Teoría

Índice

1. Conjuntos 1
- 1.1. Las nociones de elemento, conjunto y pertenencia . . . 2
- 1.2. Igualdad e inclusión entre conjuntos . . . 4
- 1.3. Operaciones con conjuntos . . . 5
  - 1.3.1. Partes de un conjunto . . . 6
  - 1.3.2. Unión de dos conjuntos . . . 6
  - 1.3.3. Intersección de dos conjuntos . . . 6
  - 1.3.4. Propiedades de la unión y de la intersección de conjuntos . . . 7
  - 1.3.5. Diferencia entre dos conjuntos . . . 7
  - 1.3.6. Complementario de un conjunto en otro conjunto . . . 7
  - 1.3.7. Propiedades del complementario de un conjunto . . . 8
- 1.4. Par ordenado y producto cartesiano de dos conjuntos . . . 8

2. Relaciones 9
- 2.1. Relaciones entre dos conjuntos . . . 9
- 2.2. Relaciones binarias en un conjunto . . . 9
  - 2.2.1. Clases de relaciones . . . 9
- 2.3. Relaciones de equivalencia . . . 10
- 2.4. Relaciones de orden . . . 11
  - 2.4.1. Elementos notables de una relación de orden . . . 12
  - 2.4.2. Conjuntos bien ordenados . . . 13

3. Aplicaciones 14
- 3.1. Clases de aplicaciones . . . 16
- 3.2. Imagen y antiimagen de un conjunto . . . 16
- 3.3. Composición de aplicaciones . . . 17
- 3.4. Aplicación inversa . . . 18

4. Cardinal de un conjunto 19
- 4.1. Propiedades para conjuntos finitos . . . 20

1. Conjuntos

Partiendo de la noción intuitiva de conjunto, en esta sección desarrollaremos las propiedades básicas de los conjuntos. El objetivo de esta breve exposición será conseguir que te familiarices con la terminología y las notaciones que se introducen y que se emplearán en todas las demás unidades didácticas.

1.1. Las nociones de elemento, conjunto y pertenencia

Una caja de bolas, un racimo de uvas, o un álbum de fotos son todos ejemplos de conjuntos de cosas o colecciones de objetos. La noción de conjunto es fundamental en todas las ramas de las matemáticas. Por ejemplo, en geometría se habla del conjunto de puntos que son equidistantes de un punto fijo dado; en el plano, este conjunto se llama circunferencia. En álgebra se habla del conjunto de números enteros que son divisibles por 2; este conjunto está formado por los números pares. En cálculo, el dominio de una función real de variable real es un conjunto de números reales.

Emplearemos la palabra **conjunto** como sinónimo de colección de objetos. Los objetos que forman un conjunto se llaman **elementos** del conjunto. De este modo, diremos que un conjunto está formado por elementos o que unos elementos forman un determinado conjunto.

Ahora bien, un conjunto está bien definido si es posible dar un criterio que permita decidir si un elemento dado cualquiera pertenece o no al conjunto. Por ejemplo, las bolas rojas de esta caja o las fotos de Miguel en este álbum son conjuntos bien definidos. En el primer caso, una bola de la caja es del conjunto si es roja y, en el segundo, una foto es del conjunto si en ella aparace Miguel.

Sea A un conjunto y x un elemento, si x es un elemento de A diremos que el elemento x **pertenece** al conjunto A y escribiremos

$$x \in A$$

Si x no es un elemento de A diremos que el elemento x no pertenece al conjunto A y escribiremos

$$x \notin A$$

El símbolo matemático $\in$ se interpreta como la relación de pertenencia que se establece entre elementos y conjuntos. Por consiguiente, un conjunto está determinado por una relación de pertenencia a él. No obstante, como veremos más adelante (conjunto de partes), un elemento puede ser a la vez un conjunto y un conjunto puede ser un elemento de otro conjunto.

Por cursos anteriores, tenemos conocimiento de la existencia de algunos conjuntos de números cuyo uso es muy frecuente en las matemáticas y que se designan con símbolos especiales. Así, tenemos

Conjuntos de números	Símbolo
Naturales	$\mathbb{N}$
Enteros	$\mathbb{Z}$
Racionales	$\mathbb{Q}$
Reales	$\mathbb{R}$

y, por el conocimiento que de ellos ya tenemos, podemos escribir, por ejemplo, las siguientes relaciones:

$$-2 \notin \mathbb{N} \qquad -3 \in \mathbb{Z} \qquad \sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \qquad \sqrt[3]{5} \in \mathbb{R}$$

¿cuáles son las relaciones en los siguientes casos?

$$1 \in \mathbb{N} \qquad \tfrac{1}{2} \notin \mathbb{Z} \qquad 2{,}3\overset{\frown}{5} \in \mathbb{Q} \qquad 1-\sqrt{2} \in \mathbb{R}$$

Diremos que un conjunto está determinado por **extensión** si damos una lista de todos sus elementos. En tal caso, escribiremos a los elementos entre llaves separados por comas. Por ejemplo, el conjunto A formado por los números

$$1, 2, 3$$

lo escribiremos por

$$A = \{1, 2, 3\}$$

Un conjunto está determinado por **comprensión** si damos una condición que satisfacen todos sus elementos. Así, el conjunto anterior lo podemos determinar por comprensión diciendo que A es el conjunto formado por los tres primeros números naturales o también por los números naturales que son menores que cuatro. En este último caso escribiremos

$$A = \{x : x \in \mathbb{N} \text{ y } x < 4\}$$

y se lee: A es el conjunto de los elementos tales que son números naturales y menores que 4. En general, si $P(x)$ expresa una condición o propiedad que depende de x, entonces

$$B = \{x : x \in A \text{ y } P(x)\}$$

designa el conjunto de los elementos de A que satisfacen la propiedad $P(x)$.
Puede ocurrir que para una cierta propiedad no haya ningún elemento de un conjunto dado que la satisfaga. Por esta razón, admitimos la existencia de un conjunto que no contiene elementos y al que denominamos **conjunto vacío**, designándolo por el símbolo $\emptyset$. De este modo, para todo x la relación

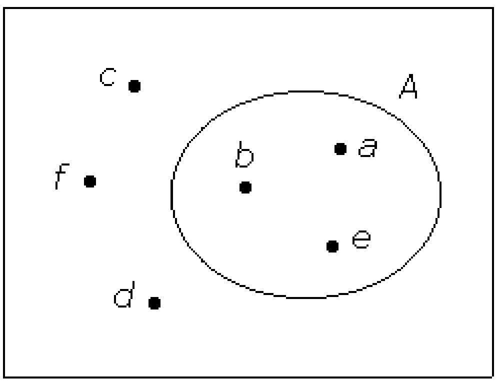
$$x \in \emptyset$$

es siempre falsa, y

$$x \notin \emptyset$$

es siempre verdadera.
Es instructivo representar gráficamente un conjunto mediante una región cerrada del plano de forma que todos los elementos del conjunto estén encerrados en dicha región. Se llaman **diagramas de Venn** a los que se construyen de esta forma. En la figura siguiente hemos representado el conjunto A determinado por los elementos a, b, e, es decir,

$$A = \{a, b, e\}$$



Observa que $c \notin A$, $f \notin A$ y $d \notin A$.

Observación 1 1. Observa que no hemos definido los conceptos de conjunto y elemento. En su lugar, hemos intentado dar una idea intuitiva clara de ambas nociones. En cursos más avanzados se puede ver que en la construcción axiomática de una teoría de conjuntos, los términos çonjuntoz .elemento"no se definen y se emplean sin explicar su significado. Un conjunto será cualquier cosa que satisfaga los axiomas de la teoría.

   No hay duda de que la intuición sobre la que se basa tu noción de conjunto puede estar equivocada pero de lo que se trata no es tanto saber qué son los conjuntos sino qué podemos hacer con ellos correctamente. Esto último es lo que queremos hacer aquí.

2. Podría paracer natural admitir que toda condición $P(x)$ define un conjunto

$$\{x : x \text{ satisface } P(x)\} \tag{1}$$

   pero, de este modo, resulta que hay condiciones raras"que dan lugar a çonjuntosçontradictorios sobre los cuales no es posible razonar. Por ejemplo, si consideramos la condición $x \notin x$ (todos los conjuntos que no son elementos de sí mismos) y llamamos B al çonjunto"de elementos que satisfacen esta condición, es decir,

$$B = \{x : x \notin x\}$$

   entonces se cumple

$$(\forall x)\,(x \in B \Longleftrightarrow x \notin x)$$

   y, en particular, también se cumple

$$B \in B \Longleftrightarrow B \notin B$$

   lo que, evidentemente, constituye una contradicción. Para evitar estos absurdos, es preferible limitar la condición a los elementos de algún conjunto ya conocido A. Por este motivo hemos escrito

$$\{x : x \in A \text{ y } x \text{ satisface } P(x)\}$$

   en lugar de (1).

1.2. Igualdad e inclusión entre conjuntos

Diremos que dos conjuntos A y B son **iguales** si contienen los mismos elementos, es decir, si para cada x, $x \in A$ equivale a $x \in B$. En símbolos

$$(\forall x)\,(x \in A \Longleftrightarrow x \in B)$$

y se lee: para todo x, x es de A si y sólo si x es de B. Si los conjuntos A y B son iguales, escribiremos

$$A = B$$

y su negación por

$$A \neq B$$

El símbolo matemático $=$ se interpreta como la relación de igualdad que se establece entre conjuntos. A partir de la definición, es inmediato comprobar que esta relación satisface las siguientes propiedades:

1. Para todo conjunto A, $A = A$
2. Dados dos conjuntos A y B, si $A = B$ entonces $B = A$
3. Dados tres conjuntos A, B y C, si $A = B$ y $B = C$, entonces $A = C$

Observa que se cumplen las siguientes relaciones:

$$\{1, 2, 3\} = \{x : x \in \mathbb{N} \text{ y } x < 4\}$$

y

$$\left\{x : x \in N \text{ y } x^2 - 3x + 2 = 0\right\} \neq \{1, 3\}$$

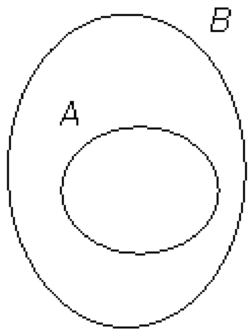
Si A y B son dos conjuntos tales que todo elemento de A es también un elemento de B, es decir,

$$(\forall x)\,(x \in A \Longrightarrow x \in B)$$

entonces se dice que A es un **subconjunto** de B o que A está **incluido** en B y se simboliza por

$$A \subset B \qquad \text{o} \qquad B \supset A$$

Mediante diagramas de Venn, representamos este hecho por



Si $A \subset B$ y $A \neq B$ se dice que A es un **subconjunto propio** de B. El símbolo matemático $\subset$ se interpreta como la relación de inclusión que se establece entre conjuntos. A partir de la definición, es inmediato comprobar que esta relación satisface las siguientes propiedades:

1. Para todo conjunto A, $A \subset A$
2. Dados dos conjuntos A y B, si $A \subset B$ y $A \supset B$, entonces $A = B$
3. Dados tres conjuntos A, B y C, si $A \subset B$ y $B \subset C$, entonces $A \subset C$

Observa que se cumplen las siguientes relaciones:

$$\emptyset \subset A \qquad \{1\} \subset \{1, 2, 3\} \qquad \{2, 4\} \subset \{x : x \in \mathbb{N} \text{ y } x \text{ es par}\}$$

1.3. Operaciones con conjuntos

En este apartado veremos cómo podemos construir nuevos conjuntos a partir de otros ya dados.

1.3.1. Partes de un conjunto

Si A es un conjunto, se llama **conjunto de partes** de A al conjunto cuyos elementos son todos los subconjuntos de A y se designa por $\mathcal{P}(A)$. Así, tenemos

$$\mathcal{P}(A) = \{x : x \text{ es un conjunto y } x \subset A\}$$

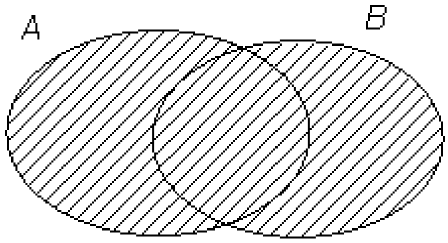
Por ejemplo, si $A = \{a, b, c\}$, entonces

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, A\}$$

Observa que $\mathcal{P}(A)$ es un conjunto cuyos elementos son a su vez conjuntos.

1.3.2. Unión de dos conjuntos

Si A y B son conjuntos, se llama **unión** de A y B al conjunto denotado por $A \cup B$ que tiene por elementos todos los que pertenecen a A o a B o a los dos a la vez.



$A \cup B$

En otras palabras, se tiene

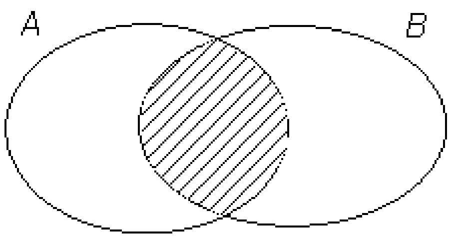
$$A \cup B = \{x : x \in A \ \text{ o } x \in B\}$$

Por ejemplo, si $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{3, 4, 5\}$, entonces

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

1.3.3. Intersección de dos conjuntos

Si A y B son conjuntos, se llama **intersección** de A y B al conjunto denotado por $A \cap B$ que tiene por elementos todos los que pertenecen tanto a A como a B.



$A \cap B$

En otras palabras, se tiene

$$A \cap B = \{x : x \in A \ \text{ y } x \in B\}$$

Si $A \cap B = \emptyset$, entonces se dice que los conjuntos A y B son **disjuntos**.
Por ejemplo, si $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{3, 4, 5\}$, entonces

$$A \cap B = \{3\}$$

1.3.4. Propiedades de la unión y de la intersección de conjuntos

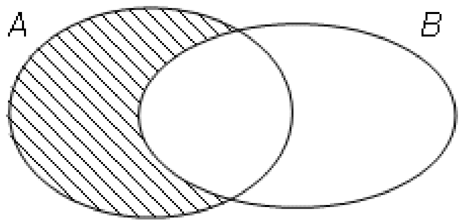
Dados tres conjuntos cualesquiera A, B y C se cumplen las siguientes relaciones:

1. $A \cup A = A$ y $A \cap A = A$
2. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ y $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
3. $A \cup B = B \cup A$ y $A \cap B = B \cap A$
4. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup B)$ y $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
5. $A \cup (B \cap A) = A$ y $A \cap (B \cup A) = A$
6. $A \cup \emptyset = A$ y $A \cap \emptyset = \emptyset$

Las demostraciones de estas propiedades las encontrarás en los ejercicios resueltos.

1.3.5. Diferencia entre dos conjuntos

Si A y B son conjuntos, se llama **diferencia** entre A y B al conjunto denotado por $A - B$ que tiene por elementos todos los que pertenecen a A y que no son de B.



$A - B$

En otras palabras, se tiene

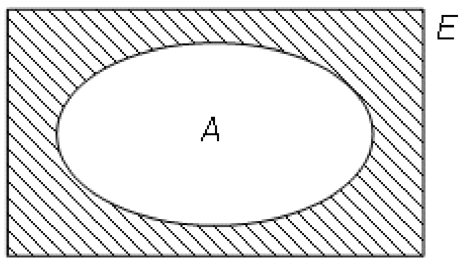
$$A - B = \{x : x \in A \ \text{ y } x \notin B\}$$

Por ejemplo, si $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{3, 4, 5\}$, entonces

$$A - B = \{1, 2\}$$

1.3.6. Complementario de un conjunto en otro conjunto

Dados dos conjuntos A y E tales que $A \subset E$, se llama **complementario** de A en E al conjunto denotado por $\complement_E A$ que tiene por elementos todos los que son de E y que no pertenecen a A.



$\complement_E A$

En otras palabras, se tiene

$$\complement_E A = \{x : x \in E \ \text{ y } x \notin A\}$$

Es evidente que se cumple

$$\complement_E A = E - A$$

Es habitual designar el complementario de A en E por $\overline{A}$ cuando se toma al conjunto E como **conjunto referencial** de todos los demás conjuntos, es decir, cuando todos los conjuntos que se consideran son subconjuntos de E.
Por ejemplo, si $A = \{x : x \in \mathbb{R} \text{ y } |x| = 1\}$ y $E = \mathbb{R}$, entonces

$$\complement_E A = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

1.3.7. Propiedades del complementario de un conjunto

Si E es el conjunto referencial, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

1. $\overline{E} = \emptyset$ y $\overline{\emptyset} = E$
2. $\overline{\overline{A}} = A$
3. Leyes de De Morgan: $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ y $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Las demostraciones de estas propiedades las encontrarás en los ejercicios resueltos.

1.4. Par ordenado y producto cartesiano de dos conjuntos

Se llama **par ordenado** de dos elementos x e y al conjunto denotado por (x, y) que tiene por elementos el conjunto unitario $\{x\}$ y el par $\{x, y\}$, es decir,

$$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

Decimos entonces que x es la **primera componente** e y la **segunda componente** del par ordenado (x, y). Por la definición de igualdad de conjuntos, es fácil deducir que se cumple

$$\{a, b\} = \{c, d\} \iff a = c \text{ y } b = d \text{ o bien } a = d \text{ y } b = c$$

mientras que

$$(a, b) = (c, d) \iff a = c \text{ y } b = d$$

Por tanto, la única diferencia entre los conjuntos $\{x, y\}$ y (x, y) reside en el orden. Si x e y son dos elementos distintos, entonces $\{x, y\} = \{y, x\}$ y, en cambio, $(x, y) \neq (y, x)$.
Dados dos conjuntos A y B, se llama **producto cartesiano** de A y B al conjunto denotado por $A \times B$ que tiene por elementos todos los pares ordenados cuya primera componente es un elemento de A y cuya segunda componente es un elemento de B.

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A \text{ y } y \in B\}$$

Por ejemplo, si $A = \{1, 2\}$ y $B = \{a, b\}$, entonces

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b)\}$$

Observa que

$$B \times A = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2)\}$$

y es evidente que $A \times B \neq B \times A$.

2. Relaciones

Identificamos las relaciones con conjuntos de pares ordenados y, por tanto, con subconjuntos del producto cartesiano de dos conjuntos dados. Que un par ordenado pertenezca a una relación significa que la relación en cuestión se da entre el primer componente del par y el segundo.

2.1. Relaciones entre dos conjuntos

Dados dos conjuntos A y B, se llama **relación** entre A y B a todo subconjunto de $A \times B$. Si $R \subset A \times B$ es una relación entre A y B, escribimos a veces aRb en vez $(a,b) \in R$ y decimos que la relación **se da** entre a y b o simplemente, que a **está relacionado con** b.
Por ejemplo, si $A = \{1,2\}$ y $B = \{a,b\}$, entonces $R = \{(1,a),(2,b)\}$, $S = \{(1,a)\}$ y $T = \{(2,a),(2,b)\}$ son relaciones entre A y B.
Por ser conjuntos, si R y S son relaciones entre A y B, entonces $R = S$ si y sólo si R y S contienen los mismos pares ordenados. Se llama **dominio** de una relación R entre A y B al conjunto denotado por Dom R que tiene por elementos las primeras componentes de los pares ordenados de R. Se llama **recorrido** de R al conjunto denotado por Rec R que tiene por elementos las segundas componentes de los pares ordenados de R. Así, tenemos

$$\text{Dom } R = \{x : x \in A \text{ y existe } y \in B \text{ tal que } (x,y) \in R\}$$

y

$$\text{Rec } R = \{y : y \in B \text{ y existe } x \in A \text{ tal que } (x,y) \in R\}$$

Por ejemplo, si $A = \{1,2\}$, $B = \{a,b\}$ y $R = \{(2,a),(2,b)\}$ es una relación entre A y B, entonces

$$\text{Dom } R = \{2\} \qquad \text{y} \qquad \text{Rec } R = \{a,b\} = B$$

2.2. Relaciones binarias en un conjunto

Si A es un conjunto, decimos que R es una **relación binaria** en A si $R \subset A \times A$.
En todo conjunto A siempre podemos definir las relaciones siguientes:

1. Relación de identidad en A: $\Delta_A = \{(x,x) : x \in A\}$
2. Relación nula en A: $\emptyset$
3. Relación total: $A \times A$

2.2.1. Clases de relaciones

Dado un conjunto A y una relación binaria R en A.

1. R es **reflexiva**: para todo $x \in A$, $(x,x) \in R$
2. R es **irreflexiva**: para todo $x \in A$, $(x,x) \notin R$
3. R es **simétrica**: para todo $x, y \in A$, si $(x,y) \in R$ entonces $(y,x) \in R$

4. R es **asimétrica**: para todo $x, y \in A$, si $(x, y) \in R$ entonces $(y, x) \notin R$

5. R es **antisimétrica**: para todo $x, y \in A$, si $(x, y) \in R$ y $(y, x) \in R$, entonces $x = y$

6. R es **transitiva**: para todo $x, y, z \in A$, si $(x, y) \in R$ y $(y, z) \in R$, entonces $(x, z) \in R$

Por ejemplo, si $A = \{1, 2, 3\}$ y $R = \{(1, 2), (2, 3), (2, 2), (1, 3)\}$, entonces:

a) R no es reflexiva, pues $(1, 1) \notin R$

b) R no es irreflexiva, pues $(2, 2) \in R$

c) R no es simétrica, pues $(1, 2) \in R$ y $(2, 1) \notin R$

d) R no es asimétrica, pues $(2, 2) \in R$

e) R es antisimétrica, pues no hay ningún par de elementos distintos x, y tales que $(x, y) \in R$ y $(y, x) \in R$

f) R es transitiva, pues no hay tres elementos x, y, z tales que $(x, y) \in R$ y $(y, z) \in R$ y $(x, z) \notin R$

2.3. Relaciones de equivalencia

Dado un conjunto A y una relación binaria R en A, decimos que R es una **relación de equivalencia** si R es reflexiva, simétrica y transitiva.
Toda relación de equivalencia R en un conjunto A nos permite clasificar los elementos del conjunto en clases de equivalencia. Se llama **clase de equivalencia** de un elemento $a \in A$ al conjunto denotado por $[a]$ que tiene por elementos todos los elementos de A que están relacionados con a. Así, tenemos

$$[a] = \{x : x \in A \text{ y } (x, a) \in R\}$$

De la definición de clase de equivalencia, deducimos enguida que

$$[a] = [b] \iff (a, b) \in R$$

o bien,

$$[a] = [b] \iff (a \in [b] \iff b \in [a])$$

Entonces se llama **conjunto cociente** de A por la relación R al conjunto denotado por A/R que tiene por elementos las clases de equivalencia de todos los elementos de a respecto de R. Así, tenemos

$$A/R = \{[a] : a \in A\}$$

Decimos que el conjunto cociente A/R es una **partición** del conjunto A, es decir, es una colección de subconjuntos no vacíos de A disjuntos dos a dos y tales que su unión es A. En otras palabras, se cumplen las siguientes propiedades:

1. Para todo $a \in A$, $[a] \neq \emptyset$

2. Para todo $a, b \in A$ y $[a] \neq [b]$, $[a] \cap [b] = \emptyset$

3. $\bigcup A/R = A$, donde $\bigcup A/R$ se llama la unión de A/R y es el conjunto cuyos elementos son los que pertenecen a alguna clase de A/R. Así, tenemos

$$x \in \bigcup A/R \iff \text{existe alguna } [a] \in A/R \text{ tal que } x \in [a]$$

Es habitual usar $\sim$ o $\equiv$ como símbolos de relaciones de equivalencia sobre un conjunto.
Por ejemplo, en el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ se define la siguiente relación binaria $\equiv$

$$x \equiv y \iff x - y \text{ es un múltiplo de } 3$$

Es inmediato comprobar que $\equiv$ es una relación de equivalencia en Z:

1. R es reflexiva: para todo $x \in \mathbb{Z}$, $x \equiv x$ pues $x - x = 0$, que es un múltiplo de 3.

2. R es simétrica: para todo $x, y \in \mathbb{Z}$, si $x \equiv y$, o sea si $x - y$ es un múltiplo de 3, entonces $-(x - y) = y - x$ también es un múltiplo de 3 y, por tanto, $y \equiv x$.

3. R es transitiva: para todo $x, y, z \in \mathbb{Z}$, si $x \equiv y$ y $x \equiv z$, o sea si $x - y$ y $y - z$ son múltiplos de 3, también lo será su suma, es decir, $(x - y) + (y - z) = x - z$ y, por tanto, $x \equiv z$.

Existen tres clases de equivalencia para esta relación:

1. $[0] = \{x \in \mathbb{Z} : x \text{ es múltiplo de } 3\} = \{..., -6, -3, 0, 3, 6, ...\}$

2. $[1] = \{x \in \mathbb{Z} : x - 1 \text{ es múltiplo de } 3\} = \{..., -5, -2, 1, 4, 7, ...\}$

3. $[2] = \{x \in \mathbb{Z} : x - 2 \text{ es múltiplo de } 3\} = \{..., -4, -1, 2, 5, 8, ...\}$

y el conjunto cociente es

$$\mathbb{Z}/\equiv \; = \{[1], [2], [3]\}$$

2.4. Relaciones de orden

Dado un conjunto A y una relación binaria R en A, decimos que R es una **relación de orden** si R es reflexiva, antisimétrica y transitiva. Un conjunto con una relación de orden se llama **conjunto ordenado**.
Una relación de orden R en un conjunto A se llama de **orden total** si para todo $x, y \in A$ se cumple:

$$(x, y) \in R \quad \text{o bien} \quad (y, x) \in R$$

En este caso se dice que A está **totalmente ordenado**. En cambio, si existen $x, y \in A$ tales que $(x, y) \notin R$ y $(y, x) \notin R$, entonces la relación se llama de **orden parcial** y se dice que A está **parcialmente ordenado**.
Es habitual usar $\leq$ como símbolo de relación de orden en un conjunto.
Ejemplos:

1. Si $A = \{1, 2, 3\}$, la siguiente relación

$$R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (1, 3)\}$$

es un orden parcial en A, mientras que la relación

$$S = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$$

es un orden total en A.

2. Si A es un conjunto cualquiera, la relación de inclusión es un orden parcial en el conjunto de partes de A.

3. La relación $\leq$ es un orden total en $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$.

2.4.1. Elementos notables de una relación de orden

Si A es un conjunto ordenado por la relación $\leq$, entonces tenemos las siguientes definiciones:

1. $a \in A$ es un elemento **maximal** de A si no existe $x \in A$ y $x \neq a$ tal que $a \leq x$.

2. $a \in A$ es un elemento **minimal** de A si no existe $x \in A$ y $x \neq a$ tal que $x \leq a$.

3. $a \in A$ es el **máximo** de A si para todo $x \in A$, $x \leq a$; en tal caso se escribe $a = \max A$.

4. $a \in A$ es el **mínimo** de A si para todo $x \in A$, $a \leq x$; en tal caso se escribe $a = \min A$.

No es difícil demostrar que en todo orden parcial hay a lo sumo un elemento máximo y un elemento mínimo. Asimismo, un elemento máximo (resp. mínimo), si existe, es un elemento maximal (resp. minimal). Si el orden es total, todo elemento minimal es mínimo y todo elemento maximal es máximo.
Ejemplos:

1. Consideremos el conjunto $A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ ordenado por la relación

$$R = \{(a, b), (a, c), (b, d), (c, d), (a, d), (e, f)\} \cup \Delta_A$$

Entonces, tenemos:

   a) R no es un orden total
   b) Los elementos d, f y g son maximales
   c) Los elementos a, e y g son minimales
   d) No hay máximo ni mínimo

2. Dado el conjunto $A = \{a, b\}$, consideremos el conjunto de partes $\mathcal{P}(A)$ ordenado por la relación de inclusión. Entonces, tenemos:

   a) A es máximal y $\emptyset$ es mínimal

b) A es máximo y $\emptyset$ es mínimo

Si A es un conjunto ordenado por la relación $\leq$ y $B \subset A$, entonces:

5. $a \in A$ es una **cota superior** o **mayorante** de B si para todo $x \in B$, $x \leq a$.
6. $a \in A$ es una **cota inferior** o **minorante** de B si para todo $x \in B$, $a \leq x$.
7. $a \in A$ es el **supremo** o **extremo superior** de B si a es el mínimo de las cotas superiores de B; en tal caso se escribe $a = \sup B$.
8. $a \in A$ es el **ínfimo** o **extremo inferior** de B si a es el máximo de las cotas inferiores de B; en tal caso escribimos $a = \inf B$.

Por ejemplo, consideremos el conjunto $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12\}$ ordenado por la relación $\mid$ definida por

$$x \mid y \iff x \text{ divide a } y$$

Queremos: (a) representar gráficamente este orden, (b) hallar sus elementos maximales, minimales, máximo y mínimo, (c) considerando el subconjunto $B = \{4, 6, 8, 10\}$, hallar cotas superiores e inferiores, supremo e ínfimo.

(a) Una posible representación gráfica de este orden es:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 8 & & 12 & & \\
 & & | & / & | & & \\
10 & & 4 & & 6 & & 9 \\
| & \backslash & | & / & & \backslash & | \\
5 & & 2 & & & & 3
\end{array}$$

(b) Los maximales son $10, 8, 12$ y 9. Los minimales son $5, 2$ y 3. No hay máximo ni mínimo.

(c) No hay cotas superiores y una cota inferior de B es 2. Por tanto, no hay supremo y $\inf B = 2$.

2.4.2. Conjuntos bien ordenados

Si A es un conjunto ordenado, decimos que A está **bien ordenado** si todo subconjunto de A tiene mínimo.
Ejemplos:

1. El conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ está bien ordenado por la relación $\leq$.
2. El conjunto de los números reales $\mathbb{R}$ no está bien ordenado por la relación $\leq$ pues, por ejemplo, el subconjunto $(1, 2)$ no tiene mínimo.
3. Dado el conjunto $A = \{a, b, c\}$, consideremos el conjunto de partes $\mathcal{P}(A)$ ordenado por la relación de inclusión. Considerando los subconjuntos $B = \{\{a\}, \{a, b\}\}$ y $C = \{\{b\}, \{c\}, \{b, c\}\}$, (a) queremos saber si dichos conjuntos están o no bien ordenados. (b) Queremos también encontrar los elementos notables de esta relación en $\mathcal{P}(A), B$ y C.

(a) B está bien ordenado pues $\{a\} \subset \{a\}$ y $\{a\} \subset \{a, b\}$; además, observa que B está totalmente ordenada por $\subset$. En cambio, B no lo está, ya que el subconjunto $\{\{b\}, \{c\}\}$ no tiene mínimo.

(b)

	$P(A)$	B	C
Maximales	A	$\{a, b\}$	$\{b, c\}$
Minimales	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}, \{c\}$
Máximo	A	$\{a, b\}$	$\{b, c\}$
Mínimo	$\emptyset$	$\{a\}$	No hay
Cotas superiores	A	$\{a, b\}, A$	$\{b, c\}, A$
Cotas inferiores	$\emptyset$	$\{a\}, \emptyset$	$\emptyset$
Supremo	A	$\{a, b\}$	$\{b, c\}$
Ínfimo	$\emptyset$	$\{a\}$	$\emptyset$

3. Aplicaciones

Dados dos conjuntos A y B, una relación R entre A y B se llama **aplicación** de A en B si Dom $R = A$ y para todo $a \in$ Dom R existe un único $b \in B$ tal que $(a, b) \in R$. Es habitual usar f, g o h como símbolos de aplicaciones. De este modo, para designar una aplicación f de A en B escribiremos

$$f : A \longrightarrow B$$

o bien

$$A \xrightarrow{f} B$$

Consideremos la aplicación $f : A \longrightarrow B$ y sea $a \in A$, entonces $f(a)$ se llama la **imagen** de a por f. Si $f(a) = b$, entonces decimos que a es una **antiimagen** de b por f. Al conjunto

$$\operatorname{Im} f = \{y : y \in B \text{ y existe } x \in A \text{ tal que } f(x) = y\}$$

se le llama **imagen** o **recorrido** de la aplicación f. Observa que $\operatorname{Im} f$ es el conjunto de los elementos de B que tienen al menos una antiimagen por la aplicación f.
Dadas dos aplicaciones $f : A \longrightarrow B$ y $g : A \longrightarrow B$, decimos que son **iguales**, representándolo por $f = g$, si para todo $x \in A$ se cumple $f(x) = g(x)$. En símbolos, escribimos

$$f = g \iff (\forall x)\,(x \in A \Longrightarrow f(x) = g(x))$$

Se llama **grafo** de la aplicación $f : A \longrightarrow B$ al conjunto

$$\text{Graf } f = \{(x, y) : (x, y) \in A \times B \text{ y } f(x) = y\}$$

Entonces, es evidente que dos aplicaciones f y g de A en B son iguales si y sólo si Gra $f =$ Graf g.
Ejemplos:

1. Dados los conjuntos $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{2, 6, 9, 12, 20, 21\}$, consideramos la relación entre A y B definida por: $x \in A$ está relacionado con $y \in B$ si y sólo si $y = 3x$. (a) ¿Es esta relación una aplicación de A en B? (b) ¿Qué números se han de excluir de A para que lo sea? Calcula la imagen y el grafo de la aplicación que así se obtiene.

(a) Esta relación no es una aplicación de A en B, pues su dominio es el conjunto $\{2,3,4\}$ y no coincide con A.

(b) Si excluimos 0 y 1 de A, entonces la relación define una aplicación de $\{2,3,4\}$ en B. Es claro que la imagen de esta aplicación es

$$\{6,9,12\}$$

y el grafo es

$$\{(2,6),(3,9),(4,12)\}$$

2. Sean $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ y consideremos el siguiente conjunto

$$G = \{(x,y) : (x,y) \in A \times B \text{ y } y = 2x - 1\}$$

(a) ¿Es G el grafo de una aplicación f de A en B? (b) Si lo es, ¿cómo se define la imagen de un elemento cualquiera de A? ¿Qué elementos de B tienen antiimagen?

(a) Es inmediato comprobar que

$$G = \{(1,1),(2,3),(3,5),(4,7)\}$$

Es claro que G define una aplicación f de A en B.

(b) La aplicación f se define por $f(x) = 2x - 1$. Los elementos de B que tienen antiimagen determinan el conjunto $\operatorname{Im} f$. Es evidente que

$$\operatorname{Im} f = \{1,3,5,7\}$$

Observación 2 Los conceptos de aplicación y función se consideran a menudo como sinónimos. Sin embargo, el concepto de función puede considerarse menos restrictivo que el de aplicación. La razón está en el hecho de que cuando tratamos con funciones es habitual no especificar desde un principio los conjuntos de salida y de llegada como así hacemos al definir el concepto de aplicación. En general, una función se define como una relación R entre dos conjuntos referenciales (suficientemente amplios) que satisface la siguiente propiedad: para cualesquiera objetos a, b, c

$$(a,b) \in R \text{ y } (a,c) \in R \implies b = c$$

En otras palabras, una relación R entre dos conjuntos referenciales es una función si y sólo si para todo $a \in \operatorname{Dom} R$ existe un único objeto b tal que $(a,b) \in R$.
Definido de esta manera el concepto de función, entonces decimos que f es una función de A en B si $\operatorname{Dom} f = A$ y $\operatorname{Rec} f \subset B$. Ahora, es evidente que una función de A en B es una aplicación de A en B.
Por ejemplo, las funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ (funciones reales de variable real) son aplicaciones de su dominio en $\mathbb{R}$.

3.1. Clases de aplicaciones

Dados los conjuntos A, B y la aplicación $f : A \longrightarrow B$. Distinguimos las siguientes clases de aplicaciones:

1. La aplicación se llama **inyectiva** cuando cualquier par de elementos distintos de A tienen imágenes distintas, o dicho de otra forma equivalente, si no hay dos elementos distintos de A con la misma imagen. En símbolos, escribimos

$$\begin{aligned} f \text{ es inyectiva } &\Longleftrightarrow (x \neq y \Longrightarrow f(x) \neq f(y)) \\ &\Longleftrightarrow (f(x) = f(y) \Longrightarrow x = y) \end{aligned}$$

   para todo $x, y \in A$.

2. La aplicación se llama **exhaustiva** si todo elemento de B tiene al menos una antiimagen en A, o dicho de otra forma equivalente, si $\operatorname{Im} f = B$. En símbolos, escribimos

$$\begin{aligned} f \text{ es exhaustiva } &\Longleftrightarrow (\forall y)\,(y \in B \Longrightarrow (\exists x)\,(x \in A \text{ y } f(x) = y)) \\ &\Longleftrightarrow \operatorname{Im} f = B \end{aligned}$$

3. La apliación se llama **biyectiva** cuando es inyectiva y exhaustiva.

Ejemplos:

1. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$ no es inyectiva ni exhaustiva. En efecto, f no es inyectiva porque $-1 \neq 1$ y, en cambio, $f(-1) = f(1)$. Tampoco es exhaustiva porque -1 no tiene antiimagen.

2. $f : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$ es inyectiva pero no es exhaustiva. En efecto, f es inyectiva porque si $f(x) = f(y)$, deducimos $x^2 = y^2$. De aquí, obtenemos $|x| = |y|$, pero al ser $x, y \in [0, +\infty)$, deducimos $x = y$. No es exhaustiva porque -1 no tiene antiimagen.

3. $f : \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty)$ definida por $f(x) = x^2$ no es inyectiva pero sí es exhaustiva. En efecto, f no es inyectiva porque $-1 \neq 1$ y, en cambio, $f(-1) = f(1)$. Si $y \in [0, +\infty)$, entonces $\sqrt{y} \in \mathbb{R}$ y se cumple $f\left(\sqrt{y}\right) = \left(\sqrt{y}\right)^2 = y$. Por tanto, cualquier elemento de $[0, +\infty)$ tiene antiimagen y, por tanto, f es exhaustiva.

4. $f : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$ definida por $f(x) = x^2$ es biyectiva. En efecto, el razonamiento utilizado en (2) prueba que f es inyectiva, y el razonamiento utilizado en (3) prueba que f es exhaustiva. Por tanto, f es biyectiva.

3.2. Imagen y antiimagen de un conjunto

Dados los conjuntos A, B y la aplicación $f : A \longrightarrow B$. Consideremos $C \subset A$ y $D \subset B$, entonces se llama **imagen del conjunto** C al conjunto

$$f(C) = \{y : y \in B \text{ y existe } x \in C \text{ tal que } f(x) = y\}$$

es decir, el conjunto $f(C)$ está formado por las imagenes de todos los elementos de C.

Se llama **antiimagen del conjunto** D al conjunto

$$f^{-1}(D) = \{x : x \in A \text{ y } f(x) \in D\}$$

es decir, el conjunto $f^{-1}(D)$ está formado por las antiimágenes de todos los elementos de D.
Ejemplos: Se considera la aplicación $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

y queremos calcular la imagen del conjunto $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ y la antiimagen del conjunto $\{0, 1, 2\}$. Para determinar $f(\{-2, -1, 0, 1, 2\})$ deberemos calcular las imágenes de todos los elementos del conjunto en cuestión. Así, tenemos

$$\begin{aligned} f(-2) &= \tfrac{(-2)^2-1}{(-2)^2+1} = \tfrac{3}{5} \\ f(-1) &= \tfrac{(-1)^2-1}{(-1)^2+1} = 0 \\ f(0) &= \tfrac{0-1}{0+1} = -1 \\ f(1) &= \tfrac{1-1}{1+1} = 0 \\ f(2) &= \tfrac{4-1}{4+1} = \tfrac{3}{5} \end{aligned}$$

Luego,

$$f(\{-2, -1, 0, 1, 2\}) = \left\{-1, 0, \frac{3}{5}\right\}$$

Para determinar $f^{-1}(\{0, 1, 2\})$ deberemos calcular las antiimágenes de todos los elementos del conjunto en cuestión. Así, tenemos

$$\begin{array}{lclcl} f(x) = 0 & \Longrightarrow & \frac{x^2-1}{x^2+1} = 0 & \Longrightarrow & x = 1 \text{ o } x = -1 \\ f(x) = 1 & \Longrightarrow & \frac{x^2-1}{x^2+1} = 1 & \Longrightarrow & \text{No hay solución} \\ f(x) = 2 & \Longrightarrow & \frac{x^2-1}{x^2+1} = 2 & \Longrightarrow & \text{No hay solución} \end{array}$$

Luego,

$$f^{-1}(\{0, 1, 2\}) = \{-1, 1\}$$

Observación 3 Veremos en otro apartado que si una aplicación f es biyectiva, entonces existe la aplicación f^{-1} que se llama inversa de f. Al usar la notación $f^{-1}(D)$ no se debe presuponer que f es biyectiva; ahora $f^{-1}(D)$ designa simplemente el conjunto que tiene por elementos todas las antiimágenes de los elementos de D. Sin embargo, en el caso de que f sea biyectiva, la notación $f^{-1}(D)$ será consistente con el hecho de que $f^{-1}(D)$ se interprete también como la imagen del conjunto D por la aplicación inversa de f.

3.3. Composición de aplicaciones

Dados los conjuntos A, B y C, consideremos las aplicaciones $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$. A la aplicación $h : A \longrightarrow C$ definida por

$$h(x) = g(f(x))$$

se la llama **aplicación compuesta** de f y g o **aplicación composición** de f con g y se escribe $h = g \circ f$. El siguiente diagrama justifica la definición de la aplicación compuesta de f y g

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g \circ f"] & B \arrow[r, "g"] & C \\ x \arrow[r, mapsto] & f(x) \arrow[r, mapsto] & g(f(x)) \end{tikzcd}$$

Ejemplo: Consideremos las aplicaciones $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x + 1$ y $g(x) = 1 - 2x$. Queremos calcular la aplicación compuesta de f y g. Según la definición, tenemos

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g\left(f(x)\right) \\ &= g(x+1) \\ &= 1 - 2(x+1) \\ &= 1 - 2x - 2 \\ &= -1 - 2x \end{aligned}$$

Observación 4

1. Es importante señalar que la composición $g \circ f$ de dos aplicaciones f y g sólo existe cuando el conjunto de llegada de f coincide con el conjunto de salida de g.
2. Observa que en la expresión $g \circ f$ las aplicaciones aparecen escritas en orden inverso al de actuación, que es: primero f y después g.

3.4. Aplicación inversa

Dada una aplicación $f : A \longrightarrow B$ biyectiva, la aplicación $g : B \longrightarrow A$ definida por

$$g(y) = x \iff f(x) = y$$

se llama **aplicación inversa** de f y es habitual denotarla por f^{-1}.
Según la definición, es inmediato comprobar que

$$f^{-1} \circ f = I_A \quad \text{y} \quad f \circ f^{-1} = I_B$$

donde las aplicaciones $I_A : A \longrightarrow A$ y $I_B : B \longrightarrow B$ definidas por $I_A(x) = x$ para todo $x \in A$ y $I_B(x) = x$ para todo $x \in B$ se llaman, respectivamente, la **aplicación identidad** de A y la aplicación identidad de B.
Ejemplos: Consideremos la aplicación $f : \mathbb{R} - \{1\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{2\}$ definida por

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$$

(a) Probaremos que f es biyectiva y (b) calcularemos la aplicación inversa.

(a) Si $x, y \in \mathbb{R} - \{1\}$ y suponemos que $f(x) = f(y)$, entonces

$$\begin{aligned} f(x) &= f(y) \\ \frac{2x+1}{x-1} &= \frac{2y+1}{y-1} \\ 2xy - 2x + y - 1 &= 2xy + x - 2y - 1 \\ 3y &= 3x \\ y &= x \end{aligned}$$

y, por tanto, f es inyectiva. Si $y \in \mathbb{R} - \{2\}$ y hacemos $f(x) = y$, entonces

$$\begin{aligned} f(x) &= y \\ \frac{2x+1}{x-1} &= y \\ 2x+1 &= xy - y \\ 1+y &= xy - 2x \\ 1+y &= x(y-2) \\ \frac{1+y}{y-2} &= x \end{aligned}$$

Luego, dado $y \in \mathbb{R} - \{2\}$, existe

$$\frac{1+y}{y-2} \in \mathbb{R} - \{1\}$$

y se cumple

$$f\left(\frac{1+y}{y-2}\right) = y$$

Por tanto, f es también exhaustiva y, en consecuencia, f es biyectiva.

(b) Puesto que para todo $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ y $y \in \mathbb{R} - \{2\}$, se cumple

$$\tfrac{1+y}{y-2} = x \iff \tfrac{2x+1}{x-1} = y$$

entonces

$$f^{-1}(y) = \frac{1+y}{y-2}$$

Sistituyendo ahora y por x, obtenemos

$$f^{-1}(x) = \frac{1+x}{x-2}$$

4. Cardinal de un conjunto

En este apartado precisaremos la noción intuitiva que todos tenemos de número de elementos de un conjunto finito.
Decimos que dos conjuntos A y B son **equipotentes** cuando existe una aplicación biyectiva de A en B. Ahora podemos asociar a cada conjunto A lo que se llama **cardinal** o **potencia** de A y que se denota por Card A. El cardinal de un conjunto se define de manera que se cumpla la siguiente condición: Dos conjuntos tienen el mismo cardinal si y sólo si son equipotentes.
Si E es un conjunto referencial y consideremos en $\mathcal{P}(E)$ la relación de equipotencia $\sim$ definida por

$$A \sim B \iff \text{Card } A = \text{Card } B$$

es inmediato comprobar que $\sim$ es una relación de equivalencia en $\mathcal{P}(E)$ y cada clase se llama un **número cardinal**. Es decir, n es un número cardinal si existe un conjunto A tal que Card $A = n$.
Así, todos los conjuntos equipotentes a un conjunto unitario como, por ejemplo, $\{\emptyset\}$, diremos que tienen cardinal 1, todos los conjuntos equipotentes a un par como, por

ejemplo, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ tienen cardinal 2, y así sucesivamente. Admitimos que el cardinal del conjunto vacío es 0, es decir, Card $\emptyset = 0$.
Intuitivamente, es claro que un conjunto finito no puede ser equipotente a uno de sus propios subconjuntos. Sin embargo, esto es posible para conjuntos infinitos. Por ejemplo, el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ es equipotente con el siguiente subconjunto propio

$$P = \{x : x = 2n \text{ y } n \in \mathbb{N}\}$$

ya que la aplicación

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & P \\ n & \longmapsto & 2n \end{array}$$

es biyectiva. Este hecho justifica la siguiente definición.
Decimos que un conjunto A es **infinito** si A es equipotente con un subconjunto propio de A. Si un conjunto no es infinito, entonces decimos que es **finito**.
De este modo, para dos conjuntos finitos A y B, evidentemente tenemos que A es equipotente a B si y sólo si A y B contienen el mismo número de elementos. Para los conjuntos infinitos, la idea "tener el mismo número de elementos.$^{\text{es}}$ vaga, mientras que la idea de que A sea biyectable con B conserva su claridad.
Decimos que un conjunto A es **infinito numerable** si A es equipotente al conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$, y decimos simplemente **numerable** si A es finito o infinito numerable.

4.1. Propiedades para conjuntos finitos

Las fórmulas más usuales (aunque no las únicas) que relacionan los cardinales y las operaciones entre conjuntos son:

1. $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card } A + \text{ Card } B - \text{ Card}(A \cap B)$
2. $\text{Card}(A \cup B \cup C) = \text{Card } A + \text{ Card } B + \text{ Card } B - \text{ Card}(A \cap B) - \text{Card}(A \cap C) - \text{Card}(B \cap C) + \text{Card}(A \cap B \cap C)$
3. $\text{Card } \complement_E A = \text{Card } E - \text{ Card } A$
4. $\text{Card}(A \times B) = \text{Card } A \cdot \text{ Card } B$
5. $\text{Card } \mathcal{P}(A) = 2^{\text{Card } A}$

Las demostraciones de estas propiedades las encontrarás en los ejercicios resueltos.
Ejemplo: A un examen de Matemáticas y Física han concurrido 100 alumnos. Sabiendo que Física la han aprobado 60 alumnos, Matemáticas 48 y que el número de alumnos que han aprobado ambas asignaturas ha sido 30, queremos averiguar el número de alumnos que no han aprobado ninguna asignatura en dicho examen.
Tenemos los siguientes conjuntos: el conjunto E de alumnos que se examinan, el conjunto A de alumnos que han aprobado Física y el conjunto B de alumnos que han aprobado Matemáticas. Por el enunciado del problema, se sabe que

$$\begin{array}{ll} \text{Card } E = 100 & \text{Card } A = 60 \\ \text{Card } B = 48 & \text{Card } (A \cap B) = 30 \end{array}$$

El conjunto de alumnos que han aprobado alguna asignatura es $A \cup B$ y el número de elementos de este conjunto es

$$\begin{aligned} \text{Card}\,(A \cup B) &= \text{Card } A + \text{Card } B - \text{Card}\,(A \cap B) \\ &= 60 + 48 - 30 \\ &= 78 \end{aligned}$$

El número de alumnos que no han aprobado ninguna asignatura es el cardinal del conjunto $\complement_E(A \cup B)$. Por tanto, obtenemos

$$\begin{aligned} \text{Card } \complement_E(A \cup B) &= \text{Card } E - \text{Card}\,(A \cup B) \\ &= 100 - 78 \\ &= 22 \end{aligned}$$