac{-3 \pm \sqrt{3^2-4\cdot 1\cdot(-28)}}{2\cdot 1} \\
&= \frac{-3 \pm \sqrt{9+112}}{2} \\
&= \frac{-3 \pm \sqrt{121}}{2} \\
&= \frac{-3 \pm 11}{2} \\
&= \begin{cases} \frac{-3+11}{2} = 4 \\ \frac{-3-11}{2} = -7 \end{cases}
\end{aligned}$$

se obtienen las soluciones $t_1 = 4$ y $t_2 = -7$. Entonces,

$$\begin{aligned}
x^2 = 4 &\implies \begin{cases} x_1 = \sqrt{4} = 2 \\ x_2 = -\sqrt{4} = -2 \end{cases} \\
x^2 = -7 &\implies \text{No tiene soluciones reales}
\end{aligned}$$

Como vemos, en este caso, sólo un valor de t da valores reales para x. ■

Hay también ecuaciones reducibles a la forma

$$ax^{2m} + bx^m + c = 0$$

Si hacemos $x^m = t$, la ecuación se convierte en la siguiente ecuación de segundo grado

$$at^2 + bt + c = 0$$

pues

$$x^{2m} = (x^m)^2 = t^2$$

Entonces, las soluciones de la ecuación propuesta se obtendrán a partir de la ecuación

$$x^m = t$$

sustituyendo t por cada uno de los valores hallados en la ecuación de segundo grado. Para resolver esta última ecuación, debemos tener presente lo siguiente:

1. Si m es par y el valor de t es positivo, la ecuación tiene dos soluciones reales, que son las dos raíces m-ésimas de dicho valor.

2. Si m es par y el valor de t es negativo, la ecuación no tiene soluciones reales.

3. Si m es impar y t toma cualquier valor, la ecuación tiene siempre una solución real, que es la raíz m-ésima de dicho valor.

Ejemplo 37 Resuelve la ecuación

$$8x^6 - 63x^3 - 8 = 0$$

Solución: Si hacemos $x^3 = t$, la ecuación dada se convierte en la siguiente ecuación de segundo grado

$$8t^2 - 63t - 8 = 0$$

Resolviendo esta ecuación,

$$\begin{aligned}
\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} &= \frac{-(-63) \pm \sqrt{(-63)^2-4\cdot 8\cdot(-8)}}{2\cdot 8} \\
&= \frac{63 \pm \sqrt{3969+256}}{16} \\
&= \frac{63 \pm \sqrt{4225}}{16} \\
&= \frac{63 \pm 65}{16} \\
&= \begin{cases} \frac{63+65}{16} = 8 \\ \frac{63-65}{16} = -\frac{1}{8} \end{cases}
\end{aligned}$$

se obtienen las soluciones $t_1 = 8$ y $t_2 = -1/8$. Entonces, tenemos

$$\begin{array}{lcl} x^3 = 8 & \Longrightarrow & x_1 = \sqrt[3]{8} = 2 \\ x^3 = -\frac{1}{8} & \Longrightarrow & x_2 = \sqrt[3]{-\frac{1}{8}} = -\frac{1}{2} \end{array}$$

Luego, las soluciones de la ecuación propuesta son 2 y $-1/2$. ■

4.7. Ecuaciones racionales

Se llama **ecuación racional** a toda ecuación en la que aparecen uno o más cocientes de polinomios. Por ejemplos, las siguientes ecuaciones

$$\frac{x}{x-1} + x - 1 = \frac{1}{x-1}$$

y

$$\frac{2x-3}{x+1} = \frac{2x-5}{1-x^2}$$

son racionales.

Para resolver estas ecuaciones se multiplican todos sus términos por el m.c.m. de los denominadores. De este modo, se eliminan todos los denominadores y la ecuación que resulta es polinómica. Ahora bien, debemos tener presente que al hacer esto podemos introducir soluciones que no lo sean de la ecuación original.

En efecto,

$$\begin{array}{rcl} AC & = & BC \\ AC - BC & = & 0 \\ (A-B)C & = & 0 \end{array}$$

Luego,

$$A - B = 0 \qquad \text{o} \qquad C = 0$$

Por tanto,

$$AC = BC \iff \left\{ \begin{array}{l} A = B \\ C = 0 \end{array} \right.$$

es decir, las soluciones de la ecuación $AC = BC$ se obtienen como reunión de las soluciones de la ecuación $A = B$ y de la ecuación $C = 0$. Evidentemente, sólo si $C \neq 0$ podremos asegurar que las soluciones de $AC = BC$ son las mismas que $A = B$.

Por tanto, una vez resuelta la ecuación polinómica que resulta de multiplicar los dos miembros de la ecuación por el m.c.m. de los denominadores, se debe comprobar qué soluciones de las obtenidas cumplen la ecuación original para determinar las soluciones correctas.

Ejemplo 38 Resuelve la ecuación

$$\frac{x}{x-1} + x - 1 = \frac{1}{x-1}$$

Solución: Es claro que el m.c.m. de los denominadores es $x - 1$. Mutiplicando ahora todos los términos de la ecuación por $x - 1$, obtenemos

$$\begin{array}{rcl} x + (x-1)^2 & = & 1 \\ x + x^2 - 2x + 1 & = & 1 \\ x^2 - x & = & 0 \\ x(x-1) & = & 0 \end{array}$$

Luego, las soluciones son $x_1 = 0$ y $x_2 = 1$. La solución $x_1 = 0$ es correcta, pues

$$\begin{array}{rcl} \frac{0}{-1} + 0 - 1 & = & \frac{1}{-1} \\ -1 & = & -1 \end{array}$$

pero, la solución $x_1 = 1$ no es correcta, pues las expresiones

$$\frac{x}{x-1} \quad \text{y} \quad \frac{1}{x-1}$$

no tienen sentido al sustituir x por 1. Por lo tanto, la única solución de la ecuación dada es $x = 0$.
■

Ejemplo 39 Resuelve la ecuación

$$\frac{2x-3}{x+1} = \frac{2x-5}{1-x^2}$$

Solución: Como

$$1 - x^2 = (1+x)(1-x)$$

el m.c.m. de los denominadores es $1-x^2$. Multiplicando los dos miembros de la ecuación por $1-x^2$, obtenemos

$$\begin{aligned}
(1-x)(2x-3) &= 2x-5 \\
2x - 2x^2 - 3 + 3x &= 2x-5 \\
-2x^2 + 3x + 2 &= 0 \\
2x^2 - 3x - 2 &= 0 \ \text{ Hemos multiplicado por } -1 \text{ los dos miembros de la ecuación}
\end{aligned}$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado, obtenemos

$$\frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{3 \pm 5}{4}$$

Luego, las soluciones de la ecuación de segundo grado son $x_1 = 2$ y $x_2 = -1/2$. Se comprueba en seguida que las dos soluciones son correctas. ■

4.8. Ecuaciones irracionales

Se llama **ecuación irracional** a toda ecuación en la que la incógnita aparece en alguno de sus términos bajo el signo de un radical.
Por ejemplo, las siguientes ecuaciones

$$\sqrt{x+4} - x + 2 = 0$$

y

$$\sqrt[3]{x+3} = 2x + \sqrt{x}$$

son irracionales.
Aunque aquí trataremos la resolución de ecuaciones irracionales en las que la incógnita aparece bajo el signo de la raíz cuadrada, el método puede extenderse a cualquier otro caso en el que la incógnita aparace bajo el signo de otro radical.
Para resolver estas ecuaciones hemos de tener presente la siguiente propiedad: si elevamos al cuadrado los dos miembros de una ecuación no se obtiene otra ecuación equivalente a la primera pero todas las soluciones de la primera son soluciones de la segunda.

$$A = B \implies A^2 = B^2$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
A^2 &= B^2 \\
A^2 - B^2 &= 0 \\
(A+B)(A-B) &= 0
\end{aligned}$$

luego,

$$A + B = 0 \quad \text{o} \quad A - B = 0$$

es decir,

$$A = -B \quad \text{o} \quad A = B$$

Por tanto,

$$A^2 = B^2 \iff \left\{ \begin{array}{l} A = -B \\ A = B \end{array} \right.$$

es decir, todas las soluciones de $A = B$ son soluciones de $A^2 = B^2$.
Como consecuencia de este resultado, si para resolver la ecuación $A = B$, resolvemos la ecuación $A^2 = B^2$ que resulta de elevar al cuadrado los dos miembros de la ecuación, al final habrá que descartar las soluciones de la ecuación $A = -B$.
Por ejemplo, consideremos la ecuación

$$\sqrt{x+4} = x - 2$$

Elevando al cuadrado los dos miembros, obtenemos la siguiente ecuación

$$x + 4 = (x-2)^2$$

Desarrollando el cuadrado y simplificando, tenemos

$$\begin{array}{rcl} x+4 &=& x^2 - 4x + 4 \\ x^2 - 5x &=& 0 \\ x(x-5) &=& 0 \end{array}$$

y, por tanto, las soluciones son $x_1 = 0$ y $x_2 = 5$. Observa que $x_1 = 0$ es solución de la ecuación

$$\sqrt{x+4} = -(x-2)$$

y $x_2 = 5$ es solución de

$$\sqrt{x+4} = x - 2$$

Por consiguiente, sólo $x_2 = 5$ es solución de la ecuación original.

4.8.1. Resolución de ecuaciones irracionales cuadráticas

Para resolver este tipo de ecuaciones se realizan los siguienes pasos:

1. Aislamos un radical en uno de los miembros de la ecuación, pasando los restantes términos, sean radicales o no, al otro miembro.

Por ejemplo, para resolver la ecuación

$$\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+1} = 1$$

primero, aislamos un radical

$$\sqrt{2x+3} = 1 + \sqrt{x+1}$$

2. Elevamos al cuadrado los dos miembros de la ecuación para eliminar el radical aislado.

En la ecuación anterior, al elevar al cuadrado los dos miembros se obtiene

$$\begin{array}{rcl} \left(\sqrt{2x+3}\right)^2 &=& \left(1+\sqrt{x+1}\right)^2 \\ 2x+3 &=& 1 + 2\sqrt{x+1} + \left(\sqrt{x+1}\right)^2 \\ 2x+3 &=& 1 + 2\sqrt{x+1} + x + 1 \end{array}$$

3. Reducimos términos semejantes.

En la ecuación anterior, al reducir términos semejantes, obtenemos

$$x + 1 = 2\sqrt{x+1}$$

4. Si todavía existe algún radical en la ecuación, se repite el proceso hasta que se eliminen todos los radicales.

La ecuación anterior tiene todavía un radical. Por tanto, debemos primero aislarlo, después elevar al cuadrado y finalmente reducir términos semejantes,

$$\begin{array}{rcl} (x+1)^2 & = & \left(2\sqrt{x+1}\right)^2 \\ x^2+2x+1 & = & 4(x+1) \\ x^2+2x+1 & = & 4x+4 \\ x^2-2x-3 & = & 0 \end{array}$$

5. Resolvemos la ecuación que se obtiene.

Resolviendo la ecuación, obtenemos

$$\frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2}$$

luego, las soluciones son $x_1 = 3$ y $x_2 = -1$.

6. Comprobamos qué soluciones de las obtenidas cumplen la ecuación original para determinar las soluciones correctas.

En la ecuación anterior hemos obtenido como soluciones $x_1 = 3$ y $x_2 = -1$. Para $x_1 = 3$ tenemos

$$\sqrt{2 \cdot 3 + 3} - \sqrt{3+1} = \sqrt{9} - \sqrt{4} = 3 - 2 = 1$$

luego, esta solución es correcta. Para $x_2 = -1$ tenemos

$$\sqrt{2 \cdot (-1) + 3} - \sqrt{(-1)+1} = \sqrt{1} - \sqrt{0} = 1 - 0 = 1$$

luego, esta solución es también correcta.

Ejemplo 40 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a)
$$18 - \sqrt{x+10} = 2$$

b)
$$\sqrt{x+9} - \sqrt{x-3} = 6$$

c)
$$\sqrt[3]{x^3+1} = x+1$$

Solución: a) Para resolver la ecuación

$$18 - \sqrt{x+10} = 2$$

aislamos el radical en uno de los miembros de la ecuación, pasando los restantes términos al otro miembro. Así, tenemos

$$16 = \sqrt{x+10}$$

Elevando los dos miembros al cuadrado, se obtiene

$$\begin{array}{rcl} 16^2 & = & \left(\sqrt{x+10}\right)^2 \\ 256 & = & x+10 \end{array}$$

y, de aquí, obtenemos

$$x = 246$$

Ahora, debemos comprobar la solución. Para ello, sustituimos este valor de x en la ecuación original,

$$18 - \sqrt{246+10} = 18 - 16 = 2$$

y como la igualdad se cumple, la solución $x = 246$ es correcta.

b) Para resolver la ecuación
$$\sqrt{x+9}-\sqrt{x-3}=6$$
aislamos un radical en uno de los miembros de la ecuación, pasando los restantes términos, sean radicales o no, al otro miembro. Así, tenemos

$$\sqrt{x+9}=\sqrt{x-3}+6$$

Elevando los dos miembros al cuadrado y reduciendo después términos semejantes, se obtiene

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{x+9}\right)^2 &= \left(\sqrt{x-3}+6\right)^2\\ x+9 &= \left(\sqrt{x-3}\right)^2+12\sqrt{x-3}+36\\ x+9 &= x-3+12\sqrt{x-3}+36\\ 9 &= 12\sqrt{x-3}+33\end{aligned}$$

Aislando de nuevo el radical, tenemos

$$\begin{aligned}-24 &= 12\sqrt{x-3}\\ -2 &= \sqrt{x-3}\end{aligned}$$

Elevando de nuevo los dos miembros al cuadrado, tenemos

$$\begin{aligned}(-2)^2 &= \left(\sqrt{x-3}\right)^2\\ 4 &= x-3\end{aligned}$$

y, por tanto,
$$x=7$$
Ahora, debemos comprobar la solución. Para ello, sustituimos este valor de x en la ecuación original,

$$\sqrt{7+9}-\sqrt{7-3}=4-2=2$$

y como no se cumple la igualdad, la solución obtenida es falsa. Por tanto, la ecuación no tiene solución.
c) Para resolver la ecuación
$$\sqrt[3]{x^3+1}=x+1$$
elevamos al cubo los dos miembros de la ecuación y reducimos después términos semejantes. Así, tenemos

$$\begin{aligned}\left(\sqrt[3]{x^3+1}\right)^3 &= (x+1)^3\\ x^3+1 &= x^3+3x^2+3x+1\\ 3x^2+3x &= 0\\ x^2+x &= 0\end{aligned}$$

Resolviendo esta ecuación de segundo grado incompleta,

$$x(x+1)=0$$

se obtienen las soluciones $x_1=0$ y $x_2=-1$. Ahora debemos comprobar estas soluciones. Para $x=0$, tenemos

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{0^3+1} &= 0+1\\ 1 &= 1\end{aligned}$$

y para $x=-1$,

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{(-1)^3+1} &= -1+1\\ 0 &= 0\end{aligned}$$

y, por tanto, ambas soluciones son válidas. ■

4.9. Ecuaciones polinómicas de grado mayor que dos

Las ecuaciones equivalentes a una ecuación polinómica del tipo

$$p(x) = 0$$

donde $p(x)$ es un polinomio de grado superior a dos, sólo se pueden resolver de forma exacta si podemos descomponer $p(x)$ en factores lineales o de segundo grado. Si no podemos descomponerlo en factores, entonces las soluciones se encontrarán de forma aproximada con la ayuda de la gráfica de la función polinómica f definida mediante $f(x) = p(x)$. Las soluciones de esta ecuación serán los ceros de la función, es decir, los puntos de corte de la gráfica con el eje de abscisas.

Ejemplo 41 Resuelve la ecuación

$$2x^4 + 2x^3 - 11x^2 + 4x + 3 = 0$$

Solución: Mediante la regla de Ruffini y recordando que las raíces enteras de un polinomio con coeficientes enteros son siempre divisores del término independiente, obtenemos

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 2 & 2 & -11 & 4 & 3 \\
1 & & 2 & 4 & -7 & -3 \\
\hline
 & 2 & 4 & -7 & -3 & 0 \\
-3 & & -6 & 6 & 3 & \\
\hline
 & 2 & -2 & -1 & 0 &
\end{array}$$

Luego, el polinomio se descompone de la siguiente manera:

$$2x^4 + 2x^3 - 11x^2 + 4x + 3 = (x-1)\cdot(x+3)\cdot(2x^2 - 2x - 1)$$

y, por tanto, la ecuación original puede escribirse como producto de tres factores, dos lineales y otro de segundo grado,

$$(x-1)\cdot(x+3)\cdot(2x^2 - 2x - 1) = 0$$

Como consecuencia, las soluciones de la ecuación dada se obtendrán como reunión de las tres ecuaciones siguientes:

$$x - 1 = 0 \quad \text{o} \quad x + 3 = 0 \quad \text{o} \quad 2x^2 - 2x - 1 = 0$$

Las dos primeras son de primer grado y se resuelven de forma inmediata, obteniéndose las soluciones $x_1 = 1$ y $x_2 = -3$. La tercera es de segundo grado y sus soluciones se obtienen mediante la fórmula general

$$\begin{aligned}
\frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4\cdot 2\cdot(-1)}}{2\cdot 2} &= \frac{2 \pm \sqrt{12}}{4} \\
&= \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{4} \\
&= \frac{2(1 \pm \sqrt{3})}{4} \\
&= \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

De este modo hemos obtenido las soluciones

$$x_3 = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \quad \text{y} \quad x_4 = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$$

En resumen, las soluciones de la ecuación

$$2x^4 + 2x^3 - 11x^2 + 4x + 3 = 0$$

son

$$\begin{aligned}
x_1 &= 1 \\
x_2 &= -3 \\
x_3 &= \tfrac{1+\sqrt{3}}{2} \\
x_4 &= \tfrac{1-\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}$$

■

Ejemplo 42 Resuelve la ecuación

$$2x^3 + 7x^2 - 6x - 21 = 0$$

Solución: El polinomio $2x^3 + 7x^2 - 6x - 21$ tiene coeficientes enteros y no tiene raíces enteras. Las raíces racionales son de la forma m/n donde m es un divisor del término independiente y n es un divisor del coeficiente del monomio de mayor grado. De este modo, las posibles raíces racionales son $\pm 1/2$, $\pm 3/2$, $\pm 7/2$ y $\pm 21/2$. Probando una a una, vemos que

$$\begin{array}{c|cccc} & 2 & 7 & -6 & -21 \\ -\frac{7}{2} & & -7 & 0 & 21 \\ \hline & 2 & 0 & -6 & 0 \end{array}$$

y, por tanto, $-7/2$ es una raíz. Como consecuencia, obtenemos la siguiente descomposición en factores

$$2x^3 + 7x^2 - 6x - 21 = \left(x + \frac{7}{2}\right)(2x^2 - 6)$$

y entonces la ecuación polinómica se escribe como sigue

$$\left(x + \frac{7}{2}\right)(2x^2 - 6) = 0$$

Las soluciones de esta última ecuación se obtienen como la reunión de las soluciones de las siguientes ecuaciones

$$x + \frac{7}{2} = 0 \qquad \text{o} \qquad 2x^2 - 6 = 0$$

La primera da la solución $x_1 = -7/2$, y la segunda, es una ecuación de segundo grado incompleta que, resolviéndola

$$\begin{aligned} 2x^2 - 6 &= 0 \\ 2x^2 &= 6 \\ x^2 &= 3 \end{aligned}$$

da las soluciones $x_2 = \sqrt{3}$ y $x_3 = -\sqrt{3}$. En resumen, la ecuación polinómica dada tiene como soluciones

$$\begin{aligned} x_1 &= -\tfrac{7}{2} \\ x_2 &= \sqrt{3} \\ x_3 &= -\sqrt{3} \end{aligned}$$

■

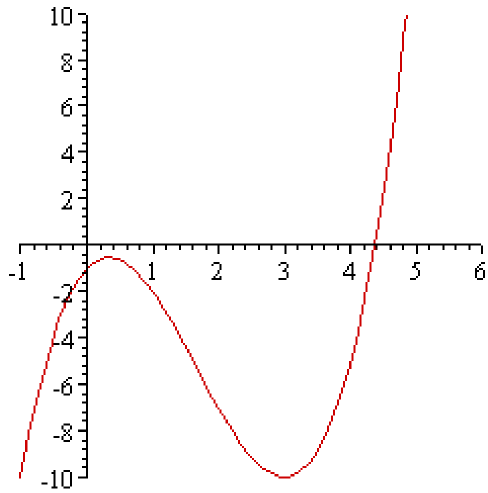
Ejemplo 43 Resuelve la ecuación

$$x^3 - 5x^2 + 3x - 1 = 0$$

Solución: El polinomio $x^3 - 5x^2 + 3x - 1$ tiene coeficientes enteros y no tiene raíces enteras ni racionales. Consideremos ahora la función polinómica siguiente

$$f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x - 1$$

Dando valores a x, mediante una calculadora obtenemos una tabla de valores de esta función. Esta tabla permite obtener un esbozo de la gráfica (Recuerda que las gráficas de la funciones polinómicas son líneas continuas)



Vemos que la gráfica corta al eje X en un solo punto y, en consecuencia, la ecuación dada sólo tiene una solución real. Vemos también que la solución será un número real comprendido entre 4,2 y 4,4. Además, como

$$f(4{,}2) = -2.512$$
$$f(4{,}4) = 0{,}584$$

y

$$f(4{,}3) = -1.043$$

deducimos que la solución se encontrará entre 4,3 y 4,4. Si ahora tomamos como valor para x el punto medio de los dos valores anteriores, tenemos

$$f(4{,}35) = -0{,}249\,63$$

y, en consecuencia, la solución se hallará comprendida entre 4,35 y 4,4. Si repetimos de nuevo el proceso anterior, obtendremos que la solución está comprendida entre 4,36 y 4,37. Podemos mejorar la aproximación tanto como queramos con solo reiterar sucesivamente este proceso. ■

4.10. Problemas de planteamiento

En este apartado resolveremos algunos problemas de planteamiento con ecuaciones de segundo grado con una incógnita. No hay reglas generales para plantear y resolver problemas pero se consideran como de gran utilidad los siguientes consejos:

- Leer con cuidado todo el enunciado del problema
- Determinar lo que se pide; normalmente, esto será la incógnita
- Traducir toda la información a lenguaje algebraico
- Relacionar la información con la incógnita mediante una ecuación
- Resolver la ecuación obtenida y comprobar si la solución es válida
- Interpretar la solución y discutir si es o no coherente con el problema propuesto

4.10.1. Problemas generales

Ejemplo 44 Halla dos números positivos consecutivos sabiendo que la suma de sus cuadrados es 25.
Solución: a) **Planteamiento**: Si x es uno de estos dos números, su consecutivo será $x+1$. Si la suma de sus cuadrados es 25, entonces tenemos la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} x^2 + (x+1)^2 &= 25 \\ x^2 + x^2 + 2x + 1 &= 25 \\ 2x^2 + 2x - 24 &= 0 \\ x^2 + x - 12 &= 0 \end{aligned}$$

b) **Resolución**: Resolviendo esta ecuación de segundo grado,

$$\begin{aligned}\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} &= \frac{-1\pm\sqrt{1+48}}{2}\\ &= \frac{-1\pm 7}{2}\\ &= \left\{\begin{array}{l}\frac{-1+7}{2}=3\\ \frac{-1-7}{2}=-4\end{array}\right.\end{aligned}$$

se obtienen las soluciones $x_1 = 3$ y $x_2 = -4$. Como buscamos números positivos, la solución correcta es $x = 3$. Por consiguiente, los números son 3 y 4. ■

Ejemplo 45 Si se rebajara en 25 céntimos el precio actual de la docena de huevos, con 1 euro podría comprar 4 huevos más que ahora. ¿A cómo se vende la docena de huevos?
Solución: a) **Planteamiento**: Si x es el precio en euros de una docena de huevos, entonces

$$\frac{12}{x}$$

es el precio en euros de un huevo. Luego, con 1 euro puedo comprar

$$\frac{12}{x}\cdot 1=\frac{12}{x}$$

huevos. Si se rebaja en 0.25 euros el precio de la docena de huevos, entonces

$$\frac{12}{x-0{,}25}$$

es el precio rebajado en euros de un huevo. Entonces, según el enunciado, con 1 euro podré comprar 4 huevos más que antes.

$$\frac{12}{x-0{,}25}=\frac{12}{x}+4$$

b) **Resolución**: Multiplicando los dos miembros de la ecuación por $x(x-0{,}25)$, que es el m.c.m. de los denominadores, se obtiene

$$12x=12(x-0{,}25)+4x(x-0{,}25)$$

Eliminando paréntesis y reduciendo términos, se obtiene la siguiente ecuación de segundo grado

$$\begin{aligned}12x &= 12x-3+4x^2-x\\ 4x^2-x-3 &= 0\end{aligned}$$

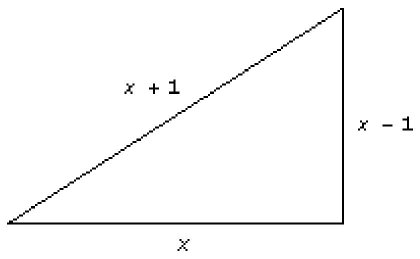
Resolviendo esta ecuación,

$$\begin{aligned}\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} &= \frac{1\pm\sqrt{1+48}}{8}\\ &= \frac{1\pm 7}{8}\\ &= \left\{\begin{array}{l}\frac{1+7}{8}=1\\ \frac{1-7}{8}=-\frac{3}{4}\end{array}\right.\end{aligned}$$

se obtienen las soluciones $x_1 = 1$ y $x_2 = -3/4$. Como el precio de la docena de huevos debe ser un número positivo, la solución correcta es $x = 1$. Por consiguiente, el precio de la docena de huevos es de 1 euro. ■

4.10.2. Problemas geométricos

Ejemplo 46 Los lados de un triángulo rectángulo tienen por medidas en cm tres números consecutivos. Halla estos lados.
Solución: a) **Planteamiento**: Si x es la medida en cm de uno de los lados del triángulo, entonces por ser las medidas de sus lados tres números consecutivos, $x-1$ y $x+1$ son las medidas de los otros dos lados.



Al tratarse de un triángulo rectángulo, el teorema de Pitágoras proporcionará la ecuación que permite hallar las medidas de sus lados. En efecto, según este teorema, debe cumplirse que

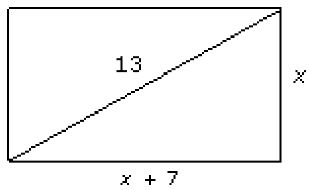
$$(x+1)^2 = x^2 + (x-1)^2$$

b) **Resolución**: Resolviendo esta ecuación,

$$\begin{aligned} (x+1)^2 &= x^2 + (x-1)^2 \\ x^2 + 2x + 1 &= x^2 + x^2 - 2x + 1 \\ x^2 - 4x &= 0 \\ x(x-4) &= 0 \end{aligned}$$

se obtienen las soluciones $x_1 = 0$ y $x_2 = 4$. Es evidente que la única solución posible es $x = 4$, pues la otra solución no tiene sentido. Por consiguiente, los lados de este triángulo miden 3, 4 y 5 cm. ∎

Ejemplo 47 Las dimensiones de un rectángulo difieren en 7 unidades y su diagonal mide 13 dm. Halla las dimensiones de este rectángulo.
Solución: a) **Planteamiento**: Si x es la medida en dm de un lado de este rectángulo, $x+7$ es la medida del otro lado.



Entonces, por el teorema de Pitágoras, podemos escribir la siguiente ecuación

$$(x+7)^2 + x^2 = 13^2$$

b) **Resolución**: Para resolver la ecuación

$$(x+7)^2 + x^2 = 169$$

primero, efectuamos operaciones y, después, reducimos términos,

$$\begin{aligned} x^2 + 14x + 49 + x^2 &= 169 \\ 2x^2 + 14x - 120 &= 0 \\ x^2 + 7x - 60 &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo ahora esta ecuación de segundo grado,

$$\begin{aligned} \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} &= \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 240}}{2} \\ &= \frac{-7 \pm 17}{2} \\ &= \begin{cases} \frac{-7+17}{2} = 5 \\ \frac{-7-17}{2} = -12 \end{cases} \end{aligned}$$

se obtienen las soluciones $x_1 = 5$ y $x_2 = -12$. Es evidente que la única solución posible es $x = 5$, pues la otra solución no tiene sentido. Por consiguiente, las dimensiones del rectángulo son 5 y 12 dm. ∎

4.10.3. Problemas de edades

Ejemplo 48 Hace dos años la edad de un padre era 11 veces la del hijo y dentro de un año la edad del padre será el cuadrado de la del hijo. Calcula las edades actuales de los dos.
Solución: a) **Planteamiento**: Si la edad actual del hijo es x, hace dos años era $x-2$ y, por tanto, la de su padre era

$$11(x-2)$$

y, como consecuencia, su edad actual es

$$11(x-2)+2$$

Por otra parte, dentro de un año, el hijo tendrá $x+1$ años y, según el enunciado, su padre tendrá $(x+1)^2$ años, o lo que es lo mismo, su padre tiene actualmente

$$(x+1)^2-1$$

Por tanto, debe cumplirse que

$$11(x-2)+2=(x+1)^2-1$$

b) **Resolución**: Para resolver la ecuación

$$11(x-2)+2=(x+1)^2-1$$

primero, eliminamos los paréntesis y, después, reducimos términos

$$\begin{aligned} 11x-22+2 &= x^2+2x+1-1 \\ x^2-9x+20 &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo ahora esta ecuación de segundo grado,

$$\begin{aligned} \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} &= \frac{9\pm\sqrt{81-80}}{2} \\ &= \frac{9\pm 1}{2} \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \frac{9+1}{2}=5 \\ \frac{9-1}{2}=4 \end{array} \right. \end{aligned}$$

se obtienen las soluciones $x_1=5$ y $x_2=4$. Por lo tanto, tenemos dos posibles soluciones: si el hijo tiene 5 años, su padre tiene $(5+1)^2-1=35$ años, o bien el hijo tiene 4 años y el padre $(4+1)^2-1=24$ años. ■

Ejemplo 49 La edad de un niño será dentro de 3 años un cuadrado perfecto y hace 3 años su edad era precisamente la raíz cuadrada de este cuadrado perfecto. Halla su edad.
Solución: a) **Planteamiento**: Si x es la edad actual del niño, su edad dentro de 3 años será $x+3$ y hace 3 años era $x-3$. Si $x+3$ es un cuadrado perfecto y su raíz cuadrada es $x-3$, tenemos la siguiente ecuación

$$\sqrt{x+3}=x-3$$

b) **Resolución**: Para resolver esta ecuación, primero debemos elevar al cuadrado

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{x+3}\right)^2 &= (x-3)^2 \\ x+3 &= x^2-6x+9 \\ x^2-7x+6 &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado,

$$\begin{aligned} \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} &= \frac{7\pm\sqrt{49-24}}{2} \\ &= \frac{7\pm 5}{2} \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \frac{7+5}{2}=6 \\ \frac{7-5}{2}=1 \end{array} \right. \end{aligned}$$

se obtienen las soluciones $x_1 = 6$ y $x_2 = 1$. De estas dos soluciones sólo es válida $x = 6$, ya que la otra solución no satisface la ecuación propuesta

$$\sqrt{1+3} \neq 1 - 3$$

Por consiguiente, el niño tiene 6 años. ∎

4.10.4. Problemas de grifos

Ejemplo 50 Un grifo tarda 10 minutos menos que otro en llenar un depósito, y los dos juntos tardan 12 minutos. ¿Cuánto tardará cada uno por separado?
Solución: a) **Planteamiento**: Recogemos la información del enunciado en el siguiente cuadro

Grifos	Depósito lleno	Depósito en un minuto
1º	x minutos	lleno hasta $\frac{1}{x}$ de su capacidad
2º	$x-10$ minutos	lleno hasta $\frac{1}{x-10}$ de su capacidad
1º + 2º	12 horas	lleno hasta $\frac{1}{12}$ de su capacidad

Luego, se ha de cumplir que

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-10} = \frac{1}{12}$$

b) **Resolución**: Multiplicando los dos miembros de la ecuación por $12x(x-10)$, que es el m.c.m. de los denominadores, se obtiene

$$12(x-10) + 12x = x(x-10)$$

Efectuando ahora operaciones y, después, reduciendo términos, tenemos

$$\begin{aligned} 12x - 120 + 12x &= x^2 - 10x \\ x^2 - 34x + 120 &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo esta ecuación de segundo grado,

$$\begin{aligned} \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} &= \frac{34 \pm \sqrt{1156-480}}{2} \\ &= \frac{34 \pm 26}{2} \\ &= \begin{cases} \frac{34+26}{2} = 30 \\ \frac{34-26}{2} = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

se obtienen las soluciones $x_1 = 30$ y $x_2 = 4$. Es evidente que la solución $x = 4$ no tiene sentido. Por lo tanto, un grifo tarda 30 minutos y el otro 20 minutos. ∎

Ejemplo 51 Dos grifos tardan 25 horas en llenar por separado la mitad de un depósito, pero juntos tardan 12 horas en llenarlo por completo. ¿Cuánto tiempo tardará cada uno en llenar el depósito?
Solución: a) **Planteamiento**: Si por separado los dos grifos tardan 25 horas en llenar la mitad de un depósito, tardarán 50 horas en llenarlo por completo. Ahora observa el siguiente cuadro

Grifos	Depósito lleno	Depósito en una hora
1º	x horas	lleno hasta $\frac{1}{x}$ de su capacidad
2º	$50-x$ horas	lleno hasta $\frac{1}{50-x}$ de su capacidad
1º + 2º	12 horas	lleno hasta $\frac{1}{12}$ de su capacidad

Luego, se ha de cumplir que

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{50-x} = \frac{1}{12}$$

b) **Resolución**: Multiplicando los dos miembros de la ecuación por $12x(50-x)$, que es el m.c.m. de los denominadores, se obtiene

$$12(50-x) + 12x = x(50-x)$$

Efectuando ahora operaciones y, después, reduciendo términos, tenemos

$$\begin{aligned} 600 - 12x + 12x &= 50x - x^2 \\ x^2 - 50x + 600 &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo esta ecuación de segundo grado,

$$\begin{aligned} \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} &= \frac{50 \pm \sqrt{2500 - 2400}}{2} \\ &= \frac{50 \pm 10}{2} \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \frac{50+10}{2} = 30 \\ \frac{50-10}{2} = 20 \end{array} \right. \end{aligned}$$

se obtienen las soluciones $x_1 = 30$ y $x_2 = 20$. Por lo tanto, si un grifo tarda 30 horas en llenar el depósito, el otro lo hace en 20 horas. ■

4.10.5. Problemas de móviles

Ejemplo 52 Halla las velocidades de dos trenes, sabiendo que uno de ellos recorre 18 Km más por hora que el otro, y tarda 3 horas menos que éste en recorrer 420 Km.
Solución: En todos los problemas de móviles se utilizará la relación

$$\text{espacio} = \text{velocidad} \times \text{tiempo}$$

que es válida sólo para los casos en los que las velocidades de los móviles no varían con el tiempo.
a) **Planteamiento**: Es claro que

$$\text{tiempo} = \frac{\text{espacio}}{\text{velocidad}}$$

Si x es la velocidad en Km/h de uno de los dos trenes, la velocidad del otro es $x + 18$. Según el enunciado, el tren más rápido tarda 3 horas menos en recorrer los 420 Km y, por tanto, se ha cumplir que

$$\frac{420}{x + 18} = \frac{420}{x} - 3$$

b) **Resolución**: Multiplicando los dos miembros de la ecuación por $x(x + 18)$, que es el m.c.m. de los denominadores, se obtiene

$$420x = 420(x + 18) - 3x(x + 18)$$

Efectuando ahora operaciones y, después, reduciendo términos, tenemos

$$\begin{aligned} 420x &= 420x + 7560 - 3x^2 - 54x \\ 3x^2 + 54x - 7560 &= 0 \\ x^2 + 18x - 2520 &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo esta ecuación de segundo grado,

$$\begin{aligned} \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} &= \frac{-18 \pm \sqrt{324 + 10080}}{2} \\ &= \frac{-18 \pm 102}{2} \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \frac{-18+102}{2} = 42 \\ \frac{-18-102}{2} = -60 \end{array} \right. \end{aligned}$$

se obtienen las soluciones $x_1 = 42$ y $x_2 = -60$. La solución negativa no tiene sentido ya que, de lo contrario, tendríamos un tiempo negativo. Por lo tanto, la velocidad de un tren es 42 Km/h y la del otro es 60 Km/h. ■

Ejemplo 53 Un barquero sube por un río en un recorrido de 1800 metros. Para bajar, emplea 9 minutos menos que en la subida, pues la corriente le hace aumentar la velocidad en 100 metros por minuto con respecto a la primera. ¿Cuál es el tiempo empleado en subir y bajar?
Solución: a) **Planteamiento**: Es claro que

$$\text{tiempo} = \frac{\text{espacio}}{\text{velocidad}}$$

Si x es la velocidad en metros por minuto con la que sube por el río, $x + 100$ es la velocidad con la que baja. Según el enunciado, emplea 9 minutos menos al bajar que al subir y como el recorrido en ambos casos es de 1800 metros, se ha cumplir

$$\frac{1800}{x+100} = \frac{1800}{x} - 9$$

b) **Resolución**: Multiplicando los dos miembros de la ecuación por $x(x + 100)$, que es el m.c.m. de los denominadores, se obtiene

$$1800x = 1800(x + 100) - 9x(x + 100)$$

Efectuando ahora operaciones y, después, reduciendo términos, tenemos

$$\begin{aligned} 1800x &= 1800x + 180000 - 9x^2 - 900x \\ 9x^2 + 900x - 180000 &= 0 \\ x^2 + 100x - 20000 &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo esta ecuación de segundo grado,

$$\begin{aligned} \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} &= \frac{-100 \pm \sqrt{10000 + 80000}}{2} \\ &= \frac{-100 \pm 300}{2} \\ &= \begin{cases} \frac{-100+300}{2} = 100 \\ \frac{-100-300}{2} = -200 \end{cases} \end{aligned}$$

se obtienen las soluciones $x_1 = 100$ y $x_2 = -200$. La solución negativa no tiene sentido ya que, de lo contrario, tendríamos un tiempo negativo. Por lo tanto, la velocidad del barquero al subir es de 100 m/min y al bajar es de 200 m/min. ∎

5. Ecuaciones con varias incógnitas

Hemos visto en otros apartados que las ecuaciones con una incógnita son reducibles mediante transformaciones adecuadas a ecuaciones polinómicas de un cierto grado. También hay ecuaciones con dos o más incógnitas. Por ejemplo, los siguientes enunciados se expresan mediante ecuaciones con más de una incógnita:

	Enunciado	Ecuación
(1)	El perímetro de un rectángulo es 12	$2x + 2y = 12$
(2)	El producto de dos números es 27	$xy = 27$
(3)	La suma de las edades de tres hermanos es 45	$x + y + z = 45$
(4)	La diagonal de un rectángulo es 5	$x^2 + y^2 = 25$

Las ecuaciones de este tipo se distinguen por el número de incógnitas y por el grado con el que intervienen (Si en un término de la ecuación aparecen dos incógnitas, el grado es la suma de los grados de las dos incógnitas). Las ecuaciones (1) y (3) son de primer grado, la primera con dos incógnitas y la segunda con tres, mientras que las ecuaciones (2) y (4) son de segundo grado con dos incógnitas.

5.1. Ecuaciones de primer grado con varias incógnitas

Se llama **ecuación de primer grado** o **lineal con n incógnitas** $x_1, x_2, ..., x_n$ a toda ecuación equivalente a una del tipo

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

Por ejemplo,

$$3x - y + z = 2$$

es una ecuación lineal con tres incógnitas y

$$x + y - z + t = -1$$

es una ecuación lineal con cuatro incógnitas.
Una solución de este tipo de ecuaciones es una n-tupla ordenada de números $(x_1, x_2, ..., x_n)$ que satisfacen la igualdad. Dicho de otra manera, una solución es una lista ordenada de valores de las incógnitas $x_1 = p_1$, $x_2 = p_2$, ..., $x_n = p_n$ tales que, al sustituir cada incógnita por el valor correspondiente, se cumple la ecuación.
Estas ecuaciones tienen un número infinito de soluciones. Es suficiente con asignar un valor arbitrario a todas las incógnitas menos una para que resulte una ecuación que tiene sólo esta incógnita. Resuelta esta ecuación se obtiene una solución de la ecuación propuesta. Como este proceso se puede repetir, se obtiene así tantas soluciones como queramos.
Consideremos la siguiente ecuación lineal con tres incógnitas

$$3x - y + z = 2$$

Dando valores arbitrarios a dos de las incógnitas, se obtiene una ecuación con una incógnita y, resolviéndola, se obtiene el valor correspondiente de la tercera incógnita. Por ejemplo, dando los valores $x = 1$ y $z = -2$, se obtine la ecuación

$$\begin{array}{rcl} 3 \cdot 1 - y + (-2) & = & 2 \\ -y & = & 2 + 2 - 3 \\ -y & = & 1 \\ y & = & -1 \end{array}$$

Luego, $(1, -1, -2)$ es una solución de esta ecuación. Si damos ahora $y = 1$ y $z = 3$, entonces se obtiene la ecuación

$$\begin{array}{rcl} 3x - 1 + 3 & = & 2 \\ 3x + 2 & = & 2 \\ 3x & = & 0 \\ x & = & 0 \end{array}$$

y, por tanto, $(0, 1, 3)$ es otra solución de esta ecuación. Repitiendo este procedimiento podemos encontrar tantas soluciones de esta ecuación como queramos.

5.2. Ecuaciones de primer grado con dos incógnitas

Se llama **ecuación de primer grado** o **lineal con dos incógnitas** a toda ecuación equivalente a una de la forma

$$ax + by = c$$

donde $a \neq 0$ y $b \neq 0$.
Por ejemplo, la ecuación

$$\frac{3(x-y)}{2} - \frac{x}{3} = 1 - \frac{2y}{4}$$

es de primer grado con dos incógnitas, pues

$$\begin{aligned}
\frac{3(x-y)}{2}-\frac{x}{3} &= 1-\frac{2y}{4}\\
\frac{18(x-y)}{12}-\frac{4x}{12} &= \frac{12}{12}-\frac{6y}{12}\\
18(x-y)-4x &= 12-6y\\
18x-18y-4x &= 12-6y\\
14x-18y+6y &= 12\\
14x-12y &= 12\\
7x-6y &= 6
\end{aligned}$$

y, por tanto, la ecuación propuesta es equivalente a

$$7x-6y=6$$

Una solución de esta ecuación viene dada por un par de números (x, y) que satisfacen la igualdad. Por ejemplo, el par $(0, -1)$ es solución de la ecuación anterior, pues si sustituimos x por 0 e y por -1, se cumple

$$7\cdot 0-6\cdot(-1)=6$$

A diferencia de las ecuaciones de primer grado con una incógnita, estas ecuaciones tienen siempre un número ilimitado de soluciones; podemos encontrar tantas soluciones como queramos dando valores arbitrarios a una de las incógnitas y calculando, para cada uno de ellos, el valor correspondiente de la otra incógnita que hace que la igualdad se satisfaga. Por ejemplo, dando el valor $x=1$, se obtiene la siguiente ecuación de primer grado con una incógnita

$$\begin{aligned}
7\cdot 1-6y &= 6\\
-6y &= 6-7\\
-6y &= -1\\
6y &= 1\\
y &= \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

y, por tanto, $(1, 1/6)$ es otra solución de la ecuación; análogamente, para $y=-2$, tenemos

$$\begin{aligned}
7x-6\cdot(-2) &= 6\\
7x &= 6-12\\
7x &= -6\\
x &= -\frac{6}{7}
\end{aligned}$$

y, por tanto, $(-6/7, -2)$ es otra solución de la ecuación. De este modo, podemos hallar tantas soluciones como queramos de la ecuación propuesta.

Ejemplo 54 De las siguientes ecuaciones, averigua cuáles son de primer grado con dos incógnitas.

a)
$$3x-\frac{5(y-1)}{2}=-\frac{2(x-y)}{6}+\frac{1}{4}$$

b)
$$(x-y)^2-(x+y)^2+3(x-y)=4(1-xy)$$

c)
$$3(x-y)+4(x+y)+3=x+y-1$$

Solución: a)

$$\begin{aligned}
3x - \frac{5(y-1)}{2} &= -\frac{2(x-y)}{6} + \frac{1}{4} \\
\frac{36x}{12} - \frac{30(y-1)}{12} &= -\frac{4(x-y)}{12} + \frac{3}{12} \\
36x - 30(y-1) &= -4(x-y) + 3 \\
36x - 30y + 30 &= -4x + 4y + 3 \\
36x - 30y + 4x - 4y &= 3 - 30 \\
40x - 34y &= -27
\end{aligned}$$

Luego, la ecuación dada es equivalente a la siguiente ecuación de primer grado con dos incógnitas

$$40x - 34y = -27$$

b)

$$\begin{aligned}
(x-y)^2 - (x+y)^2 + 3(x-y) &= 4(1-xy) \\
x^2 - 2xy + y^2 - (x^2 + 2xy + y^2) + 3x - 3y &= 4 - 4xy \\
x^2 - 2xy + y^2 - x^2 - 2xy - y^2 + 3x - 3y &= 4 - 4xy \\
-4xy + 3x - 3y &= 4 - 4xy \\
3x - 3y &= 4
\end{aligned}$$

Luego, la ecuación dada es equivalente a la siguiente ecuación de primer grado con dos incógnitas

$$3x - 3y = 4$$

c)

$$\begin{aligned}
3(x-y) + 4(x+y) + 3 &= x + y - 1 \\
3x - 3y + 4x + 4y + 3 &= x + y - 1 \\
7x + y + 3 &= x + y - 1 \\
7x - x &= -1 - 3 \\
6x &= -4 \\
3x &= -2
\end{aligned}$$

Por tanto, la ecuación dada es equivalente a la siguiente ecuación de primer grado con una incógnita

$$3x = -2$$

■

Ejemplo 55 Encuentra una ecuación lineal con dos incógnitas que tenga como soluciones $(2, -1)$ y $(0, 4)$.
Solución: La forma general de una ecuación lineal con dos incógnitas es

$$ax + by = c$$

con $a \neq 0$ y $b \neq 0$. Si $(0, 4)$ es solución de la ecuación se ha de cumplir que

$$\begin{aligned}
a \cdot 0 + b \cdot 4 &= c \\
c &= 4b
\end{aligned}$$

Del mismo modo, si $(2, -1)$ es otra solución, tenemos

$$\begin{aligned}
a \cdot 2 + b \cdot (-1) &= c \\
2a - b &= c
\end{aligned}$$

Ahora bien, como $c = 4b$, tenemos

$$\begin{aligned} 2a - b &= 4b \\ 2a &= 4b + b \\ 2a &= 5b \\ a &= \frac{5b}{2} \end{aligned}$$

Luego, sustituyendo las expresiones de c y a en términos de b, la ecuación puede escribirse entonces como sigue

$$\frac{5b}{2}x + by = 4b$$

Multiplicando ambos miembros por $2/b$, resulta la siguiente ecuación equivalente

$$5x + 2y = 8$$

que es una ecuación que admite las soluciones dadas. ■

Ejemplo 56 Calcula b en la siguiente ecuación

$$2x - by = 1$$

sabiendo que $(2, -3)$ es una solución de la misma.
Solución: Si $(2, -3)$ es solución de la ecuación, significa que al sustituir x por 2 e y por -3, la igualdad se satisface, es decir,

$$\begin{aligned} 2 \cdot 2 - b \cdot (-3) &= 1 \\ 4 + 3b &= 1 \\ 3b &= 1 - 4 \\ 3b &= -3 \\ b &= -1 \end{aligned}$$

■

5.3. Representación gráfica de las soluciones

Tomando dos ejes de coordenadas cartesianas, el conjunto de todas las soluciones reales de una ecuación lineal con dos incógnitas

$$ax + by = c$$

se representa gráficamente por una recta, y, recíprocamente, toda función cuya gráfica es una recta tiene por grafo un conjunto cuyos elementos son las soluciones de una ecuación lineal con dos incógnitas.
En efecto, el conjunto de soluciones reales de la ecuación es

$$\begin{aligned} G &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : ax + by = c\right\} \\ &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}\right\} \end{aligned}$$

que es el grafo de la función f definida mediante

$$f(x) = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$$

Esta función es afín si $c \neq 0$, o lineal si $c = 0$, y su gráfica es una recta que pasa por el origen de coordenadas si $c = 0$.
Recíprocamente, toda función cuya gráfica es una recta es una función afín f de la forma

$$f(x) = ax + b$$

Su grafo es el conjunto

$$\begin{aligned} G &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = ax + b\right\} \\ &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -ax + y = b\right\} \end{aligned}$$

y, por tanto, es el conjunto de las soluciones de la siguiente ecuación lineal con dos incógnitas

$$-ax + y = b$$

Es claro que esta ecuación no está unívocamente determinada, pues otra cualquiera equivalente tendría el mismo conjunto de soluciones y, como consecuencia, la misma función afín.

Ejemplo 57 Representa gráficamente el conjunto de soluciones de la ecuación

$$3x + 2y = 8$$

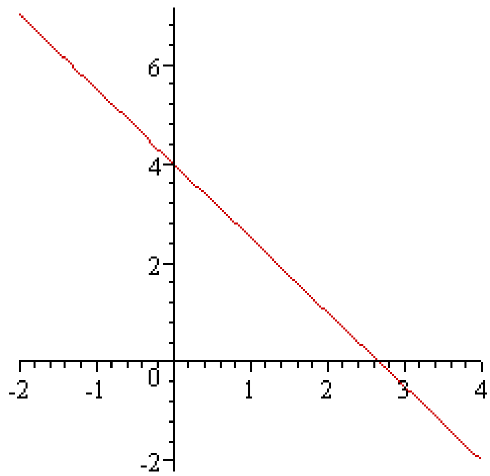
Solución: El conjunto de soluciones de la ecuación es

$$\begin{aligned} G &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 3x + 2y = 8\right\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = -\frac{3}{2}x + 4\right\} \end{aligned}$$

que es el grafo de la función f definida por

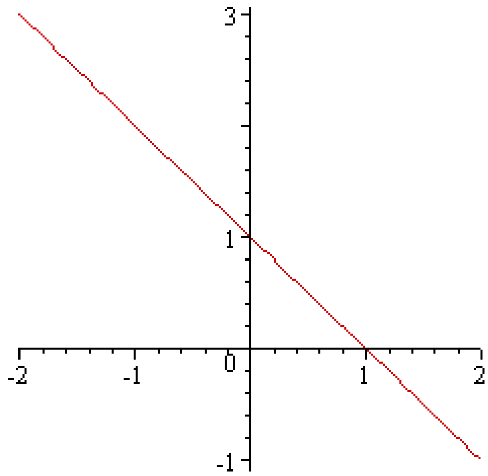
$$f(x) = -\frac{3}{2}x + 4$$

La gráfica de esta función es una recta que tiene pendiente $-3/2$ y ordenada en el origen 4.



■

Ejemplo 58 En la figura siguiente se ha representado una recta



Determina una ecuación lineal con dos incógnitas cuyas soluciones sean los puntos de esta recta.
Solución: Según la gráfica, la recta tiene pendiente -1 y ordenada en el origen 1. Por tanto, su ecuación es

$$y = -x + 1$$

De aquí, resulta la ecuación

$$x + y = 1$$

Evidentemente, cualquier ecuación equivalente a ésta tendrá como soluciones los puntos de la recta dada; por ejemplo,

$$2x + 2y = 2$$

■

5.4. Ecuaciones de segundo grado con dos incógnitas

Una **ecuación de segundo grado con dos incógnitas** es de la forma

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

donde $a \neq 0$ o $b \neq 0$ o $c \neq 0$, ya que de lo contrario la ecuación sería de primer grado.
Por ejemplo, la ecuación

$$2x^2 - xy + y^2 - 3x + 2 = 0$$

es de segundo grado con dos incógnitas.
Las soluciones de este tipo de ecuaciones son pares de números (x, y) que satisfacen la igualdad. A diferencia de las ecuaciones de primer grado con dos incógnitas, que tienen siempre un número infinito de soluciones, las ecuaciones de segundo grado pueden tener una sola solución real, como en el caso de la ecuación

$$x^2 + y^2 = 0$$

que sólo se cumple si $x = y = 0$, tener un número infinito de soluciones, como en el caso de la ecuación

$$x^2 + y^2 = 1$$

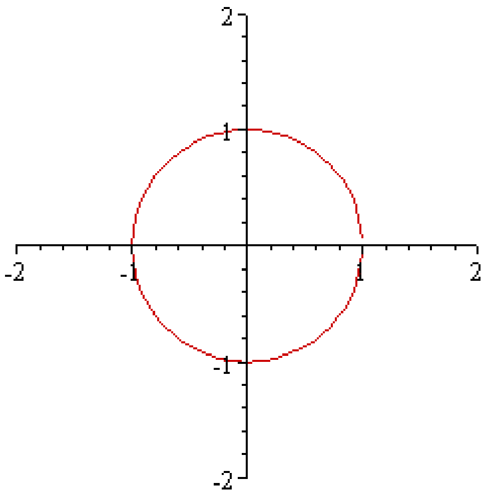
que tiene por soluciones los puntos de una circunferencia con centro el origen de coordenadas y radio 1 (La **ecuación de la circunferencia** de centro (a, b) y radio r tiene por ecuación

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Si la ecuación tiene centro en el origen de coordenadas y radio 1, tenemos $a = b = 0$ y $r = 1$ y, por tanto,

$$x^2 + y^2 = 1$$

),



o no tener ninguna solución real como es el caso de la ecuación

$$x^2 + y^2 = -1$$

Consideremos la siguiente ecuación de segundo grado con dos incógnitas

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$$

Observa que, al dar un valor a una de las incógnitas, se obtiene una ecuación de segundo grado con la otra incógnita. Por ejemplo, dando el valor $x = 1$, tenemos la siguiente ecuación de segundo grado con una incógnita

$$\begin{aligned} 1^2 + y^2 - 2 \cdot 1 - 2y &= 0 \\ y^2 - 2y - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo esta ecuación,

$$\begin{aligned} \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} &= \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} \\ &= \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} \\ &= \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} \\ &= 1 \pm \sqrt{2} \end{aligned}$$

se obtienen las soluciones $y_1 = 1 + \sqrt{2}$ y $y_2 = 1 - \sqrt{2}$. Entonces, es claro que $(1, 1 + \sqrt{2})$ y $(1, 1 - \sqrt{2})$ son soluciones de la ecuación propuesta. De este modo podemos encontrar soluciones de las ecuaciones de segundo grado con dos incógnitas. Sin embargo, no hay que olvidar que la ecuación de segundo grado obtenida al dar un valor a una de las incógnitas puede no tener solución y, como consecuencia, que no exista ninguna solución de la ecuación dada con dicho valor de la incógnita.

Ejemplo 59 Encuentra las soluciones de la ecuación

$$x^2 - y^2 - 5x + y + 6 = 0$$

que tienen 1 como valor de la incógnita y.
Solución: Si $y = 1$, entonces x debe cumplir la ecuación

$$\begin{aligned} x^2 - 1 - 5x + 1 + 6 &= 0 \\ x^2 - 5x + 6 &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo esta ecuación,

$$\begin{aligned} \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} &= \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} \\ &= \frac{5 \pm 1}{2} \\ &= \begin{cases} \frac{5+1}{2} = 3 \\ \frac{5-1}{2} = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

se obtienen las soluciones $x_1 = 2$ y $x_2 = 3$. Por lo tanto, las soluciones de la ecuación que tienen $y = 1$ son $(2, 1)$ y $(3, 1)$. ■

6. Sistemas de ecuaciones

Se llama **sistema de ecuaciones** a un conjunto formado por una o más ecuaciones con varias incógnitas. Indicamos este conjunto mediante una llave que abarca todas las ecuaciones del sistema. De este modo, el sistema

$$\begin{cases} x - 3y + z = -1 \\ 2x + y - 3z = 0 \\ x - 2y + z = 2 \end{cases}$$

está formado por tres ecuaciones lineales o de primer grado con tres incógnitas. Los sistemas se distinguen por el número de ecuaciones, el número de incógnitas, y el grado máximo con el que intervienen estas últimas. Un sistema formado por varias ecuaciones lineales se llama **sistema de ecuaciones lineales**. A los demás, les llamaremos **sistemas de ecuaciones no lineales**.
Observa que una sola ecuación también puede considerarse, estrictamente hablando, como un sistema de ecuaciones. Por ejemplo, una ecuación con dos incógnitas es un sistema de una ecuación con dos incógnitas.

Ejemplo 60 Distingue cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones:

a)
$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 2x & - & 3y & = & 4 \\ 4x & + & 2y & = & -5 \end{array}\right.$$

b)
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & & & = & -3 \\ & & 3y & + & z & = & 2 \\ x & & & - & 5z & = & 0 \end{array}\right.$$

c)
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & z & = & 0 \\ 2x & + & 3y & - & 5z & = & -1 \end{array}\right.$$

d)
$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 3x^2 & - & y^2 & = & 1 \\ 2x & + & 3y & = & -2 \end{array}\right.$$

e)
$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2xy & - & 3x & + & y & = & 1 \\ x & + & 6y & - & 2 & = & 0 \end{array}\right.$$

Solución: a) Es un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.
b) Es un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas.
c) Es un sistema de dos ecuaciones lineales con tres incógnitas.
d) Es un sistema de segundo grado de dos ecuaciones con dos incógnitas, ya que los términos $3x^2$ o y^2 son de segundo grado.
e) Es un sistema de segundo grado de dos ecuaciones con dos incógnitas, ya que el término $2xy$ es de segundo grado. ■

La **solución** de un sistema de ecuaciones es el conjunto de tuplas ordenadas de números $(a, b, c, ...)$ que satisfacen todas las ecuaciones del sistema, es decir, que al sustituir x por a, y por b, z por c,... las ecuaciones del sistema se transforman en igualdades numéricas.
Por ejemplo, $(\frac{4}{5}, \frac{2}{5})$ y $(0, 0)$ son soluciones del sistema

$$\left\{\begin{array}{rcr} x^2 + y^2 - 2x & = & 0 \\ x^2 + y^2 - y & = & 0 \end{array}\right.$$

ya que al sustituir x por $\frac{2}{5}$ e y por $\frac{4}{5}$, las dos ecuaciones se cumplen

$$\begin{array}{rcl} \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 - 2 \cdot \frac{2}{5} & = & 0 \\ \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 - \frac{4}{5} & = & 0 \end{array}$$

y lo mismo ocurre con la otra solución.
Cuando un sistema tiene solución se llama **compatible**. Un sistema compatible se llama **determinado** cuando tiene un número finito de soluciones, y se llama **indeterminado** cuando tiene infinitas soluciones. Cuando un sistema no tiene solución se llama **incompatible**.

Por ejemplo, el sistema considerado anteriormente

$$\left\{\begin{array}{rcl} x^2+y^2-2x & = & 0 \\ x^2+y^2-y & = & 0 \end{array}\right.$$

es compatible determinado porque sólo tiene dos soluciones. En cambio, el sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} x & - & y & = & 1 \\ 2x & - & 2y & = & 2 \end{array}\right.$$

es compatible indeterminado porque sus soluciones son las mismas que las de la ecuación

$$x-y=1$$

que, como ya hemos visto, tiene infinitas soluciones; observa que las dos ecuaciones de este último sistema son equivalentes, pues la segunda ecuación es la primera multiplicada por 2.
Discutir un sistema de ecuaciones es averiguar si es compatible o incompatible, y si es compatible, averiguar si es determinado o indeterminado. **Resolver** un sistema de ecuaciones es encontrar su solución cuando el sistema es compatible.

6.1. Sistemas equivalentes

Diremos que dos sistemas de ecuaciones son **equivalentes** si tienen las mismas soluciones.
Por ejemplo, los sistemas

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} 3x & - & 3y & = & 4 \\ 2x & + & y & = & 3 \end{array}\right. \quad \text{y} \quad \left\{\begin{array}{rcl} 3(x-y) & = & 4 \\ 2x-3 & = & -y \end{array}\right.$$

son evidentemente equivalentes, ya que las ecuaciones de uno se convierten en las del otro efectuando operaciones y separando las incógnitas.
Las siguientes reglas permiten pasar de un sistema de ecuaciones a otro equivalente:

1. Cambiar el orden de las ecuaciones de un sistema

Si se cambia el orden de las ecuaciones de un sistema, el conjunto de ecuaciones del nuevo sistema coincide con el conjunto de ecuaciones del sistema original y, por tanto, es evidente que los dos sistemas son equivalentes.

2. Cambiar una ecuación de un sistema por otra equivalente

Es inmediato comprobar que las dos reglas de equivalencia de ecuaciones conservan las soluciones de un sistema. Observa lo que dice esta regla en un caso particular:

$$\left\{\begin{array}{l} A=B \\ C=D \\ E=F \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} A=B \\ C=D \\ E+K=F+K \end{array}\right.$$

y

$$\left\{\begin{array}{l} A=B \\ C=D \\ E=F \end{array}\right. \text{ y } K\neq 0 \iff \left\{\begin{array}{c} A=B \\ C=D \\ KE=KF \end{array}\right.$$

3. Sumar a una ecuación otras del mismo sistema

Es también inmediato comprobar esta regla. Observa lo que dice esta regla en un caso particular:

$$\left\{\begin{array}{l} A=B \\ C=D \\ E=F \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccc} A & = & B \\ C & = & D \\ E+C+A & = & F+D+B \end{array}\right.$$

4. Despejar una incógnita en una ecuación y sustituirla en otra ecuación del sistema

Esta regla también es evidente, pues los valores de las incógnitas han de coincidir en todas las ecuaciones de un sistema.
Con estas reglas podemos afirmar que dos sistemas de ecuaciones son equivalentes cuando uno de ellos se transforma en el otro mediante una de estas reglas o una combinación de las mismas.
Con la ayuda de estas reglas podemos resolver un sistema de ecuaciones. El procedimiento consistirá en aplicar sucesivamente estas reglas hasta obtener un sistema equivalente al sistema original que proporcione de forma inmediata la solución del mismo. El ejemplo siguiente ilustra este método de resolución.

Ejemplo 61 Resuelve el sistema siguiente

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 3 \\ 3x & + & 4y & + & 2z & = & 2 \\ x & - & y & + & 3z & = & 1 \end{array}\right.$$

Solución: Sumando a la segunda ecuación la primera multiplicada por 2,

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 4y & - & 2z & = & 6 \\ 3x & + & 4y & + & 2z & = & 2 \\ 5x & + & 8y & & & = & 8 \end{array}$$

y sumando a la tercera ecuación la primera multiplicada por 3,

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & 6y & - & 3z & = & 9 \\ x & - & y & + & 3z & = & 1 \\ 4x & + & 5y & & & = & 10 \end{array}$$

se obtiene el siguiente sistema equivalente

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 3 \\ 5x & + & 8y & & & = & 8 \\ 4x & + & 5y & & & = & 10 \end{array}\right.$$

Observa que este sistema es más sencillo que el original porque en dos de sus ecuaciones no interviene la incógnita z.
Ahora, sumando a la tercera ecuación, multiplicada por -5, la segunda, multiplicada por 4,

$$\begin{array}{rcrcr} 20x & + & 32y & = & 32 \\ -20x & - & 25y & = & -50 \\ & & 7y & = & -18 \end{array}$$

se obtiene otro sistema equivalente

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 3 \\ 5x & + & 8y & & & = & 8 \\ & & 7y & & & = & -18 \end{array}\right.$$

Dividiendo la tercera ecuación por 7, se obtiene el siguiente sistema equivalente

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & 3 \\ 5x & + & 8y & & & = & 8 \\ & & y & & & = & -\frac{18}{7} \end{array}\right.$$

que proporciona el valor de y en la solución del sistema original. Sustituyendo el valor de y en las dos primeras ecuaciones, obtenemos otro sistema equivalente

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2\cdot\left(-\frac{18}{7}\right) & - & z & = & 3 \\ 5x & + & 8\cdot\left(-\frac{18}{7}\right) & & & = & 8 \\ & & y & & & = & -\frac{18}{7} \end{array}\right.$$

La segunda ecuación es equivalente a

$$\begin{aligned}
5x + 8 \cdot \left(-\frac{18}{7}\right) &= 8 \\
5x - \frac{144}{7} &= 8 \\
35x - 144 &= 56 \\
35x &= 56 + 144 \\
35x &= 200 \\
x &= \frac{200}{35} \\
x &= \frac{40}{7}
\end{aligned}$$

y, por tanto, tenemos otro sistema equivalente

$$\left\{\begin{array}{ccccccc}
x & - & \frac{36}{7} & - & z & = & 3 \\
x & & & & & = & \frac{40}{7} \\
 & & y & & & = & -\frac{18}{7}
\end{array}\right.$$

que proporciona también el valor de x en la solución del sistema original. Por último, sustituyendo el valor de x en la primera ecuación, se obtiene el siguiente sistema equivalente

$$\left\{\begin{array}{ccccccc}
\frac{40}{7} & - & \frac{36}{7} & - & z & = & 3 \\
x & & & & & = & \frac{40}{7} \\
 & & y & & & = & -\frac{18}{7}
\end{array}\right.$$

La primera ecuación es equivalente a

$$\begin{aligned}
\frac{40}{7} - \frac{36}{7} - z &= 3 \\
\frac{4}{7} - z &= 3 \\
4 - 7z &= 21 \\
-7z &= 21 - 4 \\
-7z &= 17 \\
7z &= -17 \\
z &= -\frac{17}{7}
\end{aligned}$$

y, por tanto, obtenemos un sistema equivalente

$$\left\{\begin{array}{ccccc}
 & & z & = & -\frac{17}{7} \\
x & & & = & \frac{40}{7} \\
 & y & & = & -\frac{18}{7}
\end{array}\right.$$

que nos da de forma inmediata la solución del sistema original. ■

6.2. Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas

Todo sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas es reducible de forma equivalente a uno de la forma siguiente:

$$\left\{\begin{array}{ccccc}
a_1x & + & b_1y & = & c_1 \\
a_2x & + & b_2y & = & c_2
\end{array}\right.$$

Por ejemplo, consideremos el sistema siguiente

$$\left\{\begin{array}{l}
\frac{4x+3y}{2} - \frac{3(x-3y)}{4} = -\frac{5}{2} \\
\frac{x+2y}{3} - \frac{2x-y}{4} = \frac{5}{4}
\end{array}\right.$$

Reduciremos cada una de las ecuaciones por separado, de manera que podamos escribir otro sistema equivalente con la forma general.

Reduciendo la primera ecuación, tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{4x+3y}{2}-\frac{3(x-3y)}{4} &= -\frac{5}{2}\\
2(4x+3y)-3(x-3y) &= -10 \text{Multiplicando ambos miembros por 4}\\
8x+6y-3x+9y &= -10 \text{Efectuando operaciones}\\
5x+15y &= -10 \text{Reduciendo términos semejantes}\\
x+3y &= -2 \text{Dividiendo ambos miembros por 5}
\end{aligned}$$

Reduciendo la segunda ecuación, tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{x+2y}{3}-\frac{2x-y}{4} &= \frac{5}{4}\\
4(x+2y)-3(2x-y) &= 15 \text{Multiplicando ambos miebros por 12}\\
4x+8y-6x+3y &= 15 \text{Efectuando operaciones}\\
-2x+11y &= 15 \text{Reduciendo términos semejantes}
\end{aligned}$$

Luego, el sistema original es equivalente al siguiente

$$\left.\begin{aligned}
x+3y=-2\\
-2x+11y=15
\end{aligned}\right\}$$

que tiene la forma general.

6.3. Discusión de sistemas

Consideremos el sistema

$$\left\{\begin{array}{lclcl}
a_1x & + & b_1y & = & c_1\\
a_2x & + & b_2y & = & c_2
\end{array}\right.$$

Entonces, se cumple:

1. El sistema es compatible determinado si y sólo si $a_1b_2-b_1a_2\neq 0$, y la solución es

$$x=\frac{c_1b_2-b_1c_2}{a_1b_2-b_1a_2} \quad \text{y} \quad y=\frac{a_1c_2-c_1a_2}{a_1b_2-b_1a_2}$$

2. Si $a_1b_2-b_1a_2=0$, entonces

   - El sistema es compatible indeterminado si y sólo si

   $$\frac{a_2}{a_1}=\frac{b_2}{b_1}=\frac{c_2}{c_1}$$

   y las soluciones de la ecuación $a_1x+b_1y=c_1$ son las soluciones del sistema

   - El sistema es incompatible si y sólo si

   $$\frac{a_2}{a_1}=\frac{b_2}{b_1}\neq\frac{c_2}{c_1}$$

Demostración: Supongamos por un momento que a_1, b_1, a_2 y b_2 son números reales distintos de cero. Multiplicando la primera ecuación por b_2 y sumándole después la segunda multiplicada por $-b_1$, obtenemos

$$\begin{array}{lclcc}
a_1b_2x & + & b_1b_2y & = & c_1b_2\\
-b_1a_2x & - & b_1b_2y & = & -b_1c_2\\
(a_1b_2-b_1a_2)x & & & = & c_1b_2-b_1c_2
\end{array}$$

y, multiplicando la primera ecuación por $-a_2$ y sumándole después la segunda multiplicada por a_1, obtenemos

$$\begin{array}{rcccc}
-a_1a_2x & - & b_1a_2y & = & -c_1a_2\\
a_1a_2x & + & a_1b_2y & = & a_1c_2\\
 & & (a_1b_2-b_1a_2)y & = & a_1c_2-c_1a_2
\end{array}$$

Con estas dos transformaciones, el sistema dado es equivalente al siguiente sistema

$$\begin{cases} (a_1b_2 - b_1a_2)x & & = & c_1b_2 - b_1c_2 \\ & (a_1b_2 - b_1a_2)y & = & a_1c_2 - c_1a_2 \end{cases}$$

Si ahora se cumple la condición $a_1b_2 - b_1a_2 \neq 0$, equivalente a que

$$\frac{a_2}{a_1} \neq \frac{b_2}{b_1}$$

entonces este sistema es a su vez equivalente al siguiente

$$\begin{cases} x & & = & \frac{c_1b_2-b_1c_2}{a_1b_2-b_1a_2} \\ & y & = & \frac{a_1c_2-c_1a_2}{a_1b_2-b_1a_2} \end{cases}$$

que de forma inmediata nos da la solución del sistema original

$$x = \frac{c_1b_2 - b_1c_2}{a_1b_2 - b_1a_2} \quad \text{y} \quad y = \frac{a_1c_2 - c_1a_2}{a_1b_2 - b_1a_2}$$

Si, en cambio, $a_1b_2 - b_1a_2 = 0$, equivalente a que

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1}$$

entonces, escribimos

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = k$$

y, por tanto,

$$a_2 = ka_1 \quad \text{y} \quad b_2 = kb_1$$

Entonces, el sistema original se escribe de la siguiente manera

$$\begin{cases} a_1x & + & b_1y & = & c_1 \\ ka_1x & + & kb_1y & = & c_2 \end{cases}$$

Si dividimos los dos miembros de la segunda ecuación por k, el sistema anterior es equivalente a

$$\begin{cases} a_1x & + & b_1y & = & c_1 \\ a_1x & + & b_1y & = & \frac{c_2}{k} \end{cases}$$

y entonces, tenemos:

- Si se cumple la condición

  $$\frac{c_2}{k} = c_1$$

  equivalente a

  $$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1} = k$$

  entonces, las soluciones del sistema original son las soluciones de la ecuación

  $$a_1x + b_1y = c_1$$

  y, como consecuencia, el sistema tiene infinitas soluciones.

- Si se cumple la condición

  $$\frac{c_2}{k} \neq c_1$$

  equivalente a

  $$k = \frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} \neq \frac{c_2}{c_1}$$

  entonces, es evidente que el sistema no tiene solución.

Por último, si alguno de los coeficientes a_1, b_1, a_2 o b_2 es cero, la discusión del sistema se llevará a cabo transformándolo en otro equivalente que sea más sencillo de discutir. A modo de ejemplo, supongamos que $a_2 = 0$, entonces el sistema es

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} a_1x & + & b_1y & = & c_1 \\ & & b_2y & = & c_2 \end{array} \right.$$

donde la segunda ecuación tiene una sola incógnita. La solución de esta ecuación es

$$y = \frac{c_2}{b_2}$$

Entonces, el sistema dado es equivalente al siguiente

$$\left\{ \begin{array}{rcccl} a_1x & + & b_1 \cdot \left(\frac{c_2}{b_2}\right) & = & c_1 \\ & & y & = & \frac{c_2}{b_2} \end{array} \right.$$

donde la primera ecuación tiene una sola incógnita. La solución de esta ecuación es

$$\begin{aligned} a_1x + b_1 \cdot \left(\frac{c_2}{b_2}\right) &= c_1 \\ a_1x + \frac{b_1c_2}{b_2} &= c_1 \\ a_1b_2x + b_1c_2 &= c_1b_2 \\ a_1b_2x &= c_1b_2 - b_1c_2 \\ x &= \frac{c_1b_2 - b_1c_2}{a_1b_2} \end{aligned}$$

Entonces, el sistema anterior es equivalente al siguiente

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & \frac{c_1b_2 - b_1c_2}{a_1b_2} \\ y & = & \frac{c_2}{b_2} \end{array} \right.$$

que nos da las soluciones del sistema original

$$x = \frac{c_1b_2 - b_1c_2}{a_1b_2} \quad \text{y} \quad y = \frac{c_2}{b_2}$$

y, como consecuencia, el sistema es compatible determinado. ■

Ejemplo 62 Discute las soluciones de los siguientes sistemas:

a)

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x - 3y = 4 \\ 4x - 6y = 3 \end{array} \right.$$

b)

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x - 2y = 5 \\ 4x + 3y = 2 \end{array} \right.$$

c)

$$\left\{ \begin{array}{l} 5x - 2y = 6 \\ 10x - 4y = 12 \end{array} \right.$$

Solución: a) El sistema es incompatible porque

$$\frac{2}{4} = \frac{-3}{-6} \neq \frac{4}{3}$$

b) El sistema es compatible determinado porque

$$\frac{3}{4} \neq \frac{-2}{3}$$

c) El sistema es compatible indeterminado porque

$$\frac{5}{10} = \frac{-2}{-4} = \frac{6}{12}$$

■

Ejemplo 63 Discute el sistema
$$\begin{cases} 4x + ky = 2k + 1 \\ kx + y = \frac{k+3}{2} \end{cases}$$
según los distintos valores de k.
Solución: El sistema no será determinado si se cumple la siguiente condición
$$\frac{4}{k} = \frac{k}{1}$$
equivalente a
$$k^2 = 4$$
de donde se sigue que $k = 2$ o $k = -2$. En consecuencia, el sistema es compatible determinado si y sólo si $k \neq 2$ y $k \neq -2$.
Si $k = 2$, entonces el sistema es
$$\begin{cases} 4x + 2y = 5 \\ 2x + y = \frac{5}{2} \end{cases}$$
que, multiplicando la segunda ecuación por 2, es equivalente al sistema
$$\begin{cases} 4x + 2y = 5 \\ 4x + 2y = 5 \end{cases}$$
y, como consecuencia, el sistema es compatible indeterminado.
Si $k = -2$, entonces el sistema es
$$\begin{cases} 4x - 2y = -3 \\ -2x + y = \frac{1}{2} \end{cases}$$
que, multiplicando la segunda ecuación por -2, es equivalente al sistema
$$\begin{cases} 4x - 2y = -3 \\ 4x - 2y = -1 \end{cases}$$
y, como consecuencia, el sistema es incompatible. ■

6.4. Métodos algebraicos de resolución

Aunque ya sabemos cómo se discute y se resuelve un sistema lineal con dos incógnitas, en este apartado repasaremos los tres métodos algebraicos para encontrar la solución cuando el sistema es compatible determinado.
Para resolver un sistema lineal por cualquiera de los tres métodos, se empieza reduciendo las ecuaciones que lo forman, cada una por separado, de manera que podamos escribir después otro sistema equivalente al dado pero con la forma general
$$\begin{cases} a_1x & + & b_1y & = & c_1 \\ a_2x & + & b_2y & = & c_2 \end{cases}$$
y luego se comprueba que el sistema es compatible determinado, verificando que
$$a_1b_2 - b_1a_2 \neq 0$$

6.4.1. Método de sustitución

Para encontrar la solución del sistema por el **método de sustitución** seguiremos los pasos siguientes:

1. Se despeja una incógnita en una de las dos ecuaciones
2. Se sustituye el valor de esta incógnita en la otra ecuación
3. Se resuelve la ecuación con una incógnita que se obtiene con esta sustitución
4. El valor de la incógnita obtenido en el paso anterior se sustituye en una cualquiera de las dos ecuaciones del sistema y se resuelve la ecuación que se obtiene con esta sustitución, encontrando de esta manera el valor de la otra incógnita

Ejemplo 64 Resuelve por el método de sustitución el siguiente sistema:

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{x+4}{-2}+\frac{y-5}{3}=\frac{3x+y}{6}\\ \frac{3x-y}{4}+2y=7-x\end{array}\right.$$

Solución: Empezaremos reduciendo las ecuaciones, cada una por separado, de manera que podamos escribir otro sistema equivalente al primero pero con la forma general.
Reduciendo la primera ecuación, tenemos

$$\begin{aligned}\frac{x+4}{-2}+\frac{y-5}{3} &= \frac{3x+y}{6}\\ -\frac{3(x+4)}{6}+\frac{2(y-5)}{6} &= \frac{3x+y}{6}\\ -3(x+4)+2(y-5) &= 3x+y\\ -3x-12+2y-10 &= 3x+y\\ -3x+2y-22 &= 3x+y\\ -3x+2y-3x-y &= 22\\ -6x+y &= 22\end{aligned}$$

Reduciendo la segunda ecuación, tenemos

$$\begin{aligned}\frac{3x-y}{4}+2y &= 7-x\\ 3x-y+8y &= 28-4x\\ 3x+7y &= 28-4x\\ 3x+7y+4x &= 28\\ 7x+7y &= 28\\ x+y &= 4\end{aligned}$$

El sistema dado es equivalente al siguiente

$$\left\{\begin{array}{l}-6x+y=22\\ x+y=4\end{array}\right.$$

que es compatible determinado, ya que

$$(-6)\cdot 1-1\cdot 1\neq 0$$

Ahora buscaremos la solución por el método de sustitución:
(1) Se despeja una incógnita en una de las dos ecuaciones:

$$y=4-x$$

(2) Se sustituye este valor en la otra ecuación:

$$-6x+4-x=22$$

(3) Se resuelve esta ecuación

$$\begin{aligned}-6x+4-x &= 22\\ -7x &= 22-4\\ -7x &= 18\\ x &= -\frac{18}{7}\end{aligned}$$

(4) El valor de esta incógnita se sustituye en una cualquiera de las dos ecuaciones del sistema y se resuelve la ecuación, encontrando de esta manera el valor de la otra incógnita:

$$\begin{aligned}-\frac{18}{7}+y &= 4\\ -18+7y &= 28\\ 7y &= 28+18\\ 7y &= 46\\ y &= \frac{46}{7}\end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución del sistema es

$$x = -\frac{18}{7} \quad \text{y} \quad y = \frac{46}{7}$$

■

6.4.2. Método de igualación

Para encontrar la solución del sistema por el **método de igualación** seguiremos los pasos siguientes:

1. Se despeja la misma incógnita en las dos ecuaciones del sistema
2. Se igualan las dos expresiones obtenidas
3. Se resuelve la ecuación con una incógnita que se obtiene por esta igualación
4. El valor de la incógnita obtenido en el paso anterior se sustituye en una cualquiera de las dos ecuaciones del sistema y se resuelve la ecuación que se obtiene con esta sustitución, encontrando de esta manera el valor de la otra incógnita

Ejemplo 65 Resuelve por el método de igualación el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \frac{7x-2y}{3} + \frac{4y-x}{4} = 2x + \frac{7y}{6} \\ x - 6y + \frac{8-x}{3} = 6y - \frac{x-5}{4} \end{cases}$$

Solución: Empezaremos reduciendo las ecuaciones, cada una por separado, de manera que podamos escribir otro sistema equivalente al primero pero con la forma general.
Reduciendo la primera ecuación, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{7x-2y}{3} + \frac{4y-x}{4} &= 2x + \frac{7y}{6} \\ \frac{4(7x-2y)}{12} + \frac{3(4y-x)}{12} &= \frac{24x}{12} + \frac{14y}{12} \\ 4(7x-2y) + 3(4y-x) &= 24x + 14y \\ 28x - 8y + 12y - 3x &= 24x + 14y \\ 25x + 4y &= 24x + 14y \\ 25x + 4y - 24x - 14y &= 0 \\ x - 10y &= 0 \end{aligned}$$

Reduciendo la segunda ecuación, tenemos

$$\begin{aligned} x - 6y + \frac{8-x}{3} &= 6y - \frac{x-5}{4} \\ \frac{12(x-6y)}{12} + \frac{4(8-x)}{12} &= \frac{72y}{12} - \frac{3(x-5)}{12} \\ 12(x-6y) + 4(8-x) &= 72y - 3(x-5) \\ 12x - 72y + 32 - 4x &= 72y - 3x + 15 \\ 8x - 72y + 32 &= 72y - 3x + 15 \\ 8x - 72y - 72y + 3x &= 15 - 32 \\ 11x - 144y &= -17 \end{aligned}$$

El sistema dado es equivalente al siguiente

$$\begin{cases} x - 10y = 0 \\ 11x - 144y = -17 \end{cases}$$

que es compatible determinado, ya que

$$1 \cdot (-144) - (-10) \cdot 11 \neq 0$$

Ahora buscaremos la solución por el método de igualación:
(1) Se despeja la misma incógnita en las dos ecuaciones del sistema:

$$x = 10y$$
$$x = \frac{144y-17}{11}$$

(2) Se igualan las dos expresiones obtenidas:

$$10y = \frac{144y - 17}{11}$$

(3) Se resuelve esta ecuación:

$$\begin{aligned}
10y &= \frac{144y - 17}{11} \\
110y &= 144y - 17 \\
110y - 144y &= -17 \\
-34y &= -17 \\
2y &= 1 \\
y &= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

(4) El valor de esta incógnita se sustituye en una cualquiera de las dos ecuaciones del sistema y se resuelve la ecuación, encontrando de esta manera el valor de la otra incógnita:

$$\begin{aligned}
x - 10 \cdot \frac{1}{2} &= 0 \\
x - 5 &= 0 \\
x &= 5
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución del sistema es

$$x = 5 \quad \text{y} \quad y = \frac{1}{2}$$

■

6.4.3. Método de reducción

Para encontrar la solución del sistema por el **método de reducción** seguiremos los pasos siguientes:

1. Se multiplican los dos miembros de las ecuaciones del sistema por números convenientes de manera que los coeficientes de una de las incógnitas sean opuestos en las dos ecuaciones

2. Se suman miembro a miembro las dos ecuaciones del nuevo sistema

3. Se resuelve la ecuación con una incógnita que se obtiene por el paso anterior

4. El valor de la incógnita obtenido en el paso anterior se sustituye en una cualquiera de las dos ecuaciones del sistema original y se resuelve la ecuación que se obtiene con esta sustitución, encontrando de esta manera el valor de la otra incógnita

Ejemplo 66 Resuelve por el método de reducción el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \frac{3x+5y}{8} - \frac{3x-y}{2} = \frac{x+y+1}{4} \\ \frac{x+y+2}{3} + \frac{x-y-2}{6} = \frac{8}{3} \end{cases}$$

Solución: Empezaremos reduciendo las ecuaciones, cada una por separado, de manera que podamos escribir otro sistema equivalente al primero pero con la forma general.

Reduciendo la primera ecuación, tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{3x+5y}{8}-\frac{3x-y}{2} &= \frac{x+y+1}{4}\\
\frac{3x+5y}{8}-\frac{4(3x-y)}{8} &= \frac{2(x+y+1)}{8}\\
3x+5y-4(3x-y) &= 2(x+y+1)\\
3x+5y-12x+4y &= 2x+2y+2\\
-9x+9y &= 2x+2y+2\\
-9x+9y-2x-2y &= 2\\
-11x+7y &= 2
\end{aligned}$$

Reduciendo la segunda ecuación, tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{x+y+2}{3}+\frac{x-y-2}{6} &= \frac{8}{3}\\
\frac{2(x+y+2)}{6}+\frac{x-y-2}{6} &= \frac{16}{6}\\
2(x+y+2)+x-y-2 &= 16\\
2x+2y+4+x-y-2 &= 16\\
3x+y+2 &= 16\\
3x+y &= 16-2\\
3x+y &= 14
\end{aligned}$$

El sistema dado es equivalente al siguiente

$$\left\{\begin{array}{l} -11x+7y=2\\ 3x+y=14 \end{array}\right.$$

que es compatible determinado, ya que

$$(-11)\cdot 1-7\cdot 3\neq 0$$

Ahora buscaremos la solución por el método de reducción:
(1) Se multiplican los dos miembros de las ecuaciones del sistema por números convenientes de manera que los coeficientes de una de las incógnitas sean opuestos en las dos ecuaciones. Aprovechando que hay un 1 como coeficiente de y en la segunda ecuación, bastará con multiplicar los dos miembros de esta ecuación por -7

$$\left\{\begin{array}{l} -11x+7y=2\\ -21x-7y=-98 \end{array}\right.$$

(2) Se suman miembro a miembro las dos ecuaciones del nuevo sistema:

$$\begin{array}{rcrcr}
-11x & + & 7y & = & 2\\
-21x & - & 7y & = & -98\\
-32x & & & = & -96
\end{array}$$

(3) Se resuelve esta ecuación

$$\begin{aligned}
-32x &= -96\\
x &= 3
\end{aligned}$$

(4) El valor de esta incógnita se sustituye en una cualquiera de las dos ecuaciones del sistema y se resuelve la ecuación, encontrando de esta manera el valor de la otra incógnita:

$$\begin{aligned}
(-11)\cdot 3+7y &= 2\\
-33+7y &= 2\\
7y &= 2+33\\
7y &= 35\\
y &= 5
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución del sistema es

$$x = 3 \quad \text{y} \quad y = 5$$

■

6.5. Interpretación gráfica de las soluciones

Tomando dos ejes de coordenadas cartesianas, ya sabemos que el conjunto de todas las soluciones reales de una ecuación lineal con dos incógnitas

$$ax + by = c$$

se representa gráficamente por una recta.
Ahora consideremos un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas:

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} a_1x & + & b_1y & = & c_1 \\ a_2x & + & b_2y & = & c_2 \end{array} \right.$$

Entonces, cada una de las ecuaciones de este sistema representa una recta. Si el sistema es compatible determinado, o lo que es lo mismo, tiene una sola solución, las rectas representadas por las dos ecuaciones se cortan en un punto (p, q) cuyas coordenadas proporcionan los valores $x = p$ e $y = q$ que son la solución del sistema. Si el sistema es compatible indeterminado, entonces

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1}$$

y, como consecuencia, las rectas coinciden. Por último, si el sistema es incompatible, entonces las rectas son paralelas.
Esta interpretación de las soluciones de los sistemas proporciona el **método gráfico** para resolverlos. Este método consiste en representar las rectas definidas por las ecuaciones del sistema. En el caso de que el sistema sea compatible determinado, la solución se obtendrá como el punto de intersección de las rectas representadas.

Ejemplo 67 Resuelve por el método gráfico el siguiente sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x + 3y = 7 \\ x + y = 3 \end{array} \right.$$

Solución: Para representar la recta $2x + 3y = 7$, despejamos y en la ecuación

$$y = \frac{7 - 2x}{3}$$

damos dos valores arbitrarios a x y encontramos los valores correspondientes de y. Hacemos esto mediante una tabla

x	y
2	1
-1	3

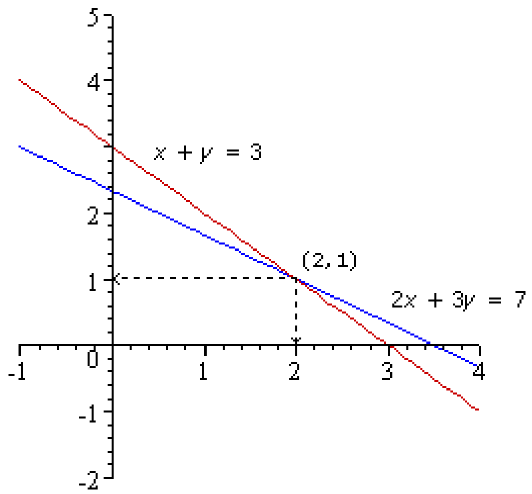
Para representar la recta $x + y = 3$, hacemos lo mismo

$$y = 3 - x$$

y

x	y
3	0
0	3

Ahora representamos gráficamente las dos rectas en un mismo sistema de ejes cartesianos y obtenemos



El punto de intersección de ambas rectas, que es $(2,1)$, proporciona la solución del sistema:

$$x = 2 \quad \text{y} \quad y = 1$$

■

Ejemplo 68 Discute por el método gráfico el siguiente sistema:

$$\begin{cases} -2x + y = -1 \\ 4x - 2y = 1 \end{cases}$$

Solución: Para representar la recta $-2x + y = -1$, despejamos y en la ecuación

$$y = 2x - 1$$

damos dos valores arbitrarios a x y encontramos los valores correspondientes de y. Hacemos esto mediante una tabla

x	y
0	-1
2	3

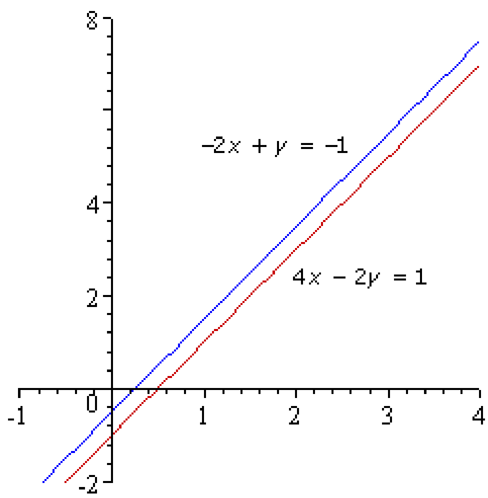
Para representar la recta $4x - 2y = 1$, hacemos lo mismo

$$y = \frac{4x - 1}{2}$$

y

x	y
0	$-\frac{1}{2}$
3	$\frac{11}{2}$

Ahora representamos gráficamente las dos rectas en un mismo sistema de ejes cartesianos y obtenemos



Vemos que las dos rectas son paralelas y, por tanto, el sistema es incompatible, es decir, no tiene solución. ■

6.6. Sistemas de ecuaciones lineales con tres incógnitas

Todo sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas es reducible de forma equivalente a uno de la forma siguiente:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a_1x & + & b_1y & + & c_1z & = & d_1 \\ a_2x & + & b_2y & + & c_2z & = & d_2 \\ a_3x & + & b_3y & + & c_3z & = & d_3 \end{array}\right.$$

Estos sistemas se resuelven por **reducción**: se toman dos pares de ecuaciones y se obtiene de cada uno de ellos una ecuación en la que se ha eliminado una incógnita, que ha de ser la misma en cada par de ecuaciones. De este modo, se obtiene un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas que podemos resolver por cualquiera de los métodos algebraicos ya estudiados.
También podemos resolver estos sistemas por **sustitución**: se despeja una incógnita en una de las tres ecuaciones y se sustituye en las otras dos. De esta manera se obtiene un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas que se puede resolver por cualquiera de los tres métodos ya estudiados.

Ejemplo 69 Resuelve por reducción el siguiente sistema:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 2x & + & 3y & - & 2z & = & 4 \\ x & - & 2y & + & z & = & -1 \\ 3x & + & y & + & 2z & = & 9 \end{array}\right.$$

Solución: Sustituyendo la segunda ecuación del sistema dado por la suma de la primera y de la segunda, multiplicada por -2,

$$\begin{array}{cccccccc} & 2x & + & 3y & - & 2z & = & 4 \\ - & 2x & + & 4y & - & 2z & = & 2 \\ & & & 7y & - & 4z & = & 6 \end{array}$$

y la tercera ecuación del sistema por la suma de la tercera y de la segunda, multitplicada por -3,

$$\begin{array}{cccccccc} - & 3x & + & 6y & - & 3z & = & 3 \\ & 3x & + & y & + & 2z & = & 9 \\ & & & 7y & - & z & = & 12 \end{array}$$

obtenemos otro sistema equivalente al original

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 2x & + & 3y & - & 2z & = & 4 \\ & & 7y & - & 4z & = & 6 \\ & & 7y & - & z & = & 12 \end{array}\right.$$

en donde hay dos ecuaciones en las que se ha eliminado la incógnita x.
Ahora resolveremos por el método de reducción el sistema formado por las ecuaciones que no tienen la incógnita x

$$\left\{\begin{array}{ccccc} 7y & - & 4z & = & 6 \\ 7y & - & z & = & 12 \end{array}\right.$$

Sumando miembro a miembro la primera ecuación de este sistema con la segunda, multiplicada por -1, obtenemos la ecuación

$$\begin{array}{cccccc} & 7y & - & 4z & = & 6 \\ - & 7y & + & z & = & -12 \\ & & - & 3z & = & -6 \end{array}$$

Resolviendo esta ecuación se obtiene el valor de la incógnita z

$$\begin{array}{rcl} -3z & = & -6 \\ z & = & 2 \end{array}$$

Sustituyendo este valor en una cualquiera de las dos ecuaciones del sistema, obtenemos la ecuación

$$7y - 2 = 12$$

y, resolviéndola,

$$\begin{aligned} 7y &= 12 + 2 \\ 7y &= 14 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

se obtiene el valor de la incógnita y. Sustituyendo los valores hallados de y y z en la primera ecuación del sistema original, obtenemos la ecuación

$$2x + 3 \cdot 2 - 2 \cdot 2 = 4$$

y, resolviéndola,

$$\begin{aligned} 2x + 6 - 4 &= 4 \\ 2x + 2 &= 4 \\ 2x &= 4 - 2 \\ 2x &= 2 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

se obtiene el valor de la incógnita x. Por consiguiente, la solución del sistema original es $x = 1$, $y = 2$ y $z = 2$. ■

Ejemplo 70 Resuelve por sustitución el siguiente sistema:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 5x & - & 4y & + & 3z & = & -5 \\ 2x & + & y & - & z & = & 8 \\ 4x & + & 3y & + & 5z & = & 12 \end{array}$$

Solución: Despejando y de la segunda ecuación,

$$y = 8 - 2x + z$$

y sustituyendo este valor en la dos restantes ecuaciones del sistema,

$$\begin{aligned} 5x - 4(8 - 2x + z) + 3z &= -5 \\ 5x - 32 + 8x - 4z + 3z &= -5 \\ 13x - z &= 27 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} 4x + 3(8 - 2x + z) + 5z &= 12 \\ 4x + 24 - 6x + 3z + 5z &= 12 \\ -2x + 8z &= -12 \\ x - 4z &= 6 \end{aligned}$$

obtenemos otro sistema equivalente al original

$$\left\{ \begin{array}{rcrcc} 13x & - & z & = & 27 \\ & & y & = & 8 - 2x + z \\ x & - & 4z & = & 6 \end{array} \right.$$

en donde hay dos ecuaciones en las que se ha eliminado la incógnita y.
Ahora resolveremos por el método de reducción el sistema formado por las ecuaciones que no tienen la incógnita y

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} 13x & - & z & = & 27 \\ x & - & 4z & = & 6 \end{array} \right.$$

Sumando miembro a miembro la segunda ecuación de este sistema con la primera, multiplicada por -4, obtenemos la ecuación

$$\begin{array}{rcrcr} -\ 52x & + & 4z & = & -108 \\ x & - & 4z & = & 6 \\ \hline -\ 51x & & & = & -102 \end{array}$$

Resolviendo esta ecuación se obtiene el valor de la incógnita x

$$\begin{aligned} -51x &= -102 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Sustituyendo este valor en una cualquiera de las dos ecuaciones del sistema, obtenemos la ecuación

$$2 - 4z = 6$$

y, resolviéndola,

$$\begin{aligned} 2 - 4z &= 6 \\ -4z &= 4 \\ z &= -1 \end{aligned}$$

se obtiene el valor de la incógnita z. Sustituyendo los valores hallados de x y z en la segunda ecuación del sistema original, obtenemos la ecuación

$$2 \cdot 2 + y - (-1) = 8$$

y, resolviéndola,

$$\begin{aligned} 4 + y + 1 &= 8 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

se obtiene el valor de la incógnita y. Por consiguiente, la solución del sistema original es $x = 2$, $y = 3$ y $z = -1$. ■

6.7. Planteamiento de problemas

En este apartado resolveremos algunos problemas de planteamiento con sistemas de ecuaciones de primer grado con dos o tres incógnitas. No hay reglas generales para plantear y resolver problemas pero se consideran como de gran utilidad los siguientes consejos:

- Leer con cuidado todo el enunciado del problema
- Determinar lo que se pide; normalmente, esto será la incógnita
- Traducir toda la información a lenguaje algebraico
- Relacionar la información con las incógnitas mediante ecuaciones
- Resolver el sistema obtenido y comprobar si la solución es válida
- Interpretar la solución y discutir si es o no coherente con el problema propuesto

6.7.1. Problemas generales

Ejemplo 71 Halla dos números tales que, si se divide al primero por 5 y al segundo por 4, la suma de los cocientes es 6, y se multiplica al primero por 3 y al segundo por 2, la suma de los productos es 69.
Solución: Si llamamos x, y a estos dos números. Entonces, el enunciado "si se divide al primero por 5 y al segundo por 4, la suma de los cocientes es 6"se expresa como la ecuación siguiente:

$$\frac{x}{5} + \frac{y}{4} = 6$$

y el enunciado "si se multiplica al primero por 3 y al segundo por 2, la suma de los productos es 69"se expresa como la ecuación siguiente:

$$3x + 2y = 69$$

Luego, los números que estamos buscando son la solución del sistema

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} \frac{x}{5} & + & \frac{y}{4} & = & 6 \\ 3x & + & 2y & = & 69 \end{array} \right.$$

Quitando los denominadores de la primera ecuación, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{x}{5} + \frac{y}{4} &= 6 \\ 4x + 5y &= 120 \end{aligned}$$

Resolveremos por reducción el siguiente sistema:

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} 4x & + & 5y & = & 120 \\ 3x & + & 2y & = & 69 \end{array} \right.$$

Multiplicando la primera por 3 y la segunda por -4, y sumando después, se obtiene

$$\begin{array}{cccccc} & 12x & + & 15y & = & 360 \\ - & 12x & - & 8y & = & -276 \\ & & & 7y & = & 84 \end{array}$$

y, por tanto,

$$\begin{aligned} 7y &= 84 \\ y &= 12 \end{aligned}$$

Sustituyendo este valor de y en la segunda ecuación del sistema, se obtiene

$$\begin{aligned} 3x + 24 &= 69 \\ 3x &= 45 \\ x &= 15 \end{aligned}$$

Por consiguiente, los números son 15 y 12. ■

Ejemplo 72 Un alumno tiene monedas en las dos manos. Si pasa 2 de la derecha a la izquierda, tendrá el mismo número de monedas en las dos manos y, si pasa 3 monedas de la izquierda a la derecha, tendrá en esta un número doble de monedas que en la otra. ¿Cuántas monedas tiene en cada mano?
Solución: La información del enunciado queda recogida en el cuadro siguiente:

	Monedas	Pasando 2 de derecha a izquierda	Pasando 3 de izquierda a derecha
Mano derecha	x	$x-2$	$x+3$
Mano izquierda	y	$y+2$	$y-3$
Condiciones del enunciado		$x-2=y+2$	$x+3=2(y-3)$

Las condiciones impuestas por el enunciado se traducen en el siguiente sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} x - 2 = y + 2 \\ x + 3 = 2(y-3) \end{array} \right.$$

Reduciendo cada ecuación del sistema por separado,

$$\begin{aligned} x - 2 &= y + 2 \\ x - y &= 4 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} x + 3 &= 2(y-3) \\ x + 3 &= 2y - 6 \\ x - 2y &= -9 \end{aligned}$$

se obtiene el siguiente sistema equivalente

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x & - & y & = & 4 \\ x & - & 2y & = & -9 \end{array}\right.$$

Resolviéndolo por igualación, tenemos

$$x = 4 + y$$

y

$$x = 2y - 9$$

luego,

$$\begin{aligned} 4 + y &= 2y - 9 \\ y - 2y &= -9 - 4 \\ -y &= -13 \\ y &= 13 \end{aligned}$$

y, por tanto,

$$x = 4 + 13 = 17$$

Por consiguiente, el alumno tiene 17 monedas en la mano derecha y 13 monedas en la izquierda. ∎

6.7.2. Problemas de edades

Ejemplo 73 Halla las edades de dos personas si se sabe que hace 10 años la edad de la primera era cuatro veces la edad de la segunda, y dentro de 20 años la edad de la primera sólo será el doble de la otra.
Solución: Recogemos la información del enunciado en el siguiente cuadro:

	edades actuales	edades hace 10 años	edades dentro de 20 años
1ª persona	x	$x - 10$	$x + 20$
2ª persona	y	$y - 10$	$y + 20$
Condiciones del enunciado		$x - 10 = 4(y - 10)$	$x + 20 = 2(y + 20)$

Las condiciones impuestas por el enunciado se traducen en el sistema siguiente:

$$\left\{\begin{array}{l} x - 10 = 4(y - 10) \\ x + 20 = 2(y + 20) \end{array}\right.$$

Despejando x de las dos ecuaciones, se obtiene

$$\left\{\begin{array}{l} x = 4(y - 10) + 10 \\ x = 2(y + 20) - 20 \end{array}\right.$$

Resolviendo este sistema por igualación, obtenemos la siguiente ecuación de primer grado

$$4(y - 10) + 10 = 2(y + 20) - 20$$

Resolviendo esta ecuación, tenemos

$$\begin{aligned} 4(y - 10) + 10 &= 2(y + 20) - 20 \\ 4y - 40 + 10 &= 2y + 40 - 20 \\ 4y - 30 &= 2y + 20 \\ 2y &= 50 \\ y &= 25 \end{aligned}$$

Por tanto, la edad de la segunda persona es de 25 años, y la edad de la primera se calcula mediante

$$\begin{aligned} x &= 4(25 - 10) + 10 \\ &= 70 \end{aligned}$$

Por consiguiente, las edades de las dos personas son 25 y 70 años. ∎

Ejemplo 74 Una persona dice a otra: Tengo el doble de la edad que tu tenías cuando yo tenía la que tu tienes ahora y cuando tu tengas la edad que yo tengo, entre los dos reuniremos 63 años. Calcula la edad de cada persona.
Solución: Supongamos que las personas se llaman A y B y que sus edades son x e y, respectivamente. La información del enunciado queda recogida en el siguiente cuadro:

	edades actuales	edades hace $x-y$ años	edades dentro de $x-y$ años
A	x	$x-(x-y)=y$	$x+(x-y)=2x-y$
B	y	$y-(x-y)=2y-x$	$y+(x-y)=x$
Condiciones del enunciado		$x=2(2y-x)$	$2x-y+x=63$

Observa que x, la edad de A, es mayor que y, la edad de B, que la edad de A era la de B hace $x-y$ años, y que la edad de B será la de A dentro de $x-y$ años. Como la edad de A era el doble de la de B hace $x-y$ años, se ha de cumplir que

$$x=2(2y-x)$$

y como la suma de las edades de A y B será 63 dentro de $x-y$ años, también se ha de cumplir que

$$2x-y+x=63$$

Como consecuencia, las edades de A y B son la solución del siguiente sistema:

$$\left\{\begin{array}{l} x=2(2y-x) \\ 2x-y+x=63 \end{array}\right.$$

Reduciendo por separado las dos ecuaciones de este sistema, tenemos

$$\begin{aligned} x &= 2(2y-x) \\ x &= 4y-2x \\ 3x-4y &= 0 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} 2x-y+x &= 63 \\ 3x-y &= 63 \end{aligned}$$

De este modo, el sistema anterior es equivalente al siguiente

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} 3x & - & 4y & = & 0 \\ 3x & - & y & = & 63 \end{array}\right.$$

Multiplicando la primera ecuación por -1 y sumando después las dos ecuaciones miembro a miembro, tenemos

$$\begin{array}{rrcrcr} - & 3x & + & 4y & = & 0 \\ & 3x & - & y & = & 63 \\ & & & 3y & = & 63 \end{array}$$

Resolviendo la ecuación resultante,

$$\begin{aligned} 3y &= 63 \\ y &= 21 \end{aligned}$$

obtenemos $y=21$. Sustituyendo este valor de y en la primera de las ecuaciones del sistema, obtenemos

$$\begin{aligned} 3x-84 &= 0 \\ 3x &= 84 \\ x &= 28 \end{aligned}$$

Por consiguiente, las edades de las dos personas son 28 y 21 años, respectivamente. ■

6.7.3. Problemas geométricos

Ejemplo 75 Si se aumenta la longitud de un campo rectangular en 5 m y la anchura en 7 m, la superficie aumenta en 830 m^2, mientras que si se disminuye su longitud en 8 m y la anchura en 4 m, la superficie disminuye en 700 m^2. Calcula las dimensiones de dicho campo.
Solución: Representando por x la longitud y por y la anchura, ambas expresadas en metros, del campo rectangular, recogemos la información del enunciado en el siguiente cuadro:

Medidas	Actuales	Cuando aumentan	Cuando disminuyen
Longitud	x	$x+5$	$x-8$
Anchura	y	$y+7$	$y-4$
Superficie del campo	$x \cdot y$	$(x+5)\cdot(y+7)$	$(x-8)\cdot(y-4)$

Cuando aumentan sus dimensiones su superficie aumenta en 830 m^2 y, por tanto,

$$(x+5)\cdot(y+7) = x\cdot y + 830$$

mientras que, cuando disminuyen su superficie lo hace en 700 m^2 y, por tanto,

$$(x-8)\cdot(y-4) = x\cdot y - 700$$

Luego, las dimensiones del campo deben cumplir las ecuaciones del sistema siguiente

$$\left\{\begin{array}{l}(x+5)\cdot(y+7) = x\cdot y + 830\\(x-8)\cdot(y-4) = x\cdot y - 700\end{array}\right.$$

Reduciendo cada ecuación por separado, tenemos

$$\begin{array}{rcl}(x+5)\cdot(y+7) & = & x\cdot y + 830\\x\cdot y + 5y + 7x + 35 & = & x\cdot y + 830\\7x + 5y & = & 795\end{array}$$

y

$$\begin{array}{rcl}(x-8)\cdot(y-4) & = & x\cdot y - 700\\x\cdot y - 8y - 4x + 32 & = & x\cdot y - 700\\-4x - 8y & = & -732\\4x + 8y & = & 732\end{array}$$

y, por tanto, el siguiente sistema equivalente

$$\left\{\begin{array}{rcrcl}7x & + & 5y & = & 795\\4x & + & 8y & = & 732\end{array}\right.$$

Despejando y de la primera ecuación, se obtiene

$$y = \frac{795-7x}{5}$$

y sustituyendo este valor en la segunda, se obtiene

$$4x + 8\cdot\frac{795-7x}{5} = 732$$

Resolviendo esta ecuación, tenemos

$$\begin{array}{rcl}4x + \dfrac{6360-56x}{5} & = & 732\\20x + 6360 - 56x & = & 3660\\-36x & = & -2700\\36x & = & 2700\\x & = & 75\end{array}$$

Sustituyendo ahora este valor de x en la segunda ecuación, se obtiene

$$\begin{aligned} 300 + 8y &= 732 \\ 8y &= 432 \\ y &= 54 \end{aligned}$$

Por consiguiente, la longitud del campo es de 75 m y la anchura es de 54 m. ■

Ejemplo 76 Calcula las dimensiones de un rectángulo que tiene perímetro 80 m y su altura es $\frac{2}{3}$ de la base.
Solución: Si designamos por x e y las medidas en metros de la base y la altura del rectángulo, entonces su perímetro se expresa mediante la ecuación

$$\begin{aligned} 2x + 2y &= 80 \\ x + y &= 40 \end{aligned}$$

Si, además, su altura es $\frac{2}{3}$ de la base, entonces

$$y = \frac{2}{3}x$$

Por tanto, las dimensiones de este rectángulo han de cumplir las ecuaciones del sistema siguiente

$$\begin{cases} x + y = 40 \\ y = \frac{2}{3}x \end{cases}$$

Resolviéndolo por sustitución, tenemos

$$\begin{aligned} x + \frac{2x}{3} &= 40 \\ 3x + 2x &= 120 \\ 5x &= 120 \\ x &= 24 \end{aligned}$$

y, por tanto,

$$y = \frac{2}{3} \cdot 24 = 16$$

Por consiguiente, la base mide 24 m y la altura 16 m. ■

6.7.4. Problemas de números

Ejemplo 77 Las dos cifras de que consta un número suman 12. Halla dicho número, sabiendo que si invertimos el orden de sus cifras el número disminuye en 36.
Solución: Si llamamos x a la cifra de las decenas e y a la de las unidades, por descomposición decimal el número que buscamos se expresa de la siguiente forma

$$10x + y$$

Si invertimos el orden de sus cifras, el número se expresa como

$$10y + x$$

Por tanto, si las cifras de este número suman 12, tenemos

$$x + y = 12$$

y si el número con las cifras invertidas es menor en 36 unidades que el número dado, tenemos

$$10x + y = 10y + x + 36$$

Luego, las cifras del número deben cumplir las ecuaciones del sistema siguiente

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ 10x + y = 10y + x + 36 \end{cases}$$

Reduciendo la segunda ecuación de este sistema, tenemos

$$\begin{aligned} 10x + y &= 10y + x + 36 \\ 9x - 9y &= 36 \\ x - y &= 4 \end{aligned}$$

y, por tanto, resulta el siguiente sistema equivalente

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} x & + & y & = & 12 \\ x & - & y & = & 4 \end{array} \right.$$

Sumando miembro a miebro las dos ecuaciones, se obtiene

$$\begin{aligned} 2x &= 16 \\ x &= 8 \end{aligned}$$

y, sustituyendo este valor en la primera ecuación, se obtiene

$$\begin{aligned} 8 + y &= 12 \\ y &= 4 \end{aligned}$$

Por consiguiente, la cifra de las decenas es 8 y la de las unidades es 4, es decir, el número pedido es 84. ■

Ejemplo 78 Un número de tres cifras es tal que: la cifra de las centenas es igual a la suma de las cifras de las decenas y unidades. La diferencia entre este número y el que resulta de intercambiar las cifras de las unidades y de las centenas es 396. Halla dicho número, sabiendo que la diferencia entre la cifra de las decenas y la de las unidades es 2.
Solución: Si llamamos x a la cifra de las centenas, y a la de las decenas, y z a la de las unidades, por descomposición decimal el número que buscamos se expresa de la siguiente forma

$$100x + 10y + z$$

Si la cifra de las centenas es igual a la suma de las cifras de las decenas y unidades, entonces

$$x = y + z$$

El número que resulta de intercambiar las cifras de las unidades y de las centenas, se expresa como

$$100z + 10y + x$$

y, si la diferencia entre el número dado y el que resulta de este intercambio es 396, entonces

$$100x + 10y + z - (100z + 10y + x) = 396$$

Por último, si la diferencia entre la cifra de las decenas y la de las unidades es 2, entonces

$$y - z = 2$$

Luego, las cifras del número que estamos buscando han de cumplir las ecuaciones del siguiente sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} x = y + z \\ 100x + 10y + z - (100z + 10y + x) = 396 \\ y - z = 2 \end{array} \right.$$

Reduciendo la segunda ecuación de este sistema, tenemos

$$\begin{aligned} 100x + 10y + z - (100z + 10y + x) &= 396 \\ 100x + 10y + z - 100z - 10y - x &= 396 \\ 99x - 99z &= 396 \\ x - z &= 4 \end{aligned}$$

Luego, obtenemos el siguiente sistema equivalente

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & - & y & - & z & = & 0 \\ x & & & - & z & = & 4 \\ & & y & - & z & = & 2 \end{array}\right.$$

Sumando miembro a miembro la primera ecuación con la tercera, se obtiene la ecuación

$$\begin{array}{ccccccc} x & - & y & - & z & = & 0 \\ & & y & - & z & = & 2 \\ x & & & - & 2z & = & 2 \end{array}$$

que junto con la segunda, se obtiene el siguiente sistema con las incógnitas x y z:

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & - & z & = & 4 \\ x & - & 2z & = & 2 \end{array}\right.$$

Multiplicando la segunda por -1 y, sumando después las dos ecuaciones miembro a miembro, tenemos

$$\begin{array}{cccccc} & x & - & z & = & 4 \\ - & x & + & 2z & = & -2 \\ & & & z & = & 2 \end{array}$$

sustituyendo este valor de z en la primera ecuación del último sistema, tenemos

$$\begin{array}{rcl} x-2 & = & 4 \\ x & = & 6 \end{array}$$

Finalmente, sustituyendo los valores hallados de x y z en la primera ecuación del sistema original, tenemos

$$\begin{array}{rcl} 6 & = & y+2 \\ y & = & 4 \end{array}$$

Por consiguiente, $x = 6$, $y = 4$ y $z = 2$, y el número pedido es 642. ■

6.7.5. Problemas de móviles

Ejemplo 79 Determina la velocidad y la longitud de un tren que ha tardado 7 segundos en pasar por un punto, y 25 segundos en atrevesar un puente de 378 m de longitud.
Solución: En todos los problemas de móviles se utilizará la relación

$$\text{espacio} = \text{velocidad} \times \text{tiempo}$$

que es válida sólo para los casos en los que las velocidades de los móviles no varían con el tiempo.
Planteamiento: Supongamos que la velocidad del tren expresada en m/seg es x y que su longitud en metros es y. Si tarda 7 segundos en pasar por un punto, significa que ha recorrido y metros en 7 segundos y, por tanto,

$$y = 7x$$

Si tarda 25 segundos en atravesar el puente, significa que ha recorrido y+378 metros en 25 segundos y, por tanto,

$$y + 378 = 25x$$

De este modo, obtenemos el sistema siguiente

$$\left\{\begin{array}{l} y = 7x \\ y + 378 = 25x \end{array}\right.$$

Resolución: Despejando y de la segunda ecuación,

$$y = 25x - 378$$

y, resolviendo el sistema por igualación, se obtiene

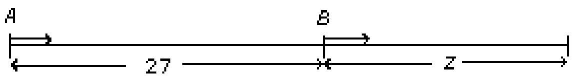
$$\begin{aligned}7x &= 25x - 378\\ -18x &= -378\\ 18x &= 378\\ x &= 21\end{aligned}$$

y, sustituyendo este valor de x en la primera ecuación del sistema, se obtiene

$$y = 147$$

Por lo tanto, el tren mide 147 metros y su velocidad es de 21 m/seg. ■

Ejemplo 80 Dos peatones parten al mismo tiempo de los puntos A y B, distantes 27 Km. Cuando ambos caminan en la misma dirección y sentido, uno encuentra al otro al cabo de 9 horas, mientras que, si caminan en sentidos opuestos, se encuentran a las 3 horas. ¿Cuáles son sus velocidades?
Solución: Planteamiento: Supongamos que x es la velocidad del peatón que parte de A y que y es la velocidad del peatón que sale de B, ambas expresadas en Km/h. Observa el siguiente diagrama:



Entonces, sabiendo que

$$\text{espacio} = \text{velocidad} \times \text{tiempo}$$

tenemos

$$27 + z = 9x$$

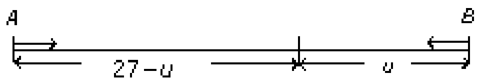
y

$$z = 9y$$

y, sustituyendo este valor de z en la primera ecuación, tenemos

$$27 + 9y = 9x$$

Ahora observa el siguiente diagrama:



Entonces, tenemos

$$27 - u = 3x$$

y

$$u = 3y$$

y, sustituyendo este valor de u en la primera ecuación, tenemos

$$27 - 3y = 3x$$

Luego, las velocidades de estos dos peatones han de cumplir el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 27 + 9y = 9x \\ 27 - 3y = 3x \end{cases}$$

Resolución: Reduciendo las dos ecuaciones del sistema, se obtiene

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ x + y = 9 \end{cases}$$

y, sumando miembro a miembro las dos ecuaciones, se obtiene

$$\begin{aligned} 2x &= 12 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

Sustituyendo este valor de x en la segunda ecuación, obtenemos

$$\begin{aligned} 6 + y &= 9 \\ y &= 3 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la velocidad del peatón que sale de A es de 6 Km/h y la del peatón que sale de B es de 3 Km/h. ■

6.7.6. Problemas de mezclas

Ejemplo 81 Con dos clases de café de 6 euros y de 8 euros el kilo, se quiere obtener una mezcla de 7 euros el kilo. Halla la cantidad de cada clase que se ha de mezclar para obtener 30 kilos de mezcla.
Solución: Planteamiento: Si x e y son las cantidades de cada clase que hay que mezclar, ambas expresadas en kilos, como queremos obtener 30 kilos de mezcla, tenemos

$$x + y = 30$$

Además, como la mezcla es a 7 euros el kilo, tenemos

$$6x + 8y = 210$$

Luego, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y = 30 \\ 6x + 8y = 210 \end{array} \right.$$

Resolución: Reduciendo la segunda ecuación del sistema, tenemos

$$3x + 4y = 105$$

y, despejando y de la primera,

$$y = 30 - x$$

y sustituyendo este valor en la ecuación anterior, se obtiene

$$3x + 4(30 - x) = 105$$

Resolviendo esta ecuación, tenemos

$$\begin{aligned} 3x + 120 - 4x &= 105 \\ -x &= -15 \\ x &= 15 \end{aligned}$$

y, sustituyendo este valor de x en la primera ecuación del sistema, se obtiene

$$\begin{aligned} 15 + y &= 30 \\ y &= 15 \end{aligned}$$

Por consiguiente, hay que mezclar 15 kilos de cada clase para obtener la mezcla considerada. ■

Ejemplo 82 Un orfebre tiene dos lingotes de oro. El primero contiene 540 g de oro y 60 g de cobre, y el segundo, 400 g de oro y 100 g de cobre. ¿Qué cantidad ha de tomar de cada lingote para formar otro de 640 g y de ley 0.825?
Solución: Planteamiento: Si x e y son las cantidades que hay que tomar de cada lingote, ambas expresadas en gramos, como queremos formar un lingote de 640 g, tenemos

$$x + y = 640$$

El primer lingote tiene un 90 % de oro, ya que

$$\frac{540}{600} \cdot 100 = 90$$

y el segundo tiene un 80 %, pues

$$\frac{400}{500} \cdot 100 = 80$$

Como el oro del lingote que queremos formar es 0,825 de ley, esto quiere decir que tiene un 82.5 % de oro. Entonces, tenemos

$$90x + 80y = 82{,}5 \cdot 640$$

es decir,

$$90x + 80y = 52800$$

De este modo, obtenemos el siguiente sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y = 640 \\ 90x + 80y = 52800 \end{array} \right.$$

Resolución: Reduciendo la segunda ecuación del sistema, tenemos

$$9x + 8y = 5280$$

y, despejando y de la primera, se obtiene

$$y = 640 - x$$

y, sustituyendo este valor de y en la última ecuación, tenemos

$$9x + 8(640 - x) = 5280$$

Resolviendo esta ecuación, se obtiene

$$\begin{array}{rcl} 9x + 5120 - 8x & = & 5280 \\ x & = & 160 \end{array}$$

y, sustituyendo este valor de x en la primera ecuación del sistema, se obtiene

$$\begin{array}{rcl} 160 + y & = & 640 \\ y & = & 480 \end{array}$$

Por lo tanto, debemos tomar 160 gramos del primer lingote y 480 gramos del segundo. ■

6.8. Sistemas no lineales

Dos o más ecuaciones forman un sistema no lineal si alguna de ellas no es lineal.
Por ejemplo, el sistema de dos incógnitas

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} x^2 & + & y^2 & = & 25 \\ x & + & y & = & 7 \end{array} \right.$$

no es lineal porque está formado por una ecuación lineal y otra de segundo grado, y el sistema de tres ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 25 \\ & & & & \frac{y}{x} & = & 3 \\ & & & & yz & = & -6 \end{array} \right.$$

tampoco es lineal porque la tercera ecuación es de segundo grado.
En general, los sistemas de este tipo se resuelven por sustituición. Despejamos una de las incógnitas en una de las ecuaciones y sustituimos este valor en la otra ecuación del sistema. Sin embargo, hay algunos casos en que puede ser más conveniente utilizar reducción o incluso igualación. Los ejemplos siguientes ilustran estos métodos de resolución.

Ejemplo 83 Resuelve el sistema

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} x^2 & + & y^2 & = & 25 \\ x & + & y & = & 7 \end{array} \right.$$

Solución: Resolveremos este sistema por sustitución. Despejando y de la segunda ecuación,

$$y = 7 - x$$

y sustituyendo este valor de y en la primera, se obtiene la siguiente ecuación de segundo grado:

$$\begin{array}{rcl} x^2 + (7-x)^2 & = & 25 \\ x^2 + 49 - 14x + x^2 & = & 25 \\ 2x^2 - 14x + 24 & = & 0 \\ x^2 - 7x + 12 & = & 0 \end{array}$$

Resolviendo esta ecuación,

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} & = & \dfrac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{2} \\ & = & \dfrac{7 \pm 1}{2} \\ & = & \left\{ \begin{array}{l} \frac{7+1}{2} = 4 \\ \frac{7-1}{2} = 3 \end{array} \right. \end{array}$$

se obtienen las soluciones $x_1 = 3$ y $x_2 = 4$. Para $x_1 = 3$, el valor de y es

$$y_1 = 7 - 3 = 4$$

y para $x_2 = 4$,

$$y_2 = 7 - 4 = 3$$

Por lo tanto, las soluciones del sistema son

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 3 \\ y = 4 \end{array} \right. \quad \text{o} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 4 \\ y = 3 \end{array} \right.$$

■

Ejemplo 84 Resuelve el sistema

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} x^2 & + & y^2 & = & 25 \\ & & xy & = & 12 \end{array} \right.$$

Solución: Resolveremos este sistema por sustitución. Despejando y de la segunda ecuación,

$$y = \frac{12}{x}$$

donde suponemos que $x \neq 0$, y sustituyendo este valor y en la primera, se obtiene la siguiente ecuación bicuadrada:

$$\begin{array}{rcl} x^2 + \left(\dfrac{12}{x}\right)^2 & = & 25 \\ x^2 + \dfrac{144}{x^2} & = & 25 \\ x^4 + 144 & = & 25x^2 \\ x^4 - 25x^2 + 144 & = & 0 \end{array}$$

Ahora, haciendo el cambio $x^2 = t$, obtenemos una ecuación de segundo grado con incógnita t

$$t^2 - 25t + 144 = 0$$

Resolviendo esta ecuación,

$$\begin{aligned}\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} &= \frac{25 \pm \sqrt{625-576}}{2} \\ &= \frac{25 \pm 7}{2} \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \frac{25+7}{2} = 16 \\ \frac{25-7}{2} = 9 \end{array} \right.\end{aligned}$$

se obtienen las soluciones

$$\begin{aligned} x^2 = 9 \quad &\Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \sqrt{9} = 3 \\ x_2 = -\sqrt{9} = -3 \end{array} \right. \\ x^2 = 16 \quad &\Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x_3 = \sqrt{16} = 4 \\ x_4 = -\sqrt{16} = -4 \end{array} \right.\end{aligned}$$

Para cada uno de estos valores de x se obtiene el correspondiente valor de y mediante

$$y = \frac{12}{x}$$

Así, tenemos

$$\begin{array}{lll} x_1 = 3 & \Longrightarrow & y_1 = 4 \\ x_2 = -3 & \Longrightarrow & y_2 = -4 \\ x_3 = 4 & \Longrightarrow & y_3 = 3 \\ x_4 = -4 & \Longrightarrow & y_4 = -3 \end{array}$$

De este modo las soluciones del sistema son

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 3 \\ y = 4 \end{array} \right. \quad \text{o} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = -3 \\ y = -4 \end{array} \right. \quad \text{o} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 4 \\ y = 3 \end{array} \right. \quad \text{o} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = -4 \\ y = -3 \end{array} \right.$$

■

Ejemplo 85 Resuelve el sistema

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} x^2 & + & y^2 & = & \frac{3}{4} \\ x^2 & - & y^2 & = & \frac{1}{4} \end{array} \right.$$

Solución: Resolveremos este sistema por reducción. Sumando miembro a miembro las dos ecuaciones, se obtiene la siguiente ecuación de segundo grado incompleta con incógnita x

$$\begin{array}{ccccc} x^2 & + & y^2 & = & \frac{3}{4} \\ x^2 & - & y^2 & = & \frac{1}{4} \\ 2x^2 & & & & 1 \end{array}$$

Resolviendo esta ecuación,

$$\begin{aligned} 2x^2 &= 1 \\ x^2 &= \frac{1}{2} \\ x &= \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \\ &= \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Sustituyendo el valor de x^2 en la primera ecuación, se obtiene la siguiente ecuación de segundo grado incompleta con incógnita y

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + y^2 &= \frac{3}{4} \\ y^2 &= \frac{1}{4} \\ y &= \pm\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Por tanto, las soluciones del sistema son

$$\left\{\begin{array}{l} x=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y=\frac{1}{2} \end{array}\right. \quad \text{o} \quad \left\{\begin{array}{l} x=-\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y=\frac{1}{2} \end{array}\right. \quad \text{o} \quad \left\{\begin{array}{l} x=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y=-\frac{1}{2} \end{array}\right. \quad \text{o} \quad \left\{\begin{array}{l} x=-\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y=-\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

■

Ejemplo 86 Resuelve el sistema

$$\left\{\begin{array}{ccccc} & & -\sqrt{x-1} & = & y \\ x & + & 4y & = & -2 \end{array}\right.$$

Solución: Resolveremos este sistema por igualación. De la primera ecuación, tenemos

$$y=-\sqrt{x-1}$$

y, despejando y de la segunda ecuación, tenemos

$$y=\frac{-2-x}{4}$$

Igualando ambos valores de y, obtenemos la siguiente ecuación irracional con incógnita x:

$$-\sqrt{x-1}=-\frac{2+x}{4}$$

Para resolver esta ecuación, primero elevamos al cuadrado,

$$\begin{aligned} \left(-\sqrt{x-1}\right)^2 &= \left(-\frac{2+x}{4}\right)^2 \\ x-1 &= \frac{4+4x+x^2}{16} \\ 16x-16 &= 4+4x+x^2 \\ x^2-12x+20 &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo esta ecuación de segundo grado,

$$\begin{aligned} \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} &= \frac{12\pm\sqrt{144-80}}{2} \\ &= \frac{12\pm 8}{2} \\ &= \left\{\begin{array}{l} \frac{12+8}{2}=10 \\ \frac{12-8}{2}=2 \end{array}\right. \end{aligned}$$

se obtienen las soluciones $x_1=10$ y $x_2=2$. Ambas soluciones son buenas porque

$$\begin{array}{ll} x_1=10 & -\sqrt{10-1}=-\frac{2+10}{4} \\ x_2=2 & -\sqrt{2-1}=-\frac{2+2}{4} \end{array}$$

Para cada uno de estos valores de x se obtiene el correspondiente valor de y mediante

$$y=-\frac{2+x}{4}$$

Así, tenemos

$$\begin{array}{lll} x_1=10 & \Longrightarrow & y_1=-3 \\ x_2=2 & \Longrightarrow & y_2=-1 \end{array}$$

Por tanto, las soluciones del sistema son

$$\left\{\begin{array}{l} x=10 \\ y=-3 \end{array}\right. \quad \text{o} \quad \left\{\begin{array}{l} x=2 \\ y=-1 \end{array}\right.$$

■

Ejemplo 87 Resuelve el sistema

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 2 \\ & & & & \frac{y}{x} & = & 3 \\ & & & & yz & = & -6 \end{array}\right.$$

Solución: Resolveremos este sistema por sustitución. Despejando x de la segunda ecuación

$$x = \frac{y}{3}$$

y despejando z de la tercera,

$$z = -\frac{6}{y}$$

donde hemos supuesto que $y \neq 0$, y sustituyendo estos valores de x y z en la primera ecuación, se obtiene una ecuación de segundo grado con incógnita y

$$\begin{array}{rcl} \frac{y}{3} + y - \frac{6}{y} & = & 2 \\ y^2 + 3y^2 - 18 & = & 6y \\ 4y^2 - 6y - 18 & = & 0 \\ 2y^2 - 3y - 9 & = & 0 \end{array}$$

Resolviendo esta ecuación,

$$\begin{array}{rcl} \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} & = & \frac{3 \pm \sqrt{9 + 72}}{4} \\ & = & \frac{3 \pm 9}{4} \\ & = & \left\{\begin{array}{l} \frac{3+9}{4} = 3 \\ \frac{3-9}{4} = -\frac{3}{2} \end{array}\right. \end{array}$$

obtenemos las soluciones $y_1 = 3$ y $y_2 = -3/2$. Para cada uno de estos valores de y se obtienen los correspondientes valores de x y z mediante

$$x = \frac{y}{3} \quad \text{y} \quad z = -\frac{6}{y}$$

Así, tenemos

$$\begin{array}{lcll} y_1 = 3 & \Longrightarrow & x_1 = 1 & z_1 = -2 \\ y_2 = -\frac{3}{2} & \Longrightarrow & x_2 = -\frac{1}{2} & z_2 = 4 \end{array}$$

Por tanto, las soluciones del sistema son

$$\left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 3 \\ z = -2 \end{array}\right. \quad \text{o} \quad \left\{\begin{array}{l} x = -\frac{1}{2} \\ y = -\frac{3}{2} \\ z = 4 \end{array}\right.$$

■

6.9. Interpretación gráfica de las soluciones en casos sencillos

Las soluciones de los sistemas no lineales de segundo grado con dos incógnitas pueden interpretarse geométricamente. En este apartado vamos a estudiar sólo dos tipos, desde este punto de vista. El primer tipo son los sistemas formados por dos ecuaciones, una de las cuales es la de una recta, y la otra, es la de una circunferencia.

$$\left.\begin{array}{r} ax + by = c \\ x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \end{array}\right\}$$

El segundo tipo son los sistemas formados por las ecuaciones de una recta y de una parábola.

$$\left.\begin{array}{r} Ax + By = C \\ ax^2 + bx + c = y \end{array}\right\}$$

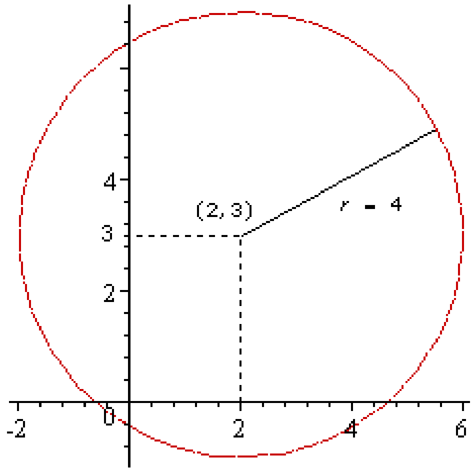
6.9.1. Rectas y circunferencias

La ecuación de una circunferencia (Lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo denominado centro una distancia fija denominada radio de la circunferencia) de centro (p, q) y radio r es

$$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2 \tag{3}$$

Por ejemplo, la circunferencia de centro $(2, 3)$ y radio 4 tiene por ecuación

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 16$$



Desarrollando los cuadrados de la ecuación (3), obtenemos

$$\begin{aligned} x^2 - 2px + p^2 + y^2 - 2qy + q^2 &= r^2 \\ x^2 + y^2 - 2px - 2qy + p^2 + q^2 - r^2 &= 0 \end{aligned}$$

Si ahora llamamos $A = -2p$, $B = -2q$ y $C = p^2 + q^2 - r^2$, obtenemos

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

que es una ecuación de segundo grado con dos incógnitas. Como conclusión podemos afirmar que toda ecuación de segundo grado con dos incógnitas que sea equivalente a una ecuación de la forma

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

tendrá como conjunto de soluciones todos los puntos de una circunferencia.

Ejemplo 88 Interpreta geométricamente las soluciones de la ecuación

$$2x^2 + 2y^2 - 8x + 12y + 8 = 0$$

Solución: La ecuación es equivalente a

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 = 0$$

y, por tanto, las soluciones de la ecuación propuesta son los puntos de una circunferencia. Para calcular el centro y el radio de esta circunferencia debemos recordar que

$$\begin{aligned} &-2p = -4 \\ &-2q = 6 \\ &4 = p^2 + q^2 - r^2 \end{aligned}$$

de las dos primeras ecuaciones se obtienen las coordenadas del centro, $p = 2$ y $q = -3$, y, por tanto, el centro es $(2, -3)$. Sustituyendo estos valores en la tercera ecuación, se obtiene la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} 4 &= 4 + 9 - r^2 \\ r^2 &= 9 \end{aligned}$$

cuyas soluciones son $r_1 = 3$ y $r_2 = -3$. Ahora bien, como el radio representa una longitud, no puede ser que el valor del radio sea negativo, y, por tanto, $r = 3$. ■

Con esta breve introducción al estudio de la circunferencia podemos interpretar geométricamente las soluciones de algunos sistemas no lineales.
Consideremos el sistema no lineal siguiente

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} x^2 & + & y^2 & = & 25 \\ 3x & - & 2y & = & 1 \end{array} \right.$$

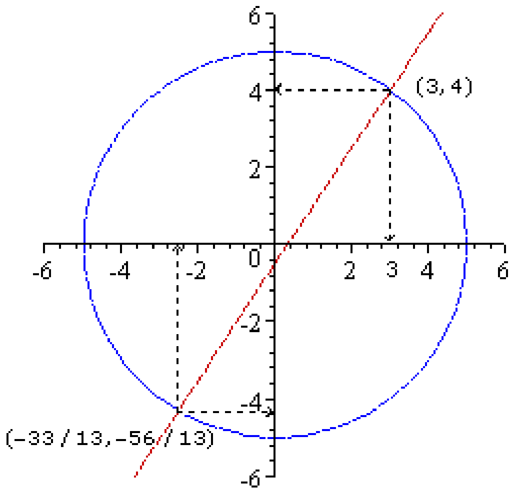
Es claro que las soluciones de la ecuacion

$$x^2 + y^2 = 25$$

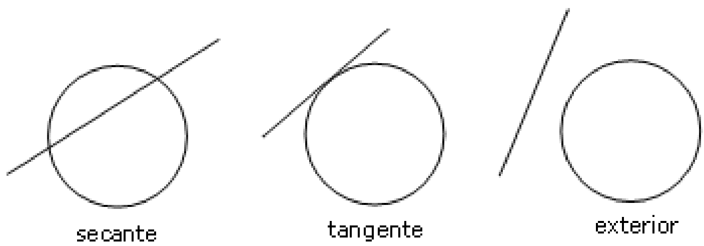
son los puntos de la circunferencia centrada en el origen de coordenadas y radio 5, y que las soluciones de

$$3x - 2y = 1$$

son los puntos de una recta. Entonces, resolver el sistema significa geométricamente hallar los puntos de intersección entre la circunferencia y la recta. Representando gráficamente ambas curvas,



vemos que la recta y la circunferencia se cortan en dos puntos. Estos puntos son $(3, 4)$ y $(-33/13, -56/13)$, como puede comprobarse enseguida resolviendo analíticamente el sistema propuesto.
Por intuición geométrica sabemos que una recta y una circunferencia pueden cortarse en dos puntos distintos, en uno, o ninguno, según sea la recta secante, tangente o exterior a la circunferencia.



De esta interpretación deducimos que los sistemas del tipo

$$\left. \begin{array}{r} ax + by = c \\ x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \end{array} \right\}$$

formados por dos ecuaciones, una de ellas es la de una recta, y la otra, es la de una circunferencia, pueden clasificarse por las soluciones de la siguiente manera:

1. Compatibles determinados con dos soluciones distintas: geométricamente, la recta es secante a la circunferencia

2. Compatibles determinados con una sola solución (solución doble): geométricamente, la recta es tangente a la circunferencia

3. Incompatibles: geométricamente, la recta es exterior a la circunferencia

Ejemplo 89 Resuelve el sistema

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x^2 & + & y^2 & = & 25 \\ 3x & + & 4y & = & 25 \end{array}\right.$$

e interpreta geométricamente su solución.
Solución: Despejando y de la segunda ecuación,

$$y = \frac{25-3x}{4}$$

y sustituyendo este valor en la primera, se obtiene

$$x^2 + \left(\frac{25-3x}{4}\right)^2 = 25$$

Resolviendo esta ecuación,

$$\begin{array}{rcl} x^2 + \dfrac{625-150x+9x^2}{16} & = & 25 \\ 16x^2+625-150x+9x^2 & = & 400 \\ 25x^2-150x+225 & = & 0 \\ x^2-6x+9 & = & 0 \\ (x-3)^2 & = & 0 \end{array}$$

obtenemos una solución doble $x = 3$. Para este valor de x, mediante

$$y = \frac{25-3x}{4}$$

obtenemos el correspondiente valor de y,

$$\begin{array}{rcl} y & = & \dfrac{25-3\cdot 3}{4} \\ y & = & 4 \end{array}$$

Por tanto, el sistema tiene una sola solución

$$\left\{\begin{array}{l} x = 3 \\ y = 4 \end{array}\right.$$

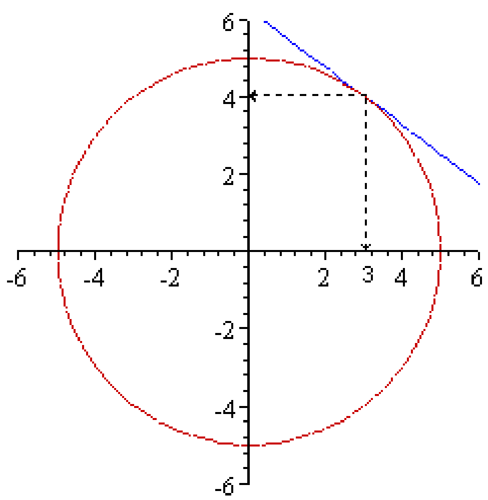
Geométricamente, esto significa que la recta

$$3x + 4y = 25$$

es tangente a la circunferencia

$$x^2 + y^2 = 25$$

y el punto de contacto es $(3, 4)$.



■

6.9.2. Rectas y parábolas

De cursos anteriores se sabe que las funciones polinómicas de segundo grado son de la forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

y, también que la gráfica de estas funciones son parábolas (verticales). Considerando el grafo de estas funciones

$$G = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = ax^2 + bx + c\right\}$$

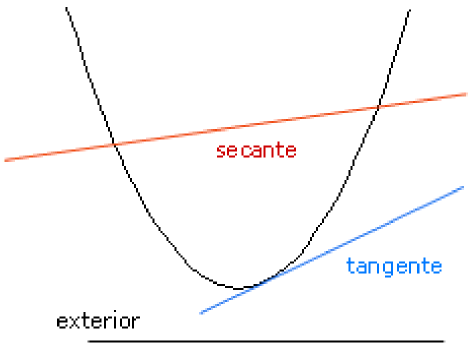
vemos que es el conjunto de soluciones de una ecuación de segundo grado con dos incógnitas

$$y = ax^2 + bx + c$$

Entonces, resolver un sistema no lineal de la forma

$$\left.\begin{array}{r} Ax + By = C \\ ax^2 + bx + c = y \end{array}\right\}$$

significa geométricamente hallar los puntos de intersección entre una parábola (vertical) y una recta. Por intuición geométrica sabemos que una recta y una parábola (vertical) pueden cortarse en dos puntos distintos, en uno, o ninguno, según sea la recta secante, tangente o exterior a la parábola.



De esta interpretación deducimos que los sistemas del tipo

$$\left.\begin{array}{r} Ax + By = C \\ ax^2 + bx + c = y \end{array}\right\}$$

formados por dos ecuaciones, una de ellas es la de una recta, y la otra, es la de una parábola (vertical), pueden clasificarse por las soluciones de la siguiente manera:

1. Compatibles determinados con dos soluciones distintas: geométricamente, la recta es secante a la parábola

2. Compatibles determinados con una sola solución (solución doble): geométricamente, la recta es tangente a la parábola

3. Incompatibles: geométricamente, la recta es exterior a la parábola

Ejemplo 90 Resuelve el sistema

$$\left.\begin{array}{r} 2 - x^2 - 4x = y \\ x + y = 10 \end{array}\right\}$$

e interpreta geométricamente su solución.
Solución: Despejando y de la segunda ecuación,

$$y = 10 - x$$

e igualando por y, se obtiene la ecuación

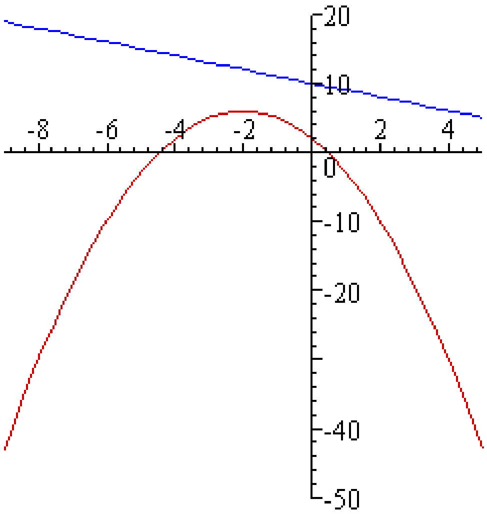
$$\begin{array}{rcl} 2 - x^2 - 4x & = & 10 - x \\ -x^2 - 3x - 8 & = & 0 \\ x^2 + 3x + 8 & = & 0 \end{array}$$

Como el discriminante de esta ecuación de segundo grado es negativo

$$b^2 - 4ac = 9 - 32 < 0$$

la ecuación no tiene soluciones reales. Como consecuencia, el sistema es incompatible. Geométricamente, esto significa que la recta

$$x + y = 10$$



es exterior a la parábola

$$y = -x^2 - 4x + 2$$

■

6.10. Planteamiento de problemas

En este apartado resolveremos algunos problemas de planteamiento con sistemas de ecuaciones de segundo grado con dos incógnitas. No hay reglas generales para plantear y resolver problemas pero se consideran como de gran utilidad los siguientes consejos:

- Leer con cuidado todo el enunciado del problema
- Determinar lo que se pide; normalmente, esto será la incógnita
- Traducir toda la información a lenguaje algebraico
- Relacionar la información con las incógnitas mediante ecuaciones
- Resolver el sistema obtenido y comprobar si la solución es válida
- Interpretar la solución y discutir si es o no coherente con el problema propuesto

Ejemplo 91 El producto de dos números positivos es 4, y la suma de sus cuadrados, 17. ¿Cuáles son estos números?
Solución: a) **Planteamiento**: Si x e y son estos dos números, entonces han de cumplir las dos ecuaciones del siguiente sistema

$$\begin{cases} xy = 4 \\ x^2 + y^2 = 17 \end{cases}$$

b) **Resolución**: Despejando y en la primera ecuación,

$$y = \frac{4}{x}$$

donde hemos supuesto que $x \neq 0$, y sustituyendo este valor en la segunda ecuación, se obtiene la siguiente ecuación bicuadrada:

$$\begin{aligned} x^2 + \left(\frac{4}{x}\right)^2 &= 17 \\ x^2 + \frac{16}{x^2} &= 17 \\ x^4 + 16 &= 17x^2 \\ x^4 - 17x^2 + 16 &= 0 \end{aligned}$$

Ahora, haciendo el cambio $x^2 = t$, obtenemos una ecuación de segundo grado con incógnita t

$$t^2 - 17t + 16 = 0$$

Resolviendo esta ecuación,

$$\begin{aligned} \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} &= \frac{17 \pm \sqrt{289 - 64}}{2} \\ &= \frac{17 \pm 15}{2} \\ &= \begin{cases} \frac{17+15}{2} = 16 \\ \frac{17-15}{2} = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

se obtienen las soluciones

$$\begin{aligned} x^2 = 16 &\implies \begin{cases} x_1 = \sqrt{16} = 4 \\ x_2 = -\sqrt{16} = -4 \end{cases} \\ x^2 = 1 &\implies \begin{cases} x_3 = 1 \\ x_4 = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Para cada uno de estos valores de x se obtiene el correspondiente valor de y mediante

$$y = \frac{4}{x}$$

Así, tenemos

$$\begin{array}{lcl} x_1 = 4 & \implies & y_1 = 1 \\ x_2 = -4 & \implies & y_2 = -1 \\ x_3 = 1 & \implies & y_3 = 4 \\ x_4 = -1 & \implies & y_4 = -4 \end{array}$$

Como los números deben ser positivos, según el enunciado, los números buscados son 1 y 4. ■

Ejemplo 92 Dos obreros trabajan juntos y el primero gana diariamente 1/3 más que el segundo. Al cabo de un cierto tiempo, el primero, que ha trabajado 5 días más que el segundo, recibió 300 euros y el segundo 180 euros. ¿Cuánto gana diariamente y cuántos días ha trabajado cada uno?
Solución: a) **Planteamiento**: Si x es la cantidad en euros que gana el segundo obrero,

$$x + \frac{1}{3}x = \frac{4}{3}x$$

es lo que gana el primero. Si y es el número de días que ha trabajado el segundo obrero, $y + 5$ es el número de días que ha trabajado el primero. Como que el primer obrero ganó al cabo de este tiempo 300 euros, se ha de cumplir

$$\frac{4}{3}x \cdot (y + 5) = 300$$

mientras que el segundo ganó 180 euros y, por tanto, se ha de cumplir también que

$$x \cdot y = 180$$

De este modo, obtenemos el siguiente sistema

$$\begin{cases} \frac{4}{3}x \cdot (y + 5) = 300 \\ x \cdot y = 180 \end{cases}$$

b) **Resolución**: Efectuando operaciones en la primera ecuación, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{4xy+20x}{3} &= 300 \\ 4xy+20x &= 900 \\ xy+5x &= 225 \end{aligned}$$

y como $xy = 180$, según la segunda ecuación, entonces

$$\begin{aligned} 180+5x &= 225 \\ 5x &= 45 \\ x &= 9 \end{aligned}$$

Sustituyendo este valor de x en la segunda ecuación del sistema, se obtiene

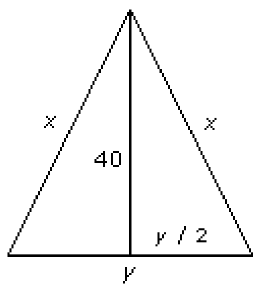
$$\begin{aligned} 9y &= 180 \\ y &= 20 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el segundo obrero ha trabajado durante 20 días y gana 9 euros por día, y el primero ha trabajado 25 días y gana 12 euros por día. ■

Ejemplo 93 Un triángulo isósceles tiene 160 cm de perímetro y la altura correspondiente al lado desigual es 40 cm. Calcula los lados del triángulo y su área.
Solución: a) **Planteamiento**: Si y es la medida en cm del lado desigual y x es la medida en cm del otro lado, entonces se ha de cumplir que

$$2x + y = 160$$

ya que el perímetro de este triángulo es 160.



Además, por el teorema de Pitágoras, también se ha de cumplir que

$$\left(\frac{y}{2}\right)^2 + 40^2 = x^2$$

ya que la altura mide 40 cm. Por tanto, obtenemos el siguiente sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x + y = 160 \\ \frac{y^2}{4} + 1600 = x^2 \end{array} \right.$$

b) **Resolución**: Despejando y de la primera ecuación,

$$y = 160 - 2x$$

y sustituyendo este valor en la segunda, se obtiene la siguiente ecuación con una incógnita

$$\frac{(160-2x)^2}{4} + 1600 = x^2$$

Multiplicando los dos miembros de esta ecuación por 4,

$$(160-2x)^2 + 6400 = 4x^2$$

y efectuando operaciones, se obtiene

$$\begin{aligned} 25600 - 640x + 4x^2 + 6400 &= 4x^2 \\ -640x &= -32000 \\ 640x &= 32000 \\ x &= 50 \end{aligned}$$

Sustituyendo este valor de x en la primera ecuación del sistema, se obtiene

$$\begin{aligned} 100 + y &= 160 \\ y &= 60 \end{aligned}$$

Por lo tanto, los lados de este triángulo miden 50, 50 y 60 cm, y su área es

$$\frac{60 \cdot 40}{2} = 1200\ cm^2$$

■

7. Inecuaciones y sistemas de inecuaciones

7.1. Desigualdades e inecuaciones

Al estudiar las propiedades del orden en el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales vimos como el subconjunto de todos los números que son mayores que 1 puede expresarse por

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x > 1\}$$

o bien, mediante la semirrecta abierta

$$A = (1, +\infty)$$

Es evidente que la desigualdad

$$x > 1$$

no se satisface siempre, sólo se verifica si $x \in A$. Entonces decimos que esta desigualdad es una **inecuación** y a la semirrecta abierta A se le llama **solución** de la inecuación.
Si queremos expresar ahora el conjunto de todos los puntos (x, y) del plano cuyas coordenadas satisfacen la desigualdad

$$x + y \leq 1$$

escribiremos

$$B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leq 1\right\}$$

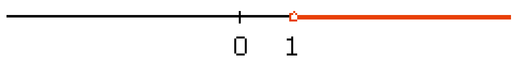
La desigualdad es ahora una inecuación de primer grado con dos variables o incógnitas y su solución es el conjunto B. Por ejemplo, el punto $(1, 0) \in B$ porque las coordenadas de este punto satisfacen la inecuación, es decir, la desigualdad

$$1 + 0 \leq 1$$

es cierta, en cambio, $(1, 1) \notin B$ porque

$$1 + 1 \not\leq 1$$

El conjunto solución de una inecuación puede ser representado gráficamente. Así, en el primer caso, es claro que el conjunto A se representa por



Observa que no se incluye el punto 1.
En el segundo caso, como es evidente que se cumple

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y < 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 1\}$$

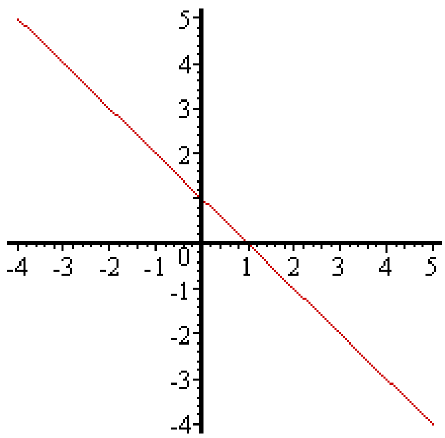
y el conjunto

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 1\}$$

esta formado por todos los puntos de la recta de ecuación

$$x + y = 1$$

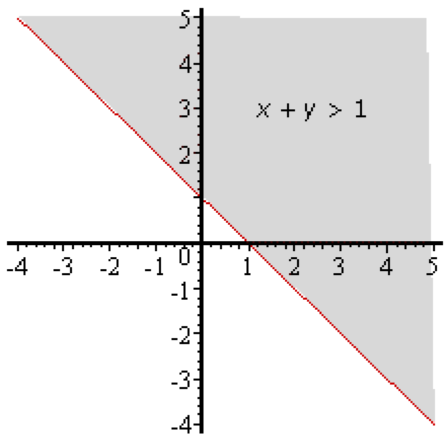
Al dibujar esta recta en el plano



ésta determina dos regiones: el semiplano descrito por el conjunto

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y > 1\}$$

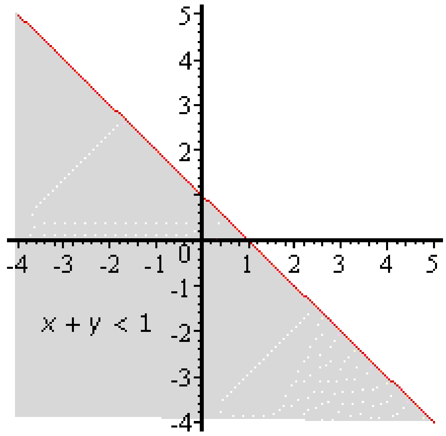
y representado gráficamente por



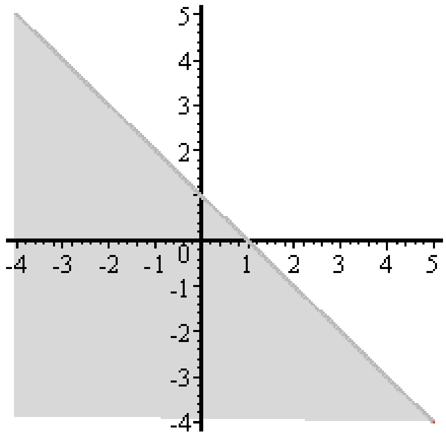
y el semiplano

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y < 1\}$$

representado por



Es evidente que nuestro caso corresponde a este último. Por consiguiente, el conjunto B se representa gráficamente por



Observa que se incluyen los puntos de la recta $x + y = 1$.

Ejemplo 94 Indica cuáles de las siguientes desigualdades son inecuaciones. En caso afirmativo, escribe su conjunto solución y represéntalo gráficamente.

$$a)\quad -\tfrac{1}{2} < -\tfrac{1}{3} \qquad b)\quad x \leq -1$$

$$c)\quad -1 \leq x < 2 \qquad d)\quad x - y > 1$$

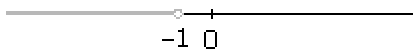
Solución: (a) En la desigualdad

$$-\frac{1}{2} < -\frac{1}{3}$$

no aparece ninguna variable y, por tanto, se trata de una relación entre dos números que se satisface o no. Evidentemente, $-\frac{1}{2}$ es menor que $-\frac{1}{3}$ y, por tanto, la relación anterior establece una desigualdad numérica verdadera; no se trata de una inecuación.
(b) La desigualdad

$$x \leq -1$$

es una inecuación cuyo conjunto solución es $(-\infty, -1]$.



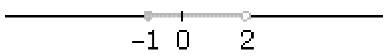
(c) Las desigualdades

$$-1 \leq x < 2$$

pueden expresarse mediante el siguiente sistema de inecuaciones

$$\begin{cases} x < 2 \\ x \geq -1 \end{cases}$$

cuya solución es el conjunto $[-1, 2)$.



(d) La desigualdad

$$x - y < 1$$

es una inecuación de primer grado con dos incógnitas. Su conjunto solución es

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y < 1\right\}$$

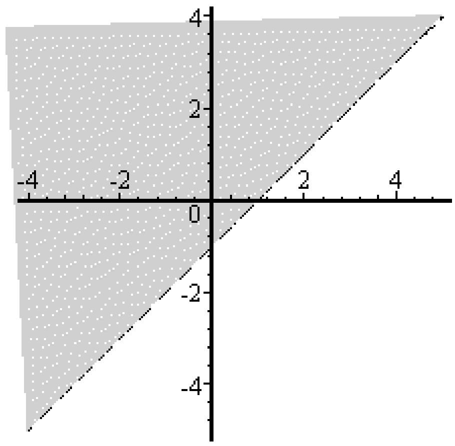
que podemos también escribir de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y < 1\right\} &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y \leq 1\right\} \\ &\quad - \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y = 1\right\}\end{aligned}$$

esto último significa que el conjunto solución es el semiplano

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y \leq 1\right\}$$

determinado por la recta de ecuación $x - y = 1$



excluyéndole los puntos de dicha recta; por esta razón, dibujamos la recta en la forma indicada en la figura anterior. Para saber cuál de los dos semiplanos que determinan la recta es la solución es suficiente tomar un punto cualquiera que no pertenezca a la recta, como por ejemplo el origen de coordenadas $(0, 0)$, y determinar si este punto cumple o no la desigualdad propuesta. Así, como se verifica la desigualdad

$$0 - 0 \leq 1$$

se tomará como semiplano aquel en el que está el origen, que es el que aparece en la figura. ■

7.2. Inecuaciones equivalentes

En general, las inecuaciones no se presentan en la forma que permita saber inmediatamente el conjunto solución. Por ejemplo, en la siguiente inecuación

$$\frac{2(x-1)}{3} - \frac{1}{2} > 1 + x$$

no podemos determinar inmediatamente su solución. Para saber su solución es preciso transformar dicha inecuación en otra equivalente que permita determinarla de forma inmediata.
Decimos que dos inecuaciones son **equivalentes** cuando tienen el mismo conjunto solución. Para transformar una inecuación en otra equivalente se utilizan las propiedades del orden que satisfacen los números reales. Destacamos por su utilidad en la práctica las siguientes transformaciones:

1) Al sumar un mismo número o expresión algebraica a los dos miembros de una inecuación se obtiene otra inecuación equivalente

$$A \leq B \iff A + C \leq B + C$$

En la práctica, simplificamos esta transformación de la siguiente manera

$$A + C \leq B \iff A \leq B - C$$

Esta transformación suele denominarse **transposición** de términos, como ocurre también las ecuaciones.

Por ejemplo,

$$2x - 3 < 5x - 1 \iff -2 < 3x$$

ya que, al sumar $1 - 2x$ a los dos miembros de la inecuación

$$2x - 3 < 5x - 1$$

se obtiene

$$\begin{aligned} 2x - 3 + 1 - 2x &< 5x - 1 + 1 - 2x \\ -2 &< 3x \end{aligned}$$

Mediante transposición de términos, de

$$2x - 3 < 5x - 1$$

directamente obtenemos

$$\begin{aligned} -3 + 1 &< 5x - 2x \\ -2 &< 3x \end{aligned}$$

2) Al multiplicar por un número o expresión positiva los dos miembros de una inecuación se obtiene otra inecuación equivalente

$$\begin{matrix} A \leq B \\ C > 0 \end{matrix} \iff AC \leq BC$$

Por ejemplo,

$$\tfrac{2x^2-1}{x^2+1} \leq 1 \iff 2x^2 - 1 \leq x^2 - 1$$

pues, al multiplicar por $1 + x^2 > 0$ los dos miembros de la inecuación

$$\frac{2x^2 - 1}{x^2 + 1} \leq 1$$

se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{2x^2 - 1}{x^2 + 1} \cdot (x^2 + 1) &\leq x^2 + 1 \\ 2x^2 - 1 &\leq x^2 + 1 \end{aligned}$$

3) Al multiplicar por un número o expresión negativa los dos miembros de una inecuación e invertir el signo de la desigualdad se obtiene otra inecuación equivalente

$$\begin{matrix} A \leq B \\ C < 0 \end{matrix} \iff AC \geq BC$$

Por ejemplo,

$$-2x > 3 \iff x < -\tfrac{3}{2}$$

pues, al multiplicar por $-\frac{1}{2}$ los dos miembros de la inecuación e invertir el signo de la desigualdad

$$-2x > 3$$

se obtiene

$$\begin{aligned} -2x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) &< 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \\ x &< -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

En resumen, en la transformación de inecuaciones para obtener inecuaciones equivalentes son válidas las reglas utilizadas para las ecuaciones con excepción de la multiplicación por números o expresiones negativas, que invierten el signo de la desigualdad.
Podemos ahora aplicar las transformaciones indicadas a la inecuación considerada al principio de este apartado

$$\frac{2(x-1)}{3} - \frac{1}{2} > 1 - x$$

para convertirla en otra equivalente con la que podamos buscar inmediatamente su solución. Así, quitando el paréntesis, obtenemos

$$\frac{2x-2}{3} - \frac{1}{2} > 1 + x$$

Multiplicando los dos miembros de la inecuación por $6 = m.c.m.(2,3)$, obtenemos

$$2(2x-2) - 3 > 6 + 6x$$

es decir,

$$4x - 4 - 3 > 6 + 6x$$

Operando, tenemos

$$4x - 7 > 6 + 6x$$

Mediante transposición de términos, obtenemos

$$4x - 6x > 6 + 7$$

Operando de nuevo,

$$-2x > 13$$

Multiplicando ahora por $-\frac{1}{2}$ y recordando que al multiplicar por número negativo hay que invertir el símbolo de la desigualdad, se obtiene

$$\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-2x) > \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 13$$

es decir,

$$x < -\frac{13}{2}$$

Esta inecuación es equivalente a la original y tiene la ventaja de que por su forma es inmediato describir su conjunto solución: todos los números reales menores que $-\frac{13}{2}$. Por consiguiente, la inecuación

$$\frac{2x-2}{3} - \frac{1}{2} > 1 + x$$

tiene como conjunto solución la semirrecta

$$\left(-\infty, -\frac{13}{2}\right)$$

Al proceso que hemos seguido para encontrar el conjunto solución de la inecuación se le llama **resolución**. Así, **resolver** una inecuación es el procedimiento o secuencia de transformaciones que hay que aplicar a la inecuación para transformarla en otra equivalente que permita determinar su solución de forma inmediata.
Como el método para resolver una inecuación depende del tipo de inecuación que se trate, en el apartado siguiente estudiaremos algunos tipos de inecuaciones.

Ejemplo 95 Resuelve la siguiente inecuación

$$\frac{4-5x}{2} \leq \frac{6-2x}{6} - \frac{3-4x}{3}$$

Solución: Multiplicando los dos miembros de la inecuación por $6 = m.c.m.(2,3,6)$, obtenemos

$$3(4-5x) \leq 6-2x-2(3-4x)$$

Quitando los paréntesis, obtenemos

$$12-15x \leq 6-2x-6+8x$$

y operando

$$12-15x \leq 6x$$

Transponiendo ahora términos, obtenemos

$$-15x-6x \leq -12$$

y operando,

$$-21x \leq -12$$

Multiplicando ahora por $-\frac{1}{21}$ y recordando que al multiplicar por número negativo hay que invertir el símbolo de la desigualdad, se obtiene

$$\left(-\frac{1}{21}\right) \cdot (-21x) \geq \left(-\frac{1}{21}\right) \cdot (-12)$$

es decir,

$$x \geq \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$$

Por tanto, la inecuación original es equivalente a

$$x \geq \frac{4}{7}$$

cuya solución es el conjunto de todos los números reales mayores o iguales que $\frac{4}{7}$. Por consiguiente, el conjunto solución de la inecuación dada es

$$\left[\frac{4}{7}, +\infty\right)$$

■

7.3. Resolución de inecuaciones y sistemas de inecuaciones

Resolver una inecuación es calcular, con la ayuda de las transformaciones, el conjunto de valores que satisfacen la inecuación o sistema de inecuaciones. El método para resolver una inecuación depende del tipo de inecuación.

7.3.1. Inecuaciones de primer grado

Las inecuaciones de primer grado con una incógnita son todas aquellas que, mediante transformaciones, son equivalentes a una inecuación de una de las formas siguientes

$$ax \leq b \qquad ax \geq b \qquad ax < b \qquad ax > b$$

siendo $a, b \in \mathbb{R}$.
Para resolver por ejemplo la inecuación

$$ax \leq b$$

se procede de la siguiente manera: Si $a > 0$, entonces multiplicando ambos miembros de la inecuación por $\frac{1}{a}$, resulta

$$x \leq \frac{b}{a}$$

y el conjunto solución es

$$\left(-\infty, \frac{b}{a}\right]$$

Si $a < 0$, entonces multiplicando ambos miembros de la inecuación por $\frac{1}{a}$, resulta

$$x \geq \frac{b}{a}$$

y el conjunto solución es

$$\left[\frac{b}{a}, +\infty\right)$$

Ejemplo 96 Resuelve la siguiente inecuación

$$\frac{2x-1}{3} < x - \frac{x-1}{6}$$

Solución: Multiplicando los dos miembros de la inecuación por 6, se obtiene

$$2(2x-1) < 6x - x + 1$$

y, operando,

$$4x - 2 < 5x + 1$$

Transponiendo términos, obtenemos

$$4x - 5x < 1 + 2$$

y, operando, resulta

$$-x < 3$$

que es una inecuación de primer grado con una incógnita. Multiplicando ahora por -1 y recordando que al multiplicar por número negativo hay que invertir el símbolo de la desigualdad, se obtiene

$$x > -3$$

Por tanto, la solución de la inecuación dada es el siguiente conjunto

$$(-3, +\infty)$$

■

7.3.2. Sistemas de inecuaciones de primer grado

Dos o más inecuaciones de primer grado forman un sistema de inecuaciones. La solución de un sistema es el conjunto de valores de la variable que satisfacen todas las inecuaciones del sistema.
Para resolver un sistema de inecuaciones, primero se calculan por separado las soluciones de todas las inecuaciones del sistema, y, después, se encuentra la intersección de los conjuntos de soluciones obtenidos. Para calcular esta intersección puede ayudar la representación gráfica de estos conjuntos sobre rectas paralelas, pues la parte común es la solución del sistema.
Por ejemplo,

$$\left\{ \begin{array}{l} x - \frac{1}{2} < 2x - \frac{1}{3} \\ 1 + \frac{x}{2} \geq 3 - x \end{array} \right.$$

es un sistema de dos inecuaciones de primer grado. Para hallar su solución, primero resolveremos las dos inecuaciones por separado. Así, de la primera

$$x - \frac{1}{2} < 2x - \frac{1}{3}$$

al multiplicar por 6, obtenemos

$$6x - 3 < 12x - 2$$

y, de aquí, transponiendo términos, resulta

$$6x - 12x < 3 - 2$$

operando,

$$-6x < 1$$

finalmente, multiplicando por $-\frac{1}{6}$, se obtiene

$$x > -\frac{1}{6}$$

Del mismo modo, de la segunda

$$1 + \frac{x}{2} \geq 3 - x$$

al multiplicar por 2, obtenemos

$$2 + x \geq 6 - 2x$$

y, de aquí, transponiendo términos, resulta

$$x + 2x \geq 6 - 2$$

operando,

$$3x \geq 4$$

finalmente, multiplicando por $\frac{1}{3}$, se obtiene

$$x \geq \frac{4}{3}$$

Por tanto, el sistema dado es equivalente al siguiente

$$\begin{cases} x > -\frac{1}{6} \\ x \geq \frac{4}{3} \end{cases}$$

El conjunto solución de la primera inecuación es

$$\left(-\frac{1}{6}, +\infty\right)$$

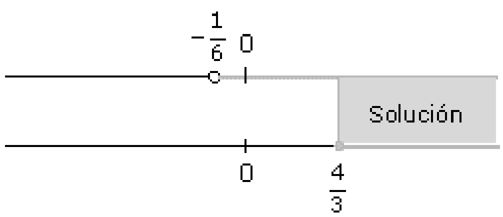
y el de la segunda, es

$$\left[\frac{4}{3}, +\infty\right)$$

La solución del sistema es

$$\left(-\frac{1}{6}, +\infty\right) \cap \left[\frac{4}{3}, +\infty\right) = \left[\frac{4}{3}, +\infty\right)$$

Podemos comprobar esto gráficamente:



Ejemplo 97 Resuelve el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} x - 2 \leq 0 \\ 3(2 - 5x) > 20 - 18x \\ \frac{x-2}{4} \geq 5x - 1 \end{cases}$$

Solución: Resolviendo cada una de las inecuaciones del sistema, tenemos:
(a) De

$$x - 2 \leq 0$$

es evidente que

$$x \leq 2$$

(b) De

$$3(2-5x) > 20-18x$$

se obtiene

$$6-15x > 20-18x$$

y, de aquí, transponiendo términos,

$$-15x+18x > 20-6$$

operando,

$$3x > 14$$

luego,

$$x > \frac{14}{3}$$

(c) De

$$\frac{x-2}{4} \geq 5x-1$$

se obtiene

$$x-2 \geq 20x-4$$

y, de aquí, transponiendo términos,

$$x-20x \geq -4+2$$

operando,

$$-19x \geq -2$$

y, ahora, multiplicando los dos miembros de la inecuación por $-\frac{1}{19}$ y recordando que al multiplicar por número negativo hay que invertir el símbolo de la desigualdad, se obtiene

$$x \leq \frac{2}{19}$$

Por tanto, el sistema dado es equivalente al siguiente

$$\left\{\begin{array}{l} x \leq 2 \\ x > \frac{14}{3} \\ x \leq \frac{2}{19} \end{array}\right.$$

El conjunto solución de la primera inecuación es

$$(-\infty, 2]$$

el de la segunda,

$$\left(\frac{14}{3}, +\infty\right)$$

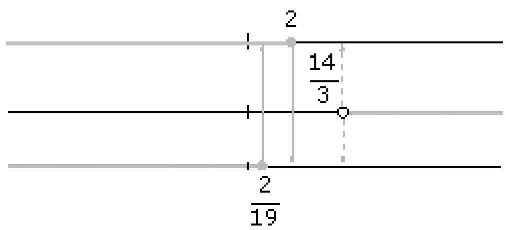
y el de la tercera, es

$$\left(-\infty, \frac{2}{19}\right]$$

La solución del sistema es

$$(-\infty, 2] \cap \left(\frac{14}{3}, +\infty\right) \cap \left(-\infty, \frac{2}{19}\right] = \emptyset$$

es decir, el conjunto vacío, lo que significa que el sistema no tiene soluciones. Podemos comprobar esto gráficamente:



■

7.3.3. Inecuaciones reducibles a las de primer grado

Son inecuaciones como las siguientes:

1)
$$x^2 + x - 6 \leq 0$$

2)
$$-x^3 + 2x^2 + 5x - 6 \leq 0$$

3)
$$\frac{3x-4}{5-2x} < 1$$

Estas inecuaciones pueden reducirse a ecuaciones de primer grado sencillas mediante recursos algebraicos y los criterios de signos. Las inecuaciones de segundo grado o superior pueden también resolverse gráficamente.
Resolveremos las inecuaciones propuestas para que sirvan de modelo para otras del mismo tipo.

(1) Consideremos la inecuación de segundo grado

$$x^2 + x - 6 \leq 0$$

Método algebraico: Como el primer miembro es un polinomio, podemos descomponerlo en factores y obtenemos

$$(x-2)(x+3) \leq 0$$

Por las reglas de los signos, el producto será negativo cuando los signos de los dos factores sean distintos, y el producto será cero cuando al menos uno de los factores sea cero. Como consecuencia, tenemos los dos casos siguientes:

$$\left\{\begin{array}{l} x-2 \geq 0 \\ x+3 \leq 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x \geq 2 \\ x \leq -3 \end{array}\right.$$

o

$$\left\{\begin{array}{l} x-2 \leq 0 \\ x+3 \geq 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x \leq 2 \\ x \geq -3 \end{array}\right.$$

De este modo hemos reducido la inecuación de segundo grado a un par de sistemas de inecuaciones de primer grado. La solución del primero es

$$[2, +\infty) \cap (-\infty, -3] = \emptyset$$

y la del segundo

$$(-\infty, 2] \cap [-3, +\infty) = [-3, 2]$$

Por tanto, la solución de la inecuación de segundo grado es

$$\emptyset \cup [-3, 2] = [-3, 2]$$

Método gráfico: Podemos también resolver la inecuación

$$x^2 + x - 6 \leq 0$$

gráficamente. Para ello, consideremos la función cuadrática

$$f(x) = x^2 + x - 6$$

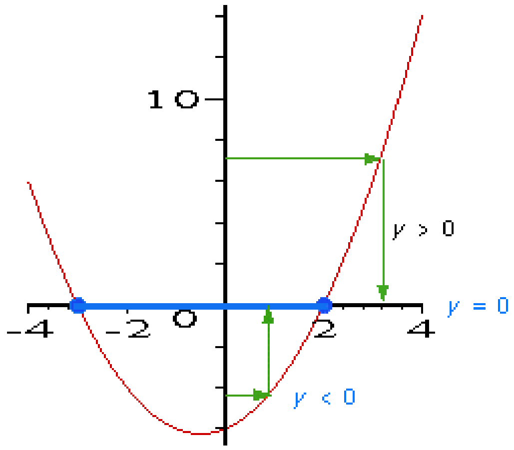
cuya gráfica es una parábola de ecuación

$$y = x^2 + x - 6$$

Según la inecuación, interesa tomar los valores de x para los cuales

$$y \leq 0$$

Según el gráfico de la figura



esta condición se corresponde con los puntos del intervalo

$$[-3, 2]$$

siendo -3 y 2, las abscisas de los puntos de corte de la parábola con el eje X.

(2) Consideremos ahora la inecuación de tercer grado

$$-x^3 + 2x^2 + 5x - 6 \leq 0$$

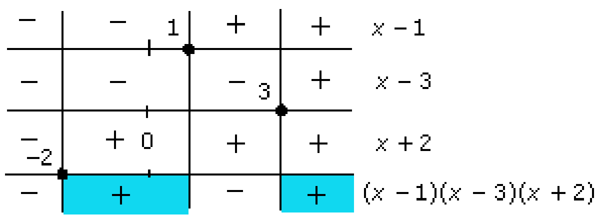
Método algebraico: Como el primer miembro es un polinomio, podemos descomponerlo en factores y obtenemos

$$-(x-1)(x-3)(x+2) \leq 0$$

o de forma equivalente, multiplicando por -1,

$$(x-1)(x-3)(x+2) \geq 0$$

Para determinar cuándo es positivo o cero este producto de tres factores, analizaremos el signo de cada factor mediante la siguiente representación gráfica:



En la cuarta fila de la figura se ha obtenido el signo del producto $(x-1)(x-3)(x+2)$, según las reglas de los signos. Por tanto, el producto de los tres factores es positivo o cero cuando x toma valores del conjunto siguiente

$$[-2, 1] \cup [3, +\infty)$$

que es la solución de la inecuación. Observa que se han incluido los extremos porque son los puntos en los que el producto es cero.

Método gráfico: Podemos también resolver la inecuación

$$-x^3 + 2x^2 + 5x - 6 \leq 0$$

gráficamente. Para ello, consideremos la función polinómica

$$f(x) = -x^3 + 2x^2 + 5x - 6$$

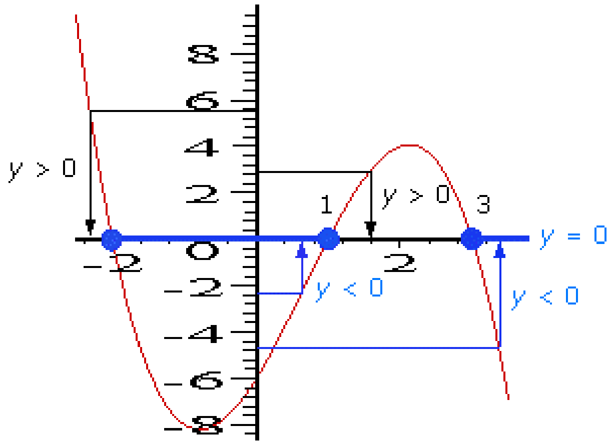
cuya gráfica es una curva de tercer grado de ecuación

$$y = -x^3 + 2x^2 + 5x - 6$$

Según la inecuación, interesa tomar los valores de x para los cuales

$$y \leq 0$$

Según el gráfico de la figura



esta condición se corresponde con los puntos de los intervalos

$$[-2, 1] \cup [3, +\infty)$$

siendo $-2, 1$ y 2, las abscisas de los puntos de corte de la curva con el eje X.

(3) Finalmente, consideremos la inecuación

$$\frac{3x-4}{5-2x} \leq 1$$

Esta inecuación es equivalente por transposición a la siguiente

$$\frac{3x-4}{5-2x} - 1 \leq 0$$

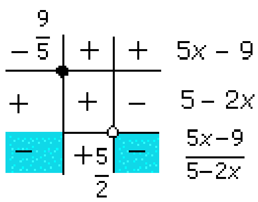
y, por tanto,

$$\frac{3x-4-5+2x}{5-2x} \leq 0$$

es decir,

$$\frac{5x-9}{5-2x} \leq 0$$

Para determinar cuándo es negativo o cero este cociente, analizaremos el signo del numerador y del denominador mediante la siguiente representación gráfica:



En la tercera fila de la figura se ha obtenido el signo del cociente

$$\frac{5x-9}{5-2x}$$

según las reglas de los signos. Por tanto, el cociente es negativo cuando x toma valores del conjunto siguiente

$$\left(-\infty, \frac{9}{5}\right] \cup \left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$$

que es la solución de la inecuación. Observa que se ha incluido $\frac{9}{5}$ porque es cuando el cociente es cero y, en cambio, se excluye $\frac{5}{2}$ porque es cuando el denominador se anula, lo cual no puede ocurrir.

7.3.4. Inecuaciones de primer grado con dos incógnitas

Las inecuaciones de primer grado o lineales con dos incógnitas son todas aquellas que, mediante transformaciones, son equivalentes a una inecuación de una de las formas siguientes

$$ax + by + c \leq 0 \qquad ax + by + c \geq \ \ 0 \qquad ax + by + c < 0 \qquad ax + by + c > 0$$

siendo $a, b, c \in \mathbb{R}$.
El conjunto solución es uno de los semiplanos determinados por la recta de ecuación

$$ax + by + c = 0$$

Para resolver por ejemplo la inecuación

$$ax + by + c < 0$$

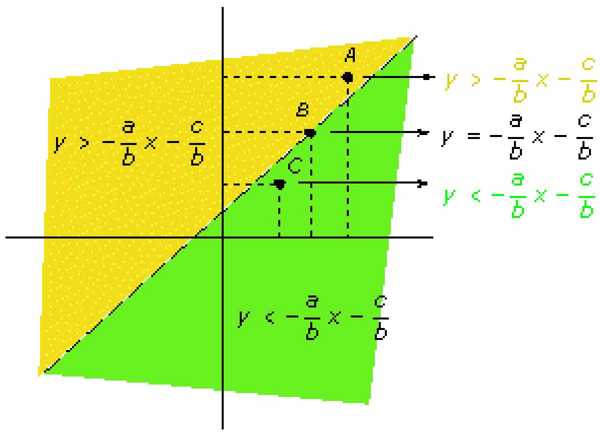
se procede de la siguiente manera: Si por ejemplo $b > 0$, entonces multiplicando ambos miembros de la inecuación por $\frac{1}{b}$ y transponiendo términos, se obtiene

$$y < -\frac{a}{b}x - \frac{c}{a}$$

Los puntos de la recta considerada cumplen

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{a}$$

Según el gráfico de la figura



vemos que los puntos del semiplano solución son los que pertenecen a la región pintada en color verde. La recta se ha dibujado a trazos porque sus puntos no son del conjunto solución.
Para encontrar el conjunto solución podemos tomar el criterio indicado en la figura, según el cual A no es solución porque sus coordenadas satisfacen

$$y > -\frac{a}{b}x - \frac{c}{a}$$

B tampoco es solución, pues

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{a}$$

mientras que C sí es solución ya que

$$y < -\frac{a}{b}x - \frac{c}{a}$$

Luego, el semiplano solución es aquel en el que se halla C.
Otra forma de hallar el conjunto solución es probar si las coordenadas de un punto que no esté sobre la recta satisface la inecuación; si la verifica pertenece al semiplano solución, si no la cumple el semiplano solución es el contrario.

Ejemplo 98 Resuelve la inecuación siguiente

$$3x - 2y < 4$$

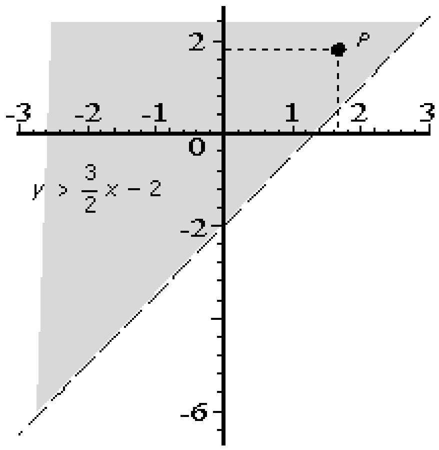
Solución: La inecuación es equivalente a la siguiente:

$$\begin{aligned} -2y &< 4-3x \\ 2y &> 3x-4 \\ y &> \frac{3}{2}x-2 \end{aligned}$$

Mediante un tabla con dos valores, representamos la recta

$$y = \frac{3}{2}x - 2$$

y resulta lo que muestra la siguiente figura.



Como que las coordenadas del punto P satisfacen

$$y > \frac{3}{2}x - 2$$

el semiplano solución es el que se indica en la figura. Podemos también deducir esta solución viendo que el punto $(0,0)$ satisface la inecuación, pues

$$3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 = 0 < 4$$

y, por tanto, la región en la que se encuentra este punto es la solución de la inecuación. ■

Ejemplo 99 Resuelve la inecuación siguiente

$$2(3-2x) + 5(4-y) \geq 3(x-y)$$

Solución: Efectuando las operaciones que se indican, se obtiene

$$\begin{aligned} 6-4x+20-5y &\geq 3x-3y \\ 26-4x-5y &\geq 3x-3y \end{aligned}$$

Transponiendo términos y operando, obtenemos

$$\begin{aligned} 26-4x-5y-3x+3y &\geq 0 \\ -7x-2y+26 &\geq 0 \end{aligned}$$

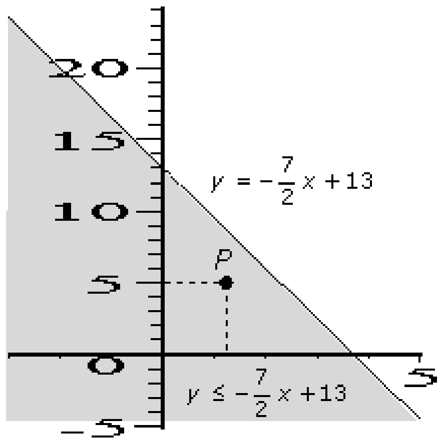
que es una inecuación lineal con dos incógnitas. Esta última inecuación es equivalente a su vez a la siguiente:

$$\begin{aligned} -7x-2y+26 &\geq 0 \\ -2y &\geq 7x-26 \\ 2y &\leq -7x+26 \\ y &\leq -\frac{7}{2}x+13 \end{aligned}$$

Mediante un tabla con dos valores, representamos la recta

$$y = -\frac{7}{2}x + 13$$

y resulta lo que muestra la siguiente figura.



Como que las coordenadas del punto P satisfacen

$$y \leq -\frac{7}{2}x + 13$$

el semiplano solución es el que se indica en la figura. Podemos también deducir esta solución viendo que el punto $(0, 0)$ satisface la inecuación, pues

$$-7 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 26 = 26 \geq 0$$

y, por tanto, la región en la que se encuentra este punto es la solución de la inecuación. Observa que la recta también forma parte del conjunto solución, por lo que a éste lo representamos dibujando la recta en trazo continuo. ■

7.3.5. Sistemas de inecuaciones lineales con dos incógnitas

Dos o más inecuaciones de primer grado con dos incógnitas forman un sistema de inecuaciones lineales. La solución de un sistema es el conjunto de valores de las variables que satisfacen todas las inecuaciones del sistema.

Para encontrar la solución de un sistema de inecuaciones, primero se halla por separado las soluciones de todas las inecuaciones del sistema, y, después, se encuentra gráficamente la intersección de las regiones solución obtenidas. Para calcular esta intersección puede ayudar el siguiente criterio: En lugar de marcar las regiones que son solución de las respectivas inecuaciones se marcarán las regiones que no son solución. De este modo, la región que queda sin marcar es la solución gráfica del sistema.

Por ejemplo,

$$\begin{cases} 2x - 3y \geq 4 \\ x - y < 3 \\ 5x + y > 6 \end{cases}$$

es un sistema de inecuaciones lineales con dos incógnitas. Para hallar su solución gráficamente, primero resolveremos las tres inecuaciones por separado. Así, de la primera

$$2x - 3y \geq 4$$

obtenemos

$$\begin{aligned} -3y &\geq 4 - 2x \\ 3y &\leq 2x - 4 \\ y &\leq \frac{2}{3}x - \frac{4}{3} \end{aligned}$$

De la segunda,

$$x - y < 3$$

obtenemos

$$\begin{array}{rcl} -y & < & 3 - x \\ y & > & x - 3 \end{array}$$

y, finalmente, de la tercera

$$5x + y > 6$$

obtenemos

$$y > -5x + 6$$

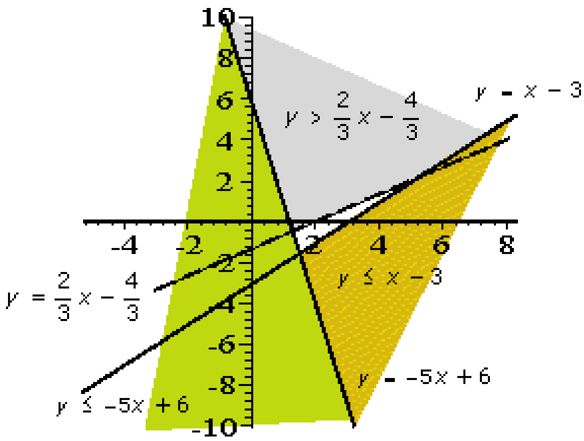
De este modo, el sistema original es equivalente al siguiente:

$$\begin{cases} y \leq \frac{2}{3}x - \frac{4}{3} \\ y > x - 3 \\ y > -5x + 6 \end{cases}$$

Mediante un tabla con dos valores, representamos las rectas

$$\begin{array}{l} y = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3} \\ y = x - 3 \\ y = -5x + 6 \end{array}$$

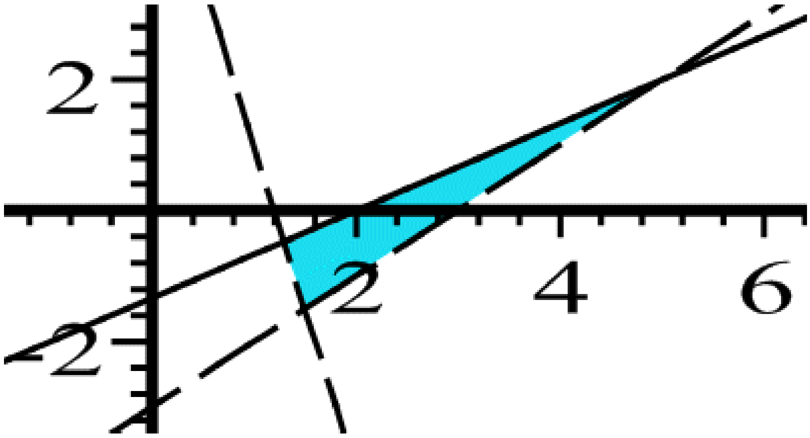
resultando lo que muestra la siguiente figura.



En esta figura hemos señalado las regiones que no son solución de las inecuaciones del sistema, o sea que las regiones coloreadas se correponden con la solución del sistema

$$\begin{cases} y > \frac{2}{3}x - \frac{4}{3} \\ y \leq x - 3 \\ y \leq -5x + 6 \end{cases}$$

Las líneas frontera de cada región aparecen dibujadas de forma continua o a trazos según la desigualdad incluya o no la igualdad. De este modo, la solución del sistema original aparece como la región que está en blanco y las líneas frontera que están dibujadas con trazos discontinuos forman parte de la solución y las otras, dibujadas con trazos continuos, no. Observamos que dicha región es un triángulo. Sólo uno de los tres lados forma parte de la solución. En la siguiente figura se muestra con detalle la solución del sistema.



Ejemplo 100 Resuelve el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{l} x-2y\leq 4\\ y-3(x-2)<6\\ y<2\end{array}\right.$$

Solución: Para hallar la solución del sistema gráficamente, primero resolveremos las tres inecuaciones por separado. Así, de la primera obtenemos

$$\begin{array}{rcl} x-2y & \leq & 4\\ -2y & \leq & 4-x\\ 2y & \geq & x-4\\ y & \geq & \dfrac{1}{2}x-2\end{array}$$

De la segunda se obtiene

$$\begin{array}{rcl} y-3(x-2) & < & 6\\ y-3x+6 & < & 6\\ y & < & 3x\end{array}$$

y la tercera es

$$y<2$$

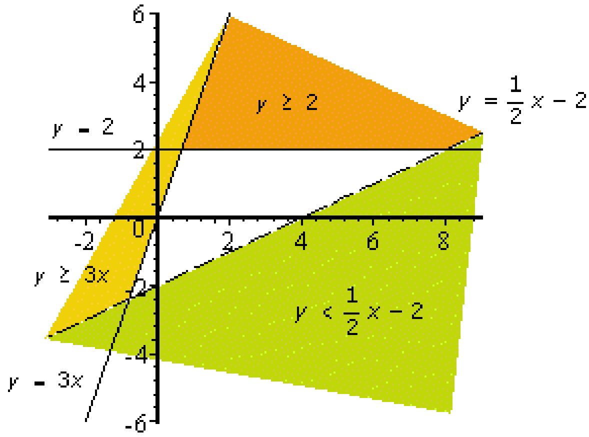
Por tanto, el sistema original es equivalente al siguiente:

$$\left\{\begin{array}{l} y\geq \frac{1}{2}x-2\\ y<3x\\ y<2\end{array}\right.$$

Mediante un tabla con dos valores, representamos las rectas

$$\begin{array}{l} y=\frac{1}{2}x-2\\ y=3x\\ y=2\end{array}$$

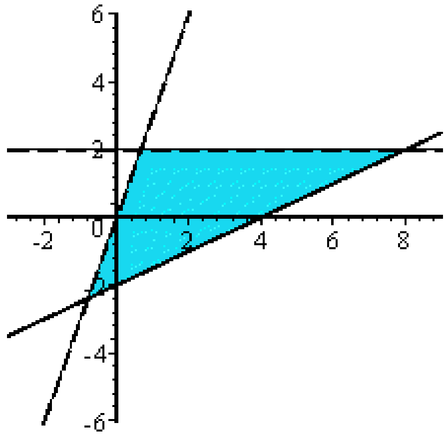
resultando lo que muestra la siguiente figura.



En esta figura hemos señalado las regiones que no son solución de las inecuaciones del sistema, o sea que las regiones coloreadas se correponden con la solución del sistema

$$\left\{\begin{array}{l} y < \frac{1}{2}x - 2 \\ y \geq 3x \\ y \geq 2 \end{array}\right.$$

Las líneas frontera de cada región aparecen dibujadas de forma continua o a trazos según la desigualdad incluya o no la igualdad. De este modo, la solución del sistema original aparece como la región que está en blanco y las líneas frontera que están dibujadas con trazos discontinuos forman parte de la solución y las otras, dibujadas con trazos continuos, no. Observamos que dicha región es un triángulo. Sólo uno de los tres lados forma parte de la solución. En la siguiente figura se muestra con detalle la solución del sistema.



■

7.4. Problemas de planteamiento

Hay numerosas situaciones en las que en lugar de trabajar con igualdades se manejan desigualdades. Por ejemplo, es habitual oir enunciados en los que utilizamos los términos .ªl menos.º çomo mínimo", o también, çomo máximo.º .ª lo sumo", y muchos otros similares. Todas los enunciados en los que están presentes estos términos dan lugar a desigualdades que son inecuaciones. En este apartado resolveremos algunos problemas en los que el planteamiento es una inecuación o un sistema de inecuaciones. Las recomendaciones dadas para el planteamiento de problemas por ecuaciones o sistemas siguen siendo válidas para las inecuaciones.

Ejemplo 101 Una empresa no sabe si alquilar una fotocopiadora del tipo A por 60 euros al mes y 5 céntimos por cada fotocopia, o una del tipo B por 75 euros al mes y 3 céntimos por fotocopia. ¿A partir de cuántas fotocopias es más rentable una máquina que otra?

Solución: Planteamiento: Al hacer x fotocopias al mes en la máquina A, su coste es

$$60 + 0{,}05x$$

El mismo número de fotocopias en la máquina B supone un coste de

$$75 + 0{,}03x$$

La máquina B será más rentable que A si su coste mensual por hacer x fotocopias es menor, es decir, si se cumple la siguiente desigualdad

$$75 + 0{,}03x < 60 + 0{,}05x$$

Resolución: Resolviendo esta inecuación, obtenemos

$$\begin{aligned} 0{,}03x - 0{,}05x &< 60 - 75 \\ -0{,}02x &< -15 \\ 0{,}02x &> 15 \\ x &> \frac{15}{0{,}02} \\ &> 750 \end{aligned}$$

Por tanto, la fotocopiadora B será más rentable que la fotocopiadora A a partir de 750 fotocopias mensuales. ■

Ejemplo 102 Mezclamos café de 3.4 €/Kg con otro de 4.3 €/Kg, y queremos que la mezcla tenga una calidad intermedia de manera que su precio no supere la cantidad de 4 €/Kg. Para producir 60 Kg de café de esta calidad intermedia, ¿cómo hay que mezclar las dos clases de café?

Solución: Planteamiento: Supongamos que x es la cantidad en Kg de café de 3.4 €/Kg. Entonces, $60 - x$ es la cantidad de café de 4.3 €/Kg. Como el precio de la mezcla no debe superar la cantidad de 4 €/Kg, se ha de cumplir la siguiente desigualdad

$$3{,}4x + 4{,}3(60 - x) \leq 60 \cdot 4$$

Resolución: Resolviendo esta inecuación, obtenemos

$$\begin{aligned} 3{,}4x + 258 - 4{,}3x &\leq 240 \\ -0{,}9x &\leq 240 - 258 \\ -0{,}9x &\leq -18 \\ 0{,}9x &\geq 18 \\ x &\geq \frac{18}{0{,}9} \\ &\geq 20 \end{aligned}$$

Por tanto, de la primera clase de café hay que poner como mínimo 20 Kg, y como

$$\begin{aligned} x &\geq 20 \\ -x &\leq -20 \\ 60 - x &\leq 60 - 20 \\ 60 - x &\leq 40 \end{aligned}$$

de la segunda clase hay que poner como máximo 40 Kg. ■

Ejemplo 103 En una escuela hay más chicas que chicos, pero si sumamos 30 al número de chicos, el resultado será mayor que el número de chicas. Además, entre chicos y chicas no se supera la cantidad de 100 personas. ¿Es posible que el número de chicos sea 20 y el de chicas 60? Da tres soluciones posibles.

Solución: Planteamiento: Supongamos que x e y son respectivamente el número de chicos y de chicas de la escuela. Evidentemente, x e y deben ser dos números naturales y, por tanto, $x > 0$ e $y > 0$. Como hay más chicas que chicos, se ha de cumplir

$$x < y$$

Si se suma 30 al número de chicos, el resultado supera el número de chicas, es decir, también se cumple

$$x + 30 > y$$

Finalmente, la suma de chicos y chicas no supera la cantidad de 200 personas, es decir,

$$x + y \leq 100$$

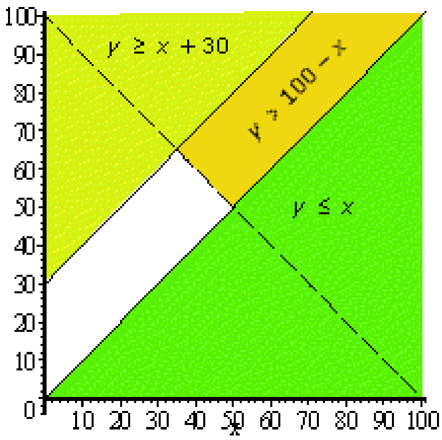
Por tanto, x e y deben ser soluciones del siguiente sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} x, y > 0 \\ y > x \\ y < x + 30 \\ y \leq 100 - x \end{cases}$$

Resolución: Las condiciones $x > 0$ e $y > 0$ nos dicen que el conjunto solución del sistema se encontrará en el primer cuadrante. Mediante un tabla con dos valores, representamos las rectas

$$\begin{array}{l} y = x \\ y = 30 + x \\ y = 100 - x \end{array}$$

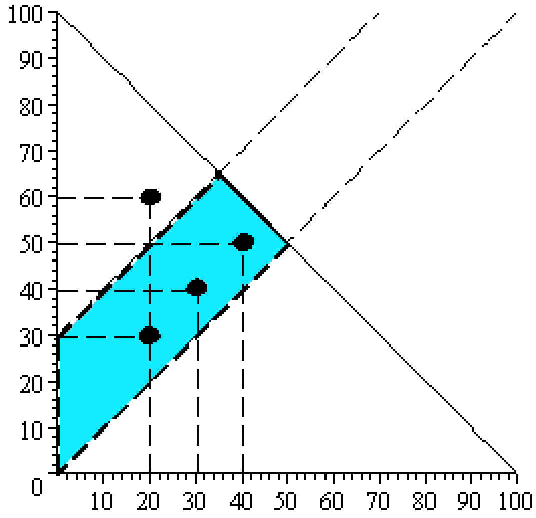
resultando lo que muestra la siguiente figura.



En esta figura hemos señalado las regiones que no son solución de las inecuaciones del sistema, o sea que las regiones coloreadas se correponden con la solución del sistema

$$\begin{cases} y \leq x \\ y \geq x + 30 \\ y > 100 - x \end{cases}$$

Las líneas frontera de cada región aparecen dibujadas de forma continua o a trazos según la desigualdad incluya o no la igualdad. De este modo, la solución del sistema original aparece como la región que está en blanco y las líneas frontera que están dibujadas con trazos discontinuos forman parte de la solución y las otras, dibujadas con trazos continuos, no.
En la siguiente figura se muestra como no es posible que el número de chicos sea 20 y el de chicas 60, pues el punto está fuera del conjunto solución; otro modo de comprobar esto es sustituir estos valores en las inecuaciones del sistema y ver que hay alguna que no se satisface. Soluciones posibles son las que se señalan en la figura: (1) 40 chicos y 50 chicas; (2) 30 chicos y 40 chicas; (3) 20 chicos y 30 chicas.



■

Ejemplo 104 Una persona calcula que cada semana puede dedicar entre 20 y 30 horas a practicar tenis o golf. Cada sesión de tenis dura 2 horas, y cada sesión de golf, 3 horas. Por último, desea dedicar más horas al tenis que al golf, siempre que el número de horas dedicadas al tenis no supere el doble de horas dedicadas al golf. ¿Es posible que esta persona pueda hacer a la semana 10 sesiones de tenis y 6 de golf? Da dos soluciones posibles.

Solución: Planteamiento: Supongamos que x e y son respectivamente el número de sesiones que dedica al tenis y al golf por semana. Es natural suponer que x e y son dos números naturales y, por tanto, $x > 0$ e $y > 0$. Como que cada sesión de tenis es de 2 horas y cada sesión de golf es de tres, entonces se ha de cumplir

$$20 \leq 2x + 3y \leq 30$$

Además, como quiere dedicar más horas al tenis que al golf, se cumple

$$2x > 3y$$

Finalmente, como el número de horas dedicadas al tenis no ha de superar el doble de horas dedicadas al golf, también se cumple

$$2x \leq 2 \cdot 3y$$

Por tanto, x e y deben ser las soluciones del siguiente sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} x, y > 0 \\ 2x + 3y \geq 20 \\ 2x + 3y \leq 30 \\ 2x > 3y \\ 2x \leq 6y \end{cases}$$

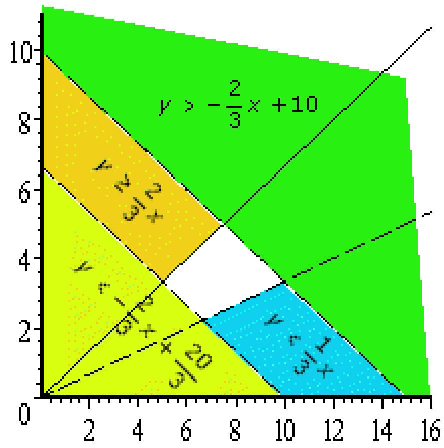
Resolución: Las condiciones $x > 0$ e $y > 0$ nos dicen que el conjunto solución del sistema se encontrará en el primer cuadrante. El resto de inecuaciones son equivalentes a las siguientes

$$\begin{cases} y \geq -\frac{2}{3}x + \frac{20}{3} \\ y \leq -\frac{2}{3}x + 10 \\ y < \frac{2}{3}x \\ y \geq \frac{1}{3}x \end{cases}$$

Mediante un tabla con dos valores, representamos las rectas

$$\begin{aligned} y &= -\tfrac{2}{3}x + \tfrac{20}{3} \\ y &= -\tfrac{2}{3}x + 10 \\ y &= \tfrac{2}{3}x \\ y &= \tfrac{1}{3}x \end{aligned}$$

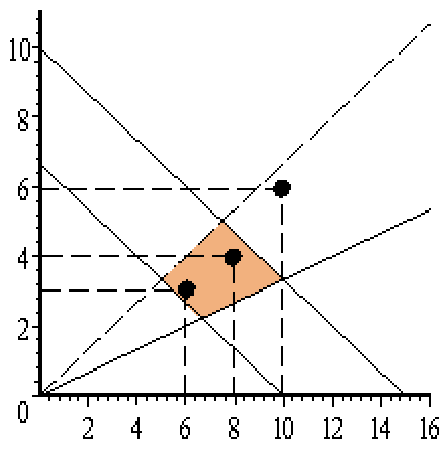
resultando lo que muestra la siguiente figura.



En esta figura hemos señalado las regiones que no son solución de las inecuaciones del sistema, o sea que las regiones coloreadas se correponden con la solución del sistema

$$\begin{cases} y < -\frac{2}{3}x + \frac{20}{3} \\ y > -\frac{2}{3}x + 10 \\ y \geq \frac{2}{3}x \\ y < \frac{1}{3}x \end{cases}$$

Las líneas frontera de cada región aparecen dibujadas de forma continua o a trazos según la desigualdad incluya o no la igualdad. De este modo, la solución del sistema original aparece como la región que está en blanco y las líneas frontera que están dibujadas con trazos discontinuos forman parte de la solución y las otras, dibujadas con trazos continuos, no.
En la siguiente figura se muestra como no es posible que la persona pueda hacer 10 sesiones de tenis y 6 de golf a la semana; otro modo de comprobar esto es sustituir estos valores en las inecuaciones del sistema y ver que hay alguna que no se satisface. Soluciones posibles son las que se señalan en la figura: (1) 8 sesiones de tenis y 4 de golf; (2) 6 de tenis y 3 de golf.



■