Ejercicios propuestos

Índice

1. Dados los conjuntos siguientes

$$\begin{aligned}A &= \{x : x = 2n \ \ \text{y} \ \ n \in \mathbb{N}\}\\ B &= \{x : x = 3n \ \ \text{y} \ \ n \in \mathbb{N}\}\\ C &= \{x : x = 4n - 1 \ \ \text{y} \ \ n \in \mathbb{N}\}\\ D &= \{x : x = 4n + 1 \ \ \text{y} \ \ n \in \mathbb{N}\}\end{aligned}$$

   Halla $A \cap B$, $C \cup D$, $C \cap D$, $\complement_{\mathbb{N}} A$ y $A \cap (C \cup D)$.

   Solución: $A \cap B$ es el conjunto de múltiplos de 6, $C \cup D = \{x : x = 2n + 1 \ \ \text{y} \ \ n \in \mathbb{N}\}$, $C \cap D = \emptyset$, $\complement_{\mathbb{N}} A$ es el conjunto de los números impares, y $A \cap (C \cup D) = \emptyset$.

2. Sea E un conjunto referencial y A, B y C tres conjuntos dados. Simplifica las siguientes expresiones:

   a) $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$
   b) $\left[(A \cup B) \cap \overline{B \cap \overline{A}}\right] \cup \left[(A \cap B) \cup \overline{B \cup \overline{A}}\right]$
   c) $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$
   d) $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap C) \cup (A \cap C)$

   Solución: a) E, b) A, c) $A \cap (B \cup C)$ y d) $A \cup C$

3. Si Card $P\,(A \cup P(A)) = 8$, calcula Card A.

   Solución: Card $A = 1$

4. Una empresa ofrece plazas de electricista, de mecánico y de carpintero. Sabemos que 12 personas solicitan plaza de electricista, 12 de mecánico, 15 de carpintero, 3 de electricista y mecánico, 4 de mecánico y carpintero, 5 de electricista y carpintero y, finalmente, 1 solicita plaza de las tres cosas. Calcula cuánta gente ha hecho alguna solicitud.

   Solución: 28 personas

5. En una reunión hay 25 personas que son médicos, músicos o políticos. Hay 20 médicos, 12 músicos y 17 políticos. Hay 8 que son médicos y músicos, 12 que son médicos y políticos y 11 que son músicos y políticos. (a) ¿Cuántos políticos son músicos y médicos a la vez? (b) ¿Cuántas personas hay con una sola profesión?

   Solución: (a) 7 y (b) 8

6. De un grupo de 1000 personas, 950 llevan reloj, 750 llevan paraguas, 800 llevan corbata y 850 llevan sombrero. Halla el número mínimo de personas que llevan las cuatro cosas.

   Solución: 350

7. Comprueba si las siguientes colecciones de conjuntos forman una partición de $\mathbb{N}$

   a) $A = \{x : x = 2n \ \text{ y } \ n \in \mathbb{N}\}$ y $B = \{x : x = 2n - 1 \ \text{ y } \ n \in \mathbb{N}\}$
   b) A es el conjunto de los números primos entre sí, $B = \{2, 4, 6, 8, 9\}$ y $C = \{x \in \mathbb{N} : x \geq 10\}$
   c) $A = \{x : x = 2n \ \text{ y } \ n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{x : x = 3n \ \text{ y } \ n \in \mathbb{N}\}$ y $C = \{x : x = 5n \ \text{ y } \ n \in \mathbb{N}\}$

   Solución: a) Sí, b) No, c) No

8. En el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ se define la relación

$$x \; R \; y \iff y \text{ es múltiplo de } x$$

   (a) Escribe el grafo de la relación y (b) estudia sus propiedades.

   Solución: (a) $R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,2), (2,4), (2,6), (3,3), (3,6), (4,4), (5$
   (b) R es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

9. ¿Qué relación binaria sobre un conjunto es simétrica y antisimétrica?

   Solución: La relación de igualdad.

10. De las siguientes relaciones, ¿cuáles son de equivalencia? y en caso de serlo, ¿cuáles son sus clases?

    a) "Tener la misma altura.$^{\text{en}}$ el conjunto de los alumnos de una clase
    b) "Ser equipolente.$^{\text{en}}$ el conjunto de los vectores fijos del plano
    c) .$^{\text{Eq}}$uidistar de un punto fijo dado.$^{\text{en}}$ el conjunto de los puntos del plano
    d) .$^{\text{Es}}$tar alineados con un punto fijo dado.$^{\text{en}}$ el conjunto de pares de puntos del plano sin el punto fijo dado

       Solución: (a) Es de equivalencia y los alumnos quedan clasificados según sus alturas (b) Es de equivalencia y las clases son los vectores libres del plano (c) Es de equivalencia y las clases son las circunferencias de centro el punto fijo dado (d) Es de equivalencia y las clases son las rectas que pasan por el punto fijo dado sin contener dicho punto.

11. En el conjunto de los números reales se define la relación

$$x \sim y \iff \lfloor x \rfloor = \lfloor y \rfloor$$

    donde $\lfloor x \rfloor$ significa la parte entera del número real x. ¿Es una relación de equivalencia? Si lo es, ¿cuáles son sus clases?

    Solución: Observa que $x \sim y$ si y sólo si existe un número entero n tal que $x, y \in [n, n+1)$. Es una relación de equivalencia y las clases son los intervalos de la forma $[n, n+1)$ con $n \in \mathbb{Z}$.

12. Averigua si la relación "x divide y."es de orden en cada uno de los conjuntos que se indican a continuación, y, en el caso de que lo sea, ¿es parcial o total? Halla sus elementos maximales y minimales.

    a) En el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$
    b) En el conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$

    Solución: (a) Es de orden parcial, 1 es minimal y no hay elementos maximales. (b) No es de orden

13. En el conjunto de los números reales ordenado según la relación de orden usual $\leq$ se consideran los siguientes subconjuntos (a) $A = [1, 5]$, (b) $B = (-2, -1]$, (c) $C = (\pi, 2\pi)$, (d) $D = [2, +\infty)$, (e) $E = (-5, +\infty)$ y (f) $F = (-\infty, 0)$. Calcula, si existen, mínimo, máximo, ínfimo y supremo de cada uno de ellos.

    Solución: (a) $\min A = \inf A = 1$ y $\max A = \sup A = 5$, (b) $\inf B = -2$ y $\max B = \sup B = -1$, (c) $\inf C = \pi$ y $\sup C = 2\pi$, (d) $\min D = \inf D = 2$, (e) $\inf E = -5$, (f) $\sup F = 0$

14. En el conjunto $A = \{2, 3, 5, 6, 15\}$ se define la relación

    $$x \, R \, y \iff y \text{ es múltiplo de } x$$

    (a) ¿Es una relación de orden? ¿Es parcial o total? (b) Halla máximo, mínimo, supremo e ínfimo de $B = \{2, 3, 6, 15\}$. (c) Halla máximo, mínimo, supremo e ínfimo de A. (d) ¿Hay elementos maximales o minimales de A?

    Solución: (a) Es de orden parcial (b) No existen $\max B$, $\min B$, $\sup B$, $\inf B$. (c) No existen $\max A$, $\min A$, $\sup A$, $\inf A$. (d) $2, 3, 5$ son minimales y $6, 15$ son maximales.

15. Se dan los conjuntos $A = \{2, 3, 4, 7, 8\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}$. Sea $f : A \longrightarrow B$ la aplicación definida por

    $$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{si } x \text{ es par} \\ x & \text{si } x \text{ es impar} \end{cases}$$

    Estudia qué clase de aplicación se obtiene.

    Solución: Es una aplicación inyectiva

16. Dadas las aplicaciones $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^x$ y $g : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \sqrt{x}$. (a) ¿De qué clase de aplicaciones son f y g? (b) Cambia los conjuntos de salida y de llegada de la aplicación f para que sea biyectiva. (c) Cambia los conjuntos de salida y de llegada de la aplicación g para que sea biyectiva. (d) Calcula las aplicaciones inversas de las aplicaciones del apartado (c). (e) Calcula si es posible $f \circ g$ y $g \circ f$.

    Solución: (a) f es inyectiva pero no exhaustiva y g es inyectiva pero no exhaustiva. (b) La aplicación $f : \mathbb{R} \longrightarrow (0, +\infty)$ definida por $f(x) = e^x$ es biyectiva. (c) La aplicación $g : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$ definida por $g(x) = \sqrt{x}$ es biyectiva. (d) $f^{-1} : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f^{-1}(x) = \ln x$ y $g^{-1} : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$ con $g^{-1}(x) = x^2$. (e) $f \circ g : [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ con $(f \circ g)(x) = e^{\sqrt{x}}$ y $g \circ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ con $(g \circ f)(x) = \sqrt{e^x}$ ya que $\operatorname{Im} f = (0, +\infty) \subset [0, +\infty)$.

17. Dada la aplicación $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x + 1$, calcula $f(A)$ y $f^{-1}(A)$ en los casos siguientes: (a) $A = [1, 3]$, (b) $A = [-2, -1)$, (c) $A = [1, +\infty)$ y (d) $A = (-\infty, -2)$.

    Solución: (a) $f(A) = [3, 7]$ y $f^{-1}(A) = [0, 1]$, (b) $f(A) = [-3 - 1)$ y $f^{-1}(A) = [-3/2, -1)$, (c) $f(A) = [3, +\infty)$ y $f^{-1}(A) = [0, +\infty)$ y (d) $f(A) = (-\infty, -3)$ y $f^{-1}(A) = (-\infty, -3/2)$.

18. Sea $f : \mathbb{R} - \{1\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{3\}$ definida por

$$f(x) = \frac{3x - 1}{x - 1}$$

    Demuestra que es biyectiva y calcula la aplicación inversa.

    Solución: Hay que demostrar que es inyectiva y exhaustiva. La aplicación inversa es

$$f^{-1}(x) = \frac{x - 1}{x - 3}$$