Práctica

Índice

1. Identidades y ecuaciones en un conjunto

Ejercicio 1 De las igualdades siguientes, ¿cuáles son identidades?

a) $9-(x-y)^2=(3+x-y)\cdot(3-x+y)$

b) $\frac{x}{2}+5=2x+11$

c) $(x+3)(x-1)+4=(x+1)^2$

d) $\frac{2x-1}{3}+2-\frac{x}{3}=1+\frac{2}{3}+\frac{x}{3}$

Solución: (a) En una estructura de anillo conmutativo como la de los números enteros con las operaciones ordinarias de suma y producto tenemos la siguiente identidad:

$$a^2-b^2=(a+b)\cdot(a-b)$$

para todo $a,b\in\mathbb{Z}$, que se lee de la siguiente manera: la diferencia de los cuadrados de dos números es su suma por diferencia y viceversa. Mediante esta identidad podemos escribir

$$\begin{aligned}9-(x-y)^2 &= 3^2-(x-y)^2\\ &= [3+(x-y)]\cdot[3-(x-y)]\\ &= (3+x-y)\cdot(3-x+y)\end{aligned}$$

y, por tanto, la igualdad considerada es una identidad en el anillo de los enteros.
(b) No se trata de una identidad ya que la igualdad no se satisface por ejemplo para $x=0$.

$$\frac{0}{2}+5=5\neq 11=2\cdot 0+11$$

(c) En una estructura de anillo conmutativo como la de los números enteros con las operaciones ordinarias de suma y producto y según la propiedad distributiva, obtenemos

$$\begin{aligned}(x+3)(x-1)+4 &= (x+3)\cdot x+(x+3)\cdot(-1)+4\\ &= x^2+3x-x-3+4\\ &= x^2+2x+1\\ &= (x+1)^2\end{aligned}$$

En el último paso hemos aplicado la siguiente identidad:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

(d) En una estructura de cuerpo conmutativo como la de los números racionales con las operaciones ordinarias de suma y producto podemos escribir

$$\begin{aligned}\frac{2x-1}{3}+2-\frac{x}{3} &= \frac{2x-1}{3}+\frac{6}{3}-\frac{x}{3}\\ &= \frac{2x-1+6-x}{3}\\ &= \frac{x+5}{3}\end{aligned}$$

y, por otro lado,

$$\begin{aligned}1+\frac{2}{3}+\frac{x}{3} &= \frac{3}{3}+\frac{2}{3}+\frac{x}{3}\\ &= \frac{3+2+x}{3}\\ &= \frac{5+x}{3}\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\frac{2x-1}{3}+2-\frac{x}{3} = 1+\frac{2}{3}+\frac{x}{3}$$

y la igualdad es una identidad. ■

Ejercicio 2 Averigua si las dos ecuaciones siguientes

$$\frac{x-1}{x-3} = \frac{2}{x-3}$$

y

$$x-1=2$$

son equivalentes.

Solución: No son equivalentes, ya que no tienen las mismas soluciones. La segunda ecuación

$$x-1=2$$

tiene como solución $x=3$, y dicha solución no tiene ningún sentido en la primera ya que no es posible dividir por cero. De hecho, la primera ecuación no tiene soluciones, pues, en el supuesto de que $x \neq 3$, la expresión $x-3$ sería distinta de cero y por tanto podríamos multiplicar ambos miembros de esta ecuación por $x-3$, obteniendo otra de equivalente que coincide con la segunda ecuación dada. Ahora bien, esto no es posible, pues $x \neq 3$. ■

Ejercicio 3 Averigua si son o no equivalentes los siguientes pares de ecuaciones:

a)	$x+2=3$	$2x+5=7$
b)	$x^2=49$	$x=7$
c)	$\frac{2x+1}{5}+\frac{1}{7}=x+2$	$21x+58=0$

Solución: (a) Múltiplicando por 2 la ecuación

$$x+2=3$$

se obtiene

$$2x+4=6$$

Sumando 1 a ambos miembros de esta igualdad, obtenemos

$$2x+5=7$$

que es la segunda ecuación. Por tanto, las dos ecuaciones son equivalentes.
(b) Las dos ecuaciones no son equivalentes ya que no tienen las mismas soluciones. La ecuación

$$x^2 = 49$$

tiene como soluciones 7 y -7, mientras que la ecuación $x = 7$ no admite la solución -7.
(c) Multiplicando por $35 = m.c.m.(5, 7)$ la ecuación

$$\frac{2x+1}{5} + \frac{1}{7} = x + 2$$

se obtiene

$$\begin{aligned} 7(2x+1) + 5 &= 35x + 70 \\ 14x + 7 + 5 &= 35x + 70 \\ 14x + 12 &= 35x + 70 \end{aligned}$$

Sumando $-35x - 70$ a ambos miembros de esta última igualdad, obtenemos

$$\begin{aligned} 14x + 12 - 35x - 70 &= 35x + 70 - 35x - 70 \\ -21x - 58 &= 0 \end{aligned}$$

Finalmente, multiplicando por -1 esta última ecuación, resulta

$$21x + 58 = 0$$

que es la segunda ecuación dada. Por consiguiente, las dos ecuaciones son equivalentes. ■

Ejercicio 4 Escribe ecuaciones equivalentes más sencillas a las siguientes:

$a)$ $x + \frac{1}{2} = 6x + \frac{3}{2}$
$b)$ $x^2 + 5x + \frac{3}{4} = x^2 - 3x + \frac{1}{2}$
$c)$ $2(x - y) = 3x - 2y - 4$

Solución: (a) Multiplicando por 2 la ecuación

$$x + \frac{1}{2} = 6x + \frac{3}{2}$$

obtenemos

$$2x + 1 = 12x + 3$$

Sumando $-2x - 3$ a ambos miembros de esta igualdad, resulta

$$\begin{aligned} 2x + 1 - 2x - 3 &= 12x + 3 - 2x - 3 \\ -2 &= 10x \end{aligned}$$

Dividiendo ahora por 10, obtenemos

$$x = -\frac{2}{10} = -\frac{1}{5}$$

que es la ecuación más sencilla posible equivalente a la ecuación dada; observa que esta última ecuación da la solución de la ecuación original.
(b) Sumando $-x^2 + 3x - \frac{3}{4}$ a ambos miembros

$$x^2 + 5x + \frac{3}{4} = x^2 - 3x + \frac{1}{2}$$

se obtiene

$$\begin{aligned} x^2 + 5x + \frac{3}{4} - x^2 + 3x - \frac{3}{4} &= x^2 - 3x + \frac{1}{2} - x^2 + 3x - \frac{3}{4} \\ 8x &= \frac{1}{2} - \frac{3}{4} = \frac{2-3}{4} = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Dividiendo ahora por 8, resulta

$$x = -\frac{1}{32}$$

que es la ecuación más sencilla posible equivalente a la ecuación dada; observa que esta última ecuación da la solución de la ecuación original.
(c) Efectuando operaciones, obtenemos

$$\begin{aligned} 2(x-y) &= 3x-2y-4 \\ 2x-2y &= 3x-2y-4 \end{aligned}$$

Sumando $2y - 3x$ a ambos miembros de esta última igualdad, resulta

$$\begin{aligned} 2x-2y+2y-3x &= 3x-2y-4+2y-3x \\ -x &= -4 \end{aligned}$$

Finalmente, multiplicando por -1 esta última ecuación, obtenemos

$$x = 4$$

que es la ecuación más sencilla posible equivalente a la ecuación dada; observa que esta última ecuación da la solución de la ecuación original: $x = 4$ e y puede tomar cualquier valor real. ■

Ejercicio 5 Indica cuántas incógnitas tiene cada una de las siguientes ecuaciones y averigua si los valores indicados son o no solución de la ecuación correspondiente:

a)	$x^2 + y^2 - 3xy = 1$	$x = 3, y = 1$
b)	$3x + 5 = 2x - 4$	$x = -9$
c)	$3\left(2x + \frac{35}{3}\right) + x - \frac{10}{3} = 7 - 15x$	$x = -\frac{2}{3}$
d)	$x + y + z = 1$	$x = y = 0, z = 1$

Solución: (a) Es claro que la ecuación

$$x^2 + y^2 - 3xy = 1$$

tiene dos incógnitas x e y. Si reemplazamos x por 3 e y por 1, la ecuación se convierte en la siguiente igualdad numérica

$$3^2 + 1^2 - 3 \cdot 3 \cdot 1 = 1$$

que es evidentemente verdadera y, por tanto, $x = 3$ e $y = 1$ es solución de la ecuación dada.
(b) La ecuación

$$3x + 5 = 2x - 4$$

tiene una sola incógnita. Si reemplazamos x por -9, obtenemos la siguiente igualdad numérica

$$3 \cdot (-9) + 5 = 2 \cdot (-9) - 4$$

que es evidentemente verdadera y, por tanto, $x = -9$ es solución de la ecuación dada.
(c) La ecuación

$$3\left(2x + \frac{35}{3}\right) + x - \frac{10}{3} = 7 - 15x$$

tiene también una sola incógnita. Si sustituimos x por $-\frac{2}{3}$, obtenemos la siguiente igualdad numérica

$$3\left[2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + \frac{35}{3}\right] - \frac{2}{3} - \frac{10}{3} = 7 - 15 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \tag{1}$$

Puesto que

$$\begin{aligned} 3\left[2 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + \frac{35}{3}\right] - \frac{2}{3} - \frac{10}{3} &= 3\left(-\frac{4}{3} + \frac{35}{3}\right) - 4 \\ &= 31 - 4 = 27 \end{aligned}$$

y

$$7 - 15 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = 7 + 10 = 17$$

la igualdad (1) no es cierta, y, como consecuencia, $x = -\frac{2}{3}$ no es solución de la ecuación dada.
(d) La ecuación

$$x + y + z = 1$$

tiene tres incógnitas: x, y, z. Si reemplazamos x e y por 0 y z por 1, obtenemos

$$0 + 0 + 1 = 1$$

que evidentemente se cumple. Por tanto, $x = y = 0$ y $z = 1$ es solución de la ecuación dada. ■

Ejercicio 6 ¿Dónde está el error del siguiente razonamiento? Supongamos que $x = 1$. Entonces, $x^2 = x$ y $2x = 2$. De estas dos igualdades deducimos que $x^2 + 2 = x + 2x$. De aquí, obtenemos que $x^2 - x = 2x - 2$ y, por tanto, $x(x-1) = 2(x-1)$. Dividiendo ahora por $x - 1$ ambos miembros de esta última igualdad, obtenemos $x = 2$. Ahora bien, como era $x = 1$, deducimos que $1 = 2$.

Solución: El primer paso

$$x = 1 \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x^2 = x \\ 2 = 2x \end{array} \right.$$

es correcto ya que $x \neq 0$. Como consecuencia, es válido el segundo paso

$$x^2 + 2 = x + 2x$$

pues esta ecuación se ha obtenido de las dos anteriores sumándolas miembro a miembro. El paso siguiente también es correcto

$$x^2 - x = 2x - 2$$

pues esta ecuación se ha obtenido de la anterior por trasposición de términos. El paso siguiente consiste en extraer factor común x

$$x(x-1) = 2(x-1)$$

que es también correcto. En cambio, el paso siguiente ya no es válido: para poder dividir por $x - 1$ es necesario que $x - 1$ sea distinto de cero y no es así, ya que por hipótesis $x = 1$. Por consiguiente, de la igualdad anterior no es posible deducir

$$x = 2$$

y, como consecuencia, no es cierto que $1 = 2$. ■

Ejercicio 7 Determina, después de efectuar las operaciones indicadas, cuáles de las siguientes ecuaciones son determinadas, indeterminadas e incompatibles:

$$\begin{array}{ll} a) & 3(x-2) - (2x-4) = x + 10 \\ b) & (x-3)^2 - (x+3)^2 = 6(1-2x) \\ c) & \frac{x-1}{3} = \frac{x+2}{2} \\ d) & 4(x-3) + 3(x+2) = 7x - 6 \end{array}$$

Solución: (a) Efectuando operaciones, obtenemos

$$\begin{aligned} 3(x-2) - (2x-4) &= x + 10 \\ 3x - 6 - 2x + 4 &= x + 10 \\ x - 2 &= x + 10 \\ 0 &= 12 \end{aligned}$$

que es una contradicción. Por tanto, la ecuación es incompatible.

(b) Efectuando operaciones, teniendo presente que el primer miembro de la ecuación es una diferencia de cuadrados, obtenemos

$$\begin{aligned}
(x-3)^2-(x+3)^2 &= 6(1-2x)\\
(x-3+x+3)(x-3-x-3) &= 6-12x\\
-12x &= 6-12x\\
0 &= 6
\end{aligned}$$

que es una contradicción. Por tanto, la ecuación es incompatible.
(c) Multiplicando la ecuación por $6 = m.c.m.(2,3)$, obtenemos

$$\begin{aligned}
2(x-1) &= 3(x+2)\\
2x-2 &= 3x+6\\
-x &= 8\\
x &= -8
\end{aligned}$$

y la ecuación es determinada.
(d) Efectuando operaciones, obtenemos

$$\begin{aligned}
4(x-3)+3(x+2) &= 7x-6\\
4x-12+3x+6 &= 7x-6\\
7x-6 &= 7x-6\\
0 &= 0
\end{aligned}$$

y la ecuación es indeterminada. ■

Ejercicio 8 Resuelve las siguientes ecuaciones polinómicas:

a) $(x+5)(3x-2)(x+1)=0$
b) $(x^2+2x+1)(x^2-4)=0$
c) $(x+2)(x+1)-(x+2)(5-2x)=0$
d) $9(3x-1)^2-16(2x+3)^2=0$
e) $x^4+x^3-12x^2=0$
f) $2x^3-2x^2-28x+48=0$

Solución: (a) Como el polinomio está descompuesto en factores lineales la resolución es muy simple: basta recordar que para que un producto de números reales sea cero debe serlo al menos uno de los factores. Así, las soluciones de la ecuación

$$(x+5)(3x-2)(x+1)=0$$

son los números que anulan cada uno de los factores, es decir,

$$\begin{array}{lll}
x+5=0 & \Longrightarrow & x=-5\\
3x-2=0 & \Longrightarrow & x=\frac{2}{3}\\
x+1=0 & \Longrightarrow & x=-1
\end{array}$$

(b) Como

$$x^2+2x+1=(x+1)^2$$

y

$$x^2-4=(x+2)(x-2)$$

deducimos que la ecuación dada puede escribirse de la siguiente manera

$$(x+1)^2(x+2)(x-2)=0$$

Ahora, del mismo modo que el apartado anterior, las soluciones de esta ecuación son los números que anulan cada uno de los factores, es decir,

$$\begin{array}{lllll}
(x+1)^2=0 & \Longrightarrow & x+1=0 & \Longrightarrow & x=-1\\
x+2=0 & \Longrightarrow & x=-2 & & \\
x-2=0 & \Longrightarrow & x=2 & &
\end{array}$$

Observa que la solución $x = -1$ es doble.
(c) En la ecuación

$$(x+2)(x+1) - (x+2)(5-2x) = 0$$

podemos sacar factor común $x+2$, resultando

$$\begin{aligned}(x+2)(x+1-5+2x) &= 0\\ (x+2)(3x-4) &= 0\end{aligned}$$

Luego, las soluciones de la ecuación son:

$$\begin{array}{lll} x+2=0 & \Longrightarrow & x=-2\\ 3x-4=0 & \Longrightarrow & x=\frac{4}{3}\end{array}$$

(d) Como se trata de una diferencia de cuadrados, la ecuación

$$9(3x-1)^2 - 16(2x+3)^2 = 0$$

puede también escribirse de la siguiente manera:

$$[3(3x-1)+4(2x+3)]\cdot[3(3x-1)-4(2x+3)] = 0$$

es decir, efectuando operaciones, como

$$(17x+9)(x-15) = 0$$

Luego, las soluciones de la ecuación son:

$$\begin{array}{lll} 17x+9=0 & \Longrightarrow & x=-\frac{9}{17}\\ x-15=0 & & x=15\end{array}$$

(e) En la ecuación

$$x^4 + x^3 - 12x^2 = 0$$

podemos sacar factor común x^2, resultando

$$x^2(x^2+x-12) = 0$$

Por la regla de Ruffini, obtenemos

$$\begin{array}{r|rrr} & 1 & 1 & -12\\ 3 & & 3 & 12\\ \hline & 1 & 4 & 0\end{array}$$

y, por tanto, la descomposición factorial del polinomio x^2+x-12 es

$$(x-3)(x+4)$$

De este modo, la ecuación dada puede expresarse también como sigue:

$$x^2(x-3)(x+4) = 0$$

Luego, las soluciones de la ecuación son:

$$\begin{array}{lll} x^2=0 & \Longrightarrow & x=0\\ x-3=0 & \Longrightarrow & x=3\\ x+4=0 & \Longrightarrow & x=-4\end{array}$$

Observa que la solución $x = 0$ es doble.
(f) Es claro que la ecuación dada puede también escribirse como sigue:

$$2(x^3 - x^2 - 14x + 24) = 0$$

Por tanto, esta ecuación es equivalente a la siguiente:

$$x^3 - x^2 - 14x + 24 = 0$$

Por la regla de Ruffini, obtenemos

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & -14 & 24 \\ 2 & & 2 & 2 & -24 \\ \hline & 1 & 1 & -12 & 0 \\ 3 & & 3 & 12 & \\ \hline & 1 & 4 & 0 & \end{array}$$

Luego, el polinomio $x^3 - x^2 - 14x + 24$ admite la siguiente descomposición:

$$(x-2)(x-3)(x+4)$$

De este modo, la ecuación anterior puede expresarse también como

$$(x-2)(x-3)(x+4) = 0$$

y, de aquí, obtenemos las soluciones de la ecuación:

$$\begin{array}{lcl} x-2=0 & \Longrightarrow & x=2 \\ x-3=0 & \Longrightarrow & x=3 \\ x+4=0 & \Longrightarrow & x=-4 \end{array}$$

■

2. Ecuaciones de primer grado con una incógnita

Ejercicio 9 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a)
$$3(2x-5) - 2(x+3) = x - 6$$

b)
$$(x-2)^2 - (x+1)^2 = 7 - 7(x+1)$$

c)
$$2\sqrt{3}x - 3x + 12 = 3(x - \sqrt{3}) - \sqrt{3}(2x+1)$$

d)
$$\frac{5x-3}{6} - \frac{7x-1}{4} = \frac{2x-1}{9} - \frac{1}{2}$$

e)
$$\frac{1}{2} \cdot \left(x - \frac{3}{4}\right) - \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{x}{12} + \frac{1}{24}\right) = \frac{1+x}{6}$$

Solución: (a) En la ecuación
$$3(2x-5) - 2(x+3) = x - 6$$
suprimiendo los paréntesis y reduciendo términos, obtenemos

$$\begin{aligned} 6x - 15 - 2x - 6 &= x - 6 \\ 4x - 21 &= x - 6 \end{aligned}$$

Transponiendo y reduciendo términos,

$$\begin{aligned} 4x - x &= 21 - 6 \\ 3x &= 15 \end{aligned}$$

finalmente, despejando x, obtenemos
$$x = \frac{15}{3} = 5$$

Podemos comprobar que la ecuación está bien resuelta sustituyendo x por el valor obtenido en la ecuación original y viendo que la igualdad numérica que se obtiene es verdadera:

$$\begin{aligned} 3(2\cdot 5-5)-2(5+3) &= 5-6 \\ 3\cdot 5-2\cdot 8 &= -1 \\ -1 &= -1 \end{aligned}$$

(b) En la ecuación

$$(x-2)^2-(x+1)^2=7-7(x+1)$$

suprimiendo los paréntesis y reduciendo términos, obtenemos

$$\begin{aligned} x^2-4x+4-(x^2+2x+1) &= 7-7x-7 \\ -4x+4-2x-1 &= -7x \\ -6x+3 &= -7x \end{aligned}$$

Transponiendo y reduciendo términos, obtenemos

$$\begin{aligned} -6x+7x &= -3 \\ x &= -3 \end{aligned}$$

Se deja al lector la comprobación de esta solución.
(c) En la ecuación

$$2\sqrt{3}x-3x+12=3(x-\sqrt{3})-\sqrt{3}(2x+1)$$

suprimiendo los paréntesis y reduciendo términos, obtenemos

$$\begin{aligned} 2\sqrt{3}x-3x+12 &= 3x-3\sqrt{3}-2\sqrt{3}x-\sqrt{3} \\ (2\sqrt{3}-3)x+12 &= (3-2\sqrt{3})x-4\sqrt{3} \end{aligned}$$

Transponiendo, reduciendo y simplificando los términos,

$$\begin{aligned} (2\sqrt{3}-3)x-(3-2\sqrt{3})x &= -4\sqrt{3}-12 \\ (2\sqrt{3}-3-3+2\sqrt{3})x &= -4\sqrt{3}-12 \\ (4\sqrt{3}-6)x &= -4\sqrt{3}-12 \\ (2\sqrt{3}-3)x &= -2\sqrt{3}-6 \end{aligned}$$

finalmente, despejando x, obtenemos

$$x=\frac{-2\sqrt{3}-6}{2\sqrt{3}-3}$$

Racionalizando el resultado, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{-2\sqrt{3}-6}{2\sqrt{3}-3}\cdot\frac{2\sqrt{3}+3}{2\sqrt{3}+3} &= \frac{-12-6\sqrt{3}-12\sqrt{3}-18}{12-9} \\ &= \frac{-30-18\sqrt{3}}{3} \\ &= -10-6\sqrt{3} \end{aligned}$$

Por tanto, la solución es

$$x=-10-6\sqrt{3}$$

Se deja al lector la comprobación de esta solución.
(d) En la ecuación

$$\frac{5x-3}{6}-\frac{7x-1}{4}=\frac{2x-1}{9}-\frac{1}{2}$$

suprimiendo los denominadores multiplicando por $36=m.c.m.(6,4,9,2)$, obtenemos

$$6(5x-3)-9(7x-1)=4(2x-1)-18$$

Suprimiendo los paréntesis y reduciendo términos, obtenemos

$$\begin{aligned} 30x - 18 - 63x + 9 &= 8x - 4 - 18 \\ -33x - 9 &= 8x - 22 \end{aligned}$$

Transponiendo y reduciendo términos, y multiplicando la ecuación por -1, obtenemos

$$\begin{aligned} -33x - 8x &= 9 - 22 \\ -41x &= -13 \\ 41x &= 13 \end{aligned}$$

finalmente, despejando x, resulta

$$x = \frac{13}{41}$$

Se deja al lector la comprobación de esta solución.
(e) En la ecuación

$$\frac{1}{2} \cdot \left(x - \frac{3}{4} \right) - \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{x}{12} + \frac{1}{24} \right) = \frac{1+x}{6}$$

efectuando las operaciones indicadas, se obtiene

$$\frac{x}{2} - \frac{3}{8} - \frac{3x}{60} - \frac{3}{120} = \frac{1+x}{6}$$

Suprimiendo los denominadores multiplicando por $120 = m.c.m.(2, 8, 60, 120, 6)$, obtenemos

$$60x - 45 - 6x - 3 = 20(1+x)$$

Suprimiendo los paréntesis y reduciendo términos, obtenemos

$$\begin{aligned} 60x - 45 - 6x - 3 &= 20 + 20x \\ 60x - 6x - 20x &= 20 + 3 + 45 \\ 34x &= 68 \end{aligned}$$

finalmente, despejando x, resulta

$$x = \frac{68}{34} = 2$$

Se deja al lector la comprobación de esta solución. ■

Ejercicio 10 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a)
$$1 - \left[\frac{3(x+1)}{2} - \frac{2(x-1)}{3} \right] = \frac{1}{2} - x$$

b)
$$1 - \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{x-4}{2} - \frac{3}{5} \cdot x \right) = x - 7$$

c)
$$\left(x - \frac{1}{2} \right) \cdot \left(x - \frac{1}{3} \right) + \left(1 - \frac{1}{6} \right) \cdot x = (x+1) \cdot (x-1) + 4$$

d)
$$\frac{x - \sqrt{2}}{2} - \frac{2x+1}{\sqrt{2}} = 1 - \sqrt{2} \cdot x$$

e)
$$(\sqrt{2}x + 1) \cdot (\sqrt{2}x - 1) - (\sqrt{2}x + 1)^2 = \sqrt{2} \cdot (2x - \sqrt{2})$$

Solución: (a) En la ecuación

$$1-\left[\frac{3(x+1)}{2}-\frac{2(x-1)}{3}\right]=\frac{1}{2}-x$$

suprimiendo los paréntesis, obtenemos

$$1-\frac{3x+3}{2}+\frac{2x-2}{3}=\frac{1}{2}-x$$

Quitando los denominadores multiplicando por $6=m.c.m.(2,3)$, obtenemos

$$6-3(3x+3)+2(2x-2)=3-6x$$

Efectuando operaciones y reduciendo términos, obtenemos

$$\begin{aligned} 6-9x-9+4x-4 &= 3-6x \\ -9x+4x+6x &= 3+4+9-6 \\ x &= 10 \end{aligned}$$

Por tanto, la solución es

$$x=10$$

(b) En la ecuación

$$1-\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{x-4}{2}-\frac{3}{5}\cdot x\right)=x-7$$

efectuando operaciones, obtenemos

$$\begin{aligned} 1-\frac{2(x-4)}{6}+\frac{6x}{15} &= x-7 \\ 1-\frac{2x-8}{6}+\frac{6x}{15} &= x-7 \end{aligned}$$

Quitando los denominadores multiplicando por $30=m.c.m.(6,15)$, obtenemos

$$30-5(2x-8)+12x=30x-210$$

Efectuando operaciones y reduciendo términos, obtenemos

$$\begin{aligned} 30-10x+40+12x &= 30x-210 \\ 70+2x &= 30x-210 \end{aligned}$$

Transponiendo términos y operando, obtenemos

$$\begin{aligned} 2x-30x &= -210-70 \\ -28x &= -280 \end{aligned}$$

Multiplicando por -1 y despejando x, se obtiene la solución

$$\begin{aligned} 28x &= 280 \\ x &= \frac{280}{28} \\ x &= 10 \end{aligned}$$

(c) En la ecuación

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(x-\frac{1}{3}\right)+\left(1-\frac{1}{6}\right)\cdot x=(x+1)\cdot(x-1)+4$$

efectuando operaciones y simplicando términos, obtenemos

$$\begin{aligned} x^2-\frac{x}{2}-\frac{x}{3}+\frac{1}{6}+x-\frac{x}{6} &= x^2-1+4 \\ -\frac{x}{2}-\frac{x}{3}+\frac{1}{6}+x-\frac{x}{6} &= 3 \end{aligned}$$

Quitando los denominadores multiplicando por $6 = m.c.m.(2,3)$, obtenemos

$$-3x - 2x + 1 + 6x - x = 18$$

Reduciendo términos, obtenemos

$$1 = 18$$

lo que es una contradicción. Por tanto, la ecuación es incompatible, es decir, no tiene solución.
(d) En la ecuación

$$\frac{x - \sqrt{2}}{2} - \frac{2x+1}{\sqrt{2}} = 1 - \sqrt{2} \cdot x$$

multiplicando por $2\sqrt{2}$ obtenemos

$$\sqrt{2}(x - \sqrt{2}) - 2(2x+1) = 2\sqrt{2}(1 - \sqrt{2}x)$$

Suprimiendo los paréntesis, obtenemos

$$\sqrt{2}x - 2 - 4x - 2 = 2\sqrt{2} - 4x$$

Transponiendo y reduciendo términos, obtenemos

$$\begin{aligned} \sqrt{2}x - 4x + 4x &= 2\sqrt{2} + 2 + 2 \\ \sqrt{2}x &= 2\sqrt{2} + 4 \end{aligned}$$

Despejando x, se obtiene

$$x = \frac{2\sqrt{2} + 4}{\sqrt{2}}$$

y, finalmente, racionalizando el resultado, obtenemos

$$\frac{2\sqrt{2}+4}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{4 + 4\sqrt{2}}{2} = 2 + 2\sqrt{2}$$

o sea, que la solución es

$$x = 2 + 2\sqrt{2}$$

(e) En la ecuación

$$(\sqrt{2}x + 1) \cdot (\sqrt{2}x - 1) - (\sqrt{2}x + 1)^2 = \sqrt{2} \cdot (2x - \sqrt{2})$$

efectuando las operaciones indicadas y reduciendo términos, obtenemos

$$\begin{aligned} 2x^2 - \sqrt{2}x + \sqrt{2}x - 1 - (2x^2 + 2\sqrt{2}x + 1) &= 2\sqrt{2}x - 2 \\ 2x^2 - \sqrt{2}x + \sqrt{2}x - 1 - 2x^2 - 2\sqrt{2}x - 1 &= 2\sqrt{2}x - 2 \\ -2 &= 2\sqrt{2}x - 2 \end{aligned}$$

Transponiendo términos, obtenemos

$$\begin{aligned} -2 + 2 &= 2\sqrt{2}x \\ 0 &= 2\sqrt{2}x \end{aligned}$$

Por tanto, despejando x, se obtiene la solución

$$x = \frac{0}{2\sqrt{2}} = 0$$

■

Ejercicio 11 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a)

$$(x+3) \cdot (4x^2 + 5x) = 0$$

b)
$$(x+2)(x+1)-(x+2)(5-2x)=0$$

c)
$$x^2-6x+9-25=0$$

d)
$$\left(\frac{5x^2}{2}-x+5\right)^2-\left(\frac{3x^2}{2}+5x-4\right)^2=0$$

Solución: (a) Puesto que
$$4x^2+5x=x(4x+5)$$
entonces la ecuación
$$(x+3)\cdot(4x^2+5x)=0$$
puede escribirse como sigue
$$x\cdot(4x+5)\cdot(x+3)=0$$
De este modo hemos descompuesto el primer miembro de la ecuación dada en un producto de factores de primer grado. Recordando ahora que $\mathbb{R}$ no tiene divisores de cero (Recuerda que en una estructura de cuerpo como $\mathbb{R}$ no hay divisores de cero), o dicho de otro modo, que un producto de varios factores es cero sólo si al menos uno de los factores es cero, deducimos que las soluciones de la ecuación se obtendrán igualando a cero cada uno de los factores:

$$\begin{array}{lllll} x=0 & & & & \\ 4x+5=0 & \Longrightarrow & 4x=-5 & \Longrightarrow & x=-\frac{5}{4} \\ x+3=0 & \Longrightarrow & x=-3 & & \end{array}$$

Por tanto, las soluciones de la ecuación son: $0, -\frac{5}{4}$ y -3.
(b) Observa que en la ecuación
$$(x+2)(x+1)-(x+2)(5-2x)=0$$
podemos sacar factor común $x-2$, resultando
$$\begin{aligned} (x+2)\cdot(x+1-5+2x) &= 0 \\ (x+2)\cdot(3x-4) &= 0 \end{aligned}$$
De aquí, por lo dicho en el apartado anterior, deducimos
$$\begin{array}{lllll} x+2=0 & \Longrightarrow & x=-2 & & \\ 3x-4=0 & \Longrightarrow & 3x=4 & \Longrightarrow & x=\frac{4}{3} \end{array}$$
Por tanto, las soluciones de la ecuación son: -2 y $\frac{4}{3}$.
(c) En la ecuación
$$x^2-6x+9-25=0$$
observamos que $x^2-6x+9=(x-3)^2$ y, por tanto, también podemos escribirla como sigue
$$(x-3)^2-25=0$$
Así tenemos una diferencia de cuadrados y, por tanto, podemos transformar el miembro de la izquierda de la ecuación en un producto (Recuerda que $a^2-b^2=(a+b)\cdot(a-b)$):
$$\begin{aligned} (x-3+5)\cdot(x-3-5) &= 0 \\ (x+2)\cdot(x-8) &= 0 \end{aligned}$$
De aquí, por lo dicho en el primer apartado, deducimos
$$\begin{array}{lll} x+2=0 & \Longrightarrow & x=-2 \\ x-8=0 & & x=8 \end{array}$$
Por tanto, las soluciones de la ecuación son: -2 y 8.

(d) En el primer miembro de la ecuación

$$\left(\frac{5x^2}{2}-x+5\right)^2-\left(\frac{3x^2}{2}+5x-4\right)^2=0$$

vemos que hay una diferencia de cuadrados. Por tanto, como antes, podemos transformar este miembro en un producto:

$$\begin{aligned}\left[\left(\frac{5x^2}{2}-x+5\right)+\left(\frac{3x^2}{2}+5x-4\right)\right]\cdot\left[\left(\frac{5x^2}{2}-x+5\right)-\left(\frac{3x^2}{2}+5x-4\right)\right] &= 0\\ (4x^2+4x+1)\cdot(x^2-6x+9) &= 0\end{aligned}$$

Ahora bien,

$$4x^2+4x+1=(2x+1)^2$$

y

$$x^2-6x+9=(x-3)^2$$

Luego, la ecuación puede escribirse de la siguiente manera:

$$(2x+1)^2\cdot(x-3)^2=0$$

y, de aquí, se obtiene

$$\begin{array}{lllll}(2x+1)^2=0 & \Longrightarrow & 2x+1=0 & \Longrightarrow & x=-\frac{1}{2}\\ (x-3)^2=0 & \Longrightarrow & x-3=0 & \Longrightarrow & x=3\end{array}$$

Por tanto, las soluciones de la ecuación son: $-\frac{1}{2}$ y 3; ambas soluciones son dobles. ■

Ejercicio 12 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a)

$$\frac{x+2}{3x-1}=\frac{x+5}{3x+5}$$

b)

$$\frac{x}{x-1}+x-1=\frac{x^2}{x-1}$$

c)

$$\frac{1}{x}+\frac{2}{x-1}=\frac{6x-5}{x^2-x}$$

d)

$$\frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{x}}}+x-1=0$$

e)

$$\frac{\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x+1}}{1+\frac{x+1}{x-1}}=\frac{1}{2}$$

Solución: (a) En la ecuación

$$\frac{x+2}{3x-1}=\frac{x+5}{3x+5}$$

multiplicando por $(3x-1)(3x+5)$, obtenemos

$$(3x+5)(x+2)=(3x-1)(x+5)$$

Efectuando las operaciones indicadas, obtenemos

$$3x^2+5x+6x+10=3x^2-x+15x-5$$

Simplificando y reduciendo términos, obtenemos

$$11x + 10 = 14x - 5$$

Transponiendo y reduciendo términos, obtenemos

$$\begin{aligned} 11x - 14x &= -5 - 10 \\ -3x &= -15 \end{aligned}$$

Multiplicando por -1 y despejando x, obtenemos

$$\begin{aligned} 3x &= 15 \\ x &= \frac{15}{3} = 5 \end{aligned}$$

Como para $x = 5$, las expresiones $3x - 1$ y $3x + 5$ son distintas de cero, la solución de la ecuación es

$$x = 5$$

(b) En la ecuación

$$\frac{x}{x-1} + x - 1 = \frac{x^2}{x-1}$$

multiplicando por $x - 1$, obtenemos

$$x + (x-1)^2 = x^2$$

Efectuando operaciones y reduciendo términos, obtenemos

$$\begin{aligned} x + x^2 - 2x + 1 &= x^2 \\ x^2 - x + 1 &= x^2 \end{aligned}$$

Simplificando y transponiendo términos, obtenemos

$$\begin{aligned} -x + 1 &= 0 \\ 1 &= x \end{aligned}$$

Como para $x = 1$, la expresión $x - 1$ es igual a cero, $x = 1$ no es solución y, como consecuencia, la ecuación es incompatible.
(c) En la ecuación

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{x-1} = \frac{6x-5}{x^2-x}$$

multiplicando por $x(x-1) = m.c.m.(x, x-1)$, obtenemos

$$x - 1 + 2x = 6x - 5$$

Transponiendo y reduciendo términos, obtenemos

$$\begin{aligned} x + 2x - 6x &= -5 + 1 \\ -3x &= -4 \end{aligned}$$

Multiplicando la ecuación por -1 y despejando x, obtenemos

$$\begin{aligned} 3x &= 4 \\ x &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Como para $x = \frac{4}{3}$, las expresiones x y $x - 1$ son distintas de cero, la solución de la ecuación es

$$x = \frac{4}{3}$$

(d) En la ecuación

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{1-\frac{1}{x}}} + x - 1 = 0$$

primero efectuaremos las operaciones indicadas en el término

$$\frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{x}}}$$

Así, suponiendo que $x \neq 0$ y $x \neq 1$, tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{x}}} &= \frac{1}{1-\frac{1}{\frac{x-1}{x}}} \\
&= \frac{1}{1-\frac{x}{x-1}} \\
&= \frac{1}{\frac{x-1-x}{x-1}} \\
&= \frac{1}{\frac{-1}{x-1}} \\
&= -(x-1) = 1-x
\end{aligned}$$

Luego, la ecuación original puede escribirse del siguiente modo:

$$1-x+x-1=0$$

Reduciendo términos, obtenemos

$$0=0$$

Por tanto, la ecuación es indeterminada, y sus soluciones son todos los números reales excepto 0 y 1.

(e) En la ecuación

$$\frac{\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x+1}}{1+\frac{x+1}{x-1}}=\frac{1}{2}$$

primero efectuaremos la operaciones indicadas en el numerador y denominador del término

$$\frac{\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x+1}}{1+\frac{x+1}{x-1}}$$

Así, tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x+1} &= \frac{(x+1)^2-(x-1)^2}{(x+1)(x-1)} \\
&= \frac{x^2+2x+1-x^2+2x-1}{(x+1)(x-1)} \\
&= \frac{4x}{(x+1)(x-1)}
\end{aligned}$$

y

$$1+\frac{x+1}{x-1}=\frac{x-1+x+1}{x-1}=\frac{2x}{x-1}$$

Entonces, suponiendo que $x \neq 0$ y $x \neq 1$, obtenemos

$$\frac{\frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x+1}}{1+\frac{x+1}{x-1}}=\frac{\frac{4x}{(x+1)(x-1)}}{\frac{2x}{x-1}}=\frac{2}{x+1}$$

Luego, la ecuación original puede escribirse del siguiente modo:

$$\frac{2}{x+1}=\frac{1}{2}$$

Multiplicando por $2(x+1)$, obtenemos

$$4=x+1$$

Luego,

$$x = 3$$

Como para $x = 3$ no se anula $2(x+1)$, la solución de la ecuación es

$$x = 3$$

■

Ejercicio 13 (a) Determina m de modo que la ecuación

$$\frac{m-x}{3} + (m-1) \cdot \frac{x}{4} = 2m - 5$$

admita como solución $x = 6$. (b) Resuelve esta ecuación para $m = 0$ y $m = 1$. (c) Expresa la solución de esta ecuación en función del parámetro m, y discute las soluciones según los valores de m.

Solución: (a) Para $x = 6$, tenemos la siguiente ecuación en m:

$$\frac{m-6}{3} + (m-1) \cdot \frac{6}{4} = 2m - 5$$

Simplificando la fracción y suprimiendo el paréntesis, obtenemos

$$\frac{m-6}{3} + \frac{3m-3}{2} = 2m - 5$$

Multiplicando por $6 = m.c.m.(2, 3)$, obtenemos

$$2(m-6) + 3(3m-3) = 6(2m-5)$$

Efectuando operaciones, obtenemos

$$2m - 12 + 9m - 9 = 12m - 30$$

Transponiendo y reduciendo términos, obtenemos

$$\begin{aligned} 2m + 9m - 12m &= 12 + 9 - 30 \\ -m &= -9 \end{aligned}$$

Finalmente, multiplicando la ecuación por -1, obtenemos

$$m = 9$$

Por consiguiente, si $m = 9$ la solución de la ecuación es $x = 6$.
(b) Para $m = 0$, tenemos la siguiente ecuación

$$\frac{0-x}{3} + (0-1) \cdot \frac{x}{4} = 2 \cdot 0 - 5$$

es decir,

$$-\frac{x}{3} - \frac{x}{4} = -5$$

Resolviéndola, obtenemos

$$\begin{aligned} -4x - 3x &= -60 \\ -7x &= -60 \\ 7x &= 60 \\ x &= \frac{60}{7} \end{aligned}$$

Para $m = 1$, tenemos la siguiente ecuación

$$\frac{1-x}{3} + (1-1) \cdot \frac{x}{4} = 2 \cdot 1 - 5$$

es decir,

$$\frac{1-x}{3} = -3$$

Resolviéndola, obtenemos

$$\begin{aligned} 1-x &= -9 \\ -x &= -10 \\ x &= 10 \end{aligned}$$

(c) Podemos escribir la ecuación

$$\frac{m-x}{3} + (m-1)\cdot\frac{x}{4} = 2m-5$$

del modo siguiente:

$$\frac{m-x}{3} + \frac{(m-1)x}{4} = 2m-5$$

Multiplicando la ecuación por $12 = m.c.m.(3,4)$, obtenemos

$$4(m-x) + 3(m-1)x = 24m-60$$

Efectuando operaciones y agrupando términos, obtenemos

$$\begin{aligned} 4m-4x+(3m-3)x &= 24m-60 \\ -4x+(3m-3)x &= 24m-60-4m \\ (3m-7)x &= 20m-60 \end{aligned}$$

Finalmente, despejando x, obtenemos

$$x = \frac{20m-60}{3m-7}$$

que es la solución de la ecuación en función de m.
Observa que esta solución será un número real sólo si $3m-7 \neq 0$, es decir, sólo si $m \neq \frac{7}{3}$. Por tanto, si $m \neq \frac{7}{3}$ la solución es

$$x = \frac{20m-60}{3m-7}$$

y si $m = \frac{7}{3}$, la ecuación es incompatible, es decir, no tiene solución. ■

Ejercicio 14 Según los valores del parámetro m, discute y resuelve en $\mathbb{R}$ cuando sea posible las ecuaciones siguientes:

a)
$$(16m^2-49)x = 4m^2-7m$$

b)
$$\frac{x+m}{x-m} = \frac{x-m}{x+m}$$

c)
$$mx + 2(m+1) = (m+1)^2 - x$$

Solución: (a) En la ecuación

$$(16m^2-49)x = 4m^2-7m$$

como

$$\begin{aligned} 16m^2-49 &= 0 \\ 16m^2 &= 49 \\ m^2 &= \frac{49}{16} \end{aligned}$$

entonces $m = \frac{7}{4}$ o $m = -\frac{7}{4}$. Para $m = \frac{7}{4}$ tenemos que la ecuación se convierte en

$$0 = 0$$

y, por tanto, es indeterminada, cualquier número real es solución. Para $m = -\frac{7}{4}$, obtenemos

$$0 = \frac{49}{2}$$

que es una contradicción. Luego, para $m = -\frac{7}{4}$ la ecuación es incompatible, no tiene solución. Para $m \neq \frac{7}{4}$ y $m \neq -\frac{7}{4}$, la ecuación es determinada y su solución es

$$\begin{aligned} x &= \frac{4m^2 - 7m}{16m^2 - 49} \\ &= \frac{m(4m-7)}{(4m+7)(4m-7)} \\ &= \frac{m}{4m+7} \end{aligned}$$

(b) En la ecuación

$$\frac{x+m}{x-m} = \frac{x-m}{x+m}$$

multiplicando por $(x-m)(x+m)$, obtenemos

$$(x+m)^2 = (x-m)^2$$

Efectuando operaciones y reduciendo términos, obtenemos

$$\begin{aligned} x^2 + 2mx + m^2 &= x^2 - 2mx + m^2 \\ 4mx &= 0 \end{aligned}$$

Entonces, si $m = 0$, la ecuación anterior se convierte en

$$0 = 0$$

y, por tanto, la ecuación es indeterminada, cualquier número real salvo el 0 es solución; observa que para $m = 0$ los términos $x - m$ y $x + m$ se anulan cuando $x = 0$. Si $m \neq 0$, entonces la ecuación es determinada y su solución es $x = 0$.
(c) En la ecuación

$$mx + 2(m+1) = (m+1)^2 - x$$

efectuando operaciones, trasponiendo y agrupando términos, obtenemos

$$\begin{aligned} mx + 2m + 2 &= m^2 + 2m + 1 - x \\ mx + x &= m^2 - 1 \\ (m+1)x &= m^2 - 1 \end{aligned}$$

Entonces, si $m = -1$, la ecuación anterior se convierte en

$$0 = 0$$

y, por tanto, la ecuación es indeterminada, cualquier número real es solución. Si $m \neq -1$, entonces la ecuación es determinada y su solución es

$$\begin{aligned} x &= \frac{m^2 - 1}{m+1} \\ &= \frac{(m+1)(m-1)}{m+1} \\ &= m - 1 \end{aligned}$$

■

Ejercicio 15 Halla tres números impares consecutivos tales que si sumamos los dos más pequeños y restamos el más grande se obtiene como resultado 21.

Solución: Planteamiento: Si x representa un número impar, entonces su consecutivo es $x+2$, y el consecutivo de este último es $x+4$. Entonces el enunciado "si sumamos los dos más pequeños y restamos el más grande se obtiene como resultado 21"se expresa mediante la siguiente ecuación

$$x + x + 2 - (x + 4) = 21$$

Resolución: Quitando el paréntesis y reduciendo términos, obtenemos

$$x - 2 = 21$$

Transponiendo y reduciendo términos, obtenemos

$$\begin{aligned} x &= 21 + 2 \\ x &= 23 \end{aligned}$$

Comprobación: 23 es un número impar, y los dos números impares consecutivos a éste son 25 y 27. Si sumamos los dos pequeños da $23 + 25 = 48$; si a este resultado le restamos el mayor se obtiene $48 - 27 = 21$, que es lo que tenía que dar. ■

Ejercicio 16 Reparte 36 € entre dos hermanos si al más pequeño le corresponde las 3/5 de lo que le corresponde al mayor.

Solución: Planteamiento: Supongamos que x representa la cantidad de dinero que le corresponde al mayor de los dos hermanos. Entonces al hermano menor le corresponde

$$\frac{3}{5}x = \frac{3x}{5}$$

Como la cantidad de dinero que se reparte es de 36 euros, se ha de cumplir la siguiente ecuación

$$\frac{3x}{5} + x = 36$$

Resolución: Multiplicando la ecuación por 5, obtenemos

$$3x + 5x = 180$$

Reduciendo términos y despejando x, se obtiene

$$\begin{aligned} 8x &= 180 \\ x &= \frac{180}{8} \\ x &= 22{,}50 \end{aligned}$$

Comprobación: Al mayor le tocan 22,50 euros y al menor

$$36 - 22{,}50 = 13{,}50$$

Como los $\frac{3}{5}$ de 22,50 es

$$\frac{3 \cdot 22{,}50}{5} = 13{,}50$$

que coincide con la cantidad que le corresponde al hermano más pequeño, el problema está bien resuelto. ■

Ejercicio 17 Un automóvil consume 1/3 del total de gasolina que lleva en un primer viaje. En un segundo viaje, consume 1/3 de la gasolina que le quedaba y 5 litros más. En un tercer viaje, de nuevo consume 1/3 de la gasolina que le quedaba y 5 litros más, llegando al final del trayecto con 20 litros en el depósito. ¿Cuántos litros llevaba al iniciar su recorrido?

Solución: Planteamiento: Supongamos que x representa los lítros que llevaba el automóvil al iniciar su recorrido. En la tabla siguiente indicamos la información que nos proporciona el enunciado del problema:

	Litros consumidos	Litros en el depósito
1º viaje	$\frac{1}{3}x = \frac{x}{3}$	$\frac{2}{3}x = \frac{2x}{3}$
2º viaje	$\frac{1}{3}\frac{2x}{3} + 5 = \frac{2x}{9} + 5$	$\frac{2x}{3} - \left(\frac{2x}{9} + 5\right) = \frac{4x}{9} - 5$
3º viaje	$\frac{1}{3}\left(\frac{4x}{9} - 5\right) + 5$	20

A partir de esta información se debe cumplir la siguiente ecuación

$$\frac{x}{3} + \frac{2x}{9} + 5 + \frac{1}{3}\left(\frac{4x}{9} - 5\right) + 5 + 20 = x$$

o bien,

$$\frac{4x}{9} - 5 - \left[\frac{1}{3}\left(\frac{4x}{9} - 5\right) + 5\right] = 20$$

De las dos posibles ecuaciones, tomaremos la segunda para resolver el problema.
Resolución: Efectuando las operaciones indicadas, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{4x}{9} - 5 - \frac{1}{3}\left(\frac{4x}{9} - 5\right) - 5 &= 20 \\ \frac{4x}{9} - \frac{4x}{27} + \frac{5}{3} - 10 &= 20 \end{aligned}$$

Multiplicando la ecuación por $27 = m.c.m.(3, 9, 27)$, obtenemos

$$12x - 4x + 45 - 270 = 540$$

Transponiendo y reduciendo términos, obtenemos

$$\begin{aligned} 12x - 4x &= 540 + 270 - 45 \\ 8x &= 765 \end{aligned}$$

luego, despejando x, se obtiene la solución

$$x = \frac{765}{8} = 95{,}625$$

Comprobación: Basta llenar la tabla con este resultado obtenido y ver que al final quedan 20 litros en el depósito.

	Litros consumidos	Litros en el depósito
1º viaje	31,875	63,75
2º viaje	26,25	37,5
3º viaje	17,5	37,5 − 17,5 = 20

■

Ejercicio 18 Queremos repartir caramelos a un grupo de amigos. No podemos dar 6 caramelos a cada uno porque faltarían 8. Si damos 5 a cada uno, sobran 20. ¿Cuántos caramelos hay para repartir? ¿Cuántos amigos hay en el grupo?

Solución: Planteamiento: Supongamos que en el grupo hay x amigos. Entonces, como al repartir 6 caramelos a cada amigo faltan 8 caramelos, la cantidad de caramelos que tenemos es

$$6x - 8$$

Por otra parte, como al repartir 5 caramelos a cada amigo, sobran 20, la cantidad de caramelos que tenemos también puede expresarse como sigue

$$5x + 20$$

Por consiguiente, se debe cumplir la siguiente ecuación

$$6x - 8 = 5x + 20$$

Resolución: Transponiendo y reduciendo términos, obtenemos la solución

$$\begin{aligned} 6x - 5x &= 20 + 8 \\ x &= 28 \end{aligned}$$

es decir, que hay 28 amigos y para repartir tenemos

$$6 \cdot 28 - 8 = 160$$

caramelos.
Comprobación: Si repartimos 6 caramelos a 28 amigos necesitamos 168 caramelos, 8 más de los que tenemos. En cambio, si repartimos 5 caramelos necesitamos 140 caramelos, 20 menos de los que tenemos. ■

Ejercicio 19 En una reunión hay el doble de mujeres que de hombres y el triple de niños que de hombres y mujeres juntos. ¿Cuántos hombres, mujeres y niños hay si en total en la reunión asisten 156 personas?

Solución: Planteamiento: Supongamos que x representa el número de hombres que asisten a la reunión. Entonces, el número de mujeres, al ser el doble que el de hombres, es $2x$, y, el número de niños, al ser el triple de la suma de hombre y mujeres, es $3(x + 2x) = 9x$. Como a la reunión asisten 158 personas, se ha de cumplir la siguiente ecuación:

$$x + 2x + 9x = 156$$

Resolución: Reduciendo términos y despejando x, obtenemos la solución

$$\begin{aligned} 12x &= 156 \\ x &= \frac{156}{12} \\ x &= 13 \end{aligned}$$

Comprobación: Si de hombres hay 13, de mujeres hay $2 \cdot 13 = 26$. Por tanto, como la suma de hombres y mujeres es 39, hay $3 \cdot 39 = 117$ niños. En total hay $13 + 26 + 117 = 156$, que es lo que tenía que dar. ■

Ejercicio 20 Cuál es el precio de venta de un artículo, sabiendo que si se hace un descuento del 40 % se ganan 3 euros sobre el precio de coste, y si se hace un descuento del 50 % se pierde 1 euro.

Solución: Planteamiento: Supongamos que x representa el precio de venta del artículo. Entonces, como al aplicarle un descuento del 40 % se ganan 3 euros sobre el precio de coste, éste es

$$0{,}60x - 3$$

Por otra parte, como al aplicarle un descuento del 50 % se pierde 1 euro, el precio de coste también puede expresarse como sigue:

$$0{,}50x + 1$$

Por consiguiente, se debe cumplir la siguiente ecuación

$$0{,}60x - 3 = 0{,}50x + 1$$

Resolución: Transponiendo y reduciendo términos, obtenemos

$$\begin{aligned} 0{,}60x - 0{,}50x &= 1 + 3 \\ 0{,}10x &= 4 \end{aligned}$$

Despejando x, obtenemos la solución

$$x = \frac{4}{0{,}10} = 40$$

Comprobación: El precio de venta del artículo es de 40 euros. Si aplicamos un descuento del 40 %, resulta entonces que el precio es $0{,}60 \cdot 40 = 24$ euros, con lo cual ganamos 3 euros sobre el precio de coste. Por tanto, el precio de coste es de 21 euros. Ahora bien, si hacemos un descuento del 50 % resulta que el precio del artículo es $0{,}50 \cdot 40 = 20$ euros, como $20 - 21 = -1$, esto significa que perdemos 1 euro sobre el precio de coste, que es lo que tenía que ocurrir. ■

Ejercicio 21 Preguntando a un padre por la edad de su hijo responde: Si del doble de los años que tiene se quita el triple de los que tenía hace 6 años se tendrá su edad actual. ¿Qué edad tiene el hijo?

Solución: Planteamiento: Supongamos que x representa los años que tiene actualmente el hijo. Si del doble de los años que tiene, $2x$, se resta el triple de la edad que tenía hace 6 años, $x - 6$, se obtiene la edad actual, es decir, se debe cumplir la siguiente ecuación:

$$2x - 3(x - 6) = x$$

Resolución: Quitando el paréntesis, obtenemos

$$2x - 3x + 18 = x$$

Transponiendo y reduciendo términos, obtenemos

$$\begin{aligned} 2x - 3x - x &= -18 \\ -2x &= -18 \end{aligned}$$

Multiplicando la ecuación por -1 y despejando x, obtenemos la solución

$$\begin{aligned} 2x &= 18 \\ x &= \frac{18}{2} \\ x &= 9 \end{aligned}$$

Comprobación: La edad actual del hijo es 9 años y hace 6 años era 3. Si restamos al doble de los años que tiene el triple de los años que tenía hace 6 años, obtenemos

$$2 \cdot 9 - 3 \cdot 3 = 18 - 9 = 9$$

es decir, la edad actual, como tenía que ser. ■

Ejercicio 22 Una persona dice a otra: Hace siete años mi edad era cinco veces la tuya, pero ahora sólo es el triple. ¿Qué edad tiene cada persona?

Solución: Planteamiento: Supongamos que las personas se llaman A y B. Recogemos la información que proporciona el enunciado del problema en la tabla siguiente:

	A	B
Actualmente	x	$3x$
Hace 7 años	$x - 7$	$3x - 7$

Al ser, hace 7 años, la edad de B cinco veces la edad de A, se debe cumplir la siguiente ecuación:

$$3x - 7 = 5(x - 7)$$

Resolución: Quitando el paréntesis, obtenemos

$$3x - 7 = 5x - 35$$

Transponiendo y reduciendo términos, obtenemos

$$\begin{aligned} 3x - 5x &= -35 + 7 \\ -2x &= -28 \end{aligned}$$

Multiplicando la ecuación por -1 y despejando x, obtenemos la solución

$$\begin{aligned} 2x &= 28 \\ x &= \frac{28}{2} \\ x &= 14 \end{aligned}$$

Por tanto, A tiene 14 años y B, 42.
Comprobación: Hace 7 años, la edad de A era 7, y la de B, 35. Se cumple pues que $5 \cdot 7 = 35$, es decir, que la edad de B era cinco veces la edad de A. ■

Ejercicio 23 Un depósito se llena por un grifo en 12 horas y por otro en 6 horas. El desagüe lo vacía en 9 horas. Si se abren los tres, ¿en cuánto tiempo se llenará el depósito?

Solución: Planteamiento: Supongamos que x es el número de horas que tarda el depósito en llenarse cuando están abiertos los dos grifos y el desagüe. En una hora, el primer grifo llena $\frac{1}{12}$ de la capacidad del depósito, y el segundo, $\frac{1}{6}$, y, en cambio, el desagüe lo vacía en $\frac{1}{9}$. Por tanto, si se abren los tres, en una hora se llena del depósito

$$\frac{1}{12} + \frac{1}{6} - \frac{1}{9}$$

Ahora bien, como x es el número de horas que tarda el depósito en llenarse cuando están abiertos los dos grifos y el desagüe, en una hora se llenará $\frac{1}{x}$ de la capacidad del depósito. Por consiguiente, debe cumplise la siguiente ecuación

$$\frac{1}{12} + \frac{1}{6} - \frac{1}{9} = \frac{1}{x}$$

Resolución: Efectuando las operaciones indicadas en el miembro de la izquierda de la ecuación, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{3+6-4}{36} &= \frac{1}{x} \\ \frac{5}{36} &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

De aquí, se obtiene

$$5x = 36$$

y, por tanto,

$$x = \frac{36}{5} = 7{,}2$$

es decir, cuando se abren los dos grifos y el desagüe, se llena el depósito en 7 horas y $60 \cdot 0{,}2 = 12$ minutos. ■

Ejercicio 24 En un trabajo actúan tres personas y lo terminan en 4 días. Si trabajase solamente la primera persona lo acabaría en 12 días; si lo hiciera sólo la segunda lo haría en 10 días. ¿Cuánto tiempo necesitará la tercera persona en acabar el trabajo si lo hace solo?

Solución: Planteamiento: Supongamos que x representa el número de días que necesita la tercera persona para realizar solo el trabajo. En un día, la primera persona realiza $\frac{1}{12}$ del trabajo, el segundo, $\frac{1}{10}$, y el tercero, $\frac{1}{x}$. Todos juntos en un día realizarán

$$\frac{1}{12} + \frac{1}{10} + \frac{1}{x} = \frac{5x + 6x + 60}{60x} = \frac{11x + 60}{60x}$$

Cuando actúan los tres juntos se sabe que tardan 4 horas en completar el trabajo. Por tanto, en un día los tres juntos realizan $\frac{1}{4}$ del trabajo y, como consecuencia, debe cumplirse la siguiente ecuación:

$$\frac{11x + 60}{60x} = \frac{1}{4}$$

Resolución: Multiplicando la ecuación por $60x$, obtenemos

$$11x + 60 = 15x$$

Transponiendo y reduciendo términos, obtenemos

$$\begin{aligned} 11x - 15x &= -60 \\ -4x &= -60 \end{aligned}$$

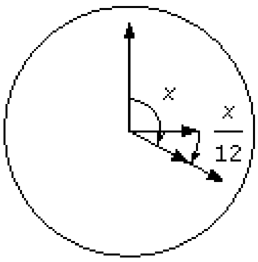
Multiplicando por -1 y despejando x, se obtiene la solución

$$\begin{aligned} 4x &= 60 \\ x &= \frac{60}{4} \\ x &= 15 \end{aligned}$$

es decir, la tercera persona tarda 15 días en realizar solo el trabajo. ■

Ejercicio 25 Un reloj marca las tres en punto. ¿A qué hora la aguja minutera coincidirá con la aguja horaria por primera vez?

Solución: Planteamiento: Sabemos que la esfera de un reloj está dividida en 60 partes iguales, y la aguja minutera recorre una de estas divisiones en un minuto de tiempo. Es claro que, mientras la minutera recorre las 60 divisiones, la horaria recorre $\frac{1}{12}$, es decir, $\frac{1}{12} \cdot 60 = 5$ divisiones.
Supongamos que x representa el número de divisiones que recorre la minutera hasta coincidir con la horaria. En el mismo tiempo, la horaria habrá recorrido $\frac{x}{12}$ divisiones. Sin embargo, cuando el reloj marca las tres en punto la aguja horaria se encuentra 15 divisiones más avanzada que la minutera.



Por tanto, se ha de cumplir

$$x = 15 + \frac{x}{12}$$

Resolución: Multiplicando la ecuación por 12, obtenemos

$$12x = 180 + x$$

Transponiendo y reduciendo términos, obtenemos

$$\begin{aligned} 12x - x &= 180 \\ 11x &= 180 \end{aligned}$$

Despejando x, se obtiene la solución

$$x = \frac{180}{11} = 16{,}36$$

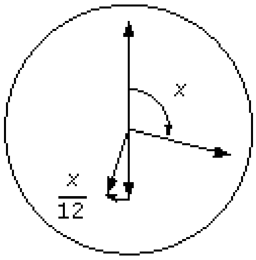
es decir, las agujas del reloj volverán a coincidir por primera vez transcurridos 16 minutos y $60 \cdot 0{,}36 = 21{,}6$ segundos. ■

Ejercicio 26 Son las seis de la tarde. ¿A qué hora la aguja minutera y la aguja horaria formarán un angulo de 92^{o} por primera vez?

Solución: Planteamiento: La medida en grados sexagesimales de cada una de las 60 divisiones de la esfera de un reloj es

$$\frac{360^{\text{o}}}{60} = 6^{\text{o}}$$

Supongamos que x representa el número de divisiones que recorre la minutera hasta conseguir la posición pedida por primera vez. En el mismo tiempo, la horaria habrá recorrido $\frac{x}{12}$ divisiones. Sin embargo, cuando el reloj marca las seis de la tarde la aguja horaria se encuentra 30 divisiones más avanzada que la minutera.



Además, como 92^{o} equivalen a

$$\frac{92}{6} = \frac{46}{3}$$

divisiones del reloj, entonces se ha de cumplir la siguiente ecuación:

$$30 + \frac{x}{12} - x = \frac{46}{3}$$

Resolución: Multiplicando la ecuación por 12, obtenemos

$$360 + x - 12x = 184$$

Transponiendo y reduciendo términos, obtenemos

$$\begin{aligned} 360 - 184 &= 12x - x \\ 176 &= 11x \end{aligned}$$

Despejando x, se obtiene la solución

$$x = \frac{176}{11} = 16$$

es decir, las agujas formarán un ángulo de 92^{o} por primera vez a las 18 horas y 16 minutos. ■

Ejercicio 27 Un camión sale de un punto a 60 Km/h y al cabo de una hora sale un coche del mismo punto a 90 Km/h en la misma dirección y sentido que el camión. Halla el tiempo que tardará el coche en alcanzar al camión y el espacio recorrido por ambos.

Solución: Planteamiento: En todos los problemas sobre móviles se utiliza la relación

$$\text{espacio} = \text{ velocidad} \times \text{ tiempo}$$

que es válida sólo para los casos en que las velocidades de los móviles no varían con el tiempo. Está claro que el espacio recorrido por cada móvil hasta encontrarse es el mismo. Si t representa el tiempo que ha necesitado el coche para alcanzar al camión, entonces $t + 1$ es el tiempo que ha tardado el camión hasta llegar al punto de encuentro, pues el coche ha salido una hora más tarde que el camión. El espacio recorrido por el camión es $60(t + 1)$ y el recorrido por el coche es $90t$. Por tanto, se debe cumplir

$$90t = 60(t + 1)$$

Resolución: Quitando el paréntesis y transponiendo términos, obtenemos

$$\begin{aligned} 90t &= 60t + 60 \\ 90t - 60t &= 60 \\ 30t &= 60 \end{aligned}$$

Despejando t, se obtiene

$$t = \frac{60}{30} = 2$$

es decir, que el coche tarda 2 horas en alcanzar el camión. El espacio recorrido por ambos móviles es

$$90 \cdot 2 = 180$$

es decir, 180 Km. ■

Ejercicio 28 Un alpinista sube y regresa al punto de partida en 4 horas. La velocidad al subir es de 400 m por hora y la de bajar es 4 veces mayor. ¿A qué altura subió?

Solución: Planteamiento: Utilizaremos la relación

$$\text{espacio} = \text{ velocidad} \times \text{ tiempo}$$

Está claro que el espacio recorrido al subir y al bajar coinciden. Designamos por x dicho espacio. Entonces el tiempo que tarda en subir es

$$\frac{x}{400}$$

y el tiempo que tarda en bajar es

$$\frac{x}{1600}$$

ya que la velocidad de bajar es cuatro veces mayor que la de subir. Como el tiempo que ha necesitado para subir y bajar es de 4 horas, se debe cumplir

$$\frac{x}{400} + \frac{x}{1600} = 4$$

Resolución: Multiplicando la ecuación por 1600, obtenemos

$$4x + x = 6400$$

Luego,

$$5x = 6400$$

y, por tanto,

$$x = \frac{6400}{5} = 1280$$

es decir, el alpinista subió a una altura de 1280 m. ■

Ejercicio 29 Un tabernero compra 400 litros de vino a 3.61 € por litro. ¿Cuánta agua deberá añadirle para venderlo a 4 €, ganando el 25 % sobre el precio de compra?

Solución: Planteamiento: El coste de los 400 litros es

$$400 \cdot 3{,}61 = 1444$$

Para ganar el 25 %, el tabernero necesita cobrar por la mezcla

$$1444 + 0{,}25 \cdot 1444 = 1805$$

Si designamos por x el número de litros de agua que ha de añadir al vino para venderlo a 4 €, entonces se ha de cumplir

$$(400 + x) \cdot 4 = 1805$$

Resolución: Efectuando operaciones, obtenemos

$$1600 + 4x = 1805$$

Luego,

$$\begin{aligned} 4x &= 1805 - 1600 \\ 4x &= 205 \end{aligned}$$

y, por tanto,

$$x = \frac{205}{4} = 51{,}25$$

es decir, el tabernero ha de añadir 51.25 litros de agua. ■

Ejercicio 30 Se mezclan 60 litros de vino de 1.20 €/l y 35 litros de 2.40 €/l y se desea saber cuántos litros de 5 € habrá que mezclarle para que la mezcla resulte a 3 €/l.

Solución: Planteamiento: Supongamos que x es el número de litros de vino de 5 € que hay que añadir a la mezcla para que resulte otra de 3 €/l. El coste total del vino que hay que mezclar es

$$60 \cdot 1{,}20 + 35 \cdot 2{,}40 + x \cdot 5 = 156 + 5x$$

y como se desea ganar 3 € por cada litro de mezcla, la ganancia total es

$$(60 + 35 + x) \cdot 3 = 3(95 + x)$$

Si no se quiere ganar ni perder, se debe cumplir

$$156 + 5x = 3(95 + x)$$

Resolución: Efectuando operaciones, obtenemos

$$156 + 5x = 285 + 3x$$

Luego,

$$\begin{aligned} 5x - 3x &= 285 - 156 \\ 2x &= 129 \end{aligned}$$

y, por tanto,

$$x = \frac{129}{2} = 64{,}5$$

es decir, debemos añadir 64.5 litros de 5 €. ■

3. Ecuaciones de segundo grado

Ejercicio 31 Indica cuáles de las siguientes ecuaciones son de segundo grado y escríbelas en su forma estándar:

a)
$$(x + 2)^2 - 5x = (x - 3)^2 + 3x + 1$$

b)
$$\frac{4}{x - 2} - \frac{5x - 1}{3} = \frac{3}{3x - 6}$$

c)
$$3\sqrt{x + 2} + (x - 3)^2 = 3$$

d)
$$(x - 2)^3 = (x + 1)(x - 3)^2 + 2x - 4$$

Solución: (a) En la ecuación

$$(x + 2)^2 - 5x = (x - 3)^2 + 3x + 1$$

efectuando operaciones, quitamos los paréntesis y obtenemos

$$\begin{aligned} x^2 + 4x + 4 - 5x &= x^2 - 6x + 9 + 3x + 1 \\ x^2 - x + 4 &= x^2 - 3x + 10 \\ x^2 + 4x + 4 - 5x - x^2 + 3x - 10 &= 0 \\ 2x - 6 &= 0 \end{aligned}$$

que es una ecuación de primer grado.
(b) En la ecuación

$$\frac{4}{x - 2} - \frac{5x - 1}{3} = \frac{3}{3x - 6}$$

multiplicando por $3(x-2)$ en el supuesto de que $x \neq 2$, quitamos los denominadores y obtenemos

$$12-(x-2)(5x-1)=3$$

Efectuando operaciones, quitamos los paréntesis y obtenemos

$$\begin{aligned} 12-5x^2+10x+x-2 &= 3 \\ -5x^2+11x+10 &= 3 \\ -5x^2+11x+7 &= 0 \end{aligned}$$

que es una ecuación de segundo grado.

$$-5x^2+11x+7=0$$

(c) Por la presencia de una raíz en la que aparece la incógnita, la ecuación

$$3\sqrt{x+2}+(x-3)^2=3$$

es irracional.
(d) En la ecuación

$$(x-2)^3=(x+1)(x-3)^2+2x-4$$

efectuando operaciones, quitamos los paréntesis y obtenemos

$$\begin{aligned} x^3-6x^2+12x-8 &= (x+1)(x^2-6x+9)+2x-4 \\ x^3-6x^2+12x-8 &= x^3-5x^2+3x+9+2x-4 \\ x^3-6x^2+12x-8 &= x^3-5x^2+5x+5 \\ -x^2+7x-13 &= 0 \end{aligned}$$

que es una ecuación de segundo grado. ■

Ejercicio 32 Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo incompletas:

a)
$$\frac{x^2}{5}-\frac{2}{3}=\frac{1}{6}$$

b)
$$(x+1)(x-3)+3=0$$

c)
$$3(2x-3)^2=4x(2x-9)+43$$

d)
$$\frac{x(x+1)}{5}=2x^2-4x$$

Solución: (a) En la ecuación

$$\frac{x^2}{5}-\frac{2}{3}=\frac{1}{6}$$

multiplicando por $30=m.c.m.(5,3,6)$, quitamos los denominadores y obtenemos

$$\begin{aligned} 6x^2-20 &= 5 \\ 6x^2-25 &= 0 \end{aligned}$$

que es una ecuación de segundo grado sin término en x. Despejando x^2, obtenemos

$$\begin{aligned} 6x^2 &= 25 \\ x^2 &= \frac{25}{6} \end{aligned}$$

Luego,

$$x = \pm\sqrt{\frac{25}{6}} = \pm\frac{5}{\sqrt{6}} = \pm\frac{5\sqrt{6}}{6}$$

(b) En la ecuación

$$(x+1)(x-3)+3=0$$

efectuando operaciones, quitamos los paréntesis y obtenemos

$$\begin{aligned} x^2+x-3x-3+3 &= 0 \\ x^2-2x &= 0 \end{aligned}$$

que es una ecuación de segundo grado incompleta sin término independiente. Sacando factor común x, obtenemos

$$x(x-2)=0$$

Como un producto sólo puede anularse si algún factor es cero, deducimos

$$\begin{array}{l} x=0 \\ x-2=0 \quad \Longrightarrow \quad x=2 \end{array}$$

Por tanto, las soluciones son $x=0$ o $x=2$.
(c) En la ecuación

$$3(2x-3)^2 = 4x(2x-9)+43$$

efectuando operaciones, quitamos los paréntesis y obtenemos

$$\begin{aligned} 3(4x^2-12x+9) &= 8x^2-36x+43 \\ 12x^2-36x+27 &= 8x^2-36x+43 \\ 4x^2+27-43 &= 0 \\ 4x^2-16 &= 0 \end{aligned}$$

que es una ecuación de segundo grado sin término en x. Despejando x^2, obtenemos

$$\begin{aligned} 4x^2 &= 16 \\ x^2 &= 4 \end{aligned}$$

Luego,

$$x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

(d) En la ecuación

$$\frac{x(x+1)}{5} = 2x^2-4x$$

multiplicando por 5, quitamos el denominador y obtenemos

$$\begin{aligned} x(x+1) &= 10x^2-20x \\ x^2+x &= 10x^2-20x \\ 0 &= 9x^2-21x \\ 3x^2-7x &= 0 \end{aligned}$$

que es una ecuación de segundo grado incompleta sin término independiente. Sacando factor común x, obtenemos

$$x(3x-7)=0$$

Como un producto sólo puede anularse si algún factor es cero, deducimos

$$\begin{array}{l} x=0 \\ 3x-7=0 \quad \Longrightarrow \quad x=\frac{7}{3} \end{array}$$

Por tanto, las soluciones son $x=0$ o $x=\frac{7}{3}$. ■

Ejercicio 33 Resuelve las siguientes ecuaciones de segundo grado sin aplicar la fórmula general:

a) $(2x-1)(3x+4)=0$

b) $(x+1)^2-16=0$

c) $(x-2)(x-1)+(x-2)(x+3)=0$

d) $x^2-4x+4=9$

Solución: (a) Al tratarse de un producto de varios factores igual a cero

$$(2x-1)(3x+4)=0$$

las soluciones se encontrarán igualando a cero cada factor. Así, tenemos

$$\begin{array}{lll} 2x-1=0 & \Longrightarrow & x=\frac{1}{2} \\ 3x+4=0 & \Longrightarrow & x=-\frac{4}{3} \end{array}$$

(b) En la ecuación

$$(x+1)^2-16=0$$

podemos despejar $(x+1)^2$, obteniendo

$$(x+1)^2=16$$

De aquí, se deduce

$$x+1=\pm\sqrt{16}=\pm 4$$

y, por tanto, obtenemos dos ecuaciones cuyas soluciones son

$$\begin{array}{lll} x+1=4 & \Longrightarrow & x=3 \\ x+1=-4 & \Longrightarrow & x=-5 \end{array}$$

(c) En la ecuación

$$(x-2)(x-1)+(x-2)(x+3)=0$$

podemos sacar factor común $x-2$, obteniendo

$$\begin{array}{rcl} (x-2)(x-1+x+3) & = & 0 \\ (x-2)(2x+2) & = & 0 \end{array}$$

Por tanto,

$$\begin{array}{lll} x-2=0 & \Longrightarrow & x=2 \\ 2x+2=0 & \Longrightarrow & x=-1 \end{array}$$

(d) En la ecuación

$$x^2-4x+4=9$$

observamos que

$$x^2-4x+4=(x-2)^2$$

Por tanto, podemos escribir la ecuación del siguiente modo:

$$(x-2)^2=9$$

y, de aquí, deducimos

$$x-2=\pm\sqrt{9}=\pm 3$$

y, por tanto, obtenemos dos ecuaciones cuyas soluciones son

$$\begin{array}{lll} x-2=3 & \Longrightarrow & x=5 \\ x-2=-3 & \Longrightarrow & x=-1 \end{array}$$

■

Ejercicio 34 Aplica la fórmula general para resolver las siguientes ecuaciones de segundo grado:

a) $x^2-4x+3=0$

b) $-3x^2+4x-1=0$

c) $x^2+2\sqrt{3}x+2=0$

Solución: (a) En la ecuación
$$x^2-4x+3=0$$
tenemos $a=1$, $b=-4$ y $c=3$. Por tanto, las soluciones son
$$\begin{aligned} x &= \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ &= \frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot 1\cdot 3}}{2\cdot 1} \\ &= \frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2} \\ &= \frac{4\pm\sqrt{4}}{2} \\ &= \frac{4\pm 2}{2} \end{aligned}$$
es decir,
$$x=\begin{cases} \frac{4+2}{2}=3 \\ \frac{4-2}{2}=1 \end{cases}$$
(b) En la ecuación
$$-3x^2+4x-1=0$$
tenemos $a=-3$, $b=4$ y $c=-1$. Por tanto, las soluciones son
$$\begin{aligned} x &= \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ &= \frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot(-3)\cdot(-1)}}{2\cdot(-3)} \\ &= \frac{-4\pm\sqrt{16-12}}{-6} \\ &= \frac{-4\pm\sqrt{4}}{-6} \\ &= \frac{-4\pm 2}{-6} \end{aligned}$$
es decir,
$$x=\begin{cases} \frac{-4+2}{-6}=\frac{1}{3} \\ \frac{-4-2}{-6}=1 \end{cases}$$
(c) En la ecuación
$$x^2+2\sqrt{3}x+2=0$$
tenemos $a=1$, $b=2\sqrt{3}$ y $c=2$. Por tanto, las soluciones son
$$\begin{aligned} x &= \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ &= \frac{-2\sqrt{3}\pm\sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2-4\cdot 1\cdot 2}}{2\cdot 1} \\ &= \frac{-2\sqrt{3}\pm\sqrt{12-8}}{2} \\ &= \frac{-2\sqrt{3}\pm\sqrt{4}}{2} \\ &= \frac{-2\sqrt{3}\pm 2}{2} \end{aligned}$$

es decir,

$$x = \frac{-2\sqrt{3}+2}{2} = \frac{2\left(1-\sqrt{3}\right)}{2} = 1-\sqrt{3}$$

o bien,

$$x = \frac{-2\sqrt{3}-2}{2} = \frac{2\left(-1-\sqrt{3}\right)}{2} = -1-\sqrt{3}$$

■

Ejercicio 35 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a)
$$\left(x-\frac{2}{x}+1\right)\cdot(4x^2-5x+1)=0$$

b)
$$(x^2+3x-1)^2-(2x^2-x+1)^2=0$$

c)
$$x^2-16=(2x+3)(x+4)$$

d)
$$x^6-4x^5+3x^4=0$$

Solución: (a) Al tratarse de un producto de varios factores igual a cero

$$\left(x-\frac{2}{x}+1\right)\cdot(4x^2-5x+1)=0$$

las soluciones se encontrarán igualando a cero cada factor. Así, obtenemos las dos ecuaciones siguientes

$$x-\frac{2}{x}+1=0$$

y

$$4x^2-5x+1=0$$

Resolviendo la primera, multiplicándola por x, obtenemos la siguiente ecuación de segundo grado:

$$\begin{aligned} x^2-2+x &= 0 \\ x^2+x-2 &= 0 \end{aligned}$$

cuyas soluciones se obtienen por la fórmula general

$$x = \frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot 1\cdot(-2)}}{2\cdot 1} = \frac{-1\pm\sqrt{9}}{2} = \frac{-1\pm 3}{2} = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$$

las dos soluciones son válidas porque ninguna de ellas es cero.
Las soluciones de la segunda ecuación

$$4x^2-5x+1=0$$

se obtienen también por la fórmula general

$$x = \frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot 4\cdot 1}}{2\cdot 4} = \frac{5\pm\sqrt{9}}{8} = \frac{5\pm 3}{8} = \begin{cases} 1 \\ \frac{1}{4} \end{cases}$$

Por tanto, las soluciones de la ecuación dada son -2, $\frac{1}{4}$ y 1, ésta última es doble.
(b) En la ecuación

$$(x^2+3x-1)^2-(2x^2-x+1)^2=0$$

observamos que el miembro de la izquierda es una diferencia de cuadrados. Por tanto, podemos escribirla del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \left[(x^2+3x-1)+(2x^2-x+1)\right]\cdot\left[(x^2+3x-1)-(2x^2-x+1)\right] &= 0 \\ (3x^2+2x)\cdot(-x^2+4x-2) &= 0 \end{aligned}$$

Como se trata de un producto igual a cero, las soluciones se encontrarán igualando a cero cada factor. Así, obtenemos las dos ecuaciones siguientes:

$$3x^2 + 2x = 0$$

y

$$-x^2 + 4x - 2 = 0$$

Resolviendo la primera ecuación, obtenemos

$$\begin{aligned} 3x^2 + 2x &= 0 \\ x(3x + 2) &= 0 \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{array}{l} x = 0 \\ 3x + 2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = -\frac{2}{3} \end{array}$$

Resolviendo la segunda,

$$\begin{aligned} -x^2 + 4x - 2 &= 0 \\ x^2 - 4x + 2 &= 0 \end{aligned}$$

obtenemos

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{2} = \left\{ \begin{array}{l} 2 + \sqrt{2} \\ 2 - \sqrt{2} \end{array} \right.$$

Por consiguiente, las soluciones de la ecuación dada son 0, $-\frac{2}{3}$, $2 + \sqrt{2}$ y $2 - \sqrt{2}$.
(c) La ecuación

$$x^2 - 16 = (2x + 3)(x + 4)$$

puede escribirse también así

$$(x - 4)(x + 4) - (2x + 3)(x + 4) = 0$$

Entonces, sacando factor común $x + 4$, obtenemos

$$\begin{aligned} (x - 4 - 2x - 3)(x + 4) &= 0 \\ (-x - 7)(x + 4) &= 0 \end{aligned}$$

Por tanto, las soluciones de la ecuación son

$$\begin{array}{lll} -x - 7 = 0 & \Longrightarrow & x = -7 \\ x + 4 = 0 & \Longrightarrow & x = -4 \end{array}$$

(d) Sacando factor común x^4 en la ecuación

$$x^6 - 4x^5 + 3x^4 = 0$$

obtenemos

$$x^4 \cdot (x^2 - 4x + 3) = 0$$

Las soluciones de esta ecuación se encontrarán igualando a cero cada factor. Así, obtenemos las dos ecuaciones siguientes:

$$x^4 = 0$$

y

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

De la primera se deduce la solución $x = 0$, y de la segunda, las soluciones siguientes:

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 2}{2} = \left\{ \begin{array}{l} 3 \\ 1 \end{array} \right.$$

Por consiguiente, las soluciones de la ecuación dada son 0, 1 y 3. ■

Ejercicio 36 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a)
$$\frac{12x^2-5x}{2}=x\cdot\left(3x-\frac{x}{3}\right)$$

b)
$$\frac{x}{\sqrt{2}-1}-x(1-x)=-x$$

c)
$$\frac{4}{x+3}=\frac{x-2}{x-3}$$

d)
$$\frac{x-2}{x-1}-\frac{x+3}{x+1}+\frac{3}{2x+2}=\frac{x-1}{x^2-1}$$

e)
$$\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}=\frac{1}{2}$$

Solución: (a) Quitando el paréntesis en la ecuación

$$\frac{12x^2-5x}{2}=x\cdot\left(3x-\frac{x}{3}\right)$$

obtenemos

$$\frac{12x^2-5x}{2}=3x^2-\frac{x^2}{3}$$

Multiplicando ahora la ecuación $6=m.c.m.(2,3)$, quitamos los denominadores y obtenemos

$$\begin{aligned} 3(12x^2-5x) &= 18x^2-2x^2 \\ 36x^2-15x &= 18x^2-2x^2 \\ 20x^2-15x &= 0 \\ 4x^2-3x &= 0 \end{aligned}$$

que es una ecuación de segundo grado incompleta. Sacando factor común x, obtenemos

$$x\cdot(4x-3)=0$$

y, por tanto,

$$\begin{aligned} &x=0 \\ &4x-3=0 \quad\Longrightarrow\quad x=\tfrac{3}{4} \end{aligned}$$

Por consiguiente las soluciones de la ecuación dada son 0 y $\frac{3}{4}$.
(b) Quitando el paréntesis en la ecuación

$$\frac{x}{\sqrt{2}-1}-x(1-x)=-x$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{x}{\sqrt{2}-1}-x+x^2 &= -x \\ \frac{x}{\sqrt{2}-1}+x^2 &= 0 \end{aligned}$$

que es una ecuación de segundo grado incompleta. Sacando factor común x, obtenemos

$$x\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}+x\right)=0$$

y, por tanto,

$$x=0$$

o

$$\begin{aligned}
x &= -\frac{1}{\sqrt{2}-1} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}-1} \cdot \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} \\
&= -\frac{\sqrt{2}+1}{2-1} \\
&= -\sqrt{2}-1
\end{aligned}$$

Por consiguiente, las soluciones de la ecuación dada son 0 y $-\sqrt{2}-1$.
(c) En el supuesto de que $x \neq 3$ y $x \neq -3$, podemos multiplicar la ecuación

$$\frac{4}{x+3} = \frac{x-2}{x-3}$$

por $(x+3)(x-3)$, obteniendo

$$4(x-3) = (x+3)(x-2)$$

Efectuando operaciones, quitamos los paréntesis y obtenemos

$$\begin{aligned}
4x-12 &= x^2+x-6 \\
0 &= x^2-3x+6
\end{aligned}$$

Ahora bien, esta ecuación no tiene soluciones, ya que su discriminate es negativo

$$\begin{aligned}
\Delta &= b^2-4ac \\
&= (-3)^2-4\cdot 1\cdot 6 \\
&= -15 < 0
\end{aligned}$$

(d) En el supuesto de que $x \neq 1$ y $x \neq -1$, podemos multiplicar la ecuación

$$\frac{x-2}{x-1} - \frac{x+3}{x+1} + \frac{3}{2x+2} = \frac{x-1}{x^2-1}$$

por $2(x+1)(x-1)$ y así quitamos los denominadores, obteniendo

$$2(x+1)(x-2) - 2(x-1)(x+3) + 3(x-1) = 2(x-1)$$

Efectuando operaciones, quitamos los paréntesis y obtenemos

$$\begin{aligned}
2(x^2-x-2) - 2(x^2+2x-3) + 3x-3 &= 2x-2 \\
2x^2-2x-4-2x^2-4x+6+3x-3 &= 2x-2 \\
-5x+1 &= 0
\end{aligned}$$

que es una ecuación de primer grado cuya solución es

$$x = \frac{1}{5}$$

(e) En el supuesto de que $x \neq 2$ y $x \neq -2$, podemos multiplicar la ecuación

$$\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} = \frac{1}{2}$$

por $2(x+2)(x-2)$ y así quitamos los denominadores, obteniendo

$$2(x+2) - 2(x-2) = (x+2)(x-2)$$

Efectuando operaciones, quitamos los paréntesis y obtenemos

$$\begin{aligned}
2x+4-2x+4 &= x^2-4 \\
0 &= x^2-12
\end{aligned}$$

que es una ecuación de segundo grado incompleta. Despejando x^2, obtenemos

$$x^2 = 12$$

y, por tanto,

$$x = \pm\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3}$$

■

Ejercicio 37 Calcula el discriminante de las siguientes ecuaciones y determina el número de soluciones:

a) $x^2 - 5x + 4 = 0$

b) $2x^2 - 5x + 4 = 0$

c) $x^2 - 8x + 16 = 0$

Solución: (a) El discriminante de la ecuación

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

es

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 \\ &= 9 \end{aligned}$$

Como $\Delta > 0$, la ecuación tiene dos soluciones reales distintas.
(b) El discriminante de la ecuación

$$2x^2 - 5x + 4 = 0$$

es

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4 \\ &= -7 \end{aligned}$$

Como $\Delta < 0$, la ecuación no tiene soluciones reales.
(c) El discriminante de la ecuación

$$x^2 - 8x + 16 = 0$$

es

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Como $\Delta = 0$, la ecuación tiene una solución real doble. ■

Ejercicio 38 Discute las siguientes ecuaciones en $\mathbb{R}$ según los distintos valores de los parámetros que aparecen y resuélvelas cuando sea posible.

a) $x^2 - (m+2)x + 2m = 0$

b) $x^2 - mx + m - 1 = 0$

c) $(m^2 - n^2)x^2 - 2(m^2 + n^2)x + m^2 - n^2 = 0$

d) $x^2 + mx + 9 = 0$

Solución: (a) El discriminante de la ecuación

$$x^2 - (m+2)x + 2m = 0$$

es

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ &= [-(m+2)]^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2m \\ &= m^2 + 4m + 4 - 8m \\ &= m^2 - 4m + 4 \\ &= (m-2)^2\end{aligned}$$

Entonces, $\Delta = 0$ cuando $m = 2$ y, por tanto, la ecuación tiene una solución real doble, y $\Delta > 0$ cuando $m \neq 2$ y, por tanto, la ecuación tiene dos soluciones reales distintas. Las soluciones de la ecuación se obtienen aplicando la fórmula general:

$$\begin{aligned}x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{m + 2 \pm \sqrt{(m-2)^2}}{2} \\ &= \frac{m + 2 \pm (m-2)}{2}\end{aligned}$$

Por tanto,

$$x = \begin{cases} \frac{2m}{2} = m \\ \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

Observa que si $m = 2$, entonces 2 es la solución doble de la ecuación.
(b) El discriminante de la ecuación

$$x^2 - mx + m - 1 = 0$$

es

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (-m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (m-1) \\ &= m^2 - 4m + 4 \\ &= (m-2)^2\end{aligned}$$

Entonces, $\Delta = 0$ cuando $m = 2$ y, por tanto, la ecuación tiene una solución real doble, y $\Delta > 0$ cuando $m \neq 2$ y, por tanto, la ecuación tiene dos soluciones reales distintas. Las soluciones de la ecuación se obtienen aplicando la fórmula general:

$$\begin{aligned}x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{m \pm \sqrt{(m-2)^2}}{2} \\ &= \frac{m \pm (m-2)}{2}\end{aligned}$$

Por tanto,

$$x = \begin{cases} \frac{2m-2}{2} = m - 1 \\ \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

Observa que si $m = 2$, entonces 1 es la solución doble de la ecuación.
(c) En primer lugar observa que si $|m| = |n|$, es decir, si $m = n$ o $m = -n$, entonces la ecuación

$$(m^2 - n^2)x^2 - 2(m^2 + n^2)x + m^2 - n^2 = 0$$

se reduce a una ecuación de primer grado

$$-4n^2 x = 0$$

que será determinada si $n \neq 0$ y su solución es $x = 0$, o bien indeterminada si $n = 0$.
Si $m \neq n$ y $m \neq -n$, entonces la ecuación es de segundo grado y su discriminante es

$$\begin{aligned}
\Delta &= b^2 - 4ac \\
&= \left[-2(m^2+n^2)\right]^2 - 4 \cdot (m^2 - n^2) \cdot (m^2 - n^2) \\
&= 4(m^2+n^2)^2 - 4(m^2-n^2)^2 \\
&= 4(m^2+n^2+m^2-n^2) \cdot (m^2+n^2-m^2+n^2) \\
&= 4 \cdot 2m^2 \cdot 2n^2 \\
&= 16m^2n^2
\end{aligned}$$

Luego,

$$\Delta = 0 \iff m = 0 \text{ o } n = 0$$

y

$$\Delta > 0 \iff m \neq 0 \text{ y } n \neq 0$$

Por tanto, la ecuación tiene una solución real doble cuando $m = 0$ o $n = 0$, y, en cualquier otro caso, la ecuación tiene dos soluciones reales distintas. Las soluciones de la ecuación cuando $m \neq n$ y $m \neq -n$ se obtienen aplicando la fórmula general:

$$\begin{aligned}
x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\
&= \frac{2(m^2+n^2) \pm \sqrt{16m^2n^2}}{2(m^2-n^2)} \\
&= \frac{2(m^2+n^2) \pm 4mn}{2(m^2-n^2)}
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$x = \frac{m^2+n^2+2mn}{m^2-n^2} = \frac{(m+n)^2}{m^2-n^2} = \frac{(m+n)^2}{(m+n)(m-n)} = \frac{m+n}{m-n}$$

o

$$x = \frac{m^2+n^2-2mn}{m^2-n^2} = \frac{(m-n)^2}{m^2-n^2} = \frac{(m-n)^2}{(m+n)(m-n)} = \frac{m-n}{m+n}$$

Observa que si $m = 0$ (y, por tanto, $n \neq 0$), entonces -1 es la solución doble de la ecuación, y si $n = 0$ (y, por tanto, $m \neq 0$), entonces 1 es la solución doble.
(d) El discriminante de la ecuación

$$x^2 + mx + 9 = 0$$

es

$$\begin{aligned}
\Delta &= b^2 - 4ac \\
&= m^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 \\
&= m^2 - 36
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\Delta = 0 &\iff m^2 - 36 = 0 \\
&\iff m^2 = 36 \\
&\iff m = \pm 6
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\Delta > 0 &\iff m^2 - 36 > 0 \\
&\iff m^2 > 36 \\
&\iff -6 > m > 6
\end{aligned}$$

Por tanto, la ecuación tiene una solución real doble si $m = 6$ o $m = -6$; la ecuación tiene dos raíces reales distintas si $m > 6$ o $m < -6$; y la ecuación no tiene soluciones reales en cualquier otro caso, es decir, cuando $-6 < m < 6$. Las soluciones de la ecuación cuando $m \geq 6$ o $m \leq -6$ se obtienen aplicando la fórmula general:

$$\begin{aligned}
x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\
&= \frac{-m \pm \sqrt{m^2-36}}{2}
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$x = \frac{-m + \sqrt{m^2 - 36}}{2}$$

o

$$x = \frac{-m - \sqrt{m^2 - 36}}{2}$$

Observa que si $m = 6$, entonces -3 es la solución doble de la ecuación, y, si $m = -6$, entonces 3 es la solución doble. ■

Ejercicio 39 Halla el valor de m para que la ecuación

$$(m^2 + 3m - 4)x - 8m - 5 = 0$$

sea incompatible.

Solución: La ecuación será incompatible si existe un valor de m para el que

$$m^2 + 3m - 4 = 0$$

y

$$8m + 5 \neq 0$$

Las soluciones de la ecuación de segundo grado son

$$m = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm 5}{2} = \begin{cases} 1 \\ -4 \end{cases}$$

Para $m = 1$ o bien para $m = -4$ se cumple que $8m + 5 \neq 0$ y, por tanto, la ecuación dada es incompatible. ■

Ejercicio 40 Halla el valor de m para que la ecuación

$$3x^2 + mx + 12 = 0$$

tenga sus dos soluciones iguales. Calcula después esta solución.

Solución: La ecuación

$$3x^2 + mx + 12 = 0$$

tendrá sus dos soluciones iguales si su discriminante es cero. Entonces,

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= m^2 - 4 \cdot 3 \cdot 12 \\ &= m^2 - 144 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \Delta = 0 &\iff m^2 - 144 = 0 \\ &\iff m^2 = 144 \\ &\iff m = \pm 12 \end{aligned}$$

Por tanto, si $m = 12$ o $m = -12$, las soluciones de la ecuación son iguales.
Para $m = 12$, la solución es

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 3 \cdot 12}}{2 \cdot 3} = -\frac{12}{6} = -2$$

y, para $m = -12$, la solución es

$$x = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 12}}{2 \cdot 3} = \frac{12}{6} = 2$$

■

Ejercicio 41 Interpreta algebraica y geométricamente las soluciones de las ecuaciones siguientes:

a) $-3x^2 + 5x - 2 = 0$

b) $x^2 - x + 1 = 0$

c) $2x^2 - 12x + 18 = 0$

Solución: (a) El discriminante de la ecuación

$$-3x^2 + 5x - 2 = 0$$

es

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= 5^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-2) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Como $\Delta > 0$, entonces la ecuación tiene dos soluciones reales distintas. Algebraicamente, significa que el polinomio

$$p(x) = -3x^2 + 5x - 2$$

tiene dos raíces reales distintas; geométricamente, significa que la parábola de ecuación

$$y = -3x^2 + 5x - 2$$

corta al eje X en dos puntos distintos, las abscisas de los cuales son las soluciones de la ecuación dada.
(b) El discriminante de la ecuación

$$x^2 - x + 1 = 0$$

es

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 \\ &= -3 \end{aligned}$$

Como $\Delta < 0$, entonces la ecuación no tiene soluciones reales. Algebraicamente, significa que el polinomio

$$p(x) = x^2 - x + 1$$

no tiene raíces reales; geométricamente, significa que la parábola de ecuación

$$y = x^2 - x + 1$$

no corta al eje X.
(c) El discriminante de la ecuación

$$2x^2 - 12x + 18 = 0$$

es

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (-12)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 18 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Como $\Delta = 0$, entonces la ecuación tiene una solución doble. Algebraicamente, significa que el polinomio

$$p(x) = 2x^2 - 12x + 18$$

tiene una raíz real doble; geométricamente, significa que la parábola de ecuación

$$y = 2x^2 - 12x + 18$$

es tangente al eje X y el punto de contacto es su vértice, la abscisa del cual es la solución de la ecuación dada. ■

Ejercicio 42 Sin resolver las siguientes ecuaciones, encuentra la suma y el producto de sus soluciones:

$$a)\quad 5x^2+6x-8=0 \qquad b)\quad 3x^2-5x+2=0$$

Solución: Si designamos por s y p, la suma y el producto de soluciones de la ecuación de segundo grado, entonces sabemos que

$$ax^2+bx+c=0$$

es equivalente a

$$x^2-sx+p=0$$

siendo

$$s=-\frac{b}{a} \quad \text{y} \quad p=\frac{c}{a}$$

(a) La ecuación

$$5x^2+6x-8=0$$

es equivalente a

$$x^2+\frac{6}{5}x-\frac{8}{5}=0$$

y, por tanto,

$$s=-\frac{6}{5} \quad \text{y} \quad p=-\frac{8}{5}$$

(b) La ecuación

$$3x^2-5x+2=0$$

es equivalente a

$$x^2-\frac{5}{3}x+\frac{2}{3}=0$$

y, por tanto,

$$s=\frac{5}{3} \quad \text{y} \quad p=\frac{2}{3}$$

■

Ejercicio 43 Conociendo una solución de la ecuación de segundo grado, calcula la otra sin resolverla en los casos siguientes:

a) $2x^2-5x+2=0$ y $x_1=2$

b) $-3x^2+2x+16=0$ y $x_1=-2$

Solución: (a) La ecuación

$$2x^2-5x+2=0$$

es equivalente a

$$x^2-\frac{5}{2}x+1=0$$

y, por tanto, la suma s y el producto p de sus soluciones son

$$s=\frac{5}{2} \quad \text{y} \quad p=1$$

Si $x_1=2$, como

$$p=x_1\cdot x_2=1$$

entonces

$$x_2=\frac{1}{x_1}=\frac{1}{2}$$

(b) La ecuación

$$-3x^2+2x+16=0$$

es equivalente a

$$x^2-\frac{2}{3}x-\frac{16}{3}=0$$

y, por tanto, la suma s y el producto p de sus soluciones son

$$s=\frac{2}{3} \quad \text{y} \quad p=-\frac{16}{3}$$

Si $x_1=-2$, como

$$s=x_1+x_2=\frac{2}{3}$$

entonces

$$x_2=\frac{2}{3}-x_1=\frac{2}{3}+2=\frac{8}{3}$$

■

Ejercicio 44 Forma las ecuaciones de segundo grado que tienen como soluciones las que se indican a continuación:

a) $x_1=\frac{2}{3}$ y $x_2=-\frac{1}{2}$

b) $x_1=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ y $x_2=\sqrt{2}-\sqrt{3}$

Solución: Podemos formar la ecuación de segundo grado

$$ax^2+bx+c=0$$

con soluciones x_1 y x_2 de dos modos distintos: (1) Como las soluciones x_1 y x_2 son las raíces del polinomio

$$p(x)=ax^2+bx+c$$

entonces sabemos que $p(x)$ admite la siguiente descomposición

$$p(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$$

y, por tanto, podemos formar la ecuación de segundo grado de la manera siguiente:

$$a(x-x_1)(x-x_2)=0$$

o de forma equivalente

$$(x-x_1)(x-x_2)=0$$

pues $a\neq 0$. (2) Si $s=x_1+x_2$ y $p=x_1\cdot x_2$, entonces podemos formar la ecuación de segundo grado como sigue

$$x^2-sx+p=0$$

Resolveremos (a) mediante el primer método, y (b) por el segundo.
(a) La ecuación de segundo grado es

$$\left(x-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)=0$$

es decir,

$$x^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right)x-\frac{2}{6}=0$$

o bien,

$$6x^2+x-2=0$$

(b) Como

$$s=\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{3}=2\sqrt{2}$$

y

$$p=\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)=2-3=-1$$

entonces la ecuación de segundo grado es

$$x^2-2\sqrt{2}x-1=0$$

■

Ejercicio 45 Halla dos números reales sabiendo que su suma es -12 y su producto es 11.

Solución: Si designamos por x_1 y x_2 estos dos números, entonces según el enunciado se cumple

$$\begin{array}{l} s = x_1 + x_2 = -12 \\ p = x_1 \cdot x_2 = 11 \end{array}$$

Ahora bien, si interpretamos estos dos números como las soluciones de una ecuación de segundo grado, entonces ésta se forma de la siguiente manera

$$x^2 - sx + p = 0$$

es decir,

$$x^2 + 12x + 11 = 0$$

Resolviéndola, obtenemos

$$x = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 1 \cdot 11}}{2 \cdot 1} = \frac{-12 \pm 10}{2} = \begin{cases} -1 \\ -11 \end{cases}$$

Por tanto, los números pedidos son -1 y -11. ■

Ejercicio 46 Discute la naturaleza de las soluciones de las siguientes ecuaciones y, sin resolverlas, deduce el signo de sus soluciones

$$a)\quad 3x^2 + 7x - 1 = 0 \qquad b)\quad -x^2 + 4x - 1 = 0 \qquad c)\quad 2x^2 + 6x + 1 = 0$$

Solución: (a) El discriminante de

$$3x^2 + 7x - 1 = 0$$

es

$$\Delta = b^2 - 4ac = 61 > 0$$

y, por tanto, la ecuación admite dos soluciones reales distintas. La ecuación es equivalente a

$$x^2 + \frac{7}{3}x - \frac{1}{3} = 0$$

y, por tanto,

$$s = -\frac{7}{3} \quad \text{y} \quad p = -\frac{1}{3}$$

Como $p = x_1 \cdot x_2 < 0$, las soluciones tienen signos contrarios, y como $s = x_1 + x_2 < 0$, la solución mayor es negativa.

(b) El discriminante de

$$-x^2 + 4x - 1 = 0$$

es

$$\Delta = b^2 - 4ac = 12 > 0$$

y, por tanto, la ecuación admite dos soluciones reales distintas. La ecuación es equivalente a

$$x^2 - 4x + 1 = 0$$

y, por tanto,

$$s = 4 \quad \text{y} \quad p = 1$$

Como $p = x_1 \cdot x_2 > 0$, las soluciones tienen signos iguales, y como $s = x_1 + x_2 > 0$, las soluciones son positivas.

(c) El discriminante de

$$2x^2 + 6x + 1 = 0$$

es

$$\Delta = b^2 - 4ac = 28 > 0$$

y, por tanto, la ecuación admite dos soluciones reales distintas. La ecuación es equivalente a

$$x^2 + 3x + \frac{1}{2} = 0$$

y, por tanto,

$$s = -3 \quad \text{y} \quad p = \frac{1}{2}$$

Como $p = x_1 \cdot x_2 > 0$, las soluciones tienen signos iguales, y como $s = x_1 + x_2 < 0$, las soluciones son negativas. ■

Ejercicio 47 Halla el valor de m para que la ecuación $x^2 - mx + 8 = 0$ tenga una solución igual a 4. Resuelve el problema mediante dos procedimientos.

Solución: El primer procedimiento consiste en exigir que 4 sea solución de la ecuación:

$$\begin{aligned} 4^2 - m \cdot 4 + 8 &= 0 \\ -4m + 24 &= 0 \\ 4m &= 24 \\ m &= 6 \end{aligned}$$

El segundo procedimiento consiste en encontrar la suma y el producto de las soluciones de la ecuación y exigir después la condición de que 4 es una de las soluciones. En efecto, de la ecuación

$$x^2 - mx + 8 = 0$$

obtenemos

$$s = -\frac{b}{a} = m \quad \text{y} \quad p = \frac{c}{a} = 8$$

Como $p = x_1 \cdot x_2$ y $x_1 = 4$, entonces

$$\begin{aligned} 4x_2 &= 8 \\ x_2 &= 2 \end{aligned}$$

Luego,

$$m = x_1 + x_2 = 4 + 2 = 6$$

■

Ejercicio 48 La suma de las soluciones de la ecuación

$$x^2 - (m+2)x + n = 0$$

es -5, y su diferencia, 7. Calcula los valores de m y n.

Solución: Según el enunciado del problema se ha de cumplir:

$$\left\{ \begin{array}{lcccc} x_1 & + & x_2 & = & -5 \\ x_1 & - & x_2 & = & 7 \end{array} \right.$$

Resolviendo este sistema por reducción, obtenemos

$$\begin{array}{lcccc} x_1 & + & x_2 & = & -5 \\ x_1 & - & x_2 & = & 7 \\ \hline 2x_1 & & & = & 2 \end{array}$$

y, por tanto, $x_1 = 1$. Entonces, como

$$x_2 = -5 - x_1$$

obtenemos que $x_2 = -6$. De estos resultados deducimos que la suma y el producto de las soluciones de la ecuación son

$$s = -5 \quad \text{y} \quad p = -6$$

Ahora bien, de la ecuación

$$x^2 - (m+2)x + n = 0$$

deducimos que

$$s = -\frac{b}{a} = m + 2 \quad \text{y} \quad p = \frac{c}{a} = n$$

Por tanto,

$$n = -6$$

y

$$\begin{aligned} m+2 &= -5 \\ m &= -7 \end{aligned}$$

■

Ejercicio 49 Formar una ecuación de segundo grado si sabemos que la media aritmética de sus soluciones es $-\frac{3}{2}$ y la media geométrica, $\sqrt{2}$. Calcula las soluciones de esta ecuación.

Solución: Como la media aritmética de las soluciones es $-\frac{3}{2}$ se cumple

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{3}{2}$$

luego,

$$s = x_1 + x_2 = -3$$

y, como la media geométrica es $\sqrt{2}$ se cumple

$$\sqrt{x_1 \cdot x_2} = \sqrt{2}$$

luego,

$$p = x_1 \cdot x_2 = 2$$

Como la ecuación de segundo grado es de la forma

$$x^2 - sx + p = 0$$

deducimos que la ecuación que buscamos es

$$x^2 + 3x + 2 = 0$$

Resolviéndola, obtenemos

$$\frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm 1}{2} = \begin{cases} -1 \\ -2 \end{cases}$$

■

Ejercicio 50 Calcula los valores que han de tener m y n para que las dos ecuaciones siguientes

$$(5+m)x^2 - (25+n)x + 42 = 0$$

y

$$(19-m)x^2 - (95-n)x + 102 = 0$$

sean equivalentes.

Solución: Las dos ecuaciones serán equivalentes si sus coeficientes son proporcionales:

$$\frac{5+m}{19-m} = \frac{-(25+n)}{-(95-n)} = \frac{42}{102}$$

Por tanto, se han de cumplir las dos ecuaciones siguientes

$$\frac{5+m}{19-m} = \frac{42}{102}$$

y

$$\frac{25+n}{95-n} = \frac{42}{102}$$

De la primera, obtenemos

$$\begin{aligned}51(5+m) &= 21(19-m)\\255+51m &= 399-21m\\72m &= 144\\m &= \frac{144}{72}=2\end{aligned}$$

De la segunda, obtenemos

$$\begin{aligned}51(25+n) &= 21(95-n)\\1275+51n &= 1995-21n\\72n &= 720\\n &= \frac{720}{72}=10\end{aligned}$$

Otro modo equivalente de resolver este problema consiste en recordar que dos ecuaciones son equivalentes cuando tienen las mismas soluciones. Por tanto, si las dos ecuaciones dadas son equivalentes deben tener la misma suma de soluciones

$$s=\frac{25+n}{5+m}=\frac{95-n}{19-m}$$

y el mismo producto

$$p=\frac{42}{5+m}=\frac{102}{19-m}$$

Resolviendo este sistema de ecuaciones, obtendremos las mismas soluciones anteriores. Se deja al lector que lo compruebe. ■

Ejercicio 51 Calcula el valor de m para que la ecuación $x^2+3x+m=0$ tenga dos soluciones recíprocas. Calcula estas soluciones y comprueba que éstas cumplen la condición enunciada.

Solución: Si las soluciones de la ecuación son recíprocas, significa que si k es una solución, la otra es $\frac{1}{k}$; naturalmente $k\neq 0$. De la ecuación

$$x^2+3x+m=0$$

deducimos que

$$p=x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}=m$$

y, por tanto, podemos escribir

$$k\cdot\frac{1}{k}=1=m$$

Luego, $m=1$. Resolviendo la ecuación

$$x^2+3x+1=0$$

obtenemos

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot 1\cdot 1}}{2\cdot 1}=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}=\begin{cases}\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\\\frac{-3-\sqrt{5}}{2}\end{cases}$$

Observa que

$$\begin{aligned}\frac{1}{\frac{-3+\sqrt{5}}{2}} &= \frac{2}{-3+\sqrt{5}}\\&= \frac{2}{-3+\sqrt{5}}\cdot\frac{-3-\sqrt{5}}{-3-\sqrt{5}}\\&= \frac{-6-2\sqrt{5}}{4}\\&= \frac{-3-\sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$

es decir, las dos soluciones son recíprocas. ■

Ejercicio 52 Resuelve las siguientes ecuaciones bicuadradas:

a)
$$\frac{x^2-1}{2}-\frac{x^4-9}{9}=4-x^2$$

b)
$$(x^2-1)^2-4(x^2-1)+3=0$$

c)
$$x^6-7x^3-8=0$$

Solución: (a) En la ecuación
$$\frac{x^2-1}{2}-\frac{x^4-9}{9}=4-x^2$$
quitamos los denominadores multiplicando por $18=m.c.m.(2,9)$ y obtenemos
$$9(x^2-1)-2(x^4-9)=18(4-x^2)$$
Efectuando las operaciones indicadas, quitamos los paréntesis y obtenemos
$$9x^2-9-2x^4+18=72-18x^2$$
Transponiendo y agrupando términos, obtenemos
$$-2x^4+27x^2-63=0$$
o bien,
$$2x^4-27x^2+63=0$$
que es una ecuación bicuadrada. Con el cambio $t=x^2$, se convierte en una ecuación de segundo grado en t, pues $x^4=t^2$, obteniendo
$$2t^2-27t+63=0$$
Resolviendo esta ecuación, obtenemos
$$t=\frac{-(-27)\pm\sqrt{(-27)^2-4\cdot 2\cdot 63}}{2\cdot 2}=\frac{27\pm\sqrt{225}}{4}=\frac{27\pm 15}{4}=\begin{cases}\frac{42}{4}\\ 3\end{cases}$$
Luego, las soluciones de la ecuación original son:
$$x^2=\tfrac{42}{4}\quad\Longrightarrow\quad x=\pm\sqrt{\tfrac{42}{4}}=\pm\tfrac{\sqrt{42}}{2}$$
y
$$x^2=3\quad\Longrightarrow\quad x=\pm\sqrt{3}$$
Por tanto, las soluciones son $\pm\frac{\sqrt{42}}{2}$ y $\pm\sqrt{3}$.
(b) En la ecuación
$$(x^2-1)^2-4(x^2-1)+3=0$$
efectuando las operaciones indicadas, quitamos los paréntesis y obtenemos
$$x^4-2x^2+1-4x^2+4+3=0$$
Ahora, agrupando términos, obtenemos
$$x^4-6x^2+8=0$$
que es una ecuación bicuadrada. Con el cambio $t=x^2$, se convierte en una ecuación de segundo grado en t, pues $x^4=t^2$, obteniendo
$$t^2-6t+8=0$$

Resolviendo esta ecuación, obtenemos

$$t = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} = \left\{ \begin{array}{l} 4 \\ 2 \end{array} \right.$$

Luego, las soluciones de la ecuación original son:

$$x^2 = 4 \quad \Longrightarrow \quad x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

y

$$x^2 = 2 \quad \Longrightarrow \quad x = \pm\sqrt{2}$$

Por tanto, las soluciones son ± 2 y $\pm\sqrt{2}$.
(c) La ecuación

$$x^6 - 7x^3 - 8 = 0$$

es bicuadrada y con el cambio $u = x^3$ se convierte en una ecuación de segundo grado en u, pues $x^6 = u^2$, obteniendo

$$u^2 - 7u - 8 = 0$$

Resolviendo esta ecuación, obtenemos

$$u = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8)}}{2 \cdot 1} = \frac{7 \pm \sqrt{81}}{2} = \frac{7 \pm 9}{2} = \left\{ \begin{array}{l} 8 \\ -1 \end{array} \right.$$

Luego, las soluciones de la ecuación original son:

$$x^3 = 8 \quad \Longrightarrow \quad X = \sqrt[3]{8} = 2$$

y

$$x^3 = -1 \quad \Longrightarrow \quad x = \sqrt[3]{-1} = -1$$

Por tanto, las soluciones son 2 y -1. ∎

Ejercicio 53 Resuelve las siguientes ecuaciones irracionales:

a)
$$x - 2\sqrt{x-1} = 4$$

b)
$$\sqrt{x^2 - 3x + 6} - 3(x-4) = 1$$

c)
$$\sqrt{x+4} + \sqrt{x+1} = 3$$

d)
$$\sqrt{x+5} + \sqrt{2x+8} = \sqrt{7x+21}$$

e)
$$\sqrt{x+4} - \sqrt{x-4} = \frac{x+1}{\sqrt{x+4}}$$

Solución: (a) Aislando la raíz en la ecuación

$$x - 2\sqrt{x-1} = 4$$

obtenemos

$$x - 4 = 2\sqrt{x-1}$$

Elevando al cuadrado los dos miembros de esta igualdad, obtenemos

$$\begin{aligned} (x-4)^2 &= \left(2\sqrt{x-1}\right)^2 \\ x^2 - 8x + 16 &= 4(x-1) \\ x^2 - 8x + 16 &= 4x - 4 \\ x^2 - 12x + 20 &= 0 \end{aligned}$$

es decir, llegamos a una ecuación de segundo grado, cuyas soluciones son

$$x = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 20}}{2} = \frac{12 \pm 8}{2} = \left\{ \begin{array}{l} 10 \\ 2 \end{array} \right.$$

Ahora bien, recuerda que al elevar al cuadrado pueden aparecer soluciones que no son válidas, por lo que deben comprobarse en la ecuación original las que acabamos de obtener. De este modo, para $x = 10$, resulta

$$\begin{aligned} 10 - 2\sqrt{10 - 1} &= 4 \\ 10 - 6 &= 4 \end{aligned}$$

y, para $x = 2$, resulta

$$\begin{aligned} 2 - 2\sqrt{2 - 1} &\neq 4 \\ 2 - 2 &\neq 4 \end{aligned}$$

Luego, sólo $x = 10$ es solución de la ecuación dada.
(b) Aislando la raíz en la ecuación

$$\sqrt{x^2 - 3x + 6} - 3(x - 4) = 1$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - 3x + 6} &= 1 + 3(x - 4) \\ \sqrt{x^2 - 3x + 6} &= 3x - 11 \end{aligned}$$

Elevando al cuadrado los dos miembros de esta igualdad, obtenemos

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{x^2 - 3x + 6}\right)^2 &= (3x - 11)^2 \\ x^2 - 3x + 6 &= 9x^2 - 66x + 121 \\ 8x^2 - 63x + 115 &= 0 \end{aligned}$$

es decir, llegamos a una ecuación de segundo grado, cuyas soluciones son

$$\frac{-(-63) \pm \sqrt{(-63)^2 - 4 \cdot 8 \cdot 115}}{2 \cdot 8} = \frac{63 \pm 17}{16} = \left\{ \begin{array}{l} 5 \\ \frac{23}{8} \end{array} \right.$$

Comprobando ahora estas soluciones, para $x = 5$ tenemos

$$\begin{aligned} \sqrt{5^2 - 3 \cdot 5 + 6} - 3(5 - 4) &= 1 \\ 4 - 3 &= 1 \end{aligned}$$

y, para $x = \frac{23}{8}$,

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(\frac{23}{8}\right)^2 - 3 \cdot \frac{23}{8} + 6} - 3\left(\frac{23}{8} - 4\right) &\neq 1 \\ \frac{23}{4} &\neq 1 \end{aligned}$$

Luego, sólo $x = 5$ es solución de la ecuación dada.
(c) Aislando una de las dos raíces en la ecuación

$$\sqrt{x + 4} + \sqrt{x + 1} = 3$$

obtenemos

$$\sqrt{x + 4} = 3 - \sqrt{x + 1}$$

Elevando al cuadrado los dos miembros de esta igualdad, obtenemos

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{x+4}\right)^2 &= \left(3-\sqrt{x+1}\right)^2 \\
x+4 &= 3^2 - 2\cdot 3\cdot\sqrt{x+1} + \left(\sqrt{x+1}\right)^2 \\
x+4 &= 9 - 6\sqrt{x+1} + x + 1
\end{aligned}$$

Ahora tenemos una ecuación con una sola raíz, y la quitaremos del mismo modo como lo hemos hecho con la primera raíz. Así, aislando la raíz y agrupando términos, obtenemos

$$\begin{aligned}
6\sqrt{x+1} &= 6 \\
\sqrt{x+1} &= 1
\end{aligned}$$

Elevando al cuadrado los dos miembros de esta igualdad, obtenemos

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{x+1}\right)^2 &= 1^2 \\
x+1 &= 1 \\
x &= 0
\end{aligned}$$

Comprobando ahora esta solución, tenemos

$$\begin{aligned}
\sqrt{0+4} + \sqrt{0+1} &= 3 \\
2+1 &= 3
\end{aligned}$$

Luego, $x = 0$ es la solución de la ecuación dada.
(d) Elevando al cuadrado los dos miembros de la ecuación

$$\sqrt{x+5} + \sqrt{2x+8} = \sqrt{7x+21}$$

obtenemos

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{x+5} + \sqrt{2x+8}\right)^2 &= \left(\sqrt{7x+21}\right)^2 \\
\left(\sqrt{x+5}\right)^2 + 2\cdot\sqrt{x+5}\cdot\sqrt{2x+8} + \left(\sqrt{2x+8}\right)^2 &= 7x+21 \\
x+5+2\sqrt{2x^2+18x+40} + 2x+8 &= 7x+21
\end{aligned}$$

Aislando la raíz que queda y agrupando términos, obtenemos

$$\begin{aligned}
2\sqrt{2x^2+18x+40} &= 4x+8 \\
\sqrt{2x^2+18x+40} &= 2x+4
\end{aligned}$$

Elevando al cuadrado los dos miembros de esta última ecuación, obtenemos

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{2x^2+18x+40}\right)^2 &= (2x+4)^2 \\
2x^2+18x+40 &= 4x^2+16x+16 \\
2x^2-2x-24 &= 0 \\
x^2-x-12 &= 0
\end{aligned}$$

es decir, llegamos a una ecuación de segundo grado, cuyas soluciones son

$$\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 1\cdot(-12)}}{2\cdot 1} = \frac{1\pm 7}{2} = \begin{cases} 4 \\ -3 \end{cases}$$

Comprobando ahora estas soluciones, para $x = 4$ tenemos

$$\begin{aligned}
\sqrt{4+5} + \sqrt{2\cdot 4+8} &= \sqrt{7\cdot 4+21} \\
3+4 &= 7
\end{aligned}$$

y, para $x=-3$,

$$\begin{aligned}\sqrt{-3+5}+\sqrt{2\cdot(-3)+8} &\neq \sqrt{7\cdot(-3)+21}\\ \sqrt{2}+\sqrt{2} &\neq 0\end{aligned}$$

Luego, sólo $x=4$ es solución de la ecuación dada.
(e) Suponiendo que $x+4>0$, podemos multiplicar los dos miembros de la ecuación

$$\sqrt{x+4}-\sqrt{x-4}=\frac{x+1}{\sqrt{x+4}}$$

por $\sqrt{x+4}$ y, de este modo, quitamos el denominador y obtenemos

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{x+4}\right)^2-\sqrt{x+4}\cdot\sqrt{x-4} &= x+1\\ x+4-\sqrt{x^2-16} &= x+1\end{aligned}$$

Aislando la raíz que queda y agrupando términos, obtenemos

$$\begin{aligned}x+4-x-1 &= \sqrt{x^2-16}\\ 3 &= \sqrt{x^2-16}\end{aligned}$$

Elevando al cuadrado los dos miembros de esta última ecuación, obtenemos

$$\begin{aligned}3^2 &= \left(\sqrt{x^2-16}\right)^2\\ 9 &= x^2-16\\ x^2 &= 25\\ x &= \pm\sqrt{25}\\ x &= \pm 5\end{aligned}$$

Comprobando ahora estas soluciones, para $x=5$ tenemos

$$\begin{aligned}\sqrt{5+4}-\sqrt{5-4} &= \frac{5+1}{\sqrt{5+4}}\\ 3-1 &= \frac{6}{3}\end{aligned}$$

y la solución $x=-5$ no tiene ningún sentido porque el término $\sqrt{x+4}$ no puede calcularse para este valor de x. Luego, $x=5$ es la solución de la ecuación dada. ∎

Ejercicio 54 Resuelve las siguientes ecuaciones polinómicas:

a)
$$x^4-5x^3+7x^2-x-2=0$$

b)
$$x^5-5x^3+6x=0$$

Solución: (a) Primero descompondremos en factores el polinomio $x^4-5x^3+7x^2-x-2$ mediante la regla de Ruffini. Así, tenemos

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & -5 & 7 & -1 & -2\\ 1 & & 1 & -4 & 3 & 2\\ \hline & 1 & -4 & 3 & 2 & 0\\ 2 & & 2 & -4 & -2 & \\ \hline & 1 & -2 & -1 & 0 & \end{array}$$

y, por tanto,

$$x^4-5x^3+7x^2-x-2=(x-1)(x-2)(x^2-2x-1)$$

Observa que el polinomio $x^2 - 2x - 1$ no tiene raíces enteras. Luego, la ecuación

$$x^4 - 5x^3 + 7x^2 - x - 2 = 0$$

es equivalente a

$$(x-1)(x-2)(x^2 - 2x - 1) = 0$$

Las soluciones de esta ecuación se obtendrán igualando a cero cada uno de los factores. Los dos primeros factores dan como soluciones 1 y 2. Igualando a cero el tercer factor, obtenemos una ecuación de segundo grado

$$x^2 - 2x - 1 = 0$$

cuyas soluciones son

$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

Por consiguiente, las soluciones de la ecuación dada son $1, 2, 1 + \sqrt{2}$ y $1 - \sqrt{2}$.
(b) En la ecuación

$$x^5 - 5x^3 + 6x = 0$$

podemos sacar factor común x, resultando

$$x(x^4 - 5x^2 + 6) = 0$$

De aquí, obtenemos dos ecuaciones

$$x = 0$$

y

$$x^4 - 5x^2 + 6 = 0$$

Esta última es una ecuación bicuadrada que, con el cambio $t = x^2$ la convertimos en una ecuación de segundo grado, obteniendo

$$t^2 - 5t + 6 = 0$$

cuyas soluciones son

$$t = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \left\{ \begin{array}{l} 3 \\ 2 \end{array} \right.$$

Entonces, las soluciones para x son

$$x^2 = 3 \implies x = \pm\sqrt{3}$$

y

$$x^2 = 2 \implies x = \pm\sqrt{2}$$

Por consiguiente, las soluciones de la ecuación dada son $0, \pm\sqrt{2}$ y $\pm\sqrt{3}$. ■

Ejercicio 55 La suma de los cuadrados de dos números consecutivos es 25. Calcula dichos números.

Solución: Planteamiento: Si x representa un número, su consecutivo es $x + 1$. Si la suma de sus cuadrados es 25, se debe cumplir la siguiente ecuación

$$(x+1)^2 + x^2 = 25$$

Resolución: Quitando el paréntesis y agrupando términos, obtenemos

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + 1 + x^2 &= 25 \\ 2x^2 + 2x - 24 &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo esta ecuación de segundo grado, obtenemos

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-24)}}{2 \cdot 2} = \frac{-2 \pm \sqrt{196}}{4} = \frac{-2 \pm 14}{4} = \left\{ \begin{array}{l} 3 \\ -4 \end{array} \right.$$

Por tanto, los números pedidos son 3 y 4, o bien, -4 y -3. ■

Ejercicio 56 Halla un número tal que al restarle su raíz cuadrada se convierte en 72.

Solución: Planteamiento: Si x representa el número que buscamos, entonces se ha de cumplir la siguiente ecuación:

$$x - \sqrt{x} = 72$$

Resolución: Aislando la raíz, obtenemos

$$x - 72 = \sqrt{x}$$

Elevando al cuadrado, obtenemos

$$\begin{aligned} (x-72)^2 &= \left(\sqrt{x}\right)^2 \\ x^2 - 144x + 5184 &= x \\ x^2 - 145x + 5184 &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo esta ecuación de segundo grado, obtenemos

$$x = \frac{-(-145) \pm \sqrt{(-145)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5184}}{2 \cdot 1} = \frac{145 \pm \sqrt{289}}{2} = \frac{145 \pm 17}{2} = \left\{ \begin{array}{l} 81 \\ 64 \end{array} \right.$$

Comprobando ahora las soluciones, para $x = 81$ tenemos

$$\begin{aligned} 81 - \sqrt{81} &= 72 \\ 81 - 9 &= 72 \end{aligned}$$

y, para $x = 64$,

$$\begin{aligned} 64 - \sqrt{64} &\neq 72 \\ 64 - 8 &\neq 72 \end{aligned}$$

Por tanto, el número que buscamos es 81. ■

Ejercicio 57 En un triángulo rectángulo, uno de los catetos mide 2 cm más que el otro y 2 cm menos que la hipotenusa. Calcula el perímetro de este triángulo.

Solución: Planteamiento: Si x representa la medida en cm del cateto más pequeño, entonces el otro cateto mide $x + 2$, y la hipotenusa, $x + 4$. Por el teorema de Pitágoras, se debe cumplir la siguiente ecuación:

$$(x+4)^2 = x^2 + (x+2)^2$$

Resolución: Quitando los paréntesis y agrupando términos, obtenemos

$$\begin{aligned} x^2 + 8x + 16 &= x^2 + x^2 + 4x + 4 \\ x^2 - 4x - 12 &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo esta ecuación de segundo grado, obtenemos

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{4 \pm 8}{2} = \left\{ \begin{array}{l} 6 \\ -2 \end{array} \right.$$

Naturalmente, sólo la solución $x = 6$ es válida. Entonces, como

$$6 + 8 + 10 = 24$$

el perímetro del triángulo es 24 cm. ■

Ejercicio 58 Se iban a repartir 1800 € entre cierto número de personas. Cuatro de ellas renunciaron a su parte, por lo que cada una de las restantes recibió 15 € más de lo que estaba previsto. Calcula el número de personas que había.

Solución: Planteamiento: Supongamos que x representa el número de personas. De no haber renunciado a su parte las cuatro personas, cada persona habría recibido una cantidad en euros igual a

$$\frac{1800}{x}$$

Ahora bien, al quedar fuera del reparto cuatro personas, cada persona restante recibirá

$$\frac{1800}{x-4}$$

Entonces, según el enunciado del problema, se ha de cumplir la siguiente ecuación

$$\frac{1800}{x-4} = \frac{1800}{x} + 15$$

Resolución: Multiplicando la ecuación por $x(x-4)$, quitamos los denominadores y obtenemos

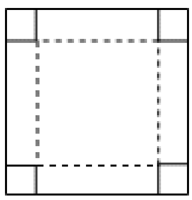
$$\begin{aligned} 1800x &= 1800(x-4) + 15x(x-4) \\ 1800x &= 1800x - 7200 + 15x^2 - 60x \\ 15x^2 - 60x - 7200 &= 0 \\ x^2 - 4x - 480 &= 0 \end{aligned}$$

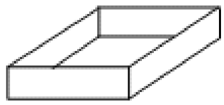
Resolviendo esta ecuación de segundo grado, obtenemos

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-480)}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{1936}}{2} = \frac{4 \pm 44}{2} = \begin{cases} 24 \\ -20 \end{cases}$$

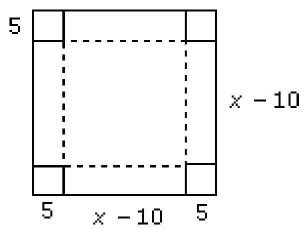
Naturalmente, sólo la solución $x = 24$ es válida. Por tanto, al principio había 24 personas para repartir los 1800 €. ■

Ejercicio 59 Con una cartulina cuadrada se quiere construir una caja sin tapa de 1280 cm^3. Para ello, se recorta un cuadrado de 5 cm de lado en cada esquina y se doblan las fajas resultantes. Halla el lado de la cartulina.





Solución: Planteamiento: Si x es la medida en cm del lado de la cartulina, es evidente que las dimensiones en cm de la caja son $x - 10$ de largo, $x - 10$ de ancho y 5 de alto.



Por tanto, como su volumen es de 1280 cm^3, obtenemos la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} 5(x-10)(x-10) &= 1280 \\ (x-10)^2 &= 256 \end{aligned}$$

Resolución: Extrayendo la raíz cuadrada en ambos miembros de la ecuación, se obtiene

$$\begin{aligned} \sqrt{(x-10)^2} &= \sqrt{256} \\ |x-10| &= 16 \end{aligned}$$

Ahora bien, por las propiedades del valor absoluto, las soluciones de esta ecuación son las soluciones de las dos ecuaciones de primer grado siguientes:

$$x - 10 = 16 \quad \text{y} \quad x - 10 = -16$$

De la primera, se obtiene la solución $x = 26$, y de la segunda, $x = -6$. Hay que descartar la solución $x = -6$ ya que la medida del lado debe ser positiva. Por consiguiente, el lado de la cartulina mide 26 cm. ■

Ejercicio 60 Queremos colocar un marco de madera a un espejo. Para ello, disponemos de un listón de 20 dm. Si el espejo es rectangular y su superficie es de 24 dm^2, ¿cómo hay que cortar el listón para que no sobre ni falte nada?

Solución: Planteamiento: Si x es la medida en dm de la base del espejo, entonces la altura del mismo es $10 - x$. Para comprobarlo, observa que el perímetro del espejo es

$$2x + 2(10 - x) = 2x + 20 - 2x = 20$$

Por tanto, como su superficie es de 24 dm^2, obtenemos la siguiente ecuación

$$x(10 - x) = 24$$

Resolución: Quitando el paréntesis, obtenemos

$$\begin{aligned} 10x - x^2 &= 24 \\ x^2 - 10x + 24 &= 0 \end{aligned}$$

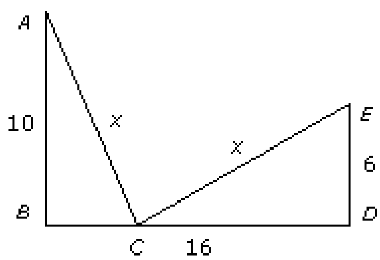
Resolviendo esta ecuación,

$$x = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 24}}{2 \cdot 1} = \frac{10 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{10 \pm 2}{2} = \left\{ \begin{array}{l} 6 \\ 4 \end{array} \right.$$

Por consiguiente, hay que cortar el listón en dos trozos de 6 dm y dos trozos de 4 dm. ■

Ejercicio 61 Dos postes de 10 y 6 metros están a una distancia de 16 m. Dos pájaros situados en las puntas vuelan en línea recta para beber agua en una fuente situada en la recta que une las bases de ambos postes. Si van a la misma velocidad llegan al mismo tiempo. ¿A qué distancia de cada poste se encuentra la fuente?

Solución: Planteamiento: Si los dos pájaros vuelan a la misma velocidad y llegan al mismo tiempo, el espacio recorrido por ambos es el mismo. Luego, si llamamos x a la distancia de A a C, entonces la distancia de E a C también es x.



Como los triángulos ABC y EDC son rectángulos, podemos aplicar el teorema de Pitágoras para deducir las distancias de B a C y de D a C. De este modo, la distancia de B a C es

$$\sqrt{x^2 - 10^2}$$

y la distancia de D a C es

$$\sqrt{x^2 - 6^2}$$

Ahora bien, la suma de estas dos distancias es la distancia de B a D, que vale 16 m según el enunciado. Por tanto, obtenemos la siguiente ecuación

$$\sqrt{x^2 - 100} + \sqrt{x^2 - 36} = 16$$

Resolución: Aislando una de las raíces, obtenemos

$$\sqrt{x^2-100} = 16 - \sqrt{x^2-36}$$

Elevando ahora al cuadrado los dos miembros de la ecuación, tenemos

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{x^2-100}\right)^2 &= \left(16-\sqrt{x^2-36}\right)^2 \\
x^2-100 &= 256-32\sqrt{x^2-36}+\left(\sqrt{x^2-36}\right)^2 \\
x^2-100 &= 256-32\sqrt{x^2-36}+x^2-36
\end{aligned}$$

Ahora, reduciendo términos y aislando la raíz que queda en la ecuación, tenemos

$$\begin{aligned}
32\sqrt{x^2-36} &= 320 \\
\sqrt{x^2-36} &= 10
\end{aligned}$$

Elevando de nuevo al cuadrado para eliminar la raíz de la ecuación, tenemos

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{x^2-36}\right)^2 &= 10^2 \\
x^2-36 &= 100 \\
x^2 &= 136
\end{aligned}$$

de donde se obtienen las soluciones $x = 2\sqrt{34}$ o $x = -2\sqrt{34}$. Por tratarse de la medida de una distancia, es claro que la solución debe ser positiva. No obstante, debemos comprobar la solución positiva,

$$\begin{aligned}
\sqrt{136-100}+\sqrt{136-36} &= 16 \\
6+10 &= 16
\end{aligned}$$

Por consiguiente, la fuente C se encuentra a $\sqrt{136-100} = 6$ m de B y a $\sqrt{136-36} = 10$ m de D.
■

Ejercicio 62 Halla la edad de una persona si sabemos que dentro de 4 años será un cuadrado perfecto y que hace 38 años su edad era la raíz de este cuadrado.

Solución: Planteamiento: Supongamos que x representa el número de años que tiene actualmente la persona. Entonces, dentro de 4 años su edad será $x+4$, y hace 38 años, $x-38$. Según el enunciado del problema, se ha de cumplir la siguiente ecuación:

$$x - 38 = \sqrt{x+4}$$

Resolución: Elevando al cuadrado y agrupando términos, obtenemos

$$\begin{aligned}
(x-38)^2 &= \left(\sqrt{x+4}\right)^2 \\
x^2-76x+1444 &= x+4 \\
x^2-77x+1440 &= 0
\end{aligned}$$

Resolviendo esta ecuación, obtenemos

$$x = \frac{-(-77)\pm\sqrt{(-77)^2-4\cdot1\cdot1440}}{2\cdot1} = \frac{77\pm\sqrt{169}}{2} = \frac{77\pm13}{2} = \begin{cases} 45 \\ 32 \end{cases}$$

Comprobando las soluciones, para $x = 45$ tenemos

$$\begin{aligned}
45-38 &= \sqrt{45+4} \\
7 &= 7
\end{aligned}$$

y, para $x = 32$,

$$\begin{aligned}
45-32 &\neq \sqrt{32+4} \\
13 &\neq 6
\end{aligned}$$

Por tanto, la edad de la persona es de 45 años. ■

Ejercicio 63 Dos grifos llenan juntos un depósito en 2 horas. Si uno de los dos grifos llena el deposito en 3 horas menos que el otro. ¿Cuánto tarda cada grifo en llenar el depósito?

Solución: Planteamiento: Supongamos que uno de los grifos llena el depósito en x horas. Entonces, el otro grifo lo hace en $x-3$ horas. En una hora, cada grifo llenará $\frac{1}{x}$ y $\frac{1}{x-3}$ del depósito, y juntos,

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x-3}$$

Como que juntos llenan el depósito en 2 horas, en una hora habrán llenado la mitad. Por tanto, se ha de cumplir la siguiente ecuación

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x-3}=\frac{1}{2}$$

Resolución: Quitamos los denominadores multiplicando la ecuación por $2x(x-3)$, resultando

$$2(x-3)+2x=x(x-3)$$

Quitando los paréntesis y agrupando términos, obtenemos

$$\begin{aligned} 2x-6+2x &= x^2-3x \\ x^2-7x+6 &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo esta ecuación, obtenemos

$$x=\frac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4\cdot 1\cdot 6}}{2\cdot 1}=\frac{7\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{7\pm 5}{2}=\left\{\begin{array}{l} 6 \\ 1 \end{array}\right.$$

Evidentemente, sólo tiene sentido la solución $x=6$. Por tanto, un grifo tarda 6 horas, y el otro 3 en llenar por separado el depósito. ■

Ejercicio 64 Un ciclista y un peatón salen hacia un lugar situado a 54 Km. La velocidad del ciclista excede a la del peatón en 18 Km/h y llega al destino 4 horas antes. Calcula las velocidades del ciclista y del peatón.

Solución: Planteamiento: Utilizaremos la relación

$$\text{espacio} = \text{ velocidad} \times \text{ tiempo}$$

Si x representa la velocidad del peaton en Km/h, entonces la del ciclista es $x+18$. El tiempo que tarda el peatón en recorrer los 54 Km viene dada por

$$\frac{54}{x}$$

y el del ciclista por

$$\frac{54}{x+18}$$

Entonces, como el ciclista llega al destino 4 horas antes que el peatón, se ha de cumplir la siguiente ecuación

$$\frac{54}{x}=\frac{54}{x+18}+4$$

Resolución: Multiplicando por $x(x+18)$, quitamos los denominadores y obtenemos

$$54(x+18)=54x+4x(x+18)$$

Quitando los paréntesis y agrupando términos, obtenemos

$$\begin{aligned} 54x+972 &= 54x+4x^2+72x \\ 4x^2+72x-972 &= 0 \\ x^2+18x-243 &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo la ecuación, obtenemos

$$x=\frac{-18\pm\sqrt{18^2-4\cdot 1\cdot(-243)}}{2\cdot 1}=\frac{-18\pm\sqrt{1296}}{2}=\frac{-18\pm 36}{2}=\left\{\begin{array}{l} 9 \\ -27 \end{array}\right.$$

Evidentemente, sólo tiene sentido la solución $x=9$. Por tanto, la velocidad del peatón es de 9 Km/h y la del ciclista es de 27 Km/h. ■

4. Ecuaciones con varias incógnitas

Ejercicio 65 Dada la ecuación

$$\frac{x-y}{3} - \frac{y-x}{5} = \sqrt{2}$$

Halla la solución correspondiente a $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Solución: Multiplicando la ecuación por 15, la ecuación es quivalente a

$$5(x-y) - 3(y-x) = 15\sqrt{2}$$

Quitando los paréntesis y agrupando términos, obtenemos

$$\begin{aligned} 5x - 5y - 3y + 3x &= 15\sqrt{2} \\ 8x - 8y &= 15\sqrt{2} \end{aligned}$$

Llegamos, pues, a una ecuación de primer grado con dos incógnitas. Si $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$, entonces

$$\begin{aligned} 8 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 8y &= 15\sqrt{2} \\ \frac{8}{\sqrt{2}} - 8y &= 15\sqrt{2} \end{aligned}$$

Multiplicando ahora por $\sqrt{2}$, obtenemos

$$\begin{aligned} 8 - 8\sqrt{2}y &= 15 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^2 \\ -8\sqrt{2}y &= 30 - 8 \\ 8\sqrt{2}y &= -22 \\ y &= -\frac{22}{8\sqrt{2}} \\ &= -\frac{11}{4\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \\ &= -\frac{11\sqrt{2}}{8} \end{aligned}$$

Luego,

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{11\sqrt{2}}{8}\right)$$

es la solución pedida. ■

Ejercicio 66 Busca dos soluciones de la ecuación

$$3x - 2y + 1 = 0$$

Interpreta geométricamente las soluciones de esta ecuación.

Solución: Si hacemos $x = 1$, entonces

$$\begin{aligned} 3 - 2y + 1 &= 0 \\ -2y &= -4 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

Por tanto, $(1, 2)$ es una solución de la ecuación. Si hacemos $y = -1$, entonces

$$\begin{aligned} 3x + 2 + 1 &= 0 \\ 3x &= -3 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

Luego, $(-1,-1)$ es otra solución de la ecuación.
Las soluciones de esta ecuación forman el conjunto

$$\begin{aligned} G &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 3x - 2y + 1 = 0\right\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}\right\} \end{aligned}$$

que es el grafo de la función f definida por

$$f(x) = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$$

La gráfica de esta función es una recta de pendiente $\frac{3}{2}$ y ordenada en el origen $\frac{1}{2}$. Los puntos de esta recta son las soluciones de la ecuación dada. ■

Ejercicio 67 Encuentra una ecuación de primer grado con dos incógnitas que tenga como soluciones $(2+\sqrt{3},-1)$ y $(1,-2\sqrt{3})$.

Solución: La forma general de una ecuación de primer grado con dos incógnitas es

$$ax + by + c = 0$$

con $a \neq 0$ y $b \neq 0$. Si $(2+\sqrt{3},-1)$ es solución de la ecuación, se cumple

$$a \cdot (2+\sqrt{3}) + b \cdot (-1) + c = 0$$

de donde

$$c = b - (2+\sqrt{3})a$$

Del mismo modo, si $(1,-2\sqrt{3})$ es otra solución, tenemos

$$a \cdot 1 + b \cdot \left(-2\sqrt{3}\right) + c = 0$$

luego,

$$c = 2\sqrt{3}b - a$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} 2\sqrt{3}b - a &= b - (2+\sqrt{3})a \\ (2\sqrt{3}-1)b &= (-1-\sqrt{3})a \\ a &= -\frac{2\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}} \cdot b \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} c &= 2\sqrt{3}b + \frac{2\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}} \cdot b \\ &= \frac{2\sqrt{3}+6+2\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}} \cdot b \\ &= \frac{4\sqrt{3}+5}{1+\sqrt{3}} \cdot b \end{aligned}$$

Por consiguiente, sustituyendo estas dos últimas expresiones en la ecuación original, obtenemos

$$-\frac{2\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}} \cdot bx + by + \frac{4\sqrt{3}+5}{1+\sqrt{3}} \cdot b = 0$$

Multiplicando ahora esta ecuación por $(1+\sqrt{3})/b$, resulta

$$-(2\sqrt{3}-1) \cdot x + (1+\sqrt{3}) \cdot y + 4\sqrt{3} + 5 = 0$$

que es una ecuación de primer grado que admite las dos soluciones dadas. ■

Ejercicio 68 Representa gráficamente el conjunto de soluciones de la ecuación

$$x - y + 4 = 0$$

Interpreta geométricamente la solución en que $x = 0$ y la solución en que $y = 0$. ¿Para qué valores de x es $y > 0$? ¿Para qué valores de y es $x > 0$?

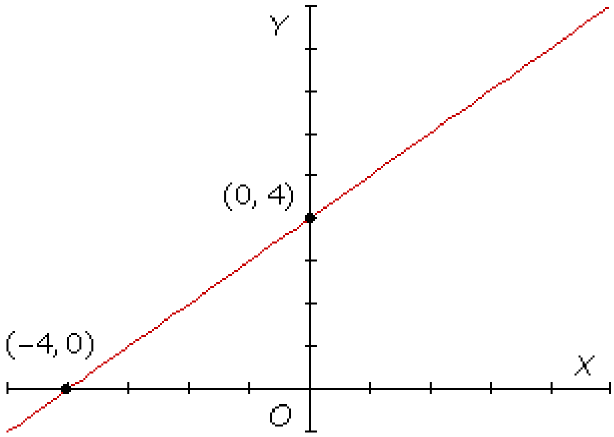
Solución: Las soluciones de la ecuación $x - y + 4 = 0$ forman el conjunto

$$\begin{aligned} G &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y + 4 = 0\right\} \\ &= \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x + 4\right\} \end{aligned}$$

que es el grafo de la función afín f definida por

$$f(x) = x + 4$$

La gráfica de esta función es la recta representada en la siguiente figura



Para representarla se ha utilizado una tabla con un par de valores

x	$y = x + 4$
0	4
-4	0

Para $x = 0$, tenemos

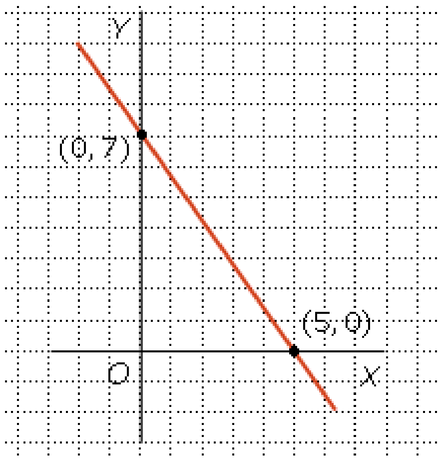
$$\begin{aligned} 0 - y + 4 &= 0 \\ y &= 4 \end{aligned}$$

Por tanto, la solución en que $x = 0$ es $(0, 4)$, que representa geométricamente el punto de corte de la recta con el eje Y. Para $y = 0$, tenemos

$$\begin{aligned} x - 0 + 4 &= 0 \\ x &= -4 \end{aligned}$$

Por tanto, la solución en que $y = 0$ es $(-4, 0)$, que representa geométricamente el punto de corte de la recta con el eje X.
Según la gráfica anterior, $y > 0$ cuando $x > -4$, y $x > 0$ cuando $y > 4$. ■

Ejercicio 69 Las soluciones de una ecuación de primer grado vienen representadas por el gráfico siguiente.



¿Cuál es esta ecuación?

Solución: La recta de la figura se corresponde con el conjunto de pares $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tales que

$$y = mx + n$$

Como $(5, 0)$ y $(0, 7)$ son puntos de la recta, se han de cumplir las dos condiciones siguientes:

$$0 = m \cdot 5 + n$$

y

$$7 = m \cdot 0 + n$$

Luego, $n = 7$ y

$$\begin{aligned} 5m + 7 &= 0 \\ 5m &= -7 \\ m &= -\frac{7}{5} \end{aligned}$$

Por tanto, la ecuación de la recta es

$$y = -\frac{7}{5}x + 7$$

Multiplicando esta ecuación por 5, se obtiene

$$5y = -7x + 35$$

y, de aquí, resulta la ecuación que estabamos buscando:

$$7x + 5y - 35 = 0$$

■

Ejercicio 70 De las ecuaciones siguientes, ¿cuáles son de segundo grado con dos incógnitas?

a)
$$(x + y)^2 - (x - y)^2 = (x + y)(x - y)$$

b)
$$x^2 + y^2 = \frac{x + y}{2} + (x + y)^2$$

c)
$$x(x + y) + y(y + 1) + x = (x + y)^2 - y(x - 1) + y + 1$$

Solución: (a) Quitando los paréntesis y agrupando términos en la ecuación

$$(x+y)^2 - (x-y)^2 = (x+y)(x-y)$$

obtenemos

$$\begin{aligned} x^2 + 2xy + y^2 - x^2 + 2xy - y^2 &= x^2 - y^2 \\ 4xy &= x^2 - y^2 \\ x^2 - y^2 - 4xy &= 0 \end{aligned}$$

que se trata de una ecuación de segundo grado con dos incógnitas.
(b) Quitando el paréntesis de la ecuación

$$x^2 + y^2 = \frac{x+y}{2} + (x+y)^2$$

obtenemos

$$x^2 + y^2 = \frac{x+y}{2} + x^2 + 2xy + y^2$$

Multiplicando ahora por 2 y agrupando términos, obtenemos

$$\begin{aligned} 2x^2 + 2y^2 &= x + y + 2x^2 + 4xy + 2y^2 \\ 4xy + x + y &= 0 \end{aligned}$$

que es una ecuación de segundo grado con dos incógnitas.
(c) Quitando los paréntesis y agrupando términos en la ecuación

$$x(x+y) + y(y+1) + x = (x+y)^2 - y(x-1) + y + 1$$

obtenemos

$$\begin{aligned} x^2 + xy + y^2 + y + x &= x^2 + 2xy + y^2 - yx + y + y + 1 \\ x &= y + 1 \\ x - y - 1 &= 0 \end{aligned}$$

que es una ecuación de primer grado con dos incógnitas. ■

Ejercicio 71 Dada la ecuación

$$x^2 + y^2 - 2xy + x - y - 2 = 0$$

Averigua si $(1,1)$ es solución de la ecuación. ¿Qué soluciones hay que tengan $x = 1$? ¿Y $y = 0$?

Solución: Como

$$1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 + 1 - 1 - 2 \neq 0$$

$(1,1)$ no es solución de la ecuación.
Para $x = 1$, tenemos

$$\begin{aligned} 1^2 + y^2 - 2 \cdot 1 \cdot y + 1 - y - 2 &= 0 \\ y^2 - 3y &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo esta ecuación de segundo grado incompleta, obtenemos

$$y(y-3) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ y = 3 \end{array} \right.$$

Luego, para $x = 1$, las soluciones de la ecuación son $(1,0)$ y $(1,3)$.
Para $y = 0$, tenemos

$$\begin{aligned} x^2 + 0^2 - 2x \cdot 0 + x - 0 - 2 &= 0 \\ x^2 + x - 2 &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo esta ecuación de segundo grado, obtenemos

$$\frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ -2 \end{array} \right.$$

Luego, para $y = 0$, las soluciones de la ecuación son $(1,0)$ y $(-2,0)$. ■

5. Sistemas de ecuaciones

Ejercicio 72 Prueba que los sistemas siguientes son equivalentes:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & + & z & = & 4 \\ 2x & + & y & - & 3z & = & -2 \\ 3x & - & 3y & - & 4z & = & 2 \end{array}\right. \quad \text{y} \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & + & z & = & 4 \\ & & 5y & - & 5z & = & -10 \\ & & & - & 20z & = & -20 \end{array}\right.$$

Si se tratara de resolver el sistema, ¿cuál escogerías para resolverlo? Halla la solución de este sistema.

Solución: Para hacer más cómoda la escritura, asociamos al sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & + & z & = & 4 \\ 2x & + & y & - & 3z & = & -2 \\ 3x & - & 3y & - & 4z & = & 2 \end{array}\right.$$

el siguiente cuadro de números entre dos paréntesis grandes:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -3 & -2 \\ 3 & -3 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

Esta distribución de los coeficientes de las incógnitas y los términos independientes se llama **matriz**. Observa que las filas de la matriz se corresponden con las ecuaciones del sistema, las tres primeras columnas se corresponden con los coeficientes de las incógnitas, y en la última columna hay los términos independientes.
Al aplicar al sistema una de las reglas de equivalencia procederemos a efectuar el proceso directamente sobre la matriz. Por ejemplo, si sumamos a la segunda ecuación la primera multiplicada por -2, obtenemos

$$\begin{array}{rcrcrcr} -2x & + & 4y & - & 2z & = & -8 \\ 2x & + & y & - & 3z & = & -2 \\ \hline \diagup & & 5y & - & 5z & = & -10 \end{array}$$

y, por tanto, el sistema anterior es quivalente al siguiente:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & + & z & = & 4 \\ & & 5y & - & 5z & = & -10 \\ 3x & - & 3y & - & 4z & = & 2 \end{array}\right.$$

Este proceso lo abreviaremos de la siguiente manera: diremos que sustituimos la segunda fila (ecuación) de la matriz por la suma de ella misma y la primera fila (ecuación) multiplicada por -2 y escribiremos

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -3 & -2 \\ 3 & -3 & -4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & -5 & -10 \\ 3 & -3 & -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 \end{array}$$

Si ahora sumamos a la tercera ecuación del sistema anterior la primera multiplicada por -3, obtenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & -5 & -10 \\ 3 & -3 & -4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & -5 & -10 \\ 0 & 3 & -7 & -10 \end{pmatrix} \begin{array}{l} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - 3F_1 \end{array}$$

Finalmente, si a la tercera ecuación del sistema resultante multiplicada por 5 le sumamos la segunda multiplicada por -3, obtenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & -5 & -10 \\ 0 & 3 & -7 & -10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & -20 & -20 \end{pmatrix} \begin{array}{l} F_1 \\ F_2 \\ 5F_3 - 3F_2 \end{array}$$

Según esta matriz, el sistema equivalente resultante es el otro dado en el enunciado

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & z & = & 4 \\ & & 5y & - & 5z & = & -10 \\ & & & - & 20z & = & -20 \end{array}\right.$$

como queríamos probar.
Este último sistema se dice que está **escalonado** y es mucho más sencillo de resolver que el otro sistema dado. En efecto, de la última ecuación resulta

$$z = \frac{-20}{-20} = 1$$

Sustituyendo este valor en la segunda ecuación, obtenemos

$$\begin{array}{rcl} 5y - 5 & = & -10 \\ 5y & = & -5 \\ y & = & -1 \end{array}$$

Finalmente, sustituyendo los valores hallados de y y z en la primera ecuación, obtenemos

$$\begin{array}{rcl} x + 2 + 1 & = & 4 \\ x & = & 1 \end{array}$$

Por consiguiente, la solución del sistema es

$$\left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 1 \end{array}\right.$$

y, como consecuencia, el sistema es compatible determinado.
Este procedimiento de resolución siempre es el mismo cuando el sistema está escalonado. ■

Ejercicio 73 Aplicando el método matricial introducido en el ejercicio anterior, resuelve el siguiente sistema

$$\left\{\begin{array}{lclclcl} 2x & - & 3y & + & 4z & = & 6 \\ x & + & y & - & 2z & = & 5 \\ 3x & - & 2y & + & 2z & = & 11 \end{array}\right.$$

transformando previamente dicho sistema en otro de equivalente cuya forma sea escalonada.

Solución: La matriz asociada al sistema es

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & -2 & 5 \\ 3 & -2 & 2 & 11 \end{pmatrix}$$

Permutando las dos primeras filas (Esto es equivalente a permutar las dos primeras ecuaciones del sistema), obtenemos

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & -2 & 5 \\ 3 & -2 & 2 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 5 \\ 2 & -3 & 4 & 6 \\ 3 & -2 & 2 & 11 \end{pmatrix} \begin{array}{l} F_2 \\ F_1 \\ F_3 \end{array}$$

Así aprovechamos el hecho de que el coeficiente de la incógnita x en la segunda ecuación es 1. Si a la segunda fila le sumamos la primera multiplicada por -2, y a la tercera la primera multiplicada por -3, obtenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 5 \\ 2 & -3 & 4 & 6 \\ 3 & -2 & 2 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & -5 & 8 & -4 \\ 0 & -5 & 8 & -4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - 3F_1 \end{array}$$

Finalmente, si a la tercera fila le restamos la segunda, obtenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & -5 & 8 & -4 \\ 0 & -5 & 8 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & -5 & 8 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array}$$

Según esta matriz, el sistema original es equivalente al siguiente sistema escalonado

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & 2z & = & 5 \\ & & -5y & + & 8z & = & -4 \\ & & & & 0z & = & 0 \end{array} \right.$$

Nos damos cuenta que la última ecuación se satisface cualquiera que sea el valor de z, pues $0 = 0$ es una igualdad que siempre es verdadera. Por tanto, se trata de un sistema compatible indeterminado. Expresaremos el hecho de que el valor de z puede ser cualquier número real, escribiendo la siguiente ecuación

$$z = z$$

Para encontrar los valores de las otras incógnitas, despejamos y de la segunda ecuación y obtenemos

$$\begin{array}{rcl} -5y & = & -4 - 8z \\ 5y & = & 4 + 8z \\ y & = & \dfrac{4 + 8z}{5} \end{array}$$

Sustituyendo este valor de y en la primera ecuación, obtenemos

$$\begin{array}{rcl} x + \dfrac{4 + 8z}{5} - 2z & = & 5 \\ 5x + 4 + 8z - 10z & = & 25 \\ 5x & = & 21 + 2z \\ x & = & \dfrac{21 + 2z}{5} \end{array}$$

Por tanto, la solución del sistema es

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{21+2z}{5} \\ y = \frac{4+8z}{5} \\ z = z \end{array} \right.$$

■

Ejercicio 74 Aplicando el método matricial introducido en el ejercicio anterior, resuelve el siguiente sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & - & z & = & 4 \\ x & + & 2y & + & 3z & = & 3 \\ 2x & + & y & + & 2z & = & 5 \end{array} \right.$$

transformando previamente dicho sistema en otro de equivalente cuya forma sea escalonada.

Solución: La matriz asociada al sistema es

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Si a la segunda fila le sumamos la primera multiplicada por -1, y a la tercera la primera multiplicada por -2, obtenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} F_1 \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - 2F_1 \end{array}$$

Finalmente, si a la tercera fila le restamos la segunda, obtenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 4 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} F_1 \\ F_2 \\ F_3 - F_2 \end{array}$$

Según esta matriz, el sistema original es equivalente al siguiente sistema escalonado

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & - & y & - & z & = & 4 \\ & & 3y & + & 4z & = & -1 \\ & & & & 0z & = & -2 \end{array}\right.$$

Vemos que la tercera ecuación de este sistema es una contradicción, pues no es posible que $0 = 2$. Por tanto, se trata de un sistema incompatible. ■

Ejercicio 75 Aplicando el método matricial introducido en el ejercicio anterior, resuelve el siguiente sistema

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & - & 2y & - & 3z & = & 5 \\ 2x & + & 3y & - & 2z & = & -4 \\ x & - & 3y & + & 2z & = & 7 \end{array}\right.$$

transformando previamente dicho sistema en otro de equivalente cuya forma sea escalonada.

Solución: La matriz asociada al sistema es

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & -2 & -4 \\ 1 & -3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Si a la segunda fila le sumamos la primera multiplicada por -2, y a la tercera le restamos la primera, obtenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & -2 & -4 \\ 1 & -3 & 2 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 5 \\ 0 & 7 & 4 & -14 \\ 0 & -1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} F_1 \\ F_2 - 2F_1 \\ F_3 - F_1 \end{array}$$

Finalmente, si a la tercera fila multiplicada por 7 le sumamos la segunda, obtenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 5 \\ 0 & 7 & 4 & -14 \\ 0 & -1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & 5 \\ 0 & 7 & 4 & -14 \\ 0 & 0 & 37 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} F_1 \\ F_2 \\ 7F_3 + F_2 \end{array}$$

Según esta matriz, el sistema original es equivalente al siguiente sistema escalonado

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & - & 2y & - & 3z & = & 5 \\ & & 7y & + & 4z & = & -14 \\ & & & & 37z & = & 0 \end{array}\right.$$

De la última ecuación, obtenemos

$$z = \frac{0}{37} = 0$$

Sustituyendo este valor de z en la segunda ecuación, obtenemos

$$\begin{array}{rcl} 7y & = & -14 \\ y & = & \dfrac{-14}{7} = -2 \end{array}$$

Finalmente, sustituyendo los valores hallados de y y z en la primera ecuación, obtenemos

$$\begin{array}{rcl} x + 4 & = & 5 \\ x & = & 1 \end{array}$$

Por consiguiente, la solución del sistema es

$$\left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = -2 \\ z = 0 \end{array}\right.$$

y, como consecuencia, el sistema es compatible determinado. ■

Ejercicio 76 Sin resolver los siguientes sistemas, discute sus soluciones:

a)
$$\left\{\begin{array}{l} 2x-5y=1 \\ 2x+5y=12 \end{array}\right.$$

b)
$$\left\{\begin{array}{l} 2x-5y=1 \\ 4x-10y=1 \end{array}\right.$$

c)
$$\left\{\begin{array}{l} 2x-5y=1 \\ 6x-15y=3 \end{array}\right.$$

Solución: (a) En el sistema
$$\left\{\begin{array}{l} 2x-5y=1 \\ 2x+5y=12 \end{array}\right.$$
puesto que entre sus coeficientes se cumple
$$1=\frac{2}{2}\neq\frac{-5}{5}=-1$$
deducimos que el sistema es compatible determinado.
(b) En el sistema
$$\left\{\begin{array}{l} 2x-5y=1 \\ 4x-10y=1 \end{array}\right.$$
puesto que entre sus coeficientes se cumple
$$\frac{2}{4}=\frac{-5}{-10}\neq\frac{1}{1}$$
deducimos que el sistema es incompatible.
(c) En el sistema
$$\left\{\begin{array}{l} 2x-5y=1 \\ 6x-15y=3 \end{array}\right.$$
puesto que entre sus coeficientes se cumple
$$\frac{2}{6}=\frac{-5}{-15}=\frac{1}{3}$$
deducimos que el sistema es compatible indeterminado. ■

Ejercicio 77 Discute los siguientes sistemas según los distintos valores del parámetro m:

a)
$$\left\{\begin{array}{l} mx+4y=8 \\ 2x+3y=6 \end{array}\right.$$

b)
$$\left\{\begin{array}{l} 5x+2y=3 \\ mx+(m-1)y=m+1 \end{array}\right.$$

Solución: (a) En el sistema
$$\left\{\begin{array}{l} mx+4y=8 \\ 2x+3y=6 \end{array}\right.$$
puesto que
$$\frac{m}{2}=\frac{4}{3}$$
si
$$\begin{aligned} 3m &= 8 \\ m &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

entonces, el sistema es compatible determinado para $m \neq \frac{8}{3}$, y para $m = \frac{8}{3}$, como se cumple

$$\frac{\frac{8}{3}}{2} = \frac{4}{3} = \frac{8}{6}$$

el sistema es compatible indeterminado.
(b) En el sistema

$$\begin{cases} 5x + 2y = 3 \\ mx + (m-1)y = m+1 \end{cases}$$

puesto que

$$\frac{5}{m} = \frac{2}{m-1}$$

si

$$\begin{aligned} 5(m-1) &= 2m \\ 5m - 5 &= 2m \\ 3m &= 5 \\ m &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

entonces, el sistema es compatible determinado para $m \neq \frac{5}{3}$, y para $m = \frac{5}{3}$, como se cumple

$$\frac{5}{\frac{5}{3}} = \frac{2}{\frac{5}{3} - 1} \neq \frac{3}{\frac{5}{3} + 1}$$

el sistema es incompatible. ■

Ejercicio 78 Discute los siguientes sistemas según los distintos valores de los parámetros m y n:

a)

$$\begin{cases} mx + ny = 1 \\ nx + my = 1 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} mx - ny = 1 \\ nx - my = 0 \end{cases}$$

Solución: (a) En el sistema

$$\begin{cases} mx + ny = 1 \\ nx + my = 1 \end{cases}$$

puesto que

$$\frac{m}{n} = \frac{n}{m}$$

si

$$\begin{aligned} m^2 &= n^2 \\ m^2 - n^2 &= 0 \\ (m+n)(m-n) &= 0 \end{aligned}$$

es decir, si $m = n$, o bien, si $m = -n$, entonces el sistema es compatible determinado si $m \neq n$ y $m \neq -n$. Si $m = n \neq 0$, entonces se cumple

$$\frac{n}{n} = \frac{n}{n} = \frac{1}{1}$$

y, por tanto, el sistema es compatible indeterminado; si $m = n = 0$, el sistema es evidentemente incompatible. Si $m = -n$, entonces se cumple

$$\frac{-n}{n} = \frac{n}{-n} \neq \frac{1}{1}$$

y, por tanto, el sistema es incompatible. En resumen:

- Si $m \neq n$ y $m \neq -n$, el sistema es compatible determinado
- Si $n \neq 0$ y $m = n$, el sistema es compatible indeterminado
- Si $n \neq 0$ y $m = -n$, el sistema es incompatible
- Si $m = n = 0$, el sistema es incompatible

(b) En el sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} mx - ny = 1 \\ nx - my = 0 \end{array} \right.$$

puesto que

$$\frac{m}{n} = \frac{-n}{-m}$$

si

$$\begin{aligned} m^2 &= n^2 \\ m^2 - n^2 &= 0 \\ (m+n)(m-n) &= 0 \end{aligned}$$

es decir, si $m = n$, o bien, si $m = -n$, entonces el sistema es compatible determinado si $m \neq n$ y $m \neq -n$. Si $m = n \neq 0$, entonces se cumple

$$\frac{n}{n} = \frac{-n}{-n} \neq \frac{0}{1}$$

y, por tanto, el sistema es incompatible; si $m = n = 0$, el sistema es evidentemente incompatible. Si $m = -n$, entonces se cumple

$$\frac{n}{-n} = \frac{n}{-n} \neq \frac{0}{1}$$

y, por tanto, el sistema es también incompatible. En resumen:

- Si $m^2 \neq n^2$, el sistema es compatible determinado
- Si $m^2 = n^2$, el sistema es incompatible

■

Ejercicio 79 Resuelve el sistema siguiente

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x - 15y = -7 \\ 4x + 10y = 18 \end{array} \right.$$

por los tres métodos: reducción, igualación y sustitución.

Solución: El sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x - 15y = -7 \\ 4x + 10y = 18 \end{array} \right.$$

es compatible determinado, pues

$$\frac{3}{4} \neq \frac{-15}{10}$$

Método de reducción: Como $m.c.m.(10, 15) = 30$, si multiplicamos la primera ecuación por 2 y le sumamos la segunda multiplicada por 3, obtenemos:

$$\begin{array}{rcrcr} 6x & - & 30y & = & -14 \\ 12x & + & 30y & = & 54 \\ \hline 18x & & / & = & 40 \end{array}$$

Luego,

$$\begin{aligned} 18x &= 40 \\ x &= \frac{40}{18} \\ &= \frac{20}{9} \end{aligned}$$

Como $m.c.m.(3,4) = 12$, si multiplicamos la primera por 4 y le sumamos la segunda multiplicada por -3, obtenemos

$$\begin{array}{rcrcr} 12x & - & 60y & = & -28 \\ -12x & - & 30y & = & -54 \\ \hline \diagup & - & 90y & = & -82 \end{array}$$

Luego,

$$\begin{aligned} -90y &= -82 \\ y &= \frac{-82}{-90} \\ &= \frac{41}{45} \end{aligned}$$

Por consiguiente, la solución del sistema es

$$\begin{cases} x = \frac{20}{9} \\ y = \frac{41}{45} \end{cases}$$

Método de igualación: Despejando x de la primera ecuación del sistema

$$\begin{cases} 3x - 15y = -7 \\ 4x + 10y = 18 \end{cases}$$

obtenemos

$$\begin{aligned} 3x &= 15y - 7 \\ x &= \frac{15y - 7}{3} \end{aligned}$$

y, despejando la misma incógnita de la segunda, obtenemos

$$\begin{aligned} 4x &= 18 - 10y \\ x &= \frac{18 - 10y}{4} \end{aligned}$$

Igualando las dos expresiones obtenidas, tenemos

$$\frac{15y - 7}{3} = \frac{18 - 10y}{4}$$

Resolviendo esta ecuación, obtenemos

$$\begin{aligned} 4(15y - 7) &= 3(18 - 10y) \\ 60y - 28 &= 54 - 30y \\ 60y + 30y &= 54 + 28 \\ 90y &= 82 \\ y &= \frac{82}{90} \\ &= \frac{41}{45} \end{aligned}$$

Sustituyendo este valor de y en la primera ecuación, tenemos

$$\begin{aligned} 3x - 15 \cdot \frac{41}{45} &= -7 \\ 3x - \frac{41}{3} &= -7 \\ 9x - 41 &= -21 \\ 9x &= 41 - 21 \\ 9x &= 20 \\ x &= \frac{20}{9} \end{aligned}$$

Por consiguiente, la solución del sistema es

$$\left\{\begin{array}{l} x = \frac{20}{9} \\ y = \frac{41}{45} \end{array}\right.$$

Método de sustitución: Despejando x de la primera ecuación del sistema

$$\left\{\begin{array}{l} 3x - 15y = -7 \\ 4x + 10y = 18 \end{array}\right.$$

obtenemos

$$\begin{array}{rcl} 3x & = & 15y - 7 \\ x & = & \dfrac{15y-7}{3} \end{array}$$

Sustituyendo esta expresión en la segunda ecuación, tenemos

$$\begin{array}{rcl} 4 \cdot \left(\dfrac{15y-7}{3}\right) + 10y & = & 18 \\ \dfrac{60y-28}{3} + 10y & = & 18 \\ 60y - 28 + 30y & = & 54 \\ 60y + 30y & = & 54 + 28 \\ 90y & = & 82 \\ y & = & \dfrac{82}{90} \\ & = & \dfrac{41}{45} \end{array}$$

Sustituyendo este valor de y en la primera ecuación, tenemos

$$\begin{array}{rcl} 3x - 15 \cdot \dfrac{41}{45} & = & -7 \\ 3x - \dfrac{41}{3} & = & -7 \\ 9x - 41 & = & -21 \\ 9x & = & 41 - 21 \\ 9x & = & 20 \\ x & = & \dfrac{20}{9} \end{array}$$

Por consiguiente, la solución del sistema es

$$\left\{\begin{array}{l} x = \frac{20}{9} \\ y = \frac{41}{45} \end{array}\right.$$

■

Ejercicio 80 Resuelve los siguientes sistemas, convirtiéndolos previamente en otros de equivalentes que estén expresados en la forma estándar:

a)

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{x-1}{3} - \frac{y-1}{2} = 1 \\ \frac{x+2}{2} + \frac{y-1}{4} = 2 \end{array}\right.$$

b)

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 0 \\ \frac{x+1}{2} - \frac{y-2}{4} = \frac{1}{4} \end{array}\right.$$

c)

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{3y-2x}{3} - \frac{4(y-3)}{6} = -1 \\ \frac{2y-x}{2} - \frac{3(y-x)}{4} = -\frac{1}{4} \end{array}\right.$$

d)

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{x+y}{12} = \frac{x-y}{2} \\ \frac{x-y}{2} = \frac{5x}{6} \end{array}\right.$$

e)

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{x+1}{y-4} - \frac{x}{y} = \frac{2}{y(y-4)} \\ \frac{x}{x-1} - \frac{y-3}{y-1} = \frac{5}{(x-1)(y-1)} \end{array}\right.$$

Solución: (a) Quitando los denominadores en las ecuaciones del sistema

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{x-1}{3} - \frac{y-1}{2} = 1 \\ \frac{x+2}{2} + \frac{y-1}{4} = 2 \end{array}\right.$$

obtenemos

$$\left\{\begin{array}{l} 2(x-1) - 3(y-1) = 6 \\ 2(x+2) + y - 1 = 8 \end{array}\right.$$

Quitando ahora los paréntesis y agrupando términos, obtenemos

$$\left\{\begin{array}{l} 2x - 2 - 3y + 3 = 6 \\ 2x + 4 + y - 1 = 8 \end{array}\right.$$

y

$$\left\{\begin{array}{l} 2x - 3y = 5 \\ 2x + y = 5 \end{array}\right.$$

Este sistema es compatible determinado, pues

$$\frac{2}{2} \neq \frac{-3}{1}$$

Resolviéndolo por reducción, obtenemos

$$\begin{array}{rcrcr} 2x & - & 3y & = & 5 \\ -2x & - & y & = & -5 \\ \hline \diagup & - & 4y & = & 0 \end{array}$$

Luego,

$$y = \frac{0}{-4} = 0$$

Sustituyendo este valor en la segunda ecuación del sistema, obtenemos

$$\begin{aligned} 2x + 0 &= 5 \\ x &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Por tanto, la solución del sistema es

$$\left\{\begin{array}{l} x = \frac{5}{2} \\ y = 0 \end{array}\right.$$

(b) Quitando los denominadores en las ecuaciones del sistema

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 0 \\ \frac{x+1}{2} - \frac{y-2}{4} = \frac{1}{4} \end{array}\right.$$

obtenemos

$$\left\{\begin{array}{l} 3x - 2y = 0 \\ 2(x+1) - y + 2 = 1 \end{array}\right.$$

Quitando ahora los paréntesis y agrupando términos, obtenemos

$$\left\{\begin{array}{l} 3x - 2y = 0 \\ 2x - y = -3 \end{array}\right.$$

Este sistema es compatible determinado, pues

$$\frac{3}{2} \neq \frac{-2}{-1}$$

Resolviéndolo por igualación, obtenemos

$$\left\{ \begin{array}{l} y = \frac{3x}{2} \\ y = 2x + 3 \end{array} \right.$$

y, por tanto,

$$\begin{array}{rcl} \frac{3x}{2} & = & 2x + 3 \\ 3x & = & 4x + 6 \\ x & = & -6 \end{array}$$

Sustituyendo este valor en la ecuación $y = 2x + 3$, obtenemos

$$y = 2 \cdot (-6) + 3 = -9$$

Por consiguiente, la solución del sistema es

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -6 \\ y = -9 \end{array} \right.$$

(c) Quitando los paréntesis del sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{3y-2x}{3} - \frac{4(y-3)}{6} = -1 \\ \frac{2y-x}{2} - \frac{3(y-x)}{4} = -\frac{1}{4} \end{array} \right.$$

obtenemos

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{3y-2x}{3} - \frac{4y-12}{6} = -1 \\ \frac{2y-x}{2} - \frac{3y-3x}{4} = -\frac{1}{4} \end{array} \right.$$

Quitando ahora los denominadores, obtenemos

$$\left\{ \begin{array}{l} 2(3y - 2x) - 4y + 12 = -6 \\ 2(2y - x) - 3y + 3x = -1 \end{array} \right.$$

Quitando de nuevo los paréntesis introducidos y agrupando términos, obtenemos

$$\left\{ \begin{array}{r} -4x + 2y = -18 \\ x + y = -1 \end{array} \right.$$

Este sistema es compatible determinado, pues

$$\frac{-4}{1} \neq \frac{2}{1}$$

Resolviéndolo por sustitución, obtenemos

$$\left\{ \begin{array}{l} -4x + 2y = -18 \\ y = -1 - x \end{array} \right.$$

Sustituyendo el valor de y en la primera ecuación, obtenemos

$$\begin{array}{rcl} -4x + 2(-1 - x) & = & -18 \\ -4x - 2 - 2x & = & -18 \\ -6x & = & -16 \\ x & = & \frac{-16}{-6} \\ & = & \frac{8}{3} \end{array}$$

y, por tanto,

$$y = -1 - \frac{8}{3} = \frac{-3-8}{3} = -\frac{11}{3}$$

Por consiguiente, la solución del sistema es

$$\begin{cases} x = \frac{8}{3} \\ y = -\frac{11}{3} \end{cases}$$

(d) Quitando los denominadores en las ecuaciones del sistema

$$\begin{cases} \frac{x+y}{12} = \frac{x-y}{2} \\ \frac{x-y}{2} = \frac{5x}{6} \end{cases}$$

obtenemos

$$\begin{cases} x + y = 6(x - y) \\ 3(x - y) = 5x \end{cases}$$

Quitando los paréntesis y agrupando términos, obtenemos

$$\begin{cases} 5x - 7y = 0 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$$

Este sistema es compatible determinado, pues

$$\frac{5}{2} \neq \frac{-7}{3}$$

y, como los términos independientes son nulos, la solución es evidentemente

$$x = y = 0$$

(e) En el sistema

$$\begin{cases} \frac{x+1}{y-4} - \frac{x}{y} = \frac{2}{y(y-4)} \\ \frac{x}{x-1} - \frac{y-3}{y-1} = \frac{5}{(x-1)(y-1)} \end{cases}$$

multiplicando por $y(y-4)$ la primera ecuación y la segunda por $(x-1)(y-1)$, obtenemos

$$\begin{cases} y(x+1) - x(y-4) = 2 \\ x(y-1) - (y-3)(x-1) = 5 \end{cases}$$

Quitando ahora los paréntesis y agrupando términos, obtenemos

$$\begin{cases} 4x + y = 2 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$$

Este sistema es compatible determinado, pues

$$\frac{4}{2} \neq \frac{1}{1}$$

Resolviéndolo por igualación, obtenemos

$$\begin{cases} y = 2 - 4x \\ y = 8 - 2x \end{cases}$$

y, por tanto,

$$\begin{aligned} 2 - 4x &= 8 - 2x \\ -2x &= 6 \\ x &= \frac{6}{-2} \\ &= -3 \end{aligned}$$

luego,

$$y = 2 - 4 \cdot (-3) = 2 + 12 = 14$$

Por consiguiente, la solución del sistema es

$$\begin{cases} x = -3 \\ y = 14 \end{cases}$$

■

Ejercicio 81 Resuelve los siguientes sistemas por uno de los métodos algebraicos:

a)
$$\begin{cases} x+y=38 \\ y+z=50 \\ z+x=54 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 3x-5y+z+10=0 \\ 2x-3y+4z+16=0 \\ -x+2y-7z-22=0 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} \frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{4}=\frac{z}{7} \\ 4x-y-z=3 \end{cases}$$

Solución: Naturalmente, estos tres sistemas pueden resolverse por el método matricial introducido en el ejercicio 1. Sin embargo, aquí los resolveremos por los métodos algebraicos tradicionales.
(a) Como el sistema
$$\begin{cases} x+y=38 \\ y+z=50 \\ z+x=54 \end{cases}$$
tiene muchos coeficientes nulos, utilizaremos el método de sustitución. Así, tenemos
$$\begin{cases} x=38-y \\ z=50-y \\ z+x=54 \end{cases}$$
y sustituyendo las expresiones de x y z en la tercera ecuación, obtenemos
$$\begin{aligned} 50-y+38-y &= 54 \\ -2y &= -34 \\ y &= \frac{-34}{-2} \\ &= 17 \end{aligned}$$
Por tanto,
$$x=38-17=21$$
y
$$z=50-17=33$$
Por consiguiente, la solución del sistema es
$$\begin{cases} x=21 \\ y=17 \\ z=33 \end{cases}$$
(b) El sistema
$$\begin{cases} 3x-5y+z+10=0 \\ 2x-3y+4z+16=0 \\ -x+2y-7z-22=0 \end{cases}$$
lo resolveremos por el método de reducción. Aprovechando que el coeficiente de x en la tercera ecuación es -1, tenemos
$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x & - & 5y & + & z & = & -10 \\ -3x & + & 6y & - & 21z & = & 66 \\ \hline \diagup & & y & - & 20z & = & 56 \end{array}$$
y
$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 3y & + & 4z & = & -16 \\ -2x & + & 4y & - & 14z & = & 44 \\ \hline \diagup & & y & - & 10z & = & 28 \end{array}$$

Por tanto, el sistema original es equivalente al siguiente

$$\left\{\begin{array}{r} y-20z=56\\ y-10z=28\\ -x+2y-7z-22=0\end{array}\right.$$

Por igualación, de las dos primera ecuaciones deducimos

$$\begin{aligned} 56+20z &= 28+10z\\ 10z &= -28\\ z &= \frac{-28}{10}\\ &= -\frac{14}{5}\end{aligned}$$

Por tanto,

$$y=28+10z=28+10\cdot\left(-\frac{14}{5}\right)=28-28=0$$

Luego,

$$x=2y-7z-22=\frac{98}{5}-22=\frac{98-110}{5}=-\frac{12}{5}$$

Por consiguiente, la solución del sistema es

$$\left\{\begin{array}{l} x=-\frac{12}{5}\\ y=0\\ z=-\frac{14}{5}\end{array}\right.$$

(c) El sistema

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{4}=\frac{z}{7}\\ 4x-y-z=3\end{array}\right.$$

es equivalente por ejemplo a

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{4}\\ \frac{y+1}{4}=\frac{z}{7}\\ 4x-y-z=3\end{array}\right.$$

Quitando denominadores, obtenemos

$$\left\{\begin{array}{l} 4(x-2)=3(y+1)\\ 7(y+1)=4z\\ 4x-y-z=3\end{array}\right.$$

Quitando los paréntesis y convirtiendo el sistema en forma estándar, tenemos

$$\left\{\begin{array}{l} 4x-3y=11\\ 7y-4z=-7\\ 4x-y-z=3\end{array}\right.$$

Como el sistema tiene muchos coeficientes nulos, utilizaremos el método de sustitución. Así, tenemos

$$\left\{\begin{array}{l} x=\frac{11+3y}{4}\\ z=\frac{7+7y}{4}\\ 4x-y-z=3\end{array}\right.$$

Sustituyendo las expresiones de x y z en la tercera ecuación, obtenemos

$$4\cdot\left(\frac{11+3y}{4}\right)-y-\frac{7+7y}{4}=3$$

Resolviendo esta ecuación, obtenemos

$$\begin{aligned} 2y-\frac{7+7y}{4} &= -8\\ 8y-7-7y &= -32\\ y &= -25\end{aligned}$$

Por tanto,

$$x = \frac{11+3y}{4} = \frac{11-75}{4} = -16$$

y

$$z = \frac{7+7y}{4} = \frac{7-175}{4} = -42$$

Por consiguiente, la solución del sistema es

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -16 \\ y = -25 \\ z = -42 \end{array} \right.$$

■

Ejercicio 82 Resuelve los siguientes sistemas efectuando un cambio de variable:

a)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{5}{2x} - \frac{20}{3y} = \frac{1}{3} \\ \frac{3}{x} + \frac{7}{y} = \frac{3}{5} \end{array} \right.$$

b)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{4}{2x-1} + \frac{1}{6y+4} = 2 \\ \frac{5}{6x-3} - \frac{2}{15y+10} = 19 \end{array} \right.$$

Solución: (a) Mediante el cambio siguiente

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{x} = m \\ \frac{1}{y} = n \end{array} \right.$$

el sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{5}{2x} - \frac{20}{3y} = \frac{1}{3} \\ \frac{3}{x} + \frac{7}{y} = \frac{3}{5} \end{array} \right.$$

se convierte en

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{5m}{2} - \frac{20n}{3} = \frac{1}{3} \\ 3m + 7n = \frac{3}{5} \end{array} \right.$$

Quitando denominadores, obtenemos

$$\left\{ \begin{array}{l} 15m - 40n = 2 \\ 15m + 35n = 3 \end{array} \right.$$

Restando miembro a miembro ambas ecuaciones, obtenemos

$$\begin{array}{rcl} -75n & = & -1 \\ n & = & \frac{-1}{-75} = \frac{1}{75} \end{array}$$

Sustituyendo este valor en la primera ecuación, obtenemos

$$\begin{array}{rcl} 15m - 40 \cdot \frac{1}{75} & = & 2 \\ 15m - \frac{8}{15} & = & 2 \\ 225m - 8 & = & 30 \\ 225m & = & 38 \\ m & = & \frac{38}{225} \end{array}$$

Ahora bien, como

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{x} = m \\ \frac{1}{y} = n \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{m} \\ y = \frac{1}{n} \end{array} \right.$$

la solución del sistema original es

$$\begin{cases} x = \frac{225}{38} \\ y = 75 \end{cases}$$

(b) Mediante el cambio

$$\begin{cases} \frac{1}{2x-1} = m \\ \frac{1}{3y+2} = n \end{cases}$$

el sistema

$$\begin{cases} \frac{4}{2x-1} + \frac{1}{2(3y+2)} = 2 \\ \frac{5}{3(2x-1)} - \frac{2}{5(3y+2)} = 19 \end{cases}$$

se convierte en

$$\begin{cases} 4m + \frac{n}{2} = 2 \\ \frac{5m}{3} - \frac{2n}{5} = 19 \end{cases}$$

Quitando denominadores, obtenemos

$$\begin{cases} 8m + n = 4 \\ 25m - 6n = 285 \end{cases}$$

Resolviendo este sistema por reducción, obtenemos

$$\begin{array}{rcrcr} 48m & + & 6n & = & 24 \\ 25m & - & 6n & = & 285 \\ \hline 73m & & \diagup & = & 309 \end{array}$$

Luego,

$$m = \frac{309}{73}$$

Sustituyendo este valor en la primera ecuación

$$\begin{aligned} 8 \cdot \frac{309}{73} + n &= 4 \\ 2472 + 73n &= 292 \\ 73n &= -2180 \\ n &= -\frac{2180}{73} \end{aligned}$$

Ahora bien, como

$$\begin{cases} \frac{1}{2x-1} = m \\ \frac{1}{3y+2} = n \end{cases}$$

entonces debemos resolver las ecuaciones siguientes

$$\frac{1}{2x-1} = \frac{309}{73}$$

y

$$\frac{1}{3y+2} = -\frac{2180}{73}$$

Las soluciones son

$$x = \frac{191}{309} \quad \text{y} \quad y = -\frac{4433}{6540}$$

Por consiguiente, la solución del sistema original es

$$\begin{cases} x = \frac{191}{309} \\ y = -\frac{4433}{6540} \end{cases}$$

■

Ejercicio 83 Halla los valores de m para que los siguientes sistemas sean compatibles:

a)
$$\left\{\begin{array}{l} 5x+3y=3 \\ 5x+2y=2 \\ 5x+my=7 \end{array}\right.$$

b)
$$\left\{\begin{array}{l} 2x+3y=5 \\ 7x+2y=5 \\ (m+3)x-my=3 \end{array}\right.$$

Solución: (a) Como las dos primeras ecuaciones del sistema
$$\left\{\begin{array}{l} 5x+3y=3 \\ 5x+2y=2 \\ 5x+my=7 \end{array}\right.$$
no dependen de m, podemos encontrar la solución a partir de ellas y luego exigir que la tercera ecuación admita dicha solución. Así, resolviendo el sistema
$$\left\{\begin{array}{l} 5x+3y=3 \\ 5x+2y=2 \end{array}\right.$$
por reducción, obtenemos
$$\begin{array}{rcrcr} 5x & + & 3y & = & 3 \\ -5x & - & 2y & = & -2 \\ \hline \cancel{} & & y & = & 1 \end{array}$$
y sustituyendo este valor en la primera ecuación, tenemos
$$\begin{aligned} 5x+3 &= 3 \\ 5x &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$
Por tanto, la solución del sistema debe ser
$$\left\{\begin{array}{l} x=0 \\ y=1 \end{array}\right.$$
Imponiendo esta solución en la tercera ecuación del sistema original, obtenemos
$$\begin{aligned} 5\cdot 0+m\cdot 1 &= 7 \\ m &= 7 \end{aligned}$$
Por consiguiente, si $m=7$ el sistema es compatible determinado y su solución es la dada anteriormente.
(b) Del mismo modo, en el sistema
$$\left\{\begin{array}{l} 2x+3y=5 \\ 7x+2y=5 \\ (m+3)x-my=3 \end{array}\right.$$
las dos primeras ecuaciones no dependen de m. Resolviendo el sistema
$$\left\{\begin{array}{l} 2x+3y=5 \\ 7x+2y=5 \end{array}\right.$$
por reducción, obtenemos
$$\begin{array}{rcrcr} 4x & + & 6y & = & 10 \\ -21x & - & 6y & = & -15 \\ \hline -17x & & \cancel{} & = & -5 \end{array}$$
luego,
$$x=\frac{5}{17}$$

y de

$$
\begin{array}{rcrcr}
14x & + & 21y & = & 35 \\
-14x & - & 4y & = & -10 \\
\hline
 & & 17y & = & 25
\end{array}
$$

luego,

$$
y = \frac{25}{17}
$$

Por tanto, la solución del sistema debe ser

$$
\begin{cases} x = \frac{5}{17} \\ y = \frac{25}{17} \end{cases}
$$

Imponiendo esta solución en la tercera ecuación del sistema original, obtenemos

$$
\begin{array}{rcl}
(m+3) \cdot \dfrac{5}{17} - m \cdot \dfrac{25}{17} & = & 3 \\
5m + 15 - 25m & = & 51 \\
-20m & = & 36 \\
m & = & \dfrac{36}{-20} \\
 & = & -\dfrac{9}{5}
\end{array}
$$

Por consiguiente, si $m = -\frac{9}{5}$ el sistema es compatible determinado y su solución es la dada anteriormente. ■

Ejercicio 84 Discute y resuelve gráficamente los siguientes sistemas:

a)

$$
\begin{cases} 2x + y - 5 = 0 \\ 3x - 9y = 18 \end{cases}
$$

b)

$$
\begin{cases} x - 3y - 6 = 0 \\ 3x - 9y = 18 \end{cases}
$$

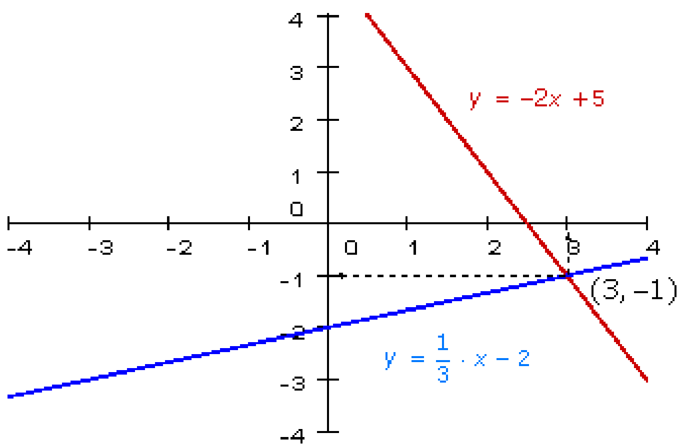
c)

$$
\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 5 \end{cases}
$$

Solución: (a) Representando gráficamente las rectas que determinan las ecuaciones del sistema

$$
\begin{cases} 2x + y - 5 = 0 \\ 3x - 9y = 18 \end{cases}
$$

mediante una tabla de valores, en la figura siguiente



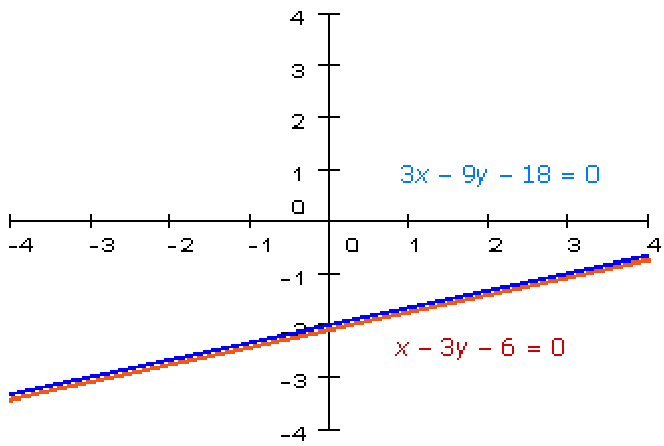
se observa que estas rectas se cortan en el punto $(3, -1)$. Las coordenadas de este punto son la solución del sistema. Por tanto, la solución es

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 3 \\ y = -1 \end{array} \right.$$

(b) Representando gráficamente las rectas que determinan las ecuaciones del sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} x - 3y - 6 = 0 \\ 3x - 9y = 18 \end{array} \right.$$

mediante una tabla de valores, en la figura siguiente



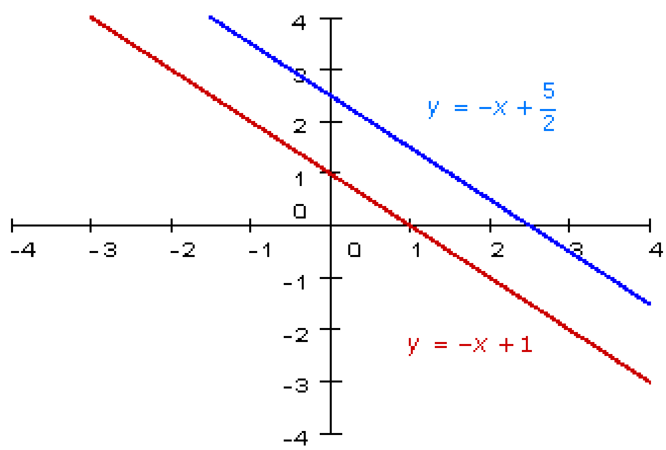
vemos que las rectas son coincidentes. Por tanto, las coordenadas de cualquier punto de la recta que determinan es solución del sistema. Por consiguiente, el sistema es compatible indeterminado y sus soluciones vienen dadas por

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x \\ y = \frac{x}{3} - 2 \end{array} \right.$$

(c) Representando gráficamente las rectas que determinan las ecuaciones del sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 5 \end{array} \right.$$

mediante una tabla de valores, en la figura siguiente



vemos que las rectas son paralelas. Por tanto, no hay ningún punto común a ambas rectas y, como consecuencia, el sistema es incompatible. ∎

Ejercicio 85 Resuelve los sistemas no lineales siguientes:

a)
$$\begin{cases} x-2y=1 \\ x^2-y^2=21 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 2x^2+3y^2=11 \\ xy=2 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 2x^2-3y^2=-6 \\ 4x^2-y^2=8 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} 4x^2-xy+y^2=7 \\ x+y=5 \end{cases}$$

e)
$$\begin{cases} x^2+xy+y^2=49 \\ x^3-y^3=98 \end{cases}$$

Solución: (a) En el sistema
$$\begin{cases} x-2y=1 \\ x^2-y^2=21 \end{cases}$$
despejando x de la primera ecuación, tenemos
$$x=2y+1$$
Sustituyendo esta expresión en la segunda ecuación, tenemos
$$(2y+1)^2-y^2=21$$
Quitando el paréntesis y agrupando términos, obtenemos
$$\begin{aligned} 4y^2+4y+1-y^2 &= 21 \\ 3y^2+4y-20 &= 0 \end{aligned}$$
Resolviendo esta ecuación de segundo grado, obtenemos
$$y=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot 3\cdot(-20)}}{2\cdot 3}=\frac{-4\pm 16}{6}=\begin{cases} 2 \\ -\frac{10}{3} \end{cases}$$
Luego, el sistema tiene dos soluciones:
$$\begin{array}{lcl} y=2 & \Longrightarrow & x=2\cdot 2+1=5 \\ y=-\frac{10}{3} & \Longrightarrow & x=2\cdot\left(-\frac{10}{3}\right)+1=-\frac{17}{3} \end{array}$$
(b) En el sistema
$$\begin{cases} 2x^2+3y^2=11 \\ xy=2 \end{cases}$$
despejando y de la segunda ecuación, tenemos
$$y=\frac{2}{x}$$
Sustituyendo esta expresión en la primera ecuación, tenemos
$$\begin{aligned} 2x^2+3\cdot\left(\frac{2}{x}\right)^2 &= 11 \\ 2x^2+\frac{12}{x^2} &= 11 \end{aligned}$$

Quitando denominadores, obtenemos

$$\begin{aligned} 2x^4 + 12 &= 11x^2 \\ 2x^4 - 11x^2 + 12 &= 0 \end{aligned}$$

que es una ecuación bicuadrada. Mediante el cambio $t = x^2$ convertimos dicha ecuación en una de segundo grado:

$$2t^2 - 11t + 12 = 0$$

Resolviendo esta ecuación, obtenemos

$$t = \frac{-(-11) \pm \sqrt{(-11)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 12}}{2 \cdot 2} = \frac{11 \pm 5}{4} = \left\{ \begin{array}{l} 4 \\ \frac{3}{2} \end{array} \right.$$

Luego,

$$\begin{array}{lll} t = 4 & \Longrightarrow \quad x^2 = 4 & \Longrightarrow \quad x = \pm 2 \\ t = \frac{3}{2} & \Longrightarrow \quad x^2 = \frac{3}{2} & \Longrightarrow \quad x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} = \pm\frac{\sqrt{6}}{2} \end{array}$$

Por tanto, como

$$y = \frac{2}{x}$$

el sistema tiene cuatro soluciones:

$$\begin{array}{lll} x = \pm 2 & \Longrightarrow & y = \pm 1 \\ x = \pm\frac{\sqrt{6}}{2} = & \Longrightarrow & y = \pm\frac{4}{\sqrt{6}} = \pm\frac{2\sqrt{6}}{3} \end{array}$$

(c) En el sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x^2 - 3y^2 = -6 \\ 4x^2 - y^2 = 8 \end{array} \right.$$

observamos que las incógnitas sólo aparecen en la forma x^2 e y^2, por lo que utilizaremos el método de reducción para resolverlo, en lugar del de sustitución. Así, tenemos

$$\begin{array}{rcrcr} 2x^2 & - & 3y^2 & = & -6 \\ -12x^2 & + & 3y^2 & = & -24 \\ \hline -10x^2 & & / & = & -30 \end{array}$$

Luego,

$$x^2 = \frac{-30}{-10} = 3 \quad \Longrightarrow \quad x = \pm\sqrt{3}$$

Sustituyendo estos valores de x en la primera ecuación, obtenemos

$$\begin{aligned} 2 \cdot \left(\pm\sqrt{3}\right)^2 - 3y^2 &= -6 \\ 6 - 3y^2 &= -6 \\ -3y^2 &= -12 \\ y^2 &= \frac{-12}{-3} = 4 \end{aligned}$$

Luego,

$$y = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

Por tanto, el sistema tiene cuatro soluciones:

$$\begin{array}{ll} x = \sqrt{3} & y = 2 \\ x = \sqrt{3} & y = -2 \\ x = -\sqrt{3} & y = 2 \\ x = -\sqrt{3} & y = -2 \end{array}$$

(d) En el sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x + 2y = 2 \\ (x - y)^2 + 2x - 3y = 26 \end{array} \right.$$

despejando y de la primera ecuación, tenemos

$$y = \frac{2-3x}{2}$$

Sustituyendo este valor en la segunda ecuación, tenemos

$$\begin{aligned}
\left(x - \frac{2-3x}{2}\right)^2 + 2x - 3 \cdot \frac{2-3x}{2} &= 26 \\
\left(\frac{2x-2+3x}{2}\right)^2 + 2x - \frac{6-9x}{2} &= 26 \\
\frac{25x^2-20x+4}{4} + 2x - \frac{6-9x}{2} &= 26 \\
25x^2 - 20x + 4 + 8x - 12 + 18x &= 104 \\
25x^2 + 6x - 112 &= 0
\end{aligned}$$

Resolviendo esta ecuación de segundo grado, obtenemos

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 25 \cdot (-112)}}{2 \cdot 25} = \frac{-6 \pm 106}{50} = \begin{cases} 2 \\ -\frac{56}{25} \end{cases}$$

Por tanto, como

$$y = \frac{2-3x}{2}$$

el sistema tiene dos soluciones:

$$x = 2 \quad \Longrightarrow \quad y = \tfrac{2-3\cdot 2}{2} = -2$$

y

$$x = -\tfrac{56}{25} \quad \Longrightarrow \quad y = \tfrac{2-3\cdot\left(-\frac{56}{25}\right)}{2} = \tfrac{109}{25}$$

(e) Mediante la identidad

$$(x^2 + xy + y^2) \cdot (x - y) = x^3 - y^3$$

podemos expresar el sistema

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 49 \\ x^3 - y^3 = 98 \end{cases}$$

como sigue

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 49 \\ 49 \cdot (x - y) = 98 \end{cases}$$

De la segunda ecuación, despejando x, tenemos

$$x = 2 + y$$

Sustituyendo esta expresión en la primera ecuación, tenemos

$$\begin{aligned}
(2+y)^2 + (2+y)y + y^2 &= 49 \\
4 + 4y + y^2 + 2y + y^2 + y^2 &= 49 \\
3y^2 + 6y - 45 &= 0
\end{aligned}$$

Resolviendo esta ecuación de segundo grado, obtenemos

$$y = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-45)}}{2 \cdot 3} = \frac{-6 \pm 24}{6} = \begin{cases} 3 \\ -5 \end{cases}$$

Por tanto, como

$$x = 2 + y$$

el sistema tiene dos soluciones

$$\begin{aligned}
y = 3 &\quad \Longrightarrow \quad x = 2 + 3 = 5 \\
y = -5 &\quad \Longrightarrow \quad x = 2 - 5 = -3
\end{aligned}$$

■

Ejercicio 86 Interpreta y resuelve geométricamente los sistemas siguientes:

a)
$$\begin{cases} y = x^2 - 5x \\ 3x + 5y = 15 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ 3x + 4y = 25 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x + y = 7 \\ xy = 10 \end{cases}$$

d)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ xy = 4 \end{cases}$$

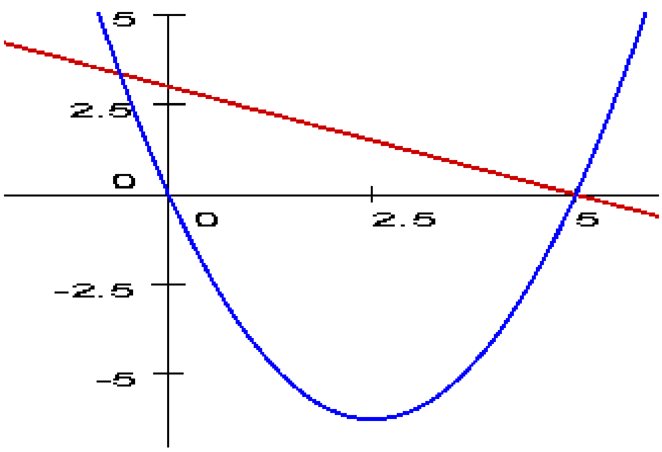
Solución: (a) Las ecuaciones del sistema

$$\begin{cases} y = x^2 - 5x \\ 3x + 5y = 15 \end{cases}$$

respresentan geométricamente una parábola (Esta parábola tiene su vértice en el punto de coordenadas

$$\begin{array}{l} x = -\frac{b}{2a} = \frac{5}{2} \\ y = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 5\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{25}{4} \end{array}$$

y corta al eje X en los puntos $x = 0$ y $x = 5$) de ecuación $y = x^2 - 5x$ y una recta (Esta recta pasa por los puntos $(0, 3)$ y $(5, 0)$ como puede comprobarse enseguida.) de ecuación $3x + 5y = 15$. En la figura siguiente



vemos que la parábola y la recta tienen dos puntos en común. Por lo tanto, el sistema tiene dos soluciones. Para encontrarlas, resolveremos el sistema mediante sustitución. Así, sustituyendo la expresión de y dada por la primera ecuación en la segunda, tenemos

$$\begin{aligned} 3x + 5(x^2 - 5x) &= 15 \\ 3x + 5x^2 - 25x &= 15 \\ 5x^2 - 22x - 15 &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo esta ecuación de segundo grado, obtenemos

$$x = \frac{-(-22) \pm \sqrt{(-22)^2 - 4 \cdot 5 \cdot (-15)}}{2 \cdot 5} = \frac{22 \pm 28}{10} = \begin{cases} 5 \\ -\frac{3}{5} \end{cases}$$

Luego, como

$$y = x^2 - 5x$$

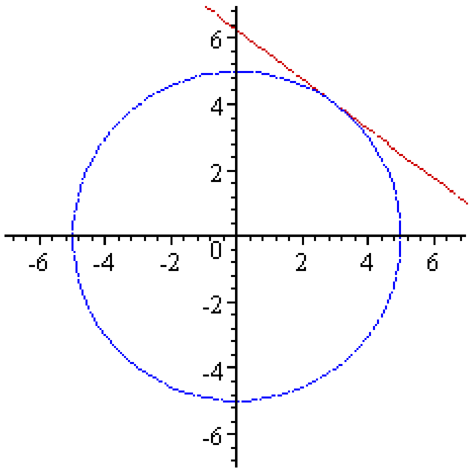
las soluciones son

$$\begin{array}{lll} x = 5 & \Longrightarrow & y = 5^2 - 5 \cdot 5 = 0 \\ x = -\frac{3}{5} & \Longrightarrow & y = \left(-\frac{3}{5}\right)^2 - 5 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{84}{25} \end{array}$$

(b) Las ecuaciones del sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 25 \\ 3x + 4y = 25 \end{array} \right.$$

respresentan geométricamente una circunferencia (Esta circunferencia está centrada en el origen y tiene radio 5.) de ecuación $x^2 + y^2 = 25$ y una recta (Esta recta pasa por los puntos $(3, 4)$ y $(7, 1)$ como puede comprobarse enseguida.) de ecuación $3x + 4y = 25$. En la figura siguiente



vemos que la circunferencia y la recta sólo tienen un punto en común; geométricamente, esto significa que la recta es tangente a la circunferencia. Por lo tanto, el sistema sólo tiene una solución. Para encontrarla, resolveremos el sistema mediante sustitución. Así, despejando y de la segunda ecuación, tenemos

$$y = \frac{25 - 3x}{4}$$

Sustituyendo esta expresión en la primera ecuación, tenemos

$$\begin{array}{rcl} x^2 + \left(\dfrac{25 - 3x}{4}\right)^2 & = & 25 \\ x^2 + \dfrac{625 - 150x + 9x^2}{16} & = & 25 \\ 16x^2 + 625 - 150x + 9x^2 & = & 400 \\ 25x^2 - 150x + 225 & = & 0 \\ x^2 - 6x + 9 & = & 0 \\ (x - 3)^2 & = & 0 \end{array}$$

luego,

$$\begin{array}{rcl} x - 3 & = & 0 \\ x & = & 3 \end{array}$$

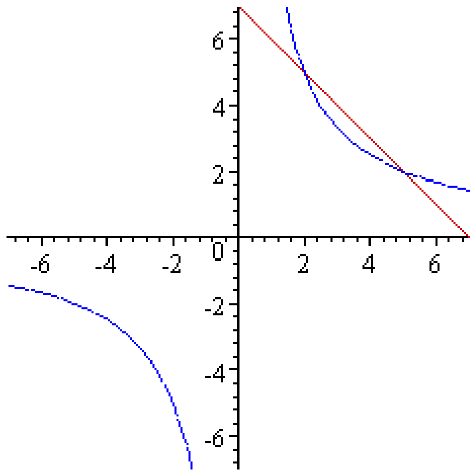
Por tanto, la solución del sistema es

$$x = 3 \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{25 - 3 \cdot 3}{4} = 4$$

Como consecuencia, el punto de coordenadas $(3, 4)$ el punto de tangencia de la recta con la circunferencia.
(c) Las ecuaciones del sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y = 7 \\ xy = 10 \end{array} \right.$$

respresentan geométricamente una hipérbola de ecuación $xy = 10$ y una recta (Esta recta pasa por los puntos $(7, 0)$ y $(0, 7)$ como puede comprobarse enseguida.) de ecuación $x + y = 7$. Mediante una tabla de valores es inmediato comprobar que la gráfica de esta hipérbola es la que se muestra en la siguiente figura.



Vemos que la hipérbola y la recta tienen dos puntos en común. Por lo tanto, el sistema tiene dos soluciones. Para encontrarlas, resolveremos el sistema mediante sustitución. Así, despejando y de la primera ecuación, tenemos

$$y = 7 - x$$

Sustituyendo esta expresión en la segunda ecuación, obtenemos

$$\begin{aligned} x(7 - x) &= 10 \\ 7x - x^2 &= 10 \\ x^2 - 7x + 10 &= 0 \end{aligned}$$

Resolviendo esta ecuación de segundo grado, obtenemos

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10}}{2 \cdot 1} = \frac{7 \pm 3}{2} = \begin{cases} 5 \\ 2 \end{cases}$$

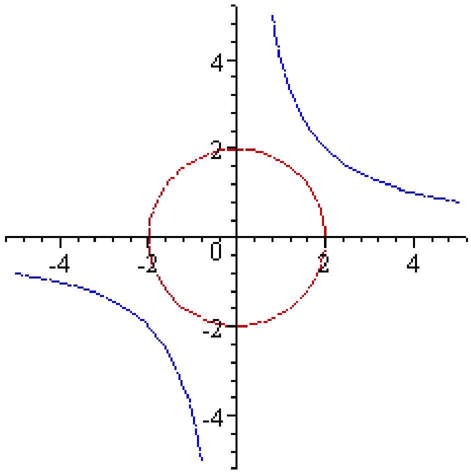
Luego, las soluciones del sistema son

$$\begin{aligned} x = 5 &\implies y = 7 - 5 = 2 \\ x = 2 &\implies y = 7 - 2 = 5 \end{aligned}$$

(d) Las ecuaciones del sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ xy = 4 \end{cases}$$

respresentan geométricamente una hipérbola de ecuación $xy = 4$ y una circunferencia (Esta circunferencia está centrada en el origen y tiene radio 2.) de ecuación $x^2 + y^2 = 4$. Mediante una tabla de valores es inmediato comprobar que la gráfica de esta hipérbola es la que se muestra en la siguiente figura.



Vemos que la hipérbola y la circunferencia no tienen puntos en común. Por lo tanto, el sistema es incompatible. ■

Ejercicio 87 Halla n para que la recta $y = 2x + n$ sea tangente a la parábola $y = x^2 + 4x$. Halla el punto de tangencia.

Solución: Para que la recta sea tangente a la parábola es necesario que el sistema

$$\begin{cases} y = 2x + n \\ y = x^2 + 4x \end{cases}$$

tenga una sola solución. Por igualación, obtenemos

$$\begin{aligned} 2x + n &= x^2 + 4x \\ x^2 + 2x - n &= 0 \end{aligned}$$

Esta ecuación de segundo grado tendrá una sola solución si su discriminante es cero. Por tanto, debe cumplirse

$$b^2 - 4ac = 0$$

es decir,

$$\begin{aligned} 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-n) &= 0 \\ 4n &= -4 \\ n &= -1 \end{aligned}$$

Para $n = -1$, la ecuación es

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + 1 &= 0 \\ (x+1)^2 &= 0 \end{aligned}$$

y su solución es $x = -1$. Luego, la solución del sistema para $n = -1$ es

$$x = -1 \quad \Longrightarrow \quad y = (-1)^2 + 4(-1) = -3$$

Por consiguiente, el punto de tangencia es el de coordenadas $(-1, -3)$. ■

Ejercicio 88 Descomponer el número 500 en dos partes, de modo que al dividir la mayor entre la menor se obtenga de cociente 7 y de resto 20.

Solución: Planteamiento: Supongamos que x e y son las dos partes en las que se descompone 500. Por tanto,

$$x + y = 500$$

Si x es la parte mayor, entonces por el enunciado del problema, al efectuar la división, tenemos

$$\begin{array}{r|l} x & y \\ \cline{2-2} 20 & 7 \end{array}$$

lo que significa que

$$x = 7y + 20$$

Luego, las dos partes x e y deben cumplir el sistema siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y = 500 \\ x = 7y + 20 \end{array} \right.$$

Resolución: Por sustitución, obtenemos

$$\begin{aligned} 7y + 20 + y &= 500 \\ 8y &= 480 \\ y &= 60 \end{aligned}$$

y, por tanto,

$$x = 7 \cdot 60 + 20 = 440$$

Por consiguiente, las dos partes en que se descompone 500 son 440 y 60. ■

Ejercicio 89 Entre dos vasos A y B de igual capacidad se distribuyen en partes desiguales 9 litros de agua. El vaso A se llenaría si se vertiesen los $\frac{4}{5}$ del agua contenida en B, y éste se llenaría si se le añadieran los $\frac{3}{4}$ del agua contenida en A. ¿Qué cantidad de agua contiene cada vaso y cuál es su capacidad?

Solución: Planteamiento: Supongamos que x e y representan las cantidades en litros que se vierten en el vaso A y B, respectivamente. Como que se vierte en total 9 litros, se cumple

$$x + y = 9$$

Si quitamos los $\frac{4}{5}$ del agua que contiene B y la vertimos en A, entonces se llena A y contiene

$$x + \frac{4}{5} \cdot y = x + \frac{4y}{5} = \frac{5x + 4y}{5}$$

Si quitamos los $\frac{3}{4}$ del agua que contiene A y la vertimos en B, entonces se llena B y contiene

$$y + \frac{3}{4} \cdot x = y + \frac{3x}{4} = \frac{4y + 3x}{4}$$

Ahora bien, como los dos vasos tienen la misma capacidad, se debe cumplir

$$x + \frac{4}{5} \cdot y = y + \frac{3}{4} \cdot x$$

Por tanto, las cantidades x e y deben verificar el siguiente sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y = 9 \\ \frac{5x+4y}{5} = \frac{4y+3x}{4} \end{array} \right.$$

Resolución: El sistema es equivalente al siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{l} y = 9 - x \\ 5x - 4y = 0 \end{array} \right.$$

Por sustitución, obtenemos

$$\begin{aligned} 5x - 4(9 - x) &= 0 \\ 5x - 36 + 4x &= 0 \\ 9x &= 36 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

y, por tanto,

$$x = 9 - 4 = 5$$

Por consiguiente, A contiene 5 litros, y B, 4 litros. La capacidad en litros de los vasos es

$$5 + \frac{3}{4} \cdot 4 = 8$$

■

Ejercicio 90 En un corral hay gallinas y conejos. Si se cuentan 61 cabezas y 196 patas, ¿cuántas gallinas y conejos hay en el corral?

Solución: Planteamiento: Supongamos que en el corral hay x gallinas e y conejos. Como hay 61 cabezas, se cumple

$$x + y = 61$$

Al haber 196 patas, sabiendo naturalmente que una gallina tiene 2 patas y un conejo 4, también se cumple

$$2x + 4y = 196$$

Por tanto, se ha de verificar el siguiente sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y = 61 \\ 2x + 4y = 196 \end{array} \right.$$

Resolución: Por reducción, obtenemos

$$\begin{array}{rcrcr} -4x & - & 4y & = & -244 \\ 2x & + & 4y & = & 196 \\ \hline -2x & & \diagup & = & -48 \end{array}$$

luego,

$$x = \frac{-48}{-2} = 24$$

y, por tanto,

$$y = 61 - 24 = 37$$

Por consiguiente, en el corral hay 24 gallinas y 37 conejos. ■

Ejercicio 91 Halla una fracción que sea igual a $\frac{4}{5}$, de modo que si de sus dos términos se resta 3, la fracción resultante es igual a $\frac{3}{4}$.

Solución: Planteamiento: Supongamos que la fracción que buscamos es

$$\frac{x}{y}$$

Por el enunciado del problema, esta fracción es igual a $\frac{4}{5}$, es decir,

$$\frac{x}{y} = \frac{4}{5}$$

Si restamos 3 al numerador y denominador de la fracción, ésta es igual a $\frac{3}{4}$. Por tanto, se ha de cumplir

$$\frac{x-3}{y-3} = \frac{3}{4}$$

Luego, los términos de esta fracción verifican el sistema siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{y} = \frac{4}{5} \\ \frac{x-3}{y-3} = \frac{3}{4} \end{array} \right.$$

Resolución: El sistema es equivalente al siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{l} 5x - 4y = 0 \\ 4x - 3y = 3 \end{array} \right.$$

Por reducción, obtenemos

$$\begin{array}{rcrcr} 20x & - & 16y & = & 0 \\ -20x & + & 15y & = & -15 \\ \hline \cancel{} & - & y & = & -15 \end{array}$$

luego,

$$y = 15$$

y

$$\begin{aligned} 5x - 4 \cdot 15 &= 0 \\ 5x &= 60 \\ x &= 12 \end{aligned}$$

Por tanto, el numerador de la fracción es 12, y su denominador, 15. ■

Ejercicio 92 Una cierta cantidad de dinero se reparte entre varias personas. Si el número de éstas aumenta en tres, cada una recibe 25 euros menos, y si disminuye en dos, entonces cada persona recibe 25 euros más. Encuentra el número de personas y la cantidad que corresponde a cada una.

Solución: Planteamiento: Supongamos que el número de personas es x y la cantidad de dinero que hay que repartir es y. Entonces, a cada persona le toca

$$\frac{y}{x}$$

Si el número de personas aumenta en 3, entonces a cada una de ellas le toca

$$\frac{y}{x+3}$$

y, según el enunciado del problema, esta cantidad es más pequeña que la anterior en 25 euros, es decir, se verifica

$$\frac{y}{x} = \frac{y}{x+3} + 25$$

Del mismo modo, si el número de personas disminuye en 2, entonces a cada una de ellas le toca

$$\frac{y}{x-2}$$

y, según el enunciado del problema, esta cantidad es mayor que la original en 25 euros, es decir, se cumple

$$\frac{y}{x-2} = \frac{y}{x} + 25$$

Por tanto, obtenemos el sistema siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{y}{x} = \frac{y}{x+3} + 25 \\ \frac{y}{x-2} = \frac{y}{x} + 25 \end{array} \right.$$

Resolución: El sistema es equivalente al siguiente

$$\left\{ \begin{array}{l} 25x^2 + 75x - 3y = 0 \\ 25x^2 - 50x - 2y = 0 \end{array} \right.$$

Por reducción, obtenemos

$$\begin{array}{rcrcrcr} 25x^2 & + & 75x & - & 3y & = & 0 \\ -25x^2 & + & 50x & + & 2y & = & 0 \\ \hline \cancel{} & & 125x & - & y & = & 0 \end{array}$$

luego,

$$y = 125x$$

y, por tanto, sustituyendo este resultado en la primera ecuación del sistema, tenemos

$$\begin{aligned} 25x^2 + 75x - 3 \cdot 125x &= 0 \\ 25x^2 - 300x &= 0 \\ x(25x - 300) &= 0 \end{aligned}$$

de donde se obtiene

$$\begin{array}{l} x = 0 \\ 25x - 300 = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = 12 \end{array}$$

Naturalmente, la solución $x = 0$ no tiene sentido, porque en tal caso no habría ninguna persona. Luego, $x = 12$ y

$$y = 125 \cdot 12 = 1500$$

Por consiguiente, hay 12 personas y la cantidad que hay que repartir es de 1500 euros. La cantidad que toca a cada una de las personas es en euros

$$\frac{1500}{12} = 125$$

■

Ejercicio 93 Encuentra los lados de un rectángulo de perímetro 11 metros y área 6 m^2.

Solución: Planteamiento: Si x e y representan las medidas en metros de los lados del rectángulo, entonces al ser su perímetro 11 se debe cumplir

$$2x + 2y = 11$$

y, como su área es 6, también se verifica

$$xy = 6$$

Por tanto, las medidas de los lados del rectángulo verifican el sistema siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x + 2y = 11 \\ xy = 6 \end{array} \right.$$

Resolución: Resolviendo este sistema por sustitución, tenemos

$$y = \frac{11 - 2x}{2}$$

y, por tanto,

$$\begin{array}{rcl} x \cdot \left(\dfrac{11 - 2x}{2} \right) & = & 6 \\ 11x - 2x^2 & = & 12 \\ 2x^2 - 11x + 12 & = & 0 \end{array}$$

Resolviendo esta ecuación de segundo grado, obtenemos

$$x = \frac{11 \pm \sqrt{11^2 - 4 \cdot 2 \cdot 12}}{2 \cdot 2} = \frac{11 \pm 5}{4} = \left\{ \begin{array}{l} 4 \\ \frac{3}{2} \end{array} \right.$$

Por tanto, hay dos soluciones:

$$\begin{array}{lcl} x = 4 & \Longrightarrow & y = \frac{11 - 2 \cdot 4}{2} = \frac{3}{2} \\ x = \frac{3}{2} & \Longrightarrow & y = \frac{11 - 2 \cdot \left(\frac{3}{2} \right)}{2} = 4 \end{array}$$

Por consiguiente, los lados del rectángulo miden 4 m y 1.5 m. ■

Ejercicio 94 En un recipiente hay 10 litros de mezcla de alcohol y agua. Se añade cierta cantidad de agua y así hay 30 % de alcohol sobre el total. Se añade otra cantidad igual de agua y entonces el alcohol está en un 20 %. ¿Cuánta agua se añadió y qué cantidad hay de alcohol?

Solución: Planteamiento: Supongamos que en el recipiente hay x litros de alcohol, y que y es la cantidad de agua que se añade cada vez en el recipiente. Al añadir por primera vez esta cantidad de agua, entonces en el recipiente hay $10 + y$ litros de mezcla, de los cuales x son de alcohol. Según el enunciado del problema, hay un 30 % de alcohol, y, por tanto, se verifica

$$\frac{x}{10 + y} \cdot 100 = 30$$

Del mismo modo, al añadir de nuevo esta cantidad por segunda vez, en el recipiente hay $10 + 2y$ litros de mezcla. Como debe haber un 20 % de alcohol, se ha cumplir

$$\frac{x}{10 + 2y} \cdot 100 = 20$$

Por tanto, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{100x}{10+y} = 30 \\ \frac{100x}{10+2y} = 20 \end{array} \right.$$

Resolución: El sistema es equivalente al siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{l} 10x = 30 + 3y \\ 10x = 20 + 4y \end{array} \right.$$

y, por igualación, obtenemos

$$\begin{aligned} 30 + 3y &= 20 + 4y \\ y &= 10 \end{aligned}$$

y, por tanto,

$$\begin{aligned} 10x &= 30 + 3 \cdot 10 \\ 10x &= 60 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

Por consiguiente, en el recipiente hay 6 litros de alcohol y cada vez añadimos 10 litros de agua. ■

Ejercicio 95 La suma de las cifras de un número es 8. Si sumamos 18 al número, el resultado es un número con las mismas cifras que el anterior pero en orden inverso. Halla este número.

Solución: Planteamiento: Supongamos que x es la cifra de las decenas e y, la de las unidades. Entonces, el número N de dos cifras que estamos buscando se expresa de la siguiente manera:

$$N = 10x + y$$

Según el enunciado del problema, la suma de las cifras es 8 y, por tanto,

$$x + y = 8$$

Por otro lado, el número

$$N + 18$$

tiene las mismas cifras que N pero están invertidas. Por tanto,

$$N + 18 = 10y + x$$

Ahora bien, como $N = 10x + y$, entonces

$$10x + y + 18 = 10y + x$$

De este modo, obtenemos el siguiente sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y = 8 \\ 10x + y + 18 = 10y + x \end{array} \right.$$

Resolución: El sistema es quivalente al siguiente

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y = 8 \\ x - y = -2 \end{array} \right.$$

Sumando ambas ecuaciones, se obtiene

$$\begin{aligned} 2x &= 6 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

y, por tanto,

$$y = 8 - 3 = 5$$

Por consiguiente, $N = 35$. Observa que

$$35 + 18 = 53$$

es decir, las cifras del número se invierten. ∎

Ejercicio 96 Dos trenes, que van en la misma dirección pero en sentidos opuestos, salen a la vez de las estaciones A y B. Se cruzan en la estación C, situada a 20 Km más próxima de B que de A. Después del encuentro, el tren procedente de A tarda 96 minutos en llegar a B, y el otro emplea 2 horas y media para llegar a A. ¿Cuáles son las velocidades de los trenes?

Solución: Para resolver este problema utilizaremos la relación

$$\text{espacio} = \text{ velocidad} \times \text{ tiempo}$$

Planteamiento: Supongamos que x e y son las velocidades de los dos trenes expresadas en Km/h. El tren que sale de A y va hacia B con una velocidad igual a x hace el recorrido de C a B en 1,6 horas (96 minutos), y el que sale de B y va hacia A con una velocidad igual a y, hace el recorrido de C a A en 2,5 horas (2 horas y media). Como la estación C está 20 Km más próxima de B que de A, se cumple

$$1{,}6x + 20 = 2{,}5y$$

Por otra parte, como según lo anterior el espacio de B a C es $1{,}6x$, y el de A a C es $4{,}1y$, y los dos trenes llegan a la misma hora a la estación C, se cumple

$$\frac{1{,}6x}{y} = \frac{2{,}5y}{x}$$

Por tanto, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{l} 1{,}6x + 20 = 2{,}5y \\ \frac{1{,}6x}{y} = \frac{2{,}5y}{x} \end{array} \right.$$

Resolución: El sistema es equivalente al siguiente:

$$\left\{ \begin{array}{l} 1{,}6x - 2{,}5y = -20 \\ 1{,}6x^2 - 2{,}5y^2 = 0 \end{array} \right.$$

Por sustitución, tenemos

$$x = \frac{2{,}5y - 20}{1{,}6}$$

y, por tanto,

$$\begin{array}{rcl} 1{,}6 \cdot \left(\dfrac{2{,}5y - 20}{1{,}6} \right)^2 - 2{,}5y^2 & = & 0 \\ \dfrac{6{,}25y^2 - 100y + 400}{1{,}6} - 2{,}5y^2 & = & 0 \\ 6{,}25y^2 - 100y + 400 - 4y^2 & = & 0 \\ 2{,}25y^2 - 100y + 400 & = & 0 \\ 0{,}09y^2 - 4y + 16 & = & 0 \end{array}$$

Resolviendo esta ecuación de segundo grado, obtenemos

$$y = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 5{,}76}}{0{,}18} = \frac{4 \pm 3{,}2}{0{,}18} = \left\{ \begin{array}{l} 40 \\ 4.\widehat{4} \end{array} \right.$$

y, entonces

$$\begin{array}{lll} y = 40 & \Longrightarrow & x = \frac{2{,}5 \cdot 40 - 20}{1{,}6} = 50 \\ y = 4.\widehat{4} & & x = \frac{2{,}5 \cdot 4.\widehat{4} - 20}{1{,}6} = -5.\widehat{5} \end{array}$$

De las dos soluciones obtenidas, descartamos la solución que tiene la x negativa. Por consiguiente, la velocidad del tren que va de A a B es de 50 Km/h, y la del tren que va de B a A es de 40 Km/h. ∎

Ejercicio 97 Tres jugadores acuerdan los siguiente: quien pierda una partida doblará el dinero que tengan los otros dos. Después de haber perdido cada uno una partida, cada jugador se retira con 8 euros. ¿Cuánto dinero tenían al principio?

Solución: Planteamiento: Llamemos A, B y C a los tres jugadores y supongamos que las cantidades de dinero que poseen al principio son x, y y z, respectivamente. Entonces, como cada jugador pierde una partida, obtenemos la siguiente información

	A	B	C
Pierde A	$x-y-z$	$2y$	$2z$
Pierde B	$2x-2y-2z$	$2y-(x-y-z+2z)$ $=3y-x-z$	$4z$
Pierde C	$4x-4y-4z$	$6y-2x-2z$	$4z-(3y-x-z+2x-2y-2z)$ $=7z-y-x$

Como al final todos tienen 8 euros, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 4x-4y-4z=8 \\ -2x+6y-2z=8 \\ -x-y+7z=8 \end{cases}$$

Resolución: Resolveremos este sistema por reducción. Así, tenemos

$$\begin{array}{rcrcrcr} 4x & - & 4y & - & 4z & = & 8 \\ -4x & - & 4y & + & 28z & = & 32 \\ \hline \diagup & - & 8y & + & 24z & = & 40 \end{array}$$

y

$$\begin{array}{rcrcrcr} -2x & + & 6y & - & 2z & = & 8 \\ 2x & + & 2y & - & 14z & = & -16 \\ \hline \diagup & & 8y & - & 16z & = & -8 \end{array}$$

Por tanto, el sistema dado es equivalente al siguiente

$$\begin{cases} -8y+24z=40 \\ 8y-16z=-8 \\ -x-y+7z=8 \end{cases}$$

Sumando las dos primeras ecuaciones, obtenemos

$$\begin{aligned} 8z &= 32 \\ z &= 4 \end{aligned}$$

Sustituyendo este valor en la segunda ecuación, obtenemos

$$\begin{aligned} 8y-64 &= -8 \\ 8y &= 56 \\ y &= 7 \end{aligned}$$

Finalmente, sustituyendo los valores obtenidos de y y z en la tercera ecuación, obtenemos

$$\begin{aligned} -x-7+28 &= 8 \\ x &= 13 \end{aligned}$$

Por tanto, los tres jugadores tenían al principio 13, 7 y 4 euros, respectivamente. ■

Ejercicio 98 La suma de las tres cifras de un número es 16. La suma de la primera y tercera es igual a la segunda, y si se permutan entre sí las cifras de las unidades y de las centenas, el número resultante es 10 veces menor que el propuesto. ¿Cuál es el número?

Solución: Planteamiento: Supongamos que x es la cifra de las centenas, y, la de las decenas, y z, la de las unidades. Entonces, el número N de tres cifras que estamos buscando se expresa de la siguiente manera:

$$N = 100x + 10y + z$$

Si la suma de las tres cifras es 16, se verifica

$$x + y + z = 16$$

Si la suma de la primera y tercera cifras es igual a la segunda, también se verifica

$$y = z + x$$

Por último, si se permutan las cifras de las unidades y centenas, el número que resulta es

$$100z + 10y + x$$

y, según el enunciado, este número es 10 veces menor que N, es decir,

$$100x + 10y + z = 10(100z + 10y + x)$$

Por tanto, obtenemos el sistema siguiente:

$$\begin{cases} x + y + z = 16 \\ y = z + x \\ 100x + 10y + z = 10(100z + 10y + x) \end{cases}$$

Resolución: Agrupando y simplificando términos en la tercera ecuación, obtenemos

$$\begin{cases} x + y + z = 16 \\ y = z + x \\ 10x - 10y - 111z = 0 \end{cases}$$

De la dos primeras ecuaciones, obtenemos

$$\begin{aligned} y + y &= 16 \\ 2y &= 16 \\ y &= 8 \end{aligned}$$

De la segunda y tercera ecuaciones, obtenemos

$$\begin{aligned} -10z - 111z &= 0 \\ -121z &= 0 \\ z &= 0 \end{aligned}$$

Finalmente, con estos dos resultados, de la primera ecuación, obtenemos

$$x = 16 - 8 = 8$$

Por tanto, el número es 880. ■

Ejercicio 99 Un padre tiene dos hijos, de los cuales uno tiene 6 años más que el otro. Dentro de 2 años, la edad del padre será el doble de la suma de las edades de sus hijos, y hace 6 años su edad era 4 veces la suma de las edades de sus hijos. ¿Cuál es la edad de cada uno?

Solución: Planteamiento: Supongamos que las edades actuales del padre y del hijo menor son respectivamente x e y. Entonces, la edad actual del hijo mayor es $y + 6$. Con la información de la siguiente tabla:

Edades	Actualmente	Dentro de 2 años	Hace 6 años
Padre	x	$x + 2$	$x - 6$
Hijo mayor	$y + 6$	$y + 8$	y
Hijo menor	y	$y + 2$	$y - 6$

podemos expresar las dos condiciones que señala el enunciado: Si dentro de 2 años, la edad del padre es el doble de la suma de las edades de sus hijos, entonces se debe cumplir la siguiente ecuación

$$x + 2 = 2(y + 8 + y + 2)$$

y, si hace 6 años la edad del padre es 4 veces la suma de las edades de sus hijos, también se ha de cumplir la ecuación

$$x - 6 = 4(y + y - 6)$$

Por tanto, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + 2 = 2(2y + 10) \\ x - 6 = 4(2y - 6) \end{cases}$$

Resolución: Quitando los paréntesis y agrupando términos, obtenemos

$$\begin{cases} x - 4y = 18 \\ x - 8y = -18 \end{cases}$$

Entonces, por igualación se obtiene

$$\begin{aligned} 18 + 4y &= -18 + 8y \\ 4y &= 36 \\ y &= 9 \end{aligned}$$

y, por tanto,

$$x = 18 + 4 \cdot 9 = 54$$

Por consiguiente, la edad del padre es 54, la del hijo mayor, 15, y la del menor, 9. ∎

Ejercicio 100 Tres tubos, A, B, C, pueden echar agua en un cisterna o sacarla de ella. Si A y B la echan y C la saca, la cisterna se llena en 3 horas. Si A y C la echan y B la saca, la cisterna se llena en 2 horas. Si los tres tubos la echan juntos, la cisterna se llena en 1 hora. ¿Cuánto tiempo empleará cada tubo en llenarla solo?

Solución: Planteamiento: Supongamos que los tiempos, expresados en horas, que emplean A, B y C en llenar cada uno por separado la cisterna son x, y y z, respectivamente. Entonces, en una hora, A llena $\frac{1}{x}$ de la capacidad de la cisterna, B, $\frac{1}{y}$, y C, $\frac{1}{z}$. Si los tres tubos echan agua juntos, sabemos que la cisterna se llena en una hora y, por tanto, se cumple

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{1}$$

Si A y B echan agua y C la saca, sabemos que la cisterna se llena en 3 horas y, por tanto, se cumple

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = \frac{1}{3}$$

Por último, si A y C echan agua y B la saca, sabemos que la cisterna se llena en 2 horas y, por tanto, se cumple

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{z} - \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$$

Por consiguiente, obtenemos el siguiente sistema de tres ecuaciones:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{z} - \frac{1}{y} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Resolución: Mediante el cambio

$$\begin{cases} \frac{1}{x} = a \\ \frac{1}{y} = b \\ \frac{1}{z} = c \end{cases}$$

el sistema se transforma de la siguiente manera:

$$\left\{\begin{array}{l} a+b+c=1 \\ a+b-c=\frac{1}{3} \\ a-b+c=\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

Resolviéndolo por reducción, obtenemos

$$\begin{array}{rcrcrcr} a & + & b & + & c & = & 1 \\ -a & - & b & + & c & = & -\frac{1}{3} \\ \hline \diagup & & \diagup & + & 2c & = & \frac{2}{3} \end{array}$$

luego,

$$c=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

y

$$\begin{array}{rcrcrcr} a & + & b & + & c & = & 1 \\ -a & + & b & - & c & = & -\frac{1}{2} \\ \hline \diagup & & 2b & & & = & \frac{1}{2} \end{array}$$

luego,

$$b=\frac{1}{4}$$

Finalmente,

$$a=1-\frac{1}{4}-\frac{1}{3}=\frac{5}{12}$$

Por tanto, deshaciendo el cambio, obtenemos

$$\left\{\begin{array}{l} x=\frac{1}{a}=\frac{12}{5}=2{,}4 \\ y=\frac{1}{b}=4 \\ z=\frac{1}{c}=3 \end{array}\right.$$

es decir, A llena la cisterna en 2 horas y 24 minutos, B, en 4, y C, en 3. ■

6. Inecuaciones y sistemas de inecuaciones

Ejercicio 101 ¿Cuál es el conjunto solución en $\mathbb{R}$ de las siguientes inecuaciones?

a)
$$2(x+1)+x\leq 3x+2$$

b)
$$x+\frac{1}{2}\leq\frac{1}{2}(2x-1)$$

c)
$$2x>\frac{1}{3}\left(5x-\frac{1}{2}\right)$$

Solución: (a) Quitando el paréntesis y operando, de la inecuación

$$2(x+1)+x\leq 3x+2$$

se obtiene

$$\begin{array}{rcl} 2x+2+x & \leq & 3x+2 \\ 3x+2 & \leq & 3x+2 \end{array}$$

Transponiendo términos y operando, obtenemos

$$\begin{array}{rcl} 3x-3x & \leq & 2-2 \\ 0 & \leq & 0 \end{array}$$

Esta desigualadad es verdadera, por lo que el conjunto solución es $\mathbb{R}$: todo número real es solución de la inecuación.
(b) Quitando el paréntesis, de la inecuación

$$x + \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2}(2x-1)$$

se obtiene

$$x + \frac{1}{2} \leq x - \frac{1}{2}$$

Transponiendo términos y operando, obtenemos

$$\begin{array}{rcl} x - x & \leq & -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \\ 0 & \leq & -1 \end{array}$$

Esta desigualdad es falsa, por lo que el conjunto solución es el conjunto vacío: no hay soluciones en la inecuación.
(c) Quitando el paréntesis, de la inecuación

$$2x > \frac{1}{3}\left(5x - \frac{1}{2}\right)$$

se obtiene

$$2x > \frac{5x}{3} - \frac{1}{6}$$

Multiplicando los dos miembros de la inecuación por 6, obtenemos

$$12x > 10x - 1$$

Transponiendo términos y operando, se obtiene

$$\begin{array}{rcl} 12x - 10x & > & -1 \\ 2x & > & -1 \\ x & > & -\frac{1}{2} \end{array}$$

Por tanto, el conjunto solución es

$$\left\{x \in \mathbb{R} : x > -\frac{1}{2}\right\} = \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

■

Ejercicio 102 Resuelve la siguiente inecuación

$$\frac{8x+5}{9} - \frac{2x+23}{6} \leq \frac{x+4}{4} - \frac{x}{12}$$

y encuentra el conjunto solución en: (a) $\mathbb{N}$, (b) $\mathbb{Z}$, (c) $\mathbb{Q}$, y (d) $\mathbb{R}$.

Solución: Multiplicando los dos miembros de la inecuación por $36 = m.c.m.(4, 6, 9, 12)$, se obtiene

$$4(8x+5) - 6(2x+23) \leq 9(x+4) - 3x$$

Quitando los paréntesis y operando, se obtiene

$$\begin{array}{rcl} 32x + 20 - 12x - 138 & \leq & 9x + 36 - 3x \\ 20x - 118 & \leq & 6x + 36 \end{array}$$

Transponiendo términos y operando, obtenemos

$$\begin{array}{rcl} 20x - 6x & \leq & 118 + 36 \\ 14x & \leq & 154 \end{array}$$

Multiplicando los dos miembros de la inecuación por $\frac{1}{14}$, obtenemos

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{14x}{14} & \leq & \dfrac{154}{14} \\ x & \leq & 11 \end{array}$$

Por tanto, la inecuación dada es equivalente a

$$x \leq 11$$

(a) El conjunto solución en $\mathbb{N}$ es

$$\{x \in \mathbb{N} : x \leq 11\} = \{1, 2, 3, ..., 11\}$$

(b) El conjunto solución en $\mathbb{Z}$ es

$$\{x \in \mathbb{Z} : x \leq 11\} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ..., 11\}$$

(c) El conjunto solución en $\mathbb{Q}$ es

$$\{x \in \mathbb{Q} : x \leq 11\} = \left\{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, p \leq 11q\right\}$$

(d) El conjunto solución en $\mathbb{R}$ es

$$\{x \in \mathbb{R} : x \leq 11\} = (-\infty, 11]$$

■

Ejercicio 103 Resuelve las siguientes inecuaciones y da el conjunto solución en $\mathbb{R}$:

a)

$$4x + 9 - 2(3x - 5) \geq \frac{x + 1}{3} - 1$$

b)

$$\frac{3 - 5x}{3} - \frac{1 - 8x}{4} - \frac{23 - 10x}{12} < 0$$

c)

$$(3x + 1)^2 - 5x^2 + 2x \leq (2x - 1)^2$$

d)

$$\frac{3x - 1}{-2} + \frac{x + 3}{-3} < 16$$

Solución: (a) Quitando el paréntesis y operando en la inecuación

$$4x + 9 - 2(3x - 5) \geq \frac{x + 1}{3} - 1$$

se obtiene

$$\begin{array}{rcl} 4x + 9 - 6x + 10 & \geq & \dfrac{x + 1}{3} - 1 \\ -2x + 19 & \geq & \dfrac{x + 1}{3} - 1 \end{array}$$

Multiplicando ambos miembros de la inecuación por 3 y operando, obtenemos

$$\begin{array}{rcl} -6x + 57 & \geq & x + 1 - 3 \\ -6x + 57 & \geq & x - 2 \end{array}$$

Transponiendo términos y operando, obtenemos

$$\begin{array}{rcl} -6x - x & \geq & -2 - 57 \\ -7x & \geq & -59 \end{array}$$

Multiplicando ahora por $-\frac{1}{7}$, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{7x}{7} &\leq \frac{59}{7} \\ x &\leq \frac{59}{7} \end{aligned}$$

Por tanto, la inecuación dada es equivalente a

$$x \leq \frac{59}{7}$$

y, como consecuencia, el conjunto de soluciones en $\mathbb{R}$ es

$$\left(-\infty, \frac{59}{7}\right]$$

(b) Multiplicando por $12 = m.c.m.(3, 4, 12)$ los dos miembros de la inecuación

$$\frac{3-5x}{3} - \frac{1-8x}{4} - \frac{23-10x}{12} < 0$$

se obtiene

$$4(3-5x) - 3(1-8x) - 23 + 10x < 0$$

Quitando los paréntesis y operando, obtenemos

$$\begin{aligned} 12 - 20x - 3 + 24x - 23 + 10x &< 0 \\ 14x - 14 &< 0 \end{aligned}$$

Transponiendo términos y multiplicando por $\frac{1}{14}$, se obtiene

$$\begin{aligned} 14x &< 14 \\ \frac{14x}{14} &< \frac{14}{14} \\ x &< 1 \end{aligned}$$

Por tanto, la inecuación dada es equivalente a

$$x < 1$$

y, como consecuencia, el conjunto de soluciones en $\mathbb{R}$ es

$$(-\infty, 1)$$

(c) Quitando los paréntesis de la inecuación

$$(3x+1)^2 - 5x^2 + 2x \leq (2x-1)^2$$

se obtiene

$$9x^2 + 6x + 1 - 5x^2 + 2x \leq 4x^2 - 4x + 1$$

Agrupando términos, obtenemos

$$4x^2 + 8x + 1 \leq 4x^2 - 4x + 1$$

Transponiendo términos y operando, obtenemos

$$\begin{aligned} 4x^2 + 8x - 4x^2 + 4x &\leq 1 - 1 \\ 12x &\leq 0 \end{aligned}$$

Diviendo los dos miembros de la inecuación por 12, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{12x}{12} &\leq \frac{0}{12} \\ x &\leq 0 \end{aligned}$$

Por tanto, la inecuación dada es equivalente a

$$x \leq 0$$

y, como consecuencia, el conjunto de soluciones en $\mathbb{R}$ es

$$(-\infty, 0]$$

(d) Multiplicando los dos miembros de la inecuación

$$\frac{3x-1}{-2} + \frac{x+3}{-3} < 16$$

por $-6 = m.c.m.(-2, -3)$, obtenemos

$$3(3x-1) + 2(x+3) > -96$$

Quitando los paréntesis y operando, obtenemos

$$\begin{aligned} 9x - 3 + 2x + 6 &> -96 \\ 11x + 3 &> -96 \end{aligned}$$

Transponiendo términos y operando, se obtiene

$$\begin{aligned} 11x &> -96 - 3 \\ 11x &> -99 \end{aligned}$$

Dividiendo los dos miembros de la inecuación por 11, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{11x}{11} &> -\frac{99}{11} \\ x &> -9 \end{aligned}$$

Por tanto, la inecuación dada es equivalente a

$$x > -9$$

y, como consecuencia, el conjunto de soluciones en $\mathbb{R}$ es

$$(-9, +\infty)$$

■

Ejercicio 104 Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones y da el conjunto de soluciones en $\mathbb{R}$:

a)

$$\begin{cases} 3 - 2x \geq 7x + 12 \\ 2x + 3 < 3x - 15 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} 4 + 2x < 3x - 4 < 8 + x \\ 3x - 4 < 4x + 1 \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} \frac{5-4x}{4} + \frac{9x-21}{2} \geq 2 + \frac{10x-37}{4} \\ x + \frac{3x-2}{5} - \frac{x-1}{3} < 3 + \frac{4x-1}{15} \end{cases}$$

d)

$$\begin{cases} 9x(x+3) - 1 \leq 5 + (3x-1)^2 \\ 6(x+13) \leq \frac{x+1}{2} - \frac{x-1}{3} \end{cases}$$

Solución: Para encontrar la solución de un sistema, hay que resolver cada inecuación del sistema por separado y, luego, calcular la intersección de los conjuntos solución de cada una de las inecuaciones.
(a) De la primera inecuación del sistema

$$\begin{cases} 3-2x \geq 7x+12 \\ 2x+3 < 3x-15 \end{cases}$$

obtenemos

$$\begin{aligned} 3-2x &\geq 7x+12 \\ -2x-7x &\geq 12-3 \\ -9x &\geq 9 \\ 9x &\leq -9 \\ x &\leq -1 \end{aligned}$$

cuya solución es
$$\{x \in \mathbb{R} : x \leq -1\} = (-\infty, -1]$$
y, de la segunda, se obtiene

$$\begin{aligned} 2x+3 &< 3x-15 \\ 2x-3x &< -15-3 \\ -x &< -18 \\ x &> 18 \end{aligned}$$

cuya solución es
$$\{x \in \mathbb{R} : x > 18\} = (18, +\infty)$$
Luego, el sistema dado es equivalente al siguiente:

$$\begin{cases} x \leq -1 \\ x > 18 \end{cases}$$

y su solución es
$$(-\infty, -1] \cap (18, +\infty) = \emptyset$$
es decir, el sistema no tiene soluciones.
(b) De hecho el sistema
$$\begin{cases} 4+2x < 3x-4 < 8+x \\ 3x-4 < 4x+1 \end{cases}$$
está formado por tres inecuaciones

$$\begin{cases} 4+2x < 3x-4 \\ 3x-4 < 8+x \\ 3x-4 < 4x+1 \end{cases}$$

De la primera inecuación, obtenemos

$$\begin{aligned} 4+2x &< 3x-4 \\ 2x-3x &< -4-4 \\ -x &< -8 \\ x &> 8 \end{aligned}$$

y su conjunto solución es
$$\{x \in \mathbb{R} : x > 8\} = (8, +\infty)$$
De la segunda inecuación, obtenemos

$$\begin{aligned} 3x-4 &< 8+x \\ 3x-x &< 8+4 \\ 2x &< 12 \\ x &< 6 \end{aligned}$$

y su conjunto solución es

$$\{x \in \mathbb{R} : x < 6\} = (-\infty, 6)$$

Finalmente, de la tercera inecuación, obtenemos

$$\begin{aligned} 3x - 4 &< 4x + 1 \\ 3x - 4x &< 1 + 4 \\ -x &< 5 \\ x &> -5 \end{aligned}$$

y su conjunto solución es

$$\{x \in \mathbb{R} : x > -5\} = (-5, \infty)$$

Por tanto, el sistema dado es equivalente al siguiente:

$$\begin{cases} x > 8 \\ x < 6 \\ x > -5 \end{cases}$$

que no tiene soluciones, pues

$$(8, +\infty) \cap (-\infty, 6) \cap (-5, \infty) = \emptyset$$

(c) De la primera inecuación del sistema

$$\begin{cases} \frac{5-4x}{4} + \frac{9x-21}{2} \geq 2 + \frac{10x-37}{4} \\ x + \frac{3x-2}{5} - \frac{x-1}{3} < 3 + \frac{4x-1}{15} \end{cases}$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{5-4x}{4} + \frac{9x-21}{2} &\geq 2 + \frac{10x-37}{4} \\ 5 - 4x + 2(9x-21) &\geq 8 + 10x - 37 \\ 5 - 4x + 18x - 42 &\geq 10x - 29 \\ 14x - 10x &\geq -29 + 37 \\ 4x &\geq 8 \\ x &\geq 2 \end{aligned}$$

cuyo conjunto solución es

$$\{x \in \mathbb{R} : x \geq 2\} = [2, +\infty)$$

De la segunda inecuación, se obtiene

$$\begin{aligned} x + \frac{3x-2}{5} - \frac{x-1}{3} &< 3 + \frac{4x-1}{15} \\ 15x + 3(3x-2) - 5(x-1) &< 45 + 4x - 1 \\ 15x + 9x - 6 - 5x + 5 &< 44 + 4x \\ 19x - 4x &< 44 + 1 \\ 15x &< 45 \\ x &< 3 \end{aligned}$$

cuyo conjunto solución es

$$\{x \in \mathbb{R} : x < 3\} = (-\infty, 3)$$

Por tanto, el sistema dado es equivalente al siguiente

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ x < 3 \end{cases}$$

y su solución es

$$[2, +\infty) \cap (-\infty, 3) = [2, 3)$$

(d) De la primera inecuación del sistema

$$\begin{cases} 9x(x+3)-1 \leq 5+(3x-1)^2 \\ 6(x+13) \leq \frac{x+1}{2} - \frac{x-1}{3} \end{cases}$$

obtenemos

$$\begin{aligned} 9x(x+3)-1 &\leq 5+(3x-1)^2 \\ 9x^2+27x-1 &\leq 5+9x^2-6x+1 \\ 9x^2+27x-9x^2+6x &\leq 6+1 \\ 33x &\leq 7 \\ x &\leq \frac{7}{33} \end{aligned}$$

y su conjunto solución es

$$\left\{x \in \mathbb{R} : x \leq \frac{7}{33}\right\} = \left(-\infty, \frac{7}{33}\right]$$

De la segunda inecuación, obtenemos

$$\begin{aligned} 6(x+13) &\leq \frac{x+1}{2} - \frac{x-1}{3} \\ 6x+78 &\leq \frac{x+1}{2} - \frac{x-1}{3} \\ 36x+468 &\leq 3(x+1)-2(x-1) \\ 36x+468 &\leq 3x+3-2x+2 \\ 36x-x &\leq 5-468 \\ 35x &\leq -463 \\ x &\leq -\frac{463}{35} \end{aligned}$$

y su conjunto solución es

$$\left\{x \in \mathbb{R} : x \leq -\frac{463}{35}\right\} = \left(-\infty, -\frac{463}{35}\right]$$

Por tanto, el sistema dado es equivalente al siguiente:

$$\begin{cases} x \leq \frac{7}{33} \\ x \leq -\frac{463}{35} \end{cases}$$

y su solución es

$$\left(-\infty, \frac{7}{33}\right] \cap \left(-\infty, -\frac{463}{35}\right] = \left(-\infty, -\frac{463}{35}\right]$$

■

Ejercicio 105 Escribe inecuaciones que tengan como solución los conjuntos siguientes:

$$a)\quad (-\infty, 1] \qquad b)\quad (2,4]$$

$$c)\quad [-1,2] \qquad d)\quad [-1,+\infty)$$

Solución: (a) Como

$$(-\infty, 1] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 1\}$$

podemos expresar este conjunto mediante la siguiente inecuación

$$x \leq 1$$

o cualquier otra que sea equivalente a ella.

(b) Como

$$(2,4] = \{x \in \mathbb{R} : 2 < x \leq 4\}$$

podemos expresar este conjunto mediante el siguiente sistema de inecuaciones

$$\begin{cases} x > 2 \\ x \leq 4 \end{cases}$$

o cualquier otro que sea equivalente a él.
(c) Como

$$[-1, 2] = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 2\}$$

podemos expresar este conjunto mediante el siguiente sistema de inecuaciones

$$\begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq 2 \end{cases}$$

o cualquier otro que sea equivalente a él.
(d) Como

$$[-1, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq -1\}$$

podemos expresar este conjunto mediante la siguiente inecuación

$$x \geq -1$$

o cualquier otra que sea equivalente a ella. ■

Ejercicio 106 Resuelve las siguientes inecuaciones:

a)
$$x^2 - 6x + 8 < 0$$

b)
$$x^2 - 3x - 10 \geq 0$$

c)
$$\frac{x-5}{x} + 5 \geq x$$

d)
$$\frac{x-1}{x+1} > \frac{x+1}{x-1}$$

e)
$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \geq 0$$

Solución: (a) Resolveremos la siguiente inecuación de segundo grado

$$x^2 - 6x + 8 < 0$$

por el método algebraico. Como el primer miembro es un polinomio, podemos descomponerlo en factores y obtenemos

$$(x-2)(x-4) < 0$$

Por las reglas de los signos, el producto será negativo cuando los signos de los dos factores sean distintos. Como consecuencia, tenemos los dos casos siguientes:

$$\begin{cases} x - 2 > 0 \\ x - 4 < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x > 2 \\ x < 4 \end{cases}$$

o

$$\begin{cases} x - 2 < 0 \\ x - 4 > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x < 2 \\ x > 4 \end{cases}$$

De este modo hemos reducido la inecuación de segundo grado a un par de sistemas de inecuaciones de primer grado. La solución del primero es

$$(2, +\infty) \cap (-\infty, 4) = (2, 4)$$

y la del segundo

$$(-\infty, 2) \cap (4, +\infty) = \emptyset$$

Por tanto, la solución de la inecuación de segundo grado es

$$(2, 4) \cup \emptyset = (2, 4)$$

(b) Ahora resolveremos la siguiente inecuación de segundo grado

$$x^2 - 3x - 10 \geq 0$$

por el método gráfico. Para ello, consideremos la función cuadrática

$$f(x) = x^2 - 3x - 10$$

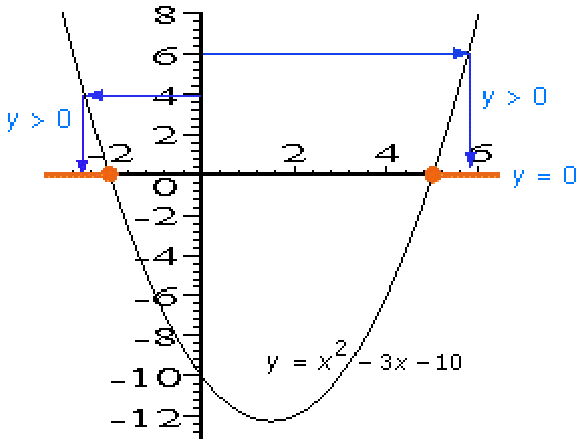
cuya gráfica es una parábola de ecuación

$$y = x^2 - 3x - 10$$

Según la inecuación, interesa tomar los valores de x para los cuales

$$y \geq 0$$

Según el gráfico de la figura



esta condición se corresponde con los puntos del conjunto

$$(-\infty, -2] \cup [5, +\infty)$$

siendo -2 y 5 las abscisas de los puntos de corte de la parábola con el eje X, es decir, los puntos que satisfacen la condición $y = 0$.
(c) En la siguiente inecuación

$$\frac{-x-5}{x} + 5 \geq x$$

no podemos quitar el denominador multiplicando por x, como si se tratara de una ecuación, ya que la inecuación resultante no sería equivalente a la considerada, pues, x puede tomar tanto valores positivos como negativos. En su lugar, pasaremos todos los términos a uno de los dos miembros de la inecuación y efectuaremos operaciones en dicho miembro. Así, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{-x-5}{x} + 5 - x &\geq 0 \\ \frac{-x-5+5x-x^2}{x} &\geq 0 \\ \frac{-x^2+4x-5}{x} &\geq 0 \end{aligned}$$

y, multiplicando por -1, resulta

$$\frac{x^2-4x+5}{x} \leq 0$$

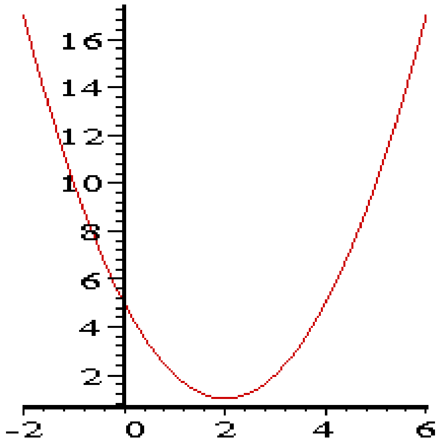
Para determinar cuándo es negativo o cero este cociente, analizaremos el signo del numerador y del denominador. Por las reglas de los signos, el cociente será negativo cuando los signos de los dos términos sean distintos. Como consecuencia, tenemos los dos casos siguientes:

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 5 \geq 0 \\ x < 0 \end{cases}$$

o

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 5 \leq 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

Observa que el cociente es cero cuando el denominador es cero. Como el polinomio $x^2 - 4x + 5$ no tiene raíces reales, resolveremos las inecuaciones de segundo grado gráficamente. En la siguiente figura hemos dibujado la parábola $y = x^2 - 4x + 5$



y nos damos cuenta de que su gráfica está por encima del eje X, lo que significa que $y > 0$ para todo valor de x. De este modo, la inecuación

$$y = x^2 - 4x + 5 \geq 0$$

tiene como conjunto solución $\mathbb{R}$, mientras que la inecuación

$$y = x^2 - 4x + 5 \leq 0$$

no tiene soluciones. Por tanto, la solución del sistema

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 5 \geq 0 \\ x < 0 \end{cases}$$

es

$$\mathbb{R} \cap (-\infty, 0) = (-\infty, 0)$$

y la solución del sistema

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 5 \leq 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

es

$$\emptyset \cap (0, +\infty) = \emptyset$$

Por consiguiente, la solución de la inecuación original es

$$(-\infty, 0)$$

(d) En la siguiente inecuación

$$\frac{x-1}{x+1} > \frac{x+1}{x-1}$$

no podemos quitar los denominadores multiplicando por $(x+1)(x-1)$, como si se tratara de una ecuación, ya que la inecuación resultante no sería equivalente a la considerada, pues, $(x+1)(x-1)$ puede tomar tanto valores positivos como negativos. En su lugar, pasaremos todos los términos a uno de los dos miembros de la inecuación y efectuaremos operaciones en dicho miembro. Así, tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{x-1}{x+1}-\frac{x+1}{x-1} &> 0\\
\frac{(x-1)^2-(x+1)^2}{(x+1)(x-1)} &> 0\\
\frac{x^2-2x+1-(x^2+2x+1)}{x^2-1} &> 0\\
\frac{-4x}{x^2-1} &> 0
\end{aligned}$$

y, multiplicando por -1, resulta

$$\frac{4x}{x^2-1}<0$$

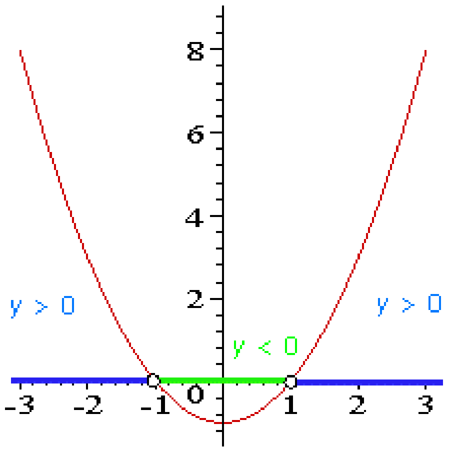
Para determinar cuándo es negativo este cociente, analizaremos el signo del numerador y del denominador. Por las reglas de los signos, el cociente será negativo cuando los signos de los dos términos sean distintos. Como consecuencia, tenemos los dos casos siguientes:

$$\left\{\begin{array}{l} 4x>0\\ x^2-1<0\end{array}\right.$$

o

$$\left\{\begin{array}{l} 4x<0\\ x^2-1>0\end{array}\right.$$

Dibujando la parábola $y=x^2-1$,



vemos que

$$y=x^2-1<0 \iff -1<x<1$$

y

$$y=x^2-1>0 \iff x>1 \text{ o bien } x<-1$$

Por tanto, los sistemas anteriores son equivalentes a los siguientes: el primero a

$$\left\{\begin{array}{l} x>0\\ -1<x<1\end{array}\right.$$

y el segundo a los dos siguientes:

$$\left\{\begin{array}{l} x<0\\ x>1\end{array}\right.$$

y

$$\left\{\begin{array}{l} x<0\\ x<-1\end{array}\right.$$

La solución del primero es

$$(0,1)$$

el segundo no tiene soluciones y la solución del tercero es

$$(-\infty, -1)$$

Por consiguiente, la solución de la inecuación original es

$$(0,1) \cup \emptyset \cup (-\infty, -1) = (-\infty, -1) \cup (0,1)$$

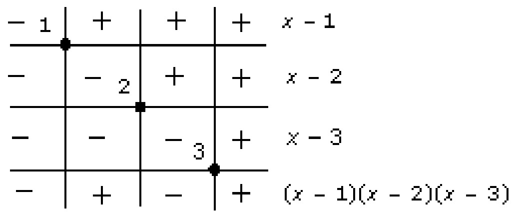
(e) Resolveremos la siguiente inecuación de tercer grado

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \geq 0$$

por el método algebraico. Como el primer miembro es un polinomio, podemos descomponerlo en factores y obtenemos

$$(x-1)(x-2)(x-3) \geq 0$$

Para determinar cuándo es positivo o cero este producto de tres factores, analizaremos el signo de cada factor mediante la siguiente representación gráfica:

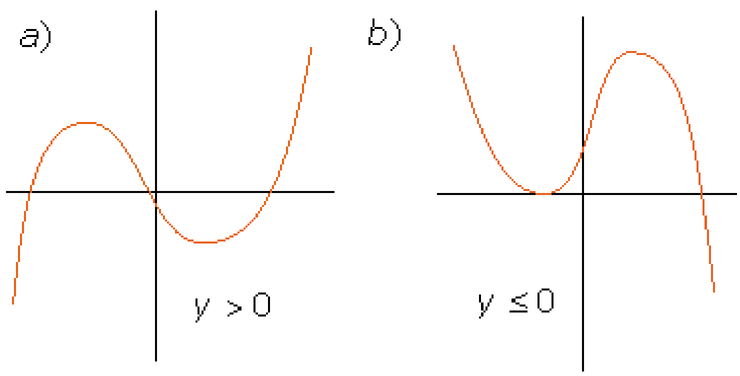


En la cuarta fila de la figura se ha obtenido el signo del producto $(x-1)(x-2)(x-3)$, según las reglas de los signos. Por tanto, el producto de los tres factores es positivo o cero cuando x toma valores del conjunto siguiente

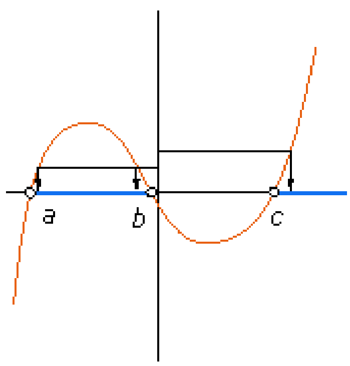
$$[1,2] \cup [3, +\infty)$$

que es la solución de la inecuación. Observa que se han incluido los extremos porque son los puntos en los que el producto es cero. ■

Ejercicio 107 En las siguientes gráficas, señalar en el eje X los puntos que satisfacen la condición que se indica:



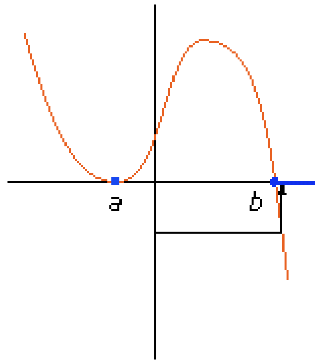
Solución: (a) Observando la siguiente figura



es evidente que $y > 0$ para todos los valores de x del conjunto

$$(a, b) \cup (c, +\infty)$$

(b) Observando la siguiente figura



es evidente que $y \leq 0$ para todos los valores de x del conjunto

$$\{a\} \cup [b, +\infty)$$

■

Ejercicio 108 Resolver los siguientes sistemas de inecuaciones:

a)
$$\begin{cases} x^2 \leq 6x + 7 \\ 2x - 3 < 4 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 2x^2 - 3x - 5 > 0 \\ x - 1 < 3x + 2 \end{cases}$$

Solución: Para encontrar la solución de un sistema, hay que resolver cada inecuación del sistema por separado y, luego, calcular la intersección de los conjuntos solución de cada una de las inecuaciones.
(a) De la segunda inecuación del sistema

$$\begin{cases} x^2 \leq 6x + 7 \\ 2x - 3 < 4 \end{cases}$$

obtenemos

$$\begin{aligned} 2x &< 4 + 3 \\ 2x &< 7 \\ x &< \frac{7}{2} \end{aligned}$$

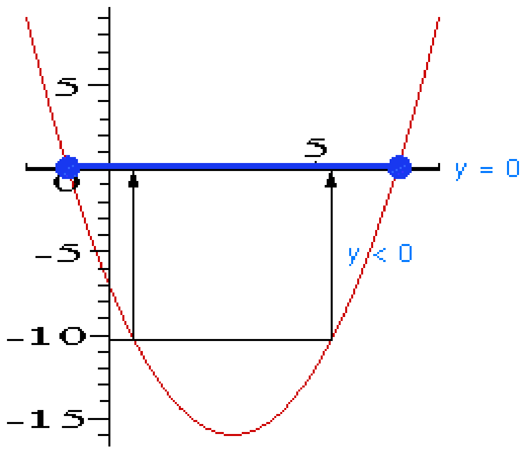
y su solución es

$$\left(-\infty, \frac{7}{2}\right)$$

La primera inecuación

$$x^2 - 6x - 7 \leq 0$$

es de segundo grado y la resolveremos gráficamente. Dibujando la parábola $y = x^2 - 6x - 7$,



observamos que

$$y = x^2 - 6x - 7 \leq 0$$

cuando x toma los valores del conjunto

$$[-1, 7]$$

siendo -1 y 7 los puntos del eje X en los que

$$y = x^2 - 6x - 7 = 0$$

Por consiguiente, la solución del sistema dado es

$$\left(-\infty, \frac{7}{2}\right) \cap [-1, 7] = \left[-1, \frac{7}{2}\right)$$

(b) De la segunda inecuación del sistema

$$\begin{cases} 2x^2 - 3x - 5 > 0 \\ x - 1 < 3x + 2 \end{cases}$$

obtenemos

$$\begin{array}{rcl} x - 3x & < & 2 + 1 \\ -2x & < & 3 \\ 2x & > & -3 \\ x & > & -\dfrac{3}{2} \end{array}$$

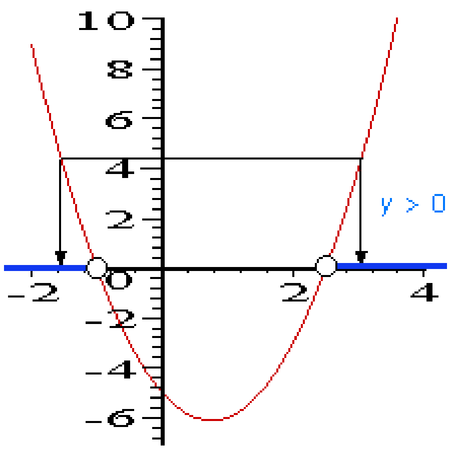
y su solución es

$$\left(-\frac{3}{2}, +\infty\right)$$

La primera inecuación

$$2x^2 - 3x - 5 > 0$$

es de segundo grado y la resolveremos gráficamente. Dibujando la parábola $y = 2x^2 - 3x - 5$



observamos que

$$y = x^2 - 6x - 7 > 0$$

cuando x toma los valores del conjunto

$$(-\infty, -1) \cup \left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$$

siendo -1 y $\frac{5}{2}$ los puntos del eje X en los que

$$y = x^2 - 6x - 7 = 0$$

Por consiguiente, la solución del sistema dado es

$$\left[(-\infty, -1) \cup \left(\frac{5}{2}, +\infty\right)\right] \cap \left(-\frac{3}{2}, +\infty\right) = \left(-\frac{3}{2}, -1\right) \cup \left(\frac{5}{2}, +\infty\right)$$

■

Ejercicio 109 Resuelve las siguientes inecuaciones lineales:

a)
$$3x - 2y - 6 \geq 0$$

b)
$$\frac{2x - y}{3} - \frac{2y - x}{6} < 1$$

c)
$$2x + y - 3 < 0$$

Solución: (a) La inecuación

$$3x - 2y - 6 \geq 0$$

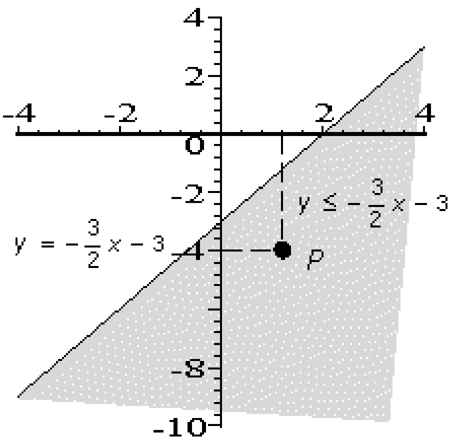
es equivalente a la siguiente:

$$\begin{aligned} -2y &\geq 6 - 3x \\ 2y &\leq 3x - 6 \\ y &\leq \frac{3}{2}x - 3 \end{aligned}$$

Mediante un tabla con dos valores, representamos la recta

$$y = \frac{3}{2}x - 3$$

y resulta lo que muestra la siguiente figura.



Como que las coordenadas del punto P satisfacen

$$y \leq \frac{3}{2}x - 2$$

el semiplano solución es el que se indica en la figura. Observa que la solución incluye los puntos de la recta y, por esta razón, la recta se ha dibujado con un trazo continuo.
Podemos también deducir esta solución viendo que el punto $(0, 0)$ no satisface la inecuación, pues

$$3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 - 6 = -6 \not\geq 0$$

y, por tanto, la región en la que no se encuentra este punto es la solución de la inecuación.
(b) La inecuación

$$\frac{2x - y}{3} - \frac{2y - x}{6} < 1$$

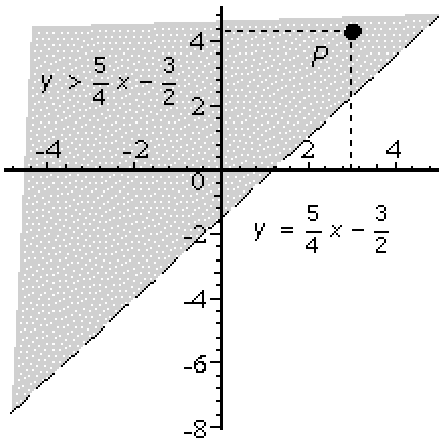
es equivalente a la siguiente:

$$\begin{array}{rcl} 2(2x - y) - 2y + x & < & 6 \\ 4x - 2y - 2y + x & < & 6 \\ 5x - 4y & < & 6 \\ -4y & < & 6 - 5x \\ 4y & > & 5x - 6 \\ y & > & \frac{5}{4}x - \frac{3}{2} \end{array}$$

Mediante un tabla con dos valores, representamos la recta

$$y = \frac{5}{4}x - \frac{3}{2}$$

y resulta lo que muestra la siguiente figura.



Como que las coordenadas del punto P satisfacen

$$y > \frac{5}{4}x - \frac{3}{2}$$

el semiplano solución es el que se indica en la figura. Observa que la solución no incluye los puntos de la recta y, por esta razón, la recta se ha dibujado con un trazo discontinuo.
Podemos también deducir esta solución viendo que el punto $(0, 0)$ satisface la inecuación, pues

$$5 \cdot 0 - 4 \cdot 0 = 0 < 6$$

y, por tanto, la región en la que se encuentra este punto es la solución de la inecuación.
(c) La inecuación

$$2x + y - 3 < 0$$

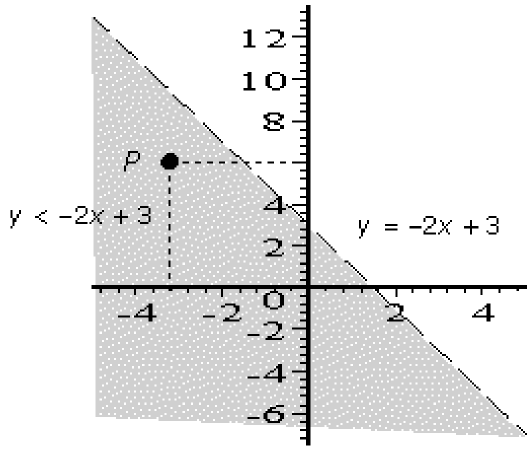
es equivalente a la siguiente:

$$y < -2x + 3$$

Mediante un tabla con dos valores, representamos la recta

$$y = -2x + 3$$

y resulta lo que muestra la siguiente figura.



Como que las coordenadas del punto P satisfacen

$$y < -2x + 3$$

el semiplano solución es el que se indica en la figura. Observa que la solución no incluye los puntos de la recta y, por esta razón, la recta se ha dibujado con un trazo discontinuo.
Podemos también deducir esta solución viendo que el punto $(0, 0)$ satisface la inecuación, pues

$$2 \cdot 0 + 0 - 3 = -3 < 0$$

y, por tanto, la región en la que se encuentra este punto es la solución de la inecuación. ■

Ejercicio 110 Resuelve los siguientes sistemas de inecuaciones lineales:

a)
$$\begin{cases} x + y - 1 > 0 \\ y < 2 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x - y + 1 \geq 0 \\ 3x + y > 2 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} x + y - 5 < 0 \\ 3x - y - 1 < 0 \\ 2x + y + 3 > 0 \end{cases}$$

Solución: Para encontrar la solución de un sistema de inecuaciones de primer grado, primero se halla por separado las soluciones de todas las inecuaciones que forman el sistema, y, después, se encuentra gráficamente la intersección de las regiones solución obtenidas. Para calcular esta intersección marcaremos las regiones que no son solución de las respectivas inecuaciones, de este modo la región que queda sin marcar es la solución gráfica del sistema.
(a) De la primera inecuación del sistema

$$\begin{cases} x + y - 1 > 0 \\ y < 2 \end{cases}$$

obtenemos

$$y > -x + 1$$

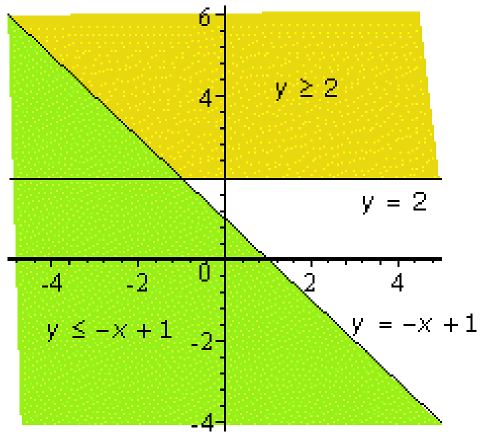
De este modo, el sistema original es equivalente al siguiente:

$$\left\{\begin{array}{l} y > -x+1 \\ y < 2 \end{array}\right.$$

Mediante un tabla con dos valores, representamos las rectas

$$\begin{array}{l} y = -x+1 \\ y = 2 \end{array}$$

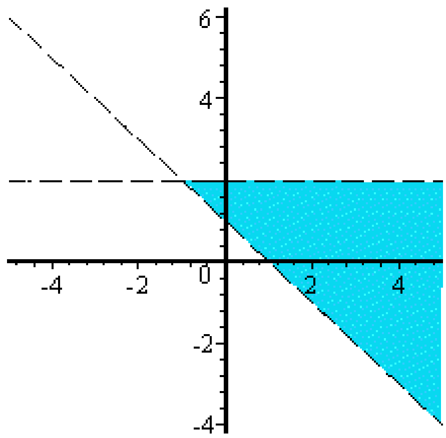
resultando lo que muestra la siguiente figura.



En esta figura hemos señalado las regiones que no son solución de las inecuaciones del sistema, o sea que las regiones coloreadas se correponden con la solución del sistema

$$\left\{\begin{array}{l} y \leq -x+1 \\ y \geq 2 \end{array}\right.$$

Las líneas frontera de cada región aparecen dibujadas de forma continua o a trazos según la desigualdad incluya o no la igualdad. De este modo, la solución del sistema original aparece como la región que está en blanco y las líneas frontera que están dibujadas con trazos discontinuos forman parte de la solución y las otras, dibujadas con trazos continuos, no. En la figura siguiente se indica la solución del sistema.



(b) De la primera inecuación del sistema

$$\left\{\begin{array}{l} x-y+1 \geq 0 \\ 3x+y > 2 \end{array}\right.$$

obtenemos

$$\begin{array}{rcl} -y & \geq & -x-1 \\ y & \leq & x+1 \end{array}$$

y, de la segunda,

$$y > -3x + 2$$

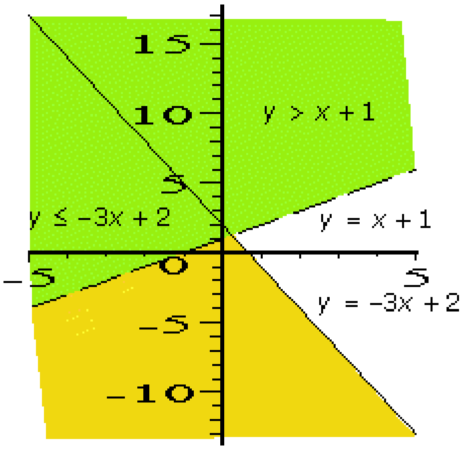
De este modo, el sistema original es equivalente al siguiente:

$$\begin{cases} y \leq x + 1 \\ y > -3x + 2 \end{cases}$$

Mediante un tabla con dos valores, representamos las rectas

$$\begin{aligned} y &= x + 1 \\ y &= -3x + 2 \end{aligned}$$

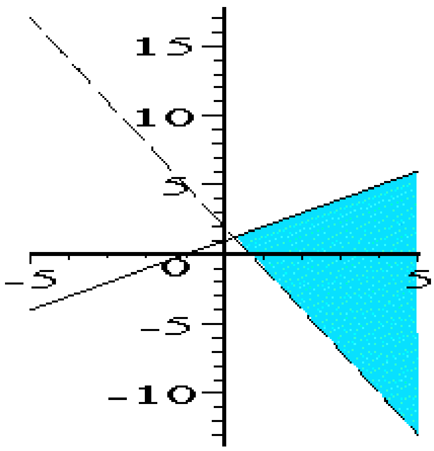
resultando lo que muestra la siguiente figura.



En esta figura hemos señalado las regiones que no son solución de las inecuaciones del sistema, o sea que las regiones coloreadas se correponden con la solución del sistema

$$\begin{cases} y > x + 1 \\ y \leq -3x + 2 \end{cases}$$

Las líneas frontera de cada región aparecen dibujadas de forma continua o a trazos según la desigualdad incluya o no la igualdad. De este modo, la solución del sistema original aparece como la región que está en blanco y las líneas frontera que están dibujadas con trazos discontinuos forman parte de la solución y las otras, dibujadas con trazos continuos, no. En la figura siguiente se indica la solución del sistema.



(c) De la primera inecuación del sistema

$$\begin{cases} x + y - 5 < 0 \\ 3x - y - 1 < 0 \\ 2x + y + 3 > 0 \end{cases}$$

obtenemos

$$y < -x + 5$$

De la segunda inecuación, se obtiene

$$\begin{aligned} -y &< -3x + 1 \\ y &> 3x - 1 \end{aligned}$$

y, de la tercera,

$$y > -2x - 3$$

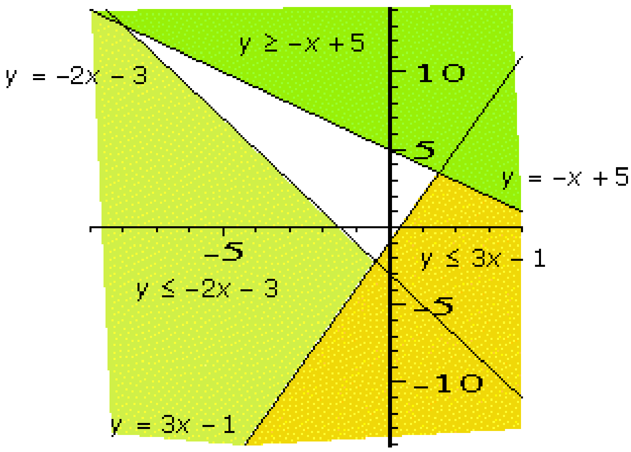
De este modo, el sistema original es equivalente al siguiente:

$$\begin{cases} y < -x + 5 \\ y > 3x - 1 \\ y > -2x - 3 \end{cases}$$

Mediante un tabla con dos valores, representamos las rectas

$$\begin{aligned} &y = -x + 5 \\ &y = 3x - 1 \\ &y = -2x - 3 \end{aligned}$$

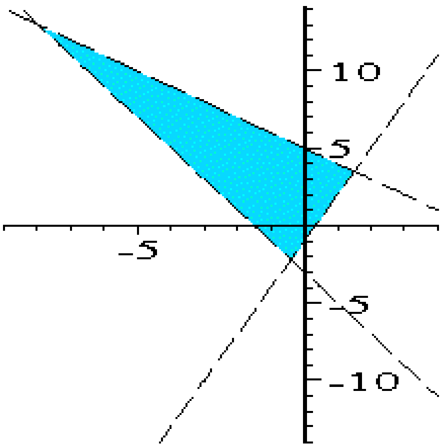
resultando lo que muestra la siguiente figura.



En esta figura hemos señalado las regiones que no son solución de las inecuaciones del sistema, o sea que las regiones coloreadas se correponden con la solución del sistema

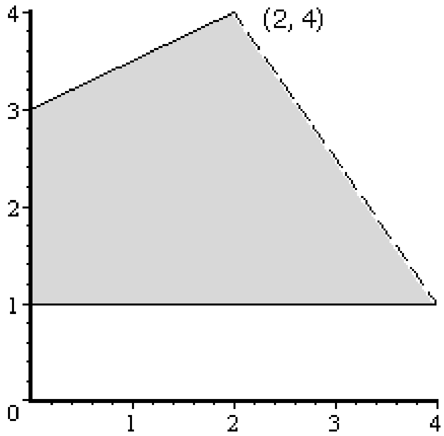
$$\begin{cases} y \geq -x + 5 \\ y \leq 3x - 1 \\ y \leq -2x - 3 \end{cases}$$

Las líneas frontera de cada región aparecen dibujadas de forma continua o a trazos según la desigualdad incluya o no la igualdad. De este modo, la solución del sistema original aparece como la región que está en blanco y las líneas frontera que están dibujadas con trazos discontinuos forman parte de la solución y las otras, dibujadas con trazos continuos, no. En la figura siguiente se indica la solución del sistema.

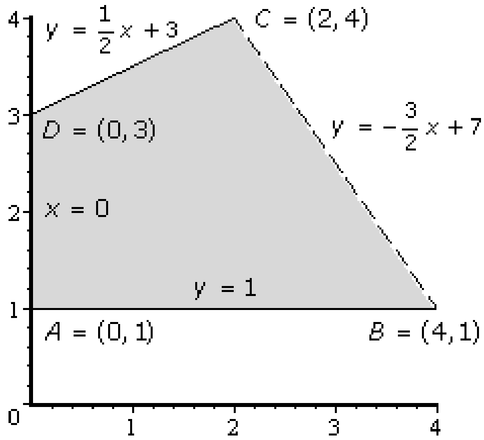


∎

Ejercicio 111 Escribe el sistema de inecuaciones lineales que define la región indicada en la siguiente figura:



Solución: Primero debemos encontrar las ecuaciones de las rectas que delimitan la región indicada.



Es evidente que la recta que pasa por A y B tiene por ecuación $y = 1$. Como la pendiente de la recta que pasa por B y C es

$$\frac{4-1}{2-4} = -\frac{3}{2}$$

la ecuación es de la forma

$$y = -\frac{3}{2}x + n$$

y al contener el punto $B = (4, 1)$, deducimos que

$$1 = -\tfrac{3}{2} \cdot 4 + n \quad \Longrightarrow \quad n = 7$$

y, por tanto, su ecuación es

$$y = -\frac{3}{2}x + 7$$

Del mismo modo, como la pendiente de la recta que pasa por C y D es

$$\frac{4-3}{2-0} = \frac{1}{2}$$

la ecuación es de la forma

$$y = \frac{1}{2}x + n$$

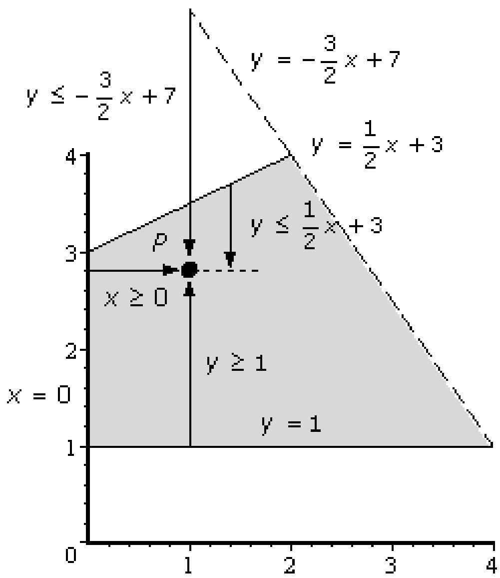
y al contener el punto $D = (0, 3)$, deducimos que

$$3 = \tfrac{1}{2} \cdot 0 + n \quad \Longrightarrow \quad n = 3$$

y, por tanto, su ecuación es

$$y = \frac{1}{2}x + 3$$

Finalmente, es claro que la recta que pasa por D y A tiene por ecuación $x = 0$.
Ahora que ya tenemos las ecuaciones de las rectas, debemos determinar el semiplano que cada una determina para que la intersección de todos ellos se obtenga la región considerada.



Para ello se toma un punto cualquiera P de la región y se compara su ordenada con la del punto de cada una de las rectas halladas anteriormente que tienen la misma abscisa que P. De este modo, comparando por ejemplo la ordenada de P con la del punto de la recta

$$y = \frac{1}{2}x + 3$$

con la misma abscisa que P, vemos que se cumple la siguiente relación

$$y \leq \frac{1}{2}x + 3$$

Esta desigualdad constituye una de las inecuaciones del sistema que estamos buscando. Repetiendo este procedimiento con cada recta, se obtienen las otras inecuaciones que determinan la región considerada. Con la ayuda de la figura anterior es inmediato comprobar que el sistema de inecuaciones que estamos buscando es

$$\left\{ \begin{array}{l} y \geq 1 \\ y < \frac{1}{2}x + 3 \\ y \leq -\frac{3}{2}x + 7 \\ x \geq 0 \end{array} \right.$$

La segunda inecuación del sistema tiene la desigualdad estricta porque los puntos de la recta de ecuación

$$y = -\frac{3}{2}x + 7$$

no pertencen a la región. ∎

Ejercicio 112 Resuelve gráficamente los sistemas siguientes:

a)

$$\left\{ \begin{array}{l} 4x - 2y + 9 \geq 0 \\ x^2 + 3x + y \geq -2 \end{array} \right.$$

b)

$$\left\{ \begin{array}{l} -x^2 - 2x + y + 1 < 0 \\ x^2 + 2x - 2y - 3 \leq 0 \end{array} \right.$$

c)

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 \leq 16 \\ x + y \geq 4 \end{array} \right.$$

Solución: (a) De la primera inecuación del siguiente sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} 4x - 2y + 9 \geq 0 \\ x^2 + 3x + y \geq -2 \end{array} \right.$$

obtenemos

$$\begin{array}{rcl} -2y & \geq & -4x - 9 \\ 2y & \leq & 4x + 9 \\ y & \leq & 2x + \dfrac{9}{2} \end{array}$$

y, de la segunda,

$$y \geq -x^2 - 3x - 2$$

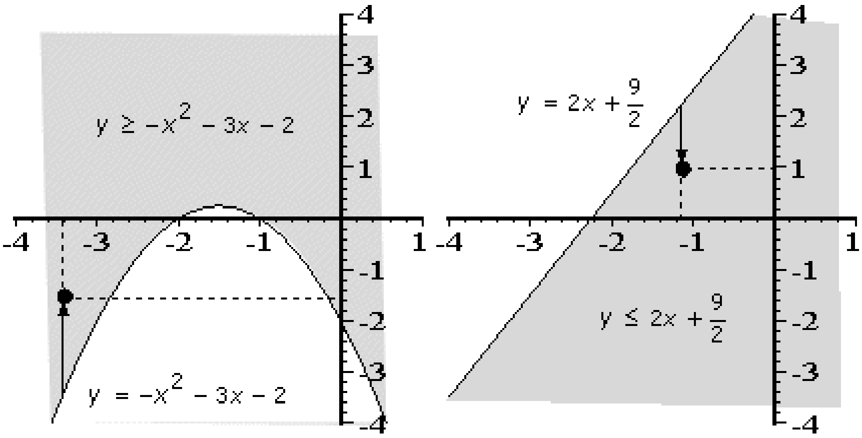
Por tanto, en el sistema aparecen una recta cuya ecuación es

$$y = 2x + \frac{9}{2}$$

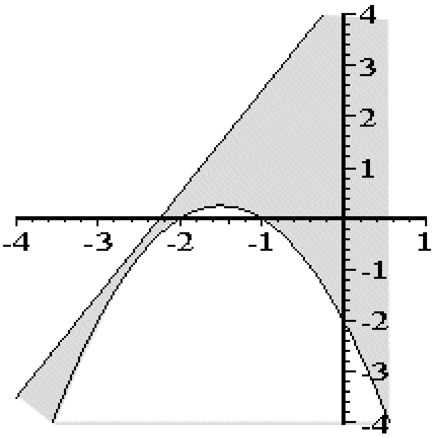
y una parábola de ecuación

$$y = -x^2 - 3x - 2$$

En la siguiente figura se indica la solución de cada inecuación.



Recuerda que para encontrarla hay que comparar la ordenada de un punto con el correspondiente de la recta o de la parábola con la misma abscisa.
Entonces, la solución del sistema se obtendrá como la intersección de las dos regiones indicadas anteriormente. En la siguiente figura se ilustra esta solución.



(b) De la primera inecuación del siguiente sistema

$$\begin{cases} -x^2 - 2x + y + 1 < 0 \\ x^2 + 2x - 2y - 3 \leq 0 \end{cases}$$

obtenemos

$$y < x^2 + 2x - 1$$

y, de la segunda,

$$\begin{aligned} -2y &\leq -x^2 - 2x + 3 \\ 2y &\geq x^2 + 2x - 3 \\ y &\geq \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{2} \end{aligned}$$

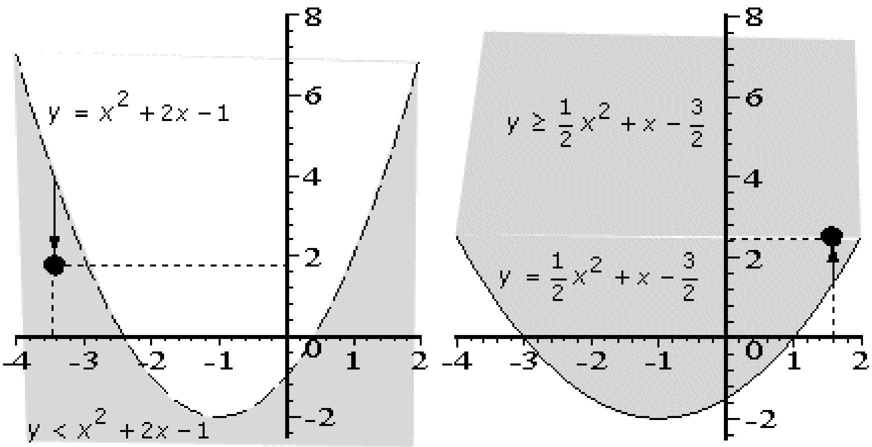
Por tanto, en el sistema aparecen dos parábolas de ecuaciones

$$y = x^2 + 2x - 1$$

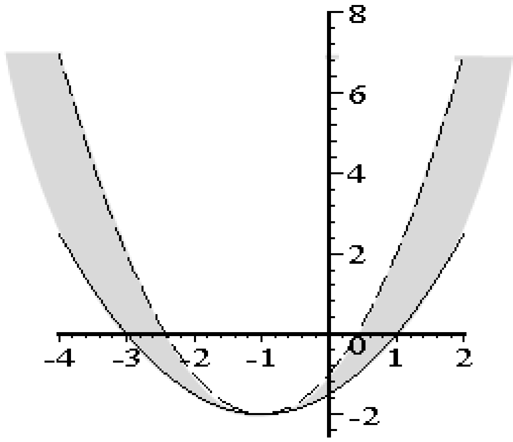
y

$$y = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{2}$$

En la siguiente figura se indica la solución de cada inecuación.



Recuerda que para encontrarla hay que comparar la ordenada de un punto con el correspondiente de la recta o de la parábola con la misma abscisa.
Entonces, la solución del sistema se obtendrá como la intersección de las dos regiones indicadas anteriormente. En la siguiente figura se ilustra esta solución.



(c) Como las soluciones de la ecuación

$$x^2 + y^2 = 16$$

representan geométricamente los puntos de una circunferencia centrada en el origen y de radio 4, la solución de la inecuación

$$x^2 + y^2 \leq 16$$

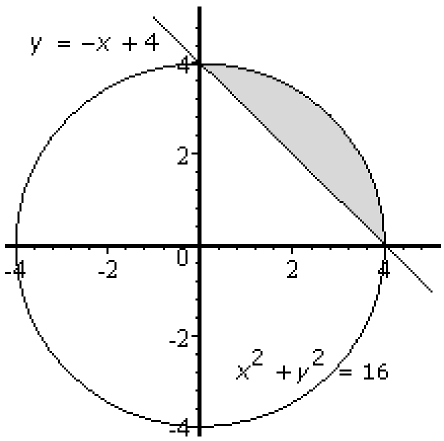
es el conjunto formado por los puntos de esta circunferencia y todos sus puntos interiores. Por tanto, la solución del sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 16 \\ x + y \geq 4 \end{cases}$$

se obtendrá como la intersección de la región descrita anteriormente y el semiplano determinado por la inecuación

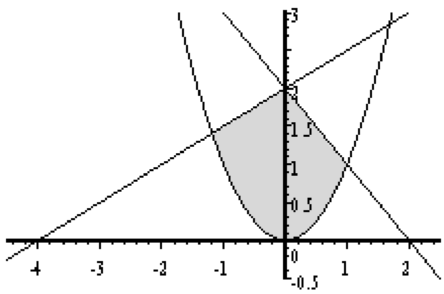
$$y \geq -x + 4$$

Esta solución es la que se muestra en la siguiente figura.

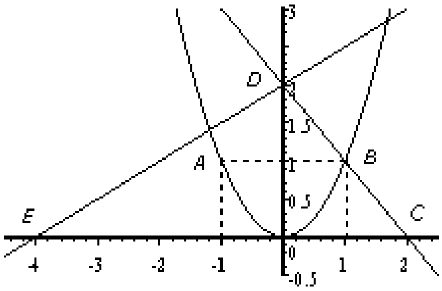


■

Ejercicio 113 Escribe el sistema de inecuaciones cuyo conjunto de soluciones es la región señalada en la siguiente figura.



Solución: La región está formada por un par de rectas y una parábola. En la siguiente figura se indican algunos puntos que permitirán determinar las ecuaciones de las rectas y de la parábola.



La recta que pasa por los puntos $E = (-4, 0)$ y $D = (0, 2)$ tiene por ecuación

$$y = \frac{1}{2}x + 2$$

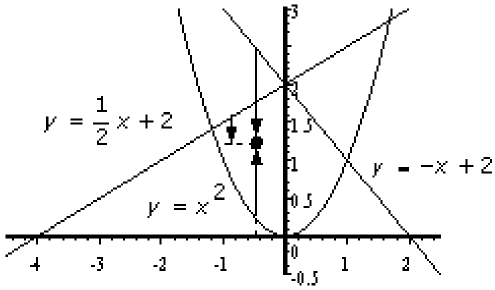
La recta que pasa por los puntos $D = (0, 2)$ y $C = (2, 0)$ tiene por ecuación

$$y = -x + 2$$

y la ecuación de la parábola que pasa por los puntos $O = (0, 0)$, $A = (-1, 1)$ y $B = (1, 1)$ es

$$y = x^2$$

Para escribir las inecuaciones que delimitan la región considerada se toma un punto cualquiera de la región y se compara su ordenada con la del punto de la parábola y de cada una de las dos rectas que tienen la misma abscisa que dicho punto.



A partir de la figura es inmediato comprobar que se cumplen las siguientes inecuaciones

$$\begin{array}{l} y \leq \frac{1}{2}x + 2 \\ y \leq -x + 2 \\ y \leq x^2 \end{array}$$

Por consiguiente, el sistema formado por las inecuaciones anteriores delimitan la región propuesta.
■

Ejercicio 114 Dibuja el triángulo de vértices $A = (2, 1)$, $B = (8, 2)$ y $C = (6, 3)$ y encuentra el sistema de inecuaciones cuya solución es la región interior de dicho triángulo, incluyendo los lados del mismo.

Solución: Para escribir las inecuaciones que determinan la región interior del triángulo ABC es preciso encontrar las ecuaciones de las rectas de los lados de dicho triángulo. Así, la ecuación de la recta que pasa por $A = (2, 1)$ y $B = (8, 2)$ es

$$y = \frac{1}{6}x + \frac{2}{3}$$

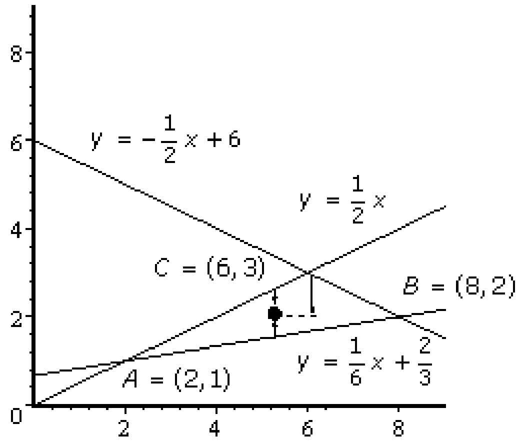
La ecuación de la recta que pasa por $B = (8, 2)$ y $C = (6, 3)$ es

$$y = -\frac{1}{2}x + 6$$

y la ecuación de la recta que pasa por $A = (2, 1)$ y $C = (6, 3)$ es

$$y = \frac{1}{2}x$$

El triángulo determinado por estas rectas es el que se indica en la figura siguiente:



A partir de la figura es inmediato comprobar que las inecuaciones que estamos buscando son:

$$\begin{array}{l} y \geq \frac{1}{6}x + \frac{2}{3} \\ y \leq -\frac{1}{2}x + 6 \\ y \leq \frac{1}{2}x \end{array}$$

Por consiguiente, el sistema formado por estas tres inecuaciones determinan la región considerada. Observa que las desigualdades no son estrictas porque se incluyen los puntos de los lados del triángulo. ■

Ejercicio 115 Determina los valores reales de m de manera que las desigualdades siguientes se verifiquen para cualquier x real:

a)
$$(5m - 6)x^2 - 2mx + 1 > 0$$

b)
$$x^2 - (3m + 2)x + 2m^2 + 5m - 2 \geq 0$$

Solución: (a) La inecuación

$$(5m - 6)x^2 - 2mx + 1 > 0$$

es de segundo grado. Por tanto, su conjunto solución será $\mathbb{R}$ si la parábola que podemos definir a partir de ella no corta al eje X y su concavidad es positiva (La parábola tiene un mínimo en su vértice). La parábola no cortará al eje X si el discriminante de la ecuación de segundo grado correspondiente es negativo, es decir, si

$$\begin{array}{rcl} (-2m)^2 - 4(5m - 6) \cdot 1 & < & 0 \\ m^2 - 5m + 6 & < & 0 \end{array}$$

y la concavidad de la parábola será positiva si

$$5m - 6 > 0$$

Por tanto, para todos los valores de m que sean solución del siguiente sistema de inecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{l} m^2 - 5m + 6 < 0 \\ 5m - 6 > 0 \end{array} \right.$$

se cumplirán las condiciones impuestas sobre la inecuación dada. Como

$$m^2 - 5m + 6 = (m - 2)(m - 3) < 0$$

por las reglas de los signos, el producto será negativo cuando los signos de los dos factores sean distintos. Como consecuencia, tenemos los dos casos siguientes:

$$\left\{\begin{array}{l} m-2>0 \\ m-3<0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} m>2 \\ m<3 \end{array}\right.$$

o

$$\left\{\begin{array}{l} m-2<0 \\ m-3>0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} m<2 \\ m>3 \end{array}\right.$$

La solución del primero es

$$(2,+\infty)\cap(-\infty,3)=(2,3)$$

y la del segundo,

$$(-\infty,2)\cap(3,+\infty)=\emptyset$$

Luego, el discriminante será negativo cuando $2<m<3$. Además, la concavidad de la parábola será positiva cuando

$$\begin{array}{rcl} 5m-6 & > & 0 \\ 5m & > & 6 \\ m & > & \dfrac{6}{5} \end{array}$$

Por consiguiente, la solución del sistema

$$\left\{\begin{array}{l} m^2-5m+6<0 \\ 5m-6>0 \end{array}\right.$$

es

$$(2,3)\cap\left(\frac{6}{5},+\infty\right)=(2,3)$$

y, como consecuencia, si $2<m<3$ entonces la inecuación

$$(5m-6)x^2-2mx+1>0$$

tiene como conjunto solución $\mathbb{R}$.
(b) La inecuación

$$x^2-(3m+2)x+2m^2+5m-2\geq 0$$

es de segundo grado. Por tanto, su conjunto solución será $\mathbb{R}$ si la parábola que podemos definir a partir de ella sólo corta al eje X en un punto o ninguno, y su concavidad es positiva (La parábola tiene un mínimo en su vértice). La parábola cortará al eje X en un punto o ninguno si el discriminante de la ecuación de segundo grado correspondiente es cero o negativo, es decir, si

$$\begin{array}{rcl} [-(3m+2)]^2-4\cdot 1\cdot(2m^2+5m-2) & \leq & 0 \\ 9m^2+12m+4-8m^2-20m+8) & \leq & 0 \\ m^2-8m+12 & \leq & 0 \end{array}$$

La concavidad de la parábola es evidentemente positiva para cualquier valor de m, pues el coeficiente de x^2 es 1, que es positivo. Por tanto, la inecuación cumplirá las condiciones impuestas si m es solución de

$$m^2-8m+12\leq 0$$

Como

$$m^2-5m+6=(m-2)(m-6)\leq 0$$

por las reglas de los signos, el producto será negativo cuando los signos de los dos factores sean distintos. Como consecuencia, tenemos los dos casos siguientes:

$$\left\{\begin{array}{l} m-2\geq 0 \\ m-6\leq 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} m\geq 2 \\ m\leq 6 \end{array}\right.$$

o

$$\left\{\begin{array}{l} m-2\leq 0 \\ m-6\geq 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} m\leq 2 \\ m\geq 3 \end{array}\right.$$

La solución del primero es

$$[2, +\infty) \cap (-\infty, 6] = [2, 6]$$

y la del segundo,

$$(-\infty, 2] \cap [3, +\infty) = \emptyset$$

Luego, el discriminante será cero o negativo cuando $2 \leq m \leq 6$.
Por consiguiente, si $2 \leq m \leq 6$ entonces la inecuación

$$x^2 - (3m+2)x + 2m^2 + 5m - 2 \geq 0$$

tiene como conjunto solución $\mathbb{R}$. ∎

Ejercicio 116 En una caja hay tornillos defectuosos y no defectuosos. Sabemos que en total hay 200 tornillos, y que el doble de defectuosos es menor que el número de no defectuosos. ¿Cuántos tornillos defectuosos puede haber en la caja?

Solución: Planteamiento: Si x representa el número de tornillos defectuosos, entonces $200 - x$ es el número de tornillos no defectuosos. Si el doble de defectuosos es menor que el número de no defectuosos, se debe cumplir

$$2x < 200 - x$$

Resolución: Transponiendo términos y operando, se obtiene

$$\begin{aligned} 2x + x &< 200 \\ 3x &< 200 \\ x &< \frac{200}{3} \end{aligned}$$

Luego, en la caja no puede haber más de 66 tornillos defectuosos. ∎

Ejercicio 117 Un alfarero fabrica dos tipos de vasijas, A y B, empleando tres y cuatro horas, respectivamente, en hacer las de uno y otro tipo. Del primer tipo debe producir un mínimo de 4 vasijas semanales, y le conviene fabricar menos vasijas del tipo A que del B. Si trabaja entre 30 y 40 horas semanales, ¿cuántas vasijas de uno y otro tipo puede producir semanalmente?

Solución: Planteamiento: Supongamos que x e y son el número de vasijas de tipo A y de tipo B que produce semanalmente. Como debe producir al menos 4 vasijas de tipo A a la semana, se ha de cumplir que

$$x \geq 4$$

Además, como el número de vasijas de tipo A es menor que el de B, se tiene que

$$x < y$$

Si emplea tres horas para fabricar una vasija de tipo A y cuatro horas para una de tipo B, entonces

$$3x + 4y$$

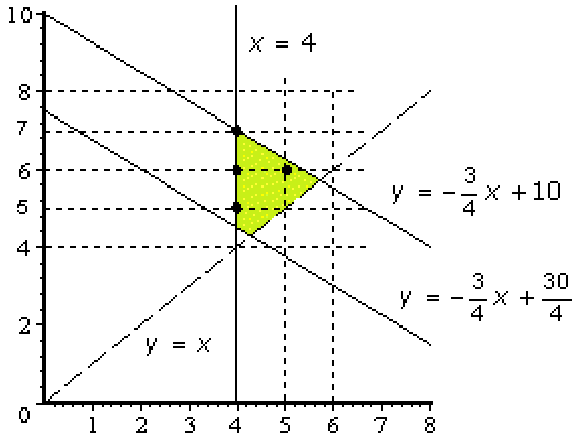
es el número de horas que emplea a la semana para producir x vasijas de A e y de B. Ahora bien, como trabaja entre 30 y 40 horas semanales, se debe cumplir que

$$30 \leq 3x + 4y \leq 40$$

Por tanto, x e y son las soluciones del siguiente sistema:

$$\begin{cases} x \geq 4 \\ x < y \\ 3x + 4y \leq 40 \\ 3x + 4y \geq 30 \end{cases}$$

Resolución: Representando gráficamente las rectas del sistema y determinando después el semiplano solución de cada una de las inecuaciones del sistema, se obtiene como intersección de todas estas regiones indicadas la solución gráfica que se indica en la siguiente figura:



A partir de la figura anterior es claro que las únicas soluciones posibles son las siguientes:

$$\begin{array}{ll} x = 4 & y = 5 \\ x = 4 & y = 6 \\ x = 4 & y = 7 \\ x = 5 & y = 6 \end{array}$$

que son las coordenadas de los puntos marcados en la figura. ■

Ejercicio 118 Con café de la clase A, de 2.10 €/kg, y café de la clase B, de 2.40 €/Kg, queremos obtener una cierta cantidad de mezcla que resulte a 2.24 €/Kg. Además, queremos que la mezcla no puede pesar más de 75 Kg ni costar más de 168 euros. ¿Qué cantidad máxima de cada tipo de café y de mezcla se puede obtener?

Solución: Planteamiento: Supongamos que x e y son las cantidades en Kg de café de tipo A y de tipo B que se mezclarán. Como la cantidad total no puede superar los 75 Kg debe ser

$$x + y \leq 75$$

Como el importe total de la mezcla no puede superar los 168 euros debe ser

$$2{,}1x + 2{,}4y \leq 168$$

Para que el precio de la mezcla sea de 2.2 €/Kg debe ser

$$\begin{aligned} 2{,}1x + 2{,}4y &= 2{,}24(x + y) \\ 2{,}1x + 2{,}4y &= 2{,}24x + 2{,}24y \\ 0{,}14x - 0{,}16y &= 0 \\ 14x - 16y &= 0 \\ y &= \frac{7}{8}x \end{aligned}$$

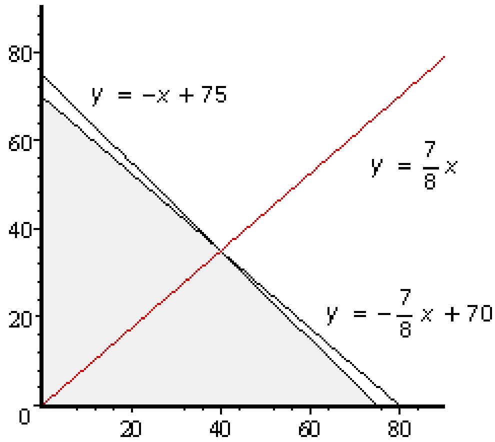
Por tanto, el problema queda planteado mediante una ecuación

$$y = \frac{7}{8}x$$

y dos inecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y \leq 75 \\ 2{,}1x + 2{,}4y \leq 168 \end{array} \right.$$

Además, podemos suponer que $x \geq 0$ e $y \geq 0$ para que los resultados tengan sentido.
Resolución: En la figura siguiente hemos representado las ecuaciones de las rectas, deducidas por las condiciones del problema.



La solución del sistema

$$\begin{cases} x, y \geq 0 \\ x + y \leq 75 \\ 2{,}1x + 2{,}4y \leq 168 \end{cases}$$

es la región sombreada de la figura, y la solución del problema será el punto más alejado de esta región situado sobre la recta

$$y = \frac{7}{8}x$$

Resolviendo el siguiente sistema

$$\begin{cases} x + y = 75 \\ 2{,}1x + 2{,}4y = 168 \end{cases}$$

se obtiene $x = 40, y = 35$, que se corresponde con el punto de intersección de las dos rectas cuyas ecuaciones son las ecuaciones de este sistema. Como que el punto $(40, 35)$ está sobre la recta

$$y = \frac{7}{8}x$$

deducimos que $x = 40$ e $y = 35$ es la solución del problema.
Por consiguiente, como máximo hay que tomar 40 Kg de clase A y 45 Kg de clase B para obtener una mezcla de 75 Kg que satisface las condiciones del enunciado del problema. ■