Práctica

Índice

1. Conjuntos **1**

2. Relaciones **12**

3. Aplicaciones **19**

4. Cardinal de un conjunto **27**

1. Conjuntos

Ejercicio 1 Escribe simbólicamente los conjuntos siguientes y determina sus elementos en cada caso:

a) El conjunto de los números reales tales que su cuadrado es 12

b) El conjunto de los números reales tales que su cuadrado es -9

c) El conjunto de los números reales tales que su cuadrado es mayor o igual que 0

d) El conjunto de los números naturales comprendidos entre $3/2$ y $13/3$

e) El conjunto de los números reales que son solución de la ecuación $3x - 1 = 10$

f) El conjunto de los números enteros que son solución de la ecuación $3x - 1 = 10$

Solución: a) El conjunto de los números reales tales que su cuadrado es 12 se escribe como sigue

$$\begin{aligned} A &= \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 = 12\right\} \\ &= \left\{-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}\right\} \end{aligned}$$

b) El conjunto de los números reales tales que su cuadrado es -9 es el conjunto vacío, ya que no hay ningún número real cuyo cuadrado sea negativo.
c) El conjunto de los números reales tales que su cuadrado es mayor o igual que 0 se escribe como sigue

$$\begin{aligned} C &= \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \\ &= [0, +\infty) \end{aligned}$$

d) El conjunto de los números naturales comprendidos entre 3/2 y 13/3 es

$$\begin{aligned} D &= \{x \in \mathbb{N} : 3/2 \leq x \leq 13/3\} \\ &= \{2, 3, 4\} \end{aligned}$$

e) El conjunto de los números racionales que son solución de la ecuación $3x - 1 = 10$ es

$$\begin{aligned} E &= \{x \in \mathbb{Q} : 3x - 1 = 10\} \\ &= \left\{\frac{11}{3}\right\} \end{aligned}$$

f) El conjunto de los números enteros que son solución de la ecuación $3x - 1 = 10$ es el conjunto vacío, ya que no hay ningun número entero que multiplicado por 3 sea igual a 11. ■

Ejercicio 2 Determina los siguientes conjuntos mediante una condición que satisfacen sus elementos.

a) $\{5\}$

b) $\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$

c) $\{-1, 0, 1\}$

Solución: a) Es claro que

$$\{5\} = \{x \in \mathbb{N} : 4 < x < 6\}$$

b) Es claro que

$$\{1, 3, 5, 7, 9, 11\} = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ es impar y } x \leq 11\}$$

c) Es claro que

$$\{-1, 0, 1\} = \left\{x \in \mathbb{R} : x^3 - x = 0\right\}$$

■

Ejercicio 3 Son iguales los conjuntos

$$A = \{x : x \text{ es una letra de la palabra "matemática"}\}$$

y

$$B = \{a, m, i, c, t, e\}$$

¿Por qué?
Solución: Es evidente que

$$A = \{m, a, t, e, i, c\}$$

y, por tanto, $A = B$, ya que tienen los mismo elementos. ■

Ejercicio 4 Calcula el conjunto de partes de los conjuntos siguientes:

a) $A = \{1\}$

b) $B = \{1, 2\}$

c) $C = \{1, 2, 3\}$

Solución: a) Si $A = \{1\}$, entonces

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, A\}$$

b) Si $B = \{1, 2\}$, entonces

$$\mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, B\}$$

c) Si $C = \{1, 2, 3\}$, entonces

$$\mathcal{P}(C) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, C\}$$

■

Ejercicio 5 Dado el conjunto $A = \{a, b, c\}$, ¿cuáles de las siguientes relaciones son verdaderas?

a)	$a \in A$	*b)*	$\{b\} \in A$	*c)*	$c \subset A$
d)	$\{c\} \subset A$	*e)*	$\{a, b, c\} \subset A$	*f)*	$A \in A$

Solución: a) Es claro que a es elemento de A y, por tanto, es cierto que $a \in A$.
b) $\{b\} \in A$ es falsa, ya que $\{b\}$ no es elemento de A.
c) $c \subset A$ es falsa, ya que c es elemento de A y no un conjunto.
d) Es claro que c es elemento de A y, por tanto, es cierto que $\{c\}$ es subconjunto de A.
e) Es claro que a, b y c son elementos de A y, por tanto, es cierto que $\{a, b, c\}$ es subconjunto de A.
f) $A \in A$ es falsa, ya que A no es elemento de sí mismo. ■

Ejercicio 6 Dado el conjunto $A = \{1, 2, 3\}$, ¿cuáles de las siguientes relaciones son verdaderas?

a)	$\{3\} \in A$	*b)*	$\{1, 2\} \subset A$	*c)*	$3 \in \mathcal{P}(A)$
d)	$\emptyset \in \mathcal{P}(A)$	*e)*	$\emptyset \subset \mathcal{P}(A)$	*f)*	$\{2, 3\} \subset \mathcal{P}(A)$
g)	$\{\emptyset\} \subset \mathcal{P}(A)$	*h)*	$\emptyset \in \{\emptyset\}$	*i)*	$\{\{1\}\} \in \mathcal{P}(A)$

Solución: a) $\{3\} \in A$ es falsa, ya que $\{3\}$ no es elemento de A.
b) Es claro que 1 y 2 son elementos de A y, por tanto, es cierto que $\{1, 2\}$ es subconjunto de A.
c) Es claro que 3 no es subconjunto de A y, por tanto, $3 \in \mathcal{P}(A)$ es falsa.
d) Es claro que $\emptyset \subset A$ y, por tanto, es cierto que $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$.
e) Es claro que $\emptyset$ es subconjunto de cualquier conjunto y, por tanto, es cierto que $\emptyset \subset \mathcal{P}(A)$.
f) Es claro que ni 2 ni 3 son subconjuntos de A y, por tanto, es falso que $\{2, 3\} \subset \mathcal{P}(A)$.
g) Es claro que $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$ y, por tanto, es cierto que $\{\emptyset\} \subset \mathcal{P}(A)$.
h) Al ser $\emptyset$ elemento de $\{\emptyset\}$, es cierto que $\emptyset \in \{\emptyset\}$.
i) Es claro que $\{\{1\}\}$ no es subconjunto de A y, por tanto, es falso que $\{\{1\}\} \in \mathcal{P}(A)$.
■

Ejercicio 7 Demuestra que se cumplen las siguientes propiedades de la relación de inclusión:

a) Para todo conjunto A, $A \subset A$

b) Dados dos conjuntos A y B, si $A \subset B$ y $A \supset B$, entonces $A = B$

c) Dados tres conjuntos A, B y C, si $A \subset B$ y $B \subset C$, entonces $A \subset C$

Solución: a) Dado cualquier conjunto A, por definición, tenemos

$$A \subset A \iff x \in A \Longrightarrow x \in A$$

para todo x. Desde el punto de vista lógico, la implicación

$$x \in A \Longrightarrow x \in A$$

es verdadera cualesquiera que sea x. Luego, $A \subset A$.
b) Dados dos conjuntos cualesquiera A y B, si $A \subset B$, entonces

$$x \in A \Longrightarrow x \in B$$

para todo x. Además, si $B \subset A$, entonces

$$x \in B \Longrightarrow x \in A$$

para todo x. Desde el punto de vista lógico, de las dos implicaciones anteriores se deduce por definición

$$x \in A \Longleftrightarrow x \in B$$

para todo x. Luego, por definición de igualdad de conjuntos, $A = B$.
c) Dados tres conjuntos cualesquiera A, B y C, si $A \subset B$, entonces

$$x \in A \Longrightarrow x \in B$$

para todo x. Además, si $B \subset C$, entonces

$$x \in B \Longrightarrow x \in C$$

para todo x. Desde el punto de vista lógico, de las dos implicaciones anteriores se deduce

$$x \in A \Longrightarrow x \in C$$

para todo x. Luego, por definición, se cumple $A \subset C$. ■

Ejercicio 8 Dadas las siguientes condiciones:

$$P(x): \ x \text{ es un múltiple de } 6$$

y

$$Q(x): \ x \text{ es un múltiplo de } 3$$

(a) Demuestra que para todo $x \in \mathbb{Z}$ se cumple la siguientes implicación

$$P(x) \implies Q(x)$$

y (b) si

$$A = \{x : x \in \mathbb{Z} \text{ y } P(x)\} \quad \text{y} \quad B = \{x : x \in \mathbb{Z} \text{ y } Q(x)\}$$

¿cuáles de las siguientes relaciones es verdadera $A \subset B$ o $B \subset A$?
Solución: (a) Es evidente que todo número entero que sea múltiplo de 6 es también múltiplo de 3. Luego, la implicación lógica siguiente

$$P(x) \implies Q(x)$$

es cierta para todo $x \in \mathbb{Z}$.
(b) Puesto que, para todo $x \in \mathbb{Z}$ se cumplen

$$x \in A \iff P(x) \quad \text{y} \quad x \in B \iff Q(x)$$

y, según el apartado anterior,

$$P(x) \implies Q(x)$$

entonces,

$$x \in A \Longrightarrow x \in B$$

y, como consecuencia, $A \subset B$. ■

Ejercicio 9 Dados los siguientes intervalos de la recta real

$$A = (-2, 5] \quad \text{y} \quad B = [1, 9]$$

Determina los conjuntos $A \cap B$, $A \cup B$, $A - B$ y $B - A$.
Solución: Por definición de intersección entre conjuntos, tenemos

$$A \cap B = [1, 5]$$

Por definición de unión entre conjuntos, tenemos

$$A \cup B = (-2, 9]$$

Por definición de diferencia entre dos conjuntos, tenemos

$$A - B = (-2, 1)$$

Del mismo modo, tenemos

$$B - A = (5, 9]$$

■

Ejercicio 10 Una compañía de seguros tiene una cartera de clientes E y trata de estudiar algunas características de los mismos. Sea A el conjunto de adultos, B el de mujeres y C el de los clientes casados.

a) Describe los siguientes conjuntos: $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$, $B \cap \overline{A}$, $A \cap B$, $A \cup B$ y $B \cap \overline{C}$.

b) Expresa mediante conjuntos las siguientes enunciados: (1) Adultos casados, (2) Varones menores no casados y (3) Menores o varones casados.

Solución: a) Por definición de complementario de un conjunto, si A es el conjunto de adultos, B el de mujeres y C el de los clientes casados, entonces $\overline{A}$ es el conjunto de menores, $\overline{B}$ el de varones y $\overline{C}$ el de los no casados. Puesto que

$$x \in B \cap \overline{A} \iff x \in B \text{ y } x \in \overline{A}$$

entonces $B \cap \overline{A}$ es el conjunto de mujeres menores. Es claro que $A \cap B$ es el conjunto de mujeres adultas, y, $A \cup B$ es el conjunto de mujeres o varones adultos. Puesto que

$$x \in B \cap \overline{C} \iff x \in B \text{ y } x \in \overline{C}$$

entonces $B \cap \overline{C}$ es el conjunto de mujeres no casadas.
b) Puesto que A es el conjunto de adultos y C el de los casados, entonces $A \cap C$ es el conjunto de adultos casados. Es claro que el conjunto de varones menores no casados es

$$\overline{B} \cap \overline{A} \cap \overline{C}$$

Finalmente, el conjunto de menores o varones casados es

$$\overline{A} \cup (\overline{B} \cap C)$$

■

Ejercicio 11 Dados tres conjuntos cualesquiera A, B y C, demuestra que se cumplen las siguientes relaciones:

a) $A \cup A = A$ y $A \cap A = A$

b) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ y $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

c) $A \cup B = B \cup A$ y $A \cap B = B \cap A$

d) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup B)$ y $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

e) $A \cup (B \cap A) = A$ y $A \cap (B \cup A) = A$

f) $A \cup \emptyset = A$ y $A \cap \emptyset = \emptyset$

Solución: Para demostrar igualdades de conjuntos hay dos métodos: El primero consiste en utilizar la propiedad siguiente:

$$A = B \iff A \subset B \text{ y } B \subset A$$

y, el segundo, consiste en expresar primero las igualdades como enunciados de la lógica proposicional y luego comprobar que se tratan de tautologías. Utilizaremos aquí ambos métodos para probar las igualdades indicadas.
a) Es claro que $A \cup A = A$ y $A \cap A = A$ se expresan como los siguientes enunciados

$$x \in A \text{ o } x \in A \iff x \in A$$

y

$$x \in A \text{ y } x \in A \iff x \in A$$

que traducidos como expresiones formales de la lógica de enunciados, tenemos

$$p \vee p \quad \longleftrightarrow \quad p \qquad \text{y} \qquad p \wedge p \quad \longleftrightarrow \quad p$$

donde p está en lugar del enunciado $x \in A$. Para probar que son tautologías debemos construir las tablas de verdad de ambas proposiciones y comprobar que en la última columna son todos 1 (valor de verdad). Así, tenemos

p	$p \vee p$	$(p \vee p) \longleftrightarrow p$		p	$p \wedge p$	$(p \wedge p) \longleftrightarrow p$
1	1	1	y	1	1	1
0	0	1		0	0	1

donde 0 es el valor de falsedad. Por tanto, ambas igualdades son verdaderas.
b) Es claro que $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ y $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ se expresan como los siguientes enunciados

$$x \in A \text{ o } (x \in B \text{ o } x \in C) \iff (x \in A \text{ o } x \in B) \text{ o } x \in C$$

y

$$x \in A \text{ y } (x \in B \text{ y } x \in C) \iff (x \in A \text{ y } x \in B) \text{ y } x \in C$$

que traducidos como expresiones formales de la lógica de enunciados, tenemos

$$p \vee (q \vee r) \quad \longleftrightarrow \quad (p \vee q) \vee r$$

y

$$p \wedge (q \wedge r) \quad \longleftrightarrow \quad (p \wedge q) \wedge r$$

donde p está en lugar de $x \in A$, q en lugar de $x \in B$ y r en lugar de $x \in C$. Para probar que son tautologías debemos construir las tablas de verdad de ambas proposiciones y comprobar que en la última columna son todos 1. Así, tenemos

p	q	r	$p \vee q$	$q \vee r$	$p \vee (q \vee r)$	$(p \vee q) \vee r$	$[p \vee (q \vee r)] \longleftrightarrow [(p \vee q) \vee r]$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0	1

y

p	q	r	$p \wedge q$	$q \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$	$(p \wedge q) \wedge r$	$[p \wedge (q \wedge r)] \longleftrightarrow [(p \wedge q) \wedge r]$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	0	1	0	0	0	0	1
1	0	0	0	0	0	0	1
0	1	1	0	1	0	0	1
0	1	0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	0	1

Por tanto, ambas igualdades son verdaderas.
c) Es claro que $A \cup B = B \cup A$ y $A \cap B = B \cap A$ se expresan como los siguientes enunciados

$$x \in A \text{ o } x \in B \iff x \in B \text{ o } x \in A$$

y

$$x \in A \text{ y } x \in B \iff x \in B \text{ y } x \in A$$

que traducidos como expresiones formales de la lógica de enunciados, tenemos

$$p \vee q \longleftrightarrow q \vee p \quad \text{y} \quad p \wedge q \longleftrightarrow q \wedge p$$

donde p está en lugar del enunciado $x \in A$ y q en lugar de $x \in B$. Para probar que son tautologías debemos construir las tablas de verdad de ambas proposiciones y comprobar que en la última columna son todos 1. Así, tenemos

p	q	$p \vee q$	$q \vee p$	$(p \vee q) \longleftrightarrow (q \vee p)$
1	1	1	1	1
1	0	1	1	1
0	1	1	1	1
0	0	0	0	1

y

p	q	$p \wedge q$	$q \wedge p$	$(p \wedge q) \longleftrightarrow (q \wedge p)$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	0	0	1
0	0	0	0	1

Por tanto, ambas igualdades son verdaderas.
d) Aquí, utilizaremos el primer método para probar $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup B)$ y $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Así, tenemos

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup B) \iff \begin{cases} A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup B) \\ (A \cup B) \cap (A \cup B) \subset A \cup (B \cap C) \end{cases}$$

Puesto que

$$\begin{aligned} x \in A \cup (B \cap C) &\iff x \in A \text{ o } x \in B \cap C \\ &\iff x \in A \text{ o } (x \in B \text{ y } x \in C) \\ &\iff (x \in A \text{ o } x \in B) \text{ y } (x \in A \text{ o } x \in C) \\ &\iff x \in A \cup B \text{ y } x \in A \cup C \\ &\iff x \in (A \cup B) \cap (A \cup B) \end{aligned}$$

luego, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup B)$.
Por otra parte, tenemos

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \iff \begin{cases} A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ (A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C) \end{cases}$$

Puesto que

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \cup C) &\iff x \in A \text{ y } x \in B \cup C \\ &\iff x \in A \text{ y } (x \in B \text{ o } x \in C) \\ &\iff (x \in A \text{ y } x \in B) \text{ o } (x \in A \text{ y } x \in C) \\ &\iff x \in A \cap B \text{ o } x \in A \cap C \\ &\iff x \in (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{aligned}$$

luego, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
e) Puesto que

$$\begin{aligned} x \in A \cup (B \cap A) &\iff x \in A \text{ o } x \in B \cap A \\ &\iff x \in A \text{ o } (x \in B \text{ y } x \in A) \\ &\iff (x \in A \text{ o } x \in B) \text{ y } (x \in A \text{ o } x \in A) \\ &\iff (x \in A \text{ o } x \in B) \text{ y } x \in A \\ &\iff x \in A \end{aligned}$$

luego, $A \cup (B \cap A) = A$. Por otra parte, puesto que

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \cup A) &\iff x \in A \text{ y } x \in B \cup A \\ &\iff x \in A \text{ y } (x \in B \text{ o } x \in A) \\ &\iff (x \in A \text{ y } x \in B) \text{ o } (x \in A \text{ y } x \in A) \\ &\iff (x \in A \text{ y } x \in B) \text{ o } x \in A \\ &\iff x \in A \end{aligned}$$

luego, $A \cap (B \cup A) = A$.
f) Puesto que

$$\begin{aligned} x \in A \cup \emptyset &\iff x \in A \text{ o } x \in \emptyset \\ &\iff x \in A \end{aligned}$$

luego, $A \cup \emptyset = A$. Por otra parte, si fuera $A \cap \emptyset$ no vacío, existiría un elemento x tal que $x \in A$ y $x \in \emptyset$, pero esto no es posible, ya que $x \in \emptyset$ es una relación que siempre es falsa. Luego, no puede haber ningún elemento en $A \cap \emptyset$ y, por tanto, $A \cap \emptyset = \emptyset$.
■

Ejercicio 12 Tomando como conjunto referencial $\mathbb{R}$, determina los complementarios de los siguientes conjuntos: $(2, +\infty)$, $(-\infty, 0]$, $(-3, 1]$ y $[0{,}5, 0{,}7] \cup [2, 3)$.
Solución: Por definición de complementario de un conjunto tenemos

$$\begin{aligned} \overline{(2, +\infty)} &= (-\infty, 2] \\ \overline{(-\infty, 0]} &= (0, +\infty) \\ \overline{(-3, 1]} &= (-\infty, -3] \cup (1, +\infty) \\ \overline{[0{,}5, 0{,}7] \cup [2, 3)} &= (-\infty, 0{,}5) \cup (0{,}7, 2) \cup [3, +\infty) \end{aligned}$$

■

Ejercicio 13 Si E es el conjunto referencial, demuestra que se cumplen las siguientes propiedades:

a) $\overline{E} = \emptyset$ y $\overline{\emptyset} = E$

b) $\overline{\overline{A}} = A$

c) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

d) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Solución: a) Si $\overline{E}$ no fuera vacío, existiría un elemento x tal que $x \notin E$, pero esto no es posible porque E es el conjunto referencial. Luego, no puede haber ningún elemento en $\overline{E}$ y, por tanto, $\overline{E} = \emptyset$.
Puesto que

$$\begin{aligned} x \in \overline{\emptyset} &\iff x \in E \text{ y } x \notin \emptyset \\ &\iff x \in E \end{aligned}$$

luego, $\overline{\emptyset} = E$.
b) Es claro que $\overline{\overline{A}} = A$ se traduce como la siguiente expresión formal de la lógica de enunciados,

$$\neg\neg p \longleftrightarrow p$$

donde p está en lugar del enunciado $x \in A$. Para probar que es una tautología debemos construir la tabla de verdad y comprobar que en la última columna son todos 1. Así, tenemos

p	$\neg p$	$\neg\neg p$	$\neg\neg p \longleftrightarrow p$
1	0	1	1
0	1	0	1

Por tanto, la igualdad $\overline{\overline{A}} = A$ es verdadera.
c) Puesto que

$$\begin{aligned} x \in \overline{A \cup B} &\iff x \in E \text{ y } x \notin A \cup B \\ &\iff x \in E \text{ y } (x \notin A \text{ y } x \notin B) \\ &\iff (x \in E \text{ y } x \notin A) \text{ y } (x \in E \text{ y } x \notin B) \\ &\iff x \in \overline{A} \text{ y } x \in \overline{B} \\ &\iff x \in \overline{A} \cap \overline{B} \end{aligned}$$

luego, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
d) Es claro que $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ se traduce como la siguiente expresión formal de la lógica de enunciados,

$$\neg(p \wedge q) \longleftrightarrow \neg p \vee \neg q$$

donde p está en lugar del enunciado $x \in A$ y q, lo está de $x \in B$. Para probar que es una tautología debemos construir la tabla de verdad y comprobar que en la última columna son todos 1. Así, tenemos

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p \vee \neg q$	$\neg(p \wedge q) \longleftrightarrow \neg p \vee \neg q$
1	1	0	0	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1	1

Por tanto, la igualdad $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ es verdadera. ■

Ejercicio 14 Suponiendo que E es el conjunto referencial, simplifica las siguientes expresiones:

a) $(A \cap \overline{B}) \cap (\overline{A} \cap \overline{B})$

b) $(A \cap B \cap C) \cup (\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C})$

c) $\big[A \cap (\overline{A} \cup B)\big] \cup [B \cap (B \cup C)] \cup B$

Solución: En todos estos apartados aplicaremos las propiedades de la unión e intersección entre conjuntos y del complementario de un conjunto.
a) Así tenemos

$$\begin{aligned}(A \cap \overline{B}) \cap (\overline{A} \cap \overline{B}) &= (A \cap \overline{B}) \cap (\overline{B} \cap \overline{A}) \\ &= A \cap (\overline{B} \cap \overline{B}) \cap \overline{A} \\ &= A \cap \overline{B} \cap \overline{A} \\ &= A \cap (\overline{B} \cap \overline{A}) \\ &= A \cap (\overline{A} \cap \overline{B}) \\ &= (A \cap \overline{A}) \cap \overline{B} \\ &= \emptyset \cap \overline{B} \\ &= \emptyset\end{aligned}$$

b) Así, tenemos

$$\begin{aligned}(A \cap B \cap C) \cup (\overline{A} \cup \overline{B} \cup \overline{C}) &= (A \cap B \cap C) \cup (\overline{A \cap B} \cup \overline{C}) \\ &= (A \cap B \cap C) \cup \overline{(A \cap B) \cap C} \\ &= (A \cap B \cap C) \cup \overline{A \cap B \cap C} \\ &= E\end{aligned}$$

c) Así, tenemos

$$\begin{aligned}\big[A \cap (\overline{A} \cup B)\big] \cup [B \cap (B \cup C)] \cup B &= \big[(A \cap \overline{A}) \cup (A \cap B)\big] \cup [(B \cap B) \cup (B \cap C)] \cup B \\ &= \emptyset \cup (A \cap B) \cup B \cup (B \cap C) \cup B \\ &= (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup B \\ &= (A \cap B) \cup [(B \cap C) \cup B] \\ &= (A \cap B) \cup B \\ &= B\end{aligned}$$

■

Ejercicio 15 Si $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 4\}$ y $C = \{a\}$, determina los conjuntos siguientes:

a) $A \times (B \cup C)$

b) $(C \times A) \cap (C \times B)$

Solución: a) Es claro que

$$B \cup C = \{2, 4, a\}$$

Entonces, según la definición de producto cartesiano de dos conjuntos, obtenemos

$$A \times (B \cup C) = \{(1, 2), (1, 4), (1, a), (2, 2), (2, 4), (2, a)\}$$

b) Del mismo modo obtenemos

$$C \times A = \{(a, 1), (a, 2)\} \quad \text{y} \quad C \times B = \{(a, 2), (a, 4)\}$$

Luego,

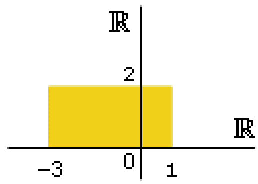
$$(C \times A) \cap (C \times B) = \{(a, 2)\}$$

■

Ejercicio 16 Representa gráficamente el conjunto $A \times B$, sabiendo que $A = \{x \in \mathbb{R} : -3 \leq x \leq 1\}$ y $B = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 2\}$.
Solución: Según la definición de producto cartesiano de dos conjuntos, obtenemos

$$A \times B = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : -3 \leq x \leq 1 \text{ y } 0 \leq x \leq 2\}$$

Gráficamente, este conjunto representa la región del plano señalada en la figura siguiente



■

2. Relaciones

Ejercicio 17 Estudiar las propiedades de las siguientes relaciones:

a) "Ser divisor de.$^{\text{en}}$ el conjunto de los números naturales

b) "Ser cuadrado de.$^{\text{en}}$ el conjunto de los números naturales

c) "Tener igual área que.$^{\text{en}}$ el conjunto de los triángulos del plano

d) "Ser perpendicular.$^{\text{en}}$ el conjunto de las rectas del espacio

e) "Tener el mismo color de ojos que.$^{\text{en}}$ el conjunto de los habitantes de la tierra.

Solución: a) En $\mathbb{N}$ consideramos la relación "ser divisor de". Es evidente que la relación es reflexiva (Todo número natural es divisor de sí mismo) y, por tanto, no es irreflexiva ni asimétrica. Tampoco es simétrica (Por ejemplo, 3 es divisor de 6 y, en cambio, 6 no es divisor de 3). Es evidente que la relación es antisimétrica y transitiva.
b) En $\mathbb{N}$ consideramos la relación "ser cuadrado de". Es evidente que la relación no es reflexiva (Por ejemplo, 3 no es cuadrado de 3). Tampoco es irreflexiva ya que 1 es cuadrado de sí mismo. No es asimétrica ni simétrica pero, en cambio, sí es antisimétrica. No es transitiva (Si $a = b^2$ y $b = c^2$, entonces $a = (c^2)^2 = c^4 \neq c^2$).
c) En el conjunto de los triángulos del plano consideramos la relación "tener igual área que". Es evidente que esta relación es reflexiva, simétrica y transitiva.
d) En el conjunto de las rectas del espacio consideramos la relación "ser perpendicular". Es evidente que la relación no es reflexiva (Ninguna recta es perpendicular a sí misma). Es irreflexiva, simétrica y no transitiva, como puede comprobarse enseguida.
e) En conjunto de los habitantes de la tierra consideramos la relación "tener el mismo color de ojos que". Es evidente que esta relación es reflexiva, simétrica y transitiva.
■

Ejercicio 18 De las siguientes relaciones, averigua cuáles son de equivalencia y describe sus clases:

a) En $\mathbb{R}$, $x \; R \; y$ si y sólo si $|x - y| < 1$

b) En $\mathbb{R} - \{0\}$, $x \; R \; y$ si y sólo si $\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}$

Solución: a) La relación es reflexiva, pues, para todo $x \in \mathbb{R}$ se cumple

$$|x - x| = 0 < 1$$

También es simétrica, pues, si $|x - y| < 1$, entonces

$$|x - y| = |y - x| < 1$$

En cambio, la relación no es transitiva, ya que $-1 \; R \; -0{,}5$ y $-0{,}5 \; R \; 0{,}25$ y, en cambio, $-1 \not R \; 0{,}25$ porque

$$|-1 - 0{,}25| = 1{,}25 > 1$$

Por consiguiente, esta relación no es de equivalencia.
b) La relación es evidentemente reflexiva, simétrica y transitiva. Por tanto, la relación es de equivalencia. La clase de un elemento arbitrario $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ es

$$\begin{aligned} [a] &= \left\{ x \in \mathbb{R} - \{0\} : \frac{x}{a} \in \mathbb{Q} \right\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R} - \{0\} : \frac{x}{a} = q \;\text{ y }\; q \in \mathbb{Q} - \{0\} \right\} \\ &= \{ a \cdot q : q \in \mathbb{Q} - \{0\} \} \end{aligned}$$

Por tanto, si $b \in \mathbb{Q} - \{0\}$, entonces

$$[b] = \{ b \cdot q : q \in \mathbb{Q} - \{0\} \} = \mathbb{Q} - \{0\}$$

En resumen, hay dos tipos de clases de equivalencia: las clases de la forma $[a]$ con $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ y la clase formada por todos los números racionales no nulos. ■

Ejercicio 19 En $\mathbb{Z}$ se define la siguiente relación

$$x \equiv y \iff x - y \text{ es múltiplo de } 5$$

(a) Demuestra que $\equiv$ es una relación de equivalencia, (b) halla el conjunto cociente $\mathbb{Z}/\equiv$ y (c) calcula un representante x de la clase del 127 que cumpla $8 < x < 15$ y un representante y de la clase del -34 que cumpla $5 < y < 10$.
Solución: (a) La relación $\equiv$ es de equivalencia, pues se cumplen las propiedades

- Reflexiva: $x \equiv x$, para todo $x \in \mathbb{Z}$, ya que $x - x = 0$ es múltiplo de 5.
- Simétrica: $x \equiv y$ implica $y \equiv x$ para todo $x, y \in \mathbb{Z}$, ya que si $x - y$ es múltiplo de 5, también lo es $-(x - y) = y - x$.
- Transitiva: $x \equiv y$ y $y \equiv z$ implica $x \equiv z$ para todo $x, y, z \in \mathbb{Z}$, ya que si $x - y$ y $y - z$ son múltiplos de 5, también lo es su suma $x - z$.

(b) Consideremos un número entero arbitrario a y determinemos su clase de equivalencia. Tenemos,

$$\begin{aligned}[a] &= \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv a\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z} : x - a \text{ es múltiplo de } 5\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z} : x - a = 5k \text{ y } k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \{a + 5k : k \in \mathbb{Z}\}\end{aligned}$$

Por tanto, distinguimos 5 clases de equivalencia:

$$\begin{aligned}[0] = \{0 + 5k : k \in \mathbb{Z}\} = \{..., -10, -5, 0, 5, 10, ...\} \\ [1] = \{1 + 5k : k \in \mathbb{Z}\} = \{..., -9, -4, 1, 6, 11, ...\} \\ [2] = \{2 + 5k : k \in \mathbb{Z}\} = \{..., -8, -3, 2, 7, 12, ...\} \\ [3] = \{3 + 5k : k \in \mathbb{Z}\} = \{..., -7, -2, 3, 8, 13, ...\} \\ [4] = \{4 + 5k : k \in \mathbb{Z}\} = \{..., -6, -1, 4, 9, 14, ...\}\end{aligned}$$

Luego, el conjunto cociente es

$$\mathbb{Z}/\equiv \; = \{[0], [1], [2], [3], [4]\}$$

(c) Es claro que

$$127 = 2 + 5 \cdot 25$$

y, por tanto, $127 \in [2]$. Luego, un representante x de la clase del 127 que cumpla $8 < x < 15$ es 12. Del mismo modo, observa que

$$-34 = -4 + 5 \cdot (-6)$$

y, por tanto, $-34 \in [-4] = [1]$. Luego, un representante y de la clase del -34 que cumpla $5 < y < 10$ es 6. ■

Ejercicio 20 Sea $A = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ y consideremos en el conjunto $A \times A$ la siguiente relación

$$(a, b) \sim (c, d) \iff a + d = b + c$$

(a) Demuestra que $\sim$ es una relación de equivalencia y (b) halla el conjunto cociente.
Solución: (a) La relación $\sim$ es de equivalencia, pues, se cumplen las propiedades

- Reflexiva: En efecto, para todo $(a, b) \in A \times A$, se cumple $a + b = b + a$ y, por tanto, $(a, b) \sim (a, b)$.
- Simétrica: En efecto, para todo $(a, b), (c, d) \in A \times A$, si $(a, b) \sim (c, d)$, o sea si $a + d = b + c$, entonces $c + b = d + a$ y, por tanto, $(c, d) \sim (a, b)$.
- Transitiva: En efecto, para todo $(a, b), (c, d), (e, f) \in A \times A$, si $(a, b) \sim (c, d)$ y $(c, d) \sim (e, f)$, o sea si

  $$\begin{aligned}a + d = b + c \\ c + f = d + e\end{aligned}$$

  entonces, sumando miembro a miembro ambas igualdades, obtenemos

  $$a + d + c + f = b + c + d + e$$

  y de aquí, simplificando, obtenemos

  $$a + f = b + e$$

  y, por tanto, $(a, b) \sim (e, f)$.

(b) Consideremos un elemento arbitrario (a, b) de $A \times A$ y determinemos su clase de equivalencia. Observa primero que

$$(a, b) \sim (a + k, b + k)$$

para todo $k \in A$ y, por tanto,

$$[(a, b)] = [(a + k, b + k)]$$

para todo $k \in A$. De aquí, obtenemos que

$$\begin{aligned} [(0,0)] &= \{(0,0),(1,1),(2,2),...\} \\ [(1,0)] &= \{(1,0),(2,1),(3,2),...\} \\ [(0,1)] &= \{(0,1),(1,2),(2,3),...\} \\ [(2,0)] &= \{(2,0),(3,1),(4,2),...\} \\ [(0,2)] &= \{(0,2),(1,3),(2,4),...\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

son clases de equivalencia de esta relación.
En general,

- si $a > b$, entonces se cumple

$$[(a, b)] = [(a - b, 0)]$$

- si $a = b$, entonces

$$[(a, b)] = [(0, 0)]$$

- si $a < b$, entonces

$$[(a, b)] = [(0, b - a)]$$

Por consiguiente, hay tantas clases de equivalencia en el conjuntos cociente como números enteros.

$$\begin{array}{lcc} [(0,0)] & \text{se corresponde con} & 0 \\ [(1,0)] & & 1 \\ [(0,1)] & & -1 \\ [(2,0)] & & 2 \\ [(0,2)] & & -2 \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

■

Ejercicio 21 En el conjunto $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\})$ se define la siguiente relación

$$(a, b) \sim (c, d) \iff ad = bc$$

(a) Demuestra que $\sim$ es una relación de equivalencia y (b) Halla el conjunto cociente.
Solución: (a) La relación $\sim$ es de equivalencia, pues se cumplen las propiedades

- Reflexiva: En efecto, para todo $(a, b) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\})$ se cumple $ab = ba$ y, por tanto, $(a, b) \sim (a, b)$.

- Simétrica: En efecto, para todo $(a,b),(c,d) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\})$, si $(a,b) \sim (c,d)$, o sea si $ad = bc$, entonces $cb = da$ y, por tanto, $(c,d) \sim (a,b)$.
- Transitiva: En efecto, para todo $(a,b),(c,d),(e,f) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\})$, si $(a,b) \sim (c,d)$ y $(c,d) \sim (e,f)$, o sea si

  $$\begin{aligned} ad &= bc \\ cf &= de \end{aligned}$$

  entonces, multiplicando la primera igualdad por $f \neq 0$, obtenemos

  $$adf = bcf$$

  De aquí, mediante la segunda igualdad, obtenemos

  $$adf = bde$$

  Ahora, dividiendo por $d \neq 0$, se deduce

  $$af = be$$

  y, por tanto, $(a,b) \sim (e,f)$.

(b) Consideremos un elemento arbitrario (a,b) de $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} - \{0\})$ y determinemos su clase de equivalencia. Observa primero que

$$(a,b) \sim (ak,bk)$$

para todo $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$ y, por tanto,

$$[(a,b)] = [(ak,bk)]$$

para todo $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$. De aquí, obtenemos que

$$\begin{aligned} [(0,1)] &= \{..., (0,-2), (0,-1), (0,1), (0,2), ...\} \\ [(1,1)] &= \{..., (-2,-2), (-1,-1), (1,1), (2,2), ...\} \\ [(1,2)] &= \{..., (-2,-4), (-1,-2), (1,2), (2,4), ...\} \\ [(2,1)] &= \{..., (-4,-2), (-2,-1), (2,1), (4,2), ...\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

son clases de equivalencia de esta relación.
En general, hay tantas clases de equivalencia en el conjunto cociente como números de la forma a/b, con $a \in \mathbb{Z}$ y $b \in \mathbb{Z} - \{0\}$, es decir, como números racionales.

$$\begin{array}{lll} [(0,1)] & \text{se corresponde con} & ... = \frac{0}{-1} = \frac{0}{1} = ... \\ [(1,1)] & & ... = \frac{-1}{-1} = \frac{1}{1} = ... \\ [(1,2)] & & ... = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2} = ... \\ [(2,1)] & & ... = \frac{-2}{-1} = \frac{2}{1} = ... \\ \vdots & & \qquad \vdots \end{array}$$

■

Ejercicio 22 (a) Demuestra que la siguiente relación

$$x \sim y \iff \text{existe } n \in \mathbb{Z} \text{ tal que } x, y \in (n-1, n]$$

es de equivalencia en $\mathbb{R}$. ¿Cuáles son sus clases de equivalencia? (b) Demuestra que los intervalos de la forma $(n, n+1]$, con $n \in \mathbb{Z}$, constituyen una partición de la recta real.

Solución: (a) La relación $\sim$ es de equivalencia, pues se cumplen las propiedades

- Reflexiva: Dado cualquier $x \in \mathbb{R}$, si n es el menor número entero que es mayor o igual que x, entonces $x \in (n-1, n]$ y, por tanto, $x \sim x$.
- Simétrica: Es evidente que $x \sim y$ implica $y \sim x$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$.
- Transitiva: En efecto, si $x \sim y$, entonces existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $x, y \in (n-1, n]$. Además, si $y \sim z$, entonces también se cumple que $y, z \in (n-1, n]$. Luego, $x, z \in (n-1, n]$ y, por tanto, $x \sim z$.

Es claro que la clase de equivalencia de cualquier $a \in \mathbb{R}$ es el intervalo $(n-1, n]$ tal que $a \in (n-1, n]$. Además, cualquier otro número real de este intervalo está relacionado con a y, por tanto, su clase coincide con la de a. En definitiva, las clases del conjunto cociente son los intervalos de la forma $(n-1, n]$ con $n \in \mathbb{Z}$.
(b) Al tratarse de una relación de equivalencia, el conjunto cociente formado por los intervalos de la forma $(n-1, n]$, con $n \in Z$, constituyen una partición de $\mathbb{R}$. ■

Ejercicio 23 Se considera en $\mathbb{R}$ la relación "menor o igual que"designada usualmente por $\leq$. Comprueba que $\leq$ es una relación de orden. ¿Es total o parcial? ¿Hay algún elemento maximal? ¿Hay algún elemento minimal?

Solución: La relación es de orden parcial ya que se cumplen las propiedades:

- Reflexiva: Para todo $x \in \mathbb{R}$, es evidente que $x \leq x$.
- Antisimétrica: Para todo $x, y \in \mathbb{R}$, si $x \leq y$ y $y \leq x$, es claro que $x = y$.
- Transitiva: Para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$, si $x \leq y$ y $y \leq z$, entonces es evidente que $x \leq z$.

La relación es de orden total ya que para cualquier par de elementos $x, y \in \mathbb{R}$ se cumple $x \leq y$ o bien $y \leq x$.
Es claro que no hay elementos maximales ni minimales en esta relación. ■

Ejercicio 24 En el conjunto $\mathcal{P}(A)$ de las partes de un conjunto dado A se considera la relación de inclusión $\subset$. Comprueba que $\subset$ es una relación de orden. ¿Es total o parcial? ¿Hay algún elemento maximal? ¿Hay algún elemento minimal?

Solución: La relación es de orden parcial ya que se cumplen las propiedades:

- Reflexiva: Para todo $X \in \mathcal{P}(A)$, es evidente que $X \subset X$.
- Antisimétrica: Para todo $X, Y \in \mathcal{P}(A)$, si $X \subset Y$ y $Y \subset X$, es claro que $X = Y$.

- Transitiva: Para todo $X, Y, Z \in \mathcal{P}(A)$, si $X \subset Y$ y $Y \subset Z$, entonces es evidente que $X \subset Z$.

La relación no es de orden total ya que, por ejemplo, si $X \in \mathcal{P}(A)$, entonces $A - X \in \mathcal{P}(A)$ y X no es subconjunto de $A - X$ ni $A - X$ es subconjunto de X.
Es evidente que A es un elemento maximal y $\emptyset$ es un elemento minimal en $\mathcal{P}(A)$ según esta relación. ■

Ejercicio 25 Se considera $\mathbb{R}$ con el orden usual $\leq$ y los subconjuntos siguientes:

$$a) \quad \mathbb{Z} \quad b) \quad (0,2] \cup (3,5] \quad c) \quad (-\infty,-2) \cup [13,19)$$

Calcula (a) los extremos superiores e inferiores y (b) los máximos y mínimos, si existen.
Solución: Es claro que

	$\mathbb{Z}$	$(0,2] \cup (3,5]$	$(-\infty,-2) \cup [13,19)$
Supremo	No existe	5	19
Ínfimo	No existe	0	No existe
Máximo	No existe	5	No existe
Mínimo	No existe	No existe	No existe

■

Ejercicio 26 En el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 15, 60\}$ se define la relación

$$a \mid b \iff a \text{ es un divisor de } b$$

(a) Demuestra que $\mid$ es una relación de orden en A. ¿Es total o parcial? (b) Halla el máximo, mínimo, supremo e ínfimo del conjunto $B = \{2, 3, 6, 15\}$. (c) Calcula el máximo, mínimo, supremo e ínfimo de A. (d) ¿Hay elementos maximales i minimales en A?
Solución: (a) La relación $\mid$ es de orden, ya que se cumplen las propiedades

- Reflexiva: Para todo $x \in A$ es evidente que se cumple $x \mid x$.
- Antisimétrica: Para todo $x, y \in A$, si $x \mid y$ y $y \mid x$, es claro que $x = y$.
- Transitiva: Para todo $x, y, z \in A$, si $x \mid y$ y $y \mid z$, es también claro que $x \mid z$.

La relación no es de orden total ya que $4, 5 \in A$ y $4 \nmid 5$ ni $5 \nmid 4$.
(b) Una representación gráfica de esta relación es

$$\begin{array}{ccccc}
 & & 60 & & \\
 & / & | & \backslash & \\
4 & & 6 & & 15 \\
| & / & | & / & | \\
2 & & 3 & & 5 \\
 & \backslash & | & / & \\
 & & 1 & &
\end{array}$$

A partir de ella, es evidente que $\sup B = 60$, $\inf B = 1$, y no existen máximo ni mínimo de B.
(c) A partir del mismo gráfico del apartado anterior, es claro que $\sup A = \max A = 60$ y $\inf A = \min A = 1$.
(d) Los elementos maximal y minimal de A son, respectivamente, 60 y 1. ■

Ejercicio 27 Se considera en el conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ la siguiente relación

$$R = \{(6, 5), (5, 1), (1, 2), (6, 4), (4, 1), (4, 2), (3, 2), (5, 2), (6, 1), (6, 2)\} \cup \Delta_A$$

donde Δ_A es la relación de identidad en A. (a) Representa gráficamente esta relación. (b) Calcula cotas inferiores y superiores de $B = \{1, 4, 5\}$ y determina $\sup B$ y $\inf B$. (c) Calcula los elementos maximales y minimales de A. ¿Hay máximo y mínimo de A?

Solución: (a) Una representación gráfica de la relación es

```
        2
      / | \
    1   |   3
    | \ |
    5   4
      \ |
        6
```

(b) Para el conjunto B sólo hay una cota inferior 6 y tiene 1 y 2 como cotas superiores. Entonces, es claro que $\sup B = 1$ y $\inf B = 6$.
(c) Para el conjunto A, observando el gráfico de la relación, se tiene que 3 y 6 son elementos minimales y sólo hay un elemento maximal 2. Por tanto, no hay mínimo de A y $\max A = 2$. ∎

Ejercicio 28 Se considera el conjunto ordenado $\mathbb{Q}$ por la relación de orden usual $\leq$. ¿Qué subconjunto de $\mathbb{Q}$ está bien ordenado?

a) $\mathbb{Q}$

b) Los números enteros mayores que 9

c) Los números enteros pares menores que 0

d) Los números enteros positivos múltiplos de 5

Solución: a) $\mathbb{Q}$ no está bien ordenado ya que no tiene elemento mínimo.
b) El conjunto de números enteros mayores que 9 está bien ordenado al ser un subconjunto de $\mathbb{N}$, que está bien ordenado.
c) El conjunto de números enteros pares menores que 0 no está bien ordenado ya que no tiene elemento mínimo.
d) El conjunto de números enteros positivos múltiplos de 5 está bien ordenado al ser un subconjunto de $\mathbb{N}$, que está bien ordenado. ∎

3. Aplicaciones

Ejercicio 29 Dados $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{2, 3, 4, 5\}$, ¿es aplicación de A en B la relación entre A y B definida por

$$\{(1, 3), (2, 2), (1, 5), (3, 5)\}$$

Razona la respuesta.
Solución: No es aplicación ya que $1 \in A$ está relacionado con 3 y 5 pertenecientes a B, pues los pares ordenados $(1, 3)$ y $(1, 5)$ pertenecen a la relación dada. ∎

Ejercicio 30 Estudia si las relaciones binarias siguientes en $\mathbb{R}$ son o no aplicaciones. Cuando lo sean, calcula su dominio e imagen.

a) $R_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y^2 - x = 0\}$

b) $R_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x + y = 2\}$

c) $R_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x^2 + y^2 = 1\}$

d) $R_4 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y = \sqrt{4 - x^2}\right\}$

Solución: a) La relación R_1 no es aplicación ya que $(1,1), (1,-1) \in R_1$.
b) La relación R_2 es aplicación. Es claro que define la aplicación $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mediante $f(x) = 2 - x$. El dominio de R_2 es $\mathbb{R}$ y la imagen es también $\mathbb{R}$.
c) La relación R_3 no es aplicación ya que $(0,1), (0,-1) \in R_3$.
d) La relación R_4 es aplicación. Es claro que define la aplicación $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mediante $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$. El dominio de R_4 es $[-2,2]$ y la imagen es $[0,2]$. ■

Ejercicio 31 Se considera la aplicación $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3x + 1$. (a) Calcula las imágenes de $-2, 0, 3$, y las antiimágenes, si existen, de $-5, 4/5$ y 9. ¿Cuáles son los elementos que tienen antiimagen? (b) Contesta a las misma cuestiones tomando como conjunto de salida $\mathbb{R}$ en lugar de $\mathbb{Z}$.
Solución: (a) Las imágenes de $-2, 0$ y 3 son:

$$\begin{array}{l} f(-2) = 3 \cdot (-2) + 1 = -5 \\ f(0) = 3 \cdot 0 + 1 = 1 \\ f(3) = 3 \cdot 3 + 1 = 10 \end{array}$$

Calculemos las antiimágenes de $-5, 4/5$ y 9. Puesto que

$$\begin{array}{rcl} f(x) = -5 & \Longrightarrow & 3x + 1 = -5 \\ & \Longrightarrow & x = -2 \end{array}$$

entonces -2 es antiimagen de -5. Del mismo modo,

$$\begin{array}{rcl} f(x) = \frac{4}{5} & \Longrightarrow & 3x + 1 = \frac{4}{5} \\ & \Longrightarrow & x = -\frac{1}{15} \end{array}$$

luego, no existe antiimagen de $4/5$ ya que $-1/15 \notin \mathbb{Z}$. Finalmente,

$$\begin{array}{rcl} f(x) = 9 & \Longrightarrow & 3x + 1 = 9 \\ & \Longrightarrow & x = \frac{8}{3} \end{array}$$

luego, tampoco existe antiimagen de 9 ya que $8/3 \notin \mathbb{Z}$.
Observa que

$$\begin{array}{rcl} f(x) = y & \Longrightarrow & 3x + 1 = y \\ & \Longrightarrow & x = \frac{y-1}{3} \end{array}$$

luego,

$$\begin{array}{rcl} \frac{y-1}{3} \in \mathbb{Z} & \Longrightarrow & y - 1 \text{ es múltiplo de } 3 \\ & \Longrightarrow & y = 1 + 3k, \text{ con } k \in \mathbb{Z} \end{array}$$

Por consiguiente, los elementos que tienen antiimagen son

$$\{..., -5, -2, 1, 4, 7, ...\}$$

(b) Las respuestas son las mismas que antes pero con la diferencia de que ahora $-1/15 \in \mathbb{R}$ es antiimagen de $4/5$ y $8/3 \in \mathbb{R}$ lo es de 9. Además, los elementos que tienen antiimagen es ahora todo $\mathbb{R}$. ■

Ejercicio 32 Dadas las aplicaciones $f, g, h : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ definidas por $f(x) = x + 2$, $g(x) = 4x$ y $h(x) = x^2 - x$, averigua si son inyectivas, exhaustivas o biyectivas.
Solución: La aplicación f es biyectiva. En efecto, es inyectiva pues

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) &\implies x + 2 = y + 2 \\ &\implies x = y \end{aligned}$$

y también es exhaustiva ya que dado cualquier $y \in \mathbb{Z}$ tenemos

$$\begin{aligned} f(x) = y &\implies x + 2 = y \\ &\implies x = y - 2 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

y, por tanto, cada elemento $y \in \mathbb{Z}$ tiene antiimagen $y - 2 \in \mathbb{Z}$.
La aplicación g es inyectiva pero no exhaustiva. En efecto, es inyectiva pues

$$\begin{aligned} g(x) = g(y) &\implies 4x = 4y \\ &\implies x = y \end{aligned}$$

En cambio, no es exhaustiva porque cualquier número entero que no sea múltiplo de 4 no tiene antiimagen en $\mathbb{Z}$.
La aplicación h no es inyectiva ni exhaustiva. En efecto, puesto que $h(0) = h(1) = 0$ y $0 \neq 1$, la aplicación no es inyectiva. Tampoco es exhaustiva ya que, por ejemplo, -1 no tiene antiimagen por h al no tener soluciones enteras la siguiente ecuación de segundo grado

$$\begin{aligned} x^2 - x &= -1 \\ x^2 - x + 1 &= 0 \end{aligned}$$

■

Ejercicio 33 Dadas las aplicaciones $f, g, h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = e^x$, $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$ y $h(x) = \cos x$, averigua si son inyectivas, exhaustivas o biyectivas.
Solución: La aplicación f es inyectiva pero no exhaustiva. Es inyectiva ya que si $x \neq y$, entonces es evidente que $e^x \neq e^y$. En cambio, no es exhaustiva ya que $e^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y, por tanto, $\operatorname{Im} f = (0, +\infty) \neq \mathbb{R}$.
La aplicación g no es inyectiva ni exhaustiva. No es inyectiva ya que, por ejemplo, $g(1) = g(-1) = 1/2$ y $1 \neq -1$. Tampoco es exhaustiva ya que evidentemente

$$0 < \frac{1}{1 + x^2} < 1$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ y, por tanto, $\operatorname{Im} g = (0, 1] \neq \mathbb{R}$.
La aplicación h no es inyectiva ni exhaustiva. No es inyectiva ya que, por ejemplo, $h(0) = h(2\pi) = 1$ y $0 \neq 2\pi$. Tampoco es exhaustiva ya que $-1 \leq \cos x \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y, por tanto, $\operatorname{Im} h = [-1, 1]$. ■

Ejercicio 34 Consideremos la aplicación $f : \mathbb{R} - \{-1, 1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$$

(a) Si $A = \{-1/2, 0, 1/2\}$, calcula $f(A)$ y $f^{-1}(A)$. (b) Averigua si f es inyectiva o exhaustiva.
Solución: Puesto que las imágenes de $-1/2, 0$ y $1/2$ son

$$\begin{array}{l} f(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{3} \\ f(0) = 0 \\ f(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{3} \end{array}$$

entonces $f(A) = \{-1/3, 0\}$.
Calculemos las antiimágenes de $-1/2, 0$ y $1/2$. Puesto que

$$\begin{array}{rcl} f(x) = -\frac{1}{2} & \Longrightarrow & \frac{x^2}{x^2-1} = -\frac{1}{2} \\ & \Longrightarrow & 3x^2 = 1 \\ & \Longrightarrow & x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \end{array}$$

deducimos que $-1/\sqrt{3}$ y $1/\sqrt{3}$ son antiimágenes de $-1/2$. Del mismo modo,

$$\begin{array}{rcl} f(x) = 0 & \Longrightarrow & \frac{x^2}{x^2-1} = 0 \\ & \Longrightarrow & x^2 = 0 \\ & \Longrightarrow & x = 0 \end{array}$$

luego, 0 es antiimagen de 0. Finalmente,

$$\begin{array}{rcl} f(x) = \frac{1}{2} & \Longrightarrow & \frac{x^2}{x^2-1} = \frac{1}{2} \\ & \Longrightarrow & x^2 = -1 \end{array}$$

al no tener soluciones reales esta última ecuación de segundo grado, deducimos que $1/2$ no tiene antiimágenes.
De los resultados obtenidos, deducimos también que f no es inyectiva (Hemos visto que $f(-1/2) = f(-1/2)$) ni exhaustiva (Hemos visto que 0 no tiene antiimagen). ■

Ejercicio 35 Dada una aplicación f de A en B, consideremos $X, Y \subset A$ y $Z, T \subset B$. Demuestra que se cumplen las siguientes propiedades:

a) $X \subset Y$ implica $f(X) \subset f(Y)$

b) $Z \subset T$ implica $f^{-1}(Z) \subset f^{-1}(T)$

c) $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$

d) $f(X \cap Y) \subset f(X) \cap f(Y)$

e) $f^{-1}(Z \cup T) = f^{-1}(Z) \cup f^{-1}(T)$

f) $f^{-1}(Z \cap T) = f^{-1}(Z) \cap f^{-1}(T)$

g) $X \subset f^{-1}(f(X))$

h) $f\left(f^{-1}(Z)\right) \subset Z$

i) $f^{-1}\left(\complement_B Z\right) = \complement_A\left(f^{-1}(Z)\right)$

Solución: a) Consideremos cualquier elemento $b \in f(X)$. Entonces, existe $a \in X$ tal que $f(a) = b$. Ahora bien, por hipótesis, $X \subset Y$, luego $a \in Y$ y $f(a) = b \in f(Y)$. De este modo hemos demostrado que $f(X) \subset f(Y)$.
b) Consideremos cualquier elemento $a \in f^{-1}(Z)$. Entonces, $f(a) \in Z$ y como, por hipótesis, $Z \subset T$, deducimos que $f(a) \in T$. Luego, $a \in f^{-1}(T)$. Por lo tanto, $f^{-1}(Z) \subset f^{-1}(T)$.
c) Probaremos (1) $f(X \cup Y) \subset f(X) \cup f(Y)$ y (2) $f(X) \cup f(Y) \subset f(X \cup Y)$. Entonces, de (1) y (2), deduciremos la igualdad. (1) Consideremos cualquier elemento $b \in f(X \cup Y)$. Entonces, existe $a \in X \cup Y$ tal que $f(a) = b$. Ahora bien, si $a \in X \cup Y$, entonces $a \in X$ o $a \in Y$. Si $a \in X$, entonces $f(a) = b \in f(X)$ y, por tanto, $b \in f(X) \cup f(Y)$. Del mismo modo, si $a \in Y$, entonces $f(a) = b \in f(Y)$ y, por tanto, $b \in b \in f(X) \cup f(Y)$. En cualquier caso $b \in f(X) \cup f(Y)$, con lo que deducimos que $f(X \cup Y) \subset f(X) \cup f(Y)$. (2) Consideremos cualquier elemento $b \in f(X) \cup f(Y)$. Entonces, $b \in f(X)$ o $b \in f(Y)$. Si $b \in f(X)$, entonces existe $a \in X$ tal que $f(a) = b$. Ahora bien, si $a \in X$, entonces $a \in X \cup Y$ y, por tanto, $f(a) = b \in f(X \cup Y)$. Si $b \in f(Y)$, entonces existe $c \in Y$ tal que $f(c) = b$. Del mismo modo que antes, si $c \in Y$, entonces $c \in X \cup Y$ y, por tanto, $f(c) = b \in f(X \cup Y)$. En cualquier caso $b \in f(X \cup Y)$, con lo que deducimos que $f(X) \cup f(Y) \subset f(X \cup Y)$.
d) Consideremos cualquier elemento $b \in f(X \cap Y)$. Entonces, existe $a \in X \cap Y$ tal que $f(a) = b$. Ahora bien, si $a \in X \cap Y$, entonces $a \in X$ y $a \in Y$. Por tanto, $f(a) = b \in f(X) \cap f(Y)$, con lo que deducimos que $f(X \cap Y) \subset f(X) \cap f(Y)$.
e) Consideremos cualquier elemento $a \in f^{-1}(Z \cup T)$. Entonces,

$$\begin{aligned} a \in f^{-1}(Z \cup T) &\iff f(a) \in Z \cup T \\ &\iff f(a) \in Z \ \text{ o } \ f(a) \in T \\ &\iff a \in f^{-1}(Z) \ \text{ o } \ a \in f^{-1}(T) \\ &\iff a \in f^{-1}(Z) \cup f^{-1}(T) \end{aligned}$$

De estas equivalencias se obtiene directamente $f^{-1}(Z \cup T) = f^{-1}(Z) \cup f^{-1}(T)$.
f) Consideremos cualquier elemento $a \in f^{-1}(Z \cap T)$. Entonces,

$$\begin{aligned} a \in f^{-1}(Z \cap T) &\iff f(a) \in Z \cap T \\ &\iff f(a) \in Z \ \text{ y } \ f(a) \in T \\ &\iff a \in f^{-1}(Z) \ \text{ y } \ a \in f^{-1}(T) \\ &\iff a \in f^{-1}(Z) \cap f^{-1}(T) \end{aligned}$$

De estas equivalencias se obtiene directamente $f^{-1}(Z \cap T) = f^{-1}(Z) \cap f^{-1}(T)$.
g) Consideremos cualquier elemento $a \in X$. Entonces $f(a) \in f(X)$ y, por tanto, $a \in f^{-1}\left(f(X)\right)$. Como consecuencia, $X \subset f^{-1}\left(f(X)\right)$.
h) Consideremos cualquier elemento $b \in f\left(f^{-1}(Z)\right)$. Entonces, existe $a \in f^{-1}(Z)$ tal que $f(a) = b$. Ahora bien, si $a \in f^{-1}(Z)$, entonces $f(a) = b \in Z$. Como consecuencia, $f\left(f^{-1}(Z)\right) \subset Z$.
i) Consideremos cualquier elemento $a \in f^{-1}\left(\complement_B Z\right)$. Entonces,

$$\begin{aligned} a \in f^{-1}\left(\complement_B Z\right) &\iff f(a) \in \complement_B Z \\ &\iff f(a) \notin Z \\ &\iff a \notin f^{-1}(Z) \\ &\iff a \in \complement_A\left(f^{-1}(Z)\right) \end{aligned}$$

De estas equivalencias se obtiene directamente $f^{-1}\left(\complement_B Z\right) = \complement_A\left(f^{-1}(Z)\right)$. ■

Ejercicio 36 Si $f : A \longrightarrow B$ es inyectiva y $X, Y \subset A$, demuestra que (a) $X = f^{-1}(f(X))$ y (b) $f(X \cap Y) \subset f(X) \cap f(Y)$.
Solución: (a) Por el ejercicio anterior (???), basta probar que $f^{-1}(f(X)) \subset X$. Consideremos cualquier elemento $a \in f^{-1}(f(X))$. Entonces, $f(a) \in f(X)$ y, por tanto, existe $c \in X$ tal que $f(c) = f(a)$. Ahora bien, por hipótesis, f es inyectiva y, por tanto, deducimos $c = a$. Luego, $a \in X$ y, como consecuencia, $f^{-1}(f(X)) \subset X$.
(b) Por el ejercicio anterior (???), basta probar que $f(X) \cap f(Y) \subset f(X \cap Y)$. Consideremos cualquier elemento $b \in f(X) \cap f(Y)$. Entonces, $b \in f(X)$ y $b \in f(Y)$. Por tanto, existen $a \in X$ y $c \in Y$ tales que $f(a) = f(c) = b$. Ahora bien, por hipótesis, f es inyectiva y, por tanto, deducimos $a = c$. Como consecuencia, $a \in X \cap Y$ y, por tanto, $f(a) = b \in f(X \cap Y)$. Así, hemos demostrado que $f(X) \cap f(Y) \subset f(X \cap Y)$. ■

Ejercicio 37 Si $f : A \longrightarrow B$ es exhaustiva y $Z \subset B$, demuestra que $f\left(f^{-1}(Z)\right) = Z$.
Solución: Por el ejercicio anterior (???), basta probar que $Z \subset f\left(f^{-1}(Z)\right)$. Consideremos cualquier elemento $b \in Z$. Por hipótesis, f es exhaustiva y, por tanto, existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$. Luego, $f(a) \in Z$ y, por tanto, $a \in f^{-1}(Z)$. De aquí, deducimos que $f(a) = b \in f\left(f^{-1}(Z)\right)$. Como consecuencia, $Z \subset f\left(f^{-1}(Z)\right)$. ■

Ejercicio 38 Dadas las aplicaciones $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x^2$ y $g(x) = 2x + 1$. Calcula (a) $g \circ f$, (b) $f \circ g$, (c) $f \circ (g \circ f)$ y (d) $(f \circ f) \circ g$.
Solución: (a)

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= g(x^2) \\ &= 2x^2 + 1 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f(2x+1) \\ &= (2x+1)^2 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} (f \circ (g \circ f))(x) &= f((g \circ f)(x)) \\ &= f\left(2x^2 + 1\right) \\ &= (2x^2+1)^2 \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} ((f \circ f) \circ g)(x) &= (f \circ f)(g(x)) \\ &= f(f(g(x))) \\ &= f\left((2x+1)^2\right) \\ &= \left[(2x+1)^2\right]^2 \\ &= (2x+1)^4 \end{aligned}$$

■

Ejercicio 39 Sean $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ dos aplicaciones. Demuestra que se cumplen las siguientes propiedades:

a) Si f y g son inyectivas, entonces $g \circ f$ es inyectiva

b) Si f y g son exhaustivas, entonces $g \circ f$ es exhaustiva

c) Si f y g son biyectivas, entonces $g \circ f$ es biyectiva y, además, $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

d) Si $g \circ f$ es inyectiva, entonces f es inyectiva

e) Si $g \circ f$ es exhaustiva, entonces g es exhaustiva

f) Si $g \circ f$ es inyectiva y f es exhaustiva, entonces g es inyectiva

g) Si $g \circ f$ es exhaustiva y g es inyectiva, entonces f es exhaustiva

Solución: a) Supongamos que $x, y \in A$ tales que $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$. Entonces,

$$\begin{aligned} g(f(x)) = g(f(y)) &\Longrightarrow f(x) = f(y) \\ &\Longrightarrow x = y \end{aligned}$$

y, por tanto, $g \circ f$ es inyectiva.
b) Dado cualquier $z \in C$ hemos de probar que existe $x \in A$ tal que $(g \circ f)(x) = z$. Por ser g exhaustiva, existe $u \in B$ tal que $g(u) = z$. Ahora, por ser f exhaustiva, existe $x \in A$ tal que $f(x) = u$. Por tanto,

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= g(u) \\ &= z \end{aligned}$$

y, como consecuencia, $g \circ f$ es exhaustiva.
c) Por los dos apartados anteriores, es claro que si f y g son biyectivas, entonces $g \circ f$ es biyectiva. Al ser f, g biyectivas, existen las aplicaciones inversas f^{-1} y g^{-1} de f y g, respectivamente. Entonces,

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) = g(f(x)) = z &\Longleftrightarrow f(x) = g^{-1}(z) \\ &\Longleftrightarrow x = f^{-1}(g^{-1}(z)) = (f^{-1} \circ g^{-1})(z) \end{aligned}$$

Por tanto,

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

d) Supongamos que $x, y \in A$. Entonces,

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) &\Longrightarrow g(f(x)) = g(f(y)) \\ & (g \circ f)(x) = (g \circ f)(y) \\ &\Longrightarrow x = y \end{aligned}$$

y, por tanto, f es inyectiva.
e) Dado cualquier $z \in C$ hemos de probar que existe $u \in B$ tal que $g(u) = z$. Por ser $g \circ f$ exhaustiva, existe $x \in A$ tal que $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = z$. Tomando $u = f(x) \in B$, entonces tenemos que $g(u) = g(f(x)) = z$ y, por tanto, g es exhaustiva.

f) Supongamos que $u, v \in B$ tales que $g(u) = g(v)$. Por ser f exhaustiva, existen $x, y \in A$ tales que $f(x) = u$ y $f(y) = v$. Entonces, $g(f(x)) = g(u)$ y $g(f(y)) = g(v)$ y, por tanto, $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$. Ahora bien, por hipótesis, $g \circ f$ es inyectiva, con lo que deducimos que $x = y$. Luego, $f(x) = f(y)$, es decir, $u = v$. En consecuencia, g es inyectiva.
g) Dado cualquier $u \in B$ hemos de probar que existe $x \in A$ tal que $f(x) = u$. Es claro que $g(u) \in C$. Por ser $g \circ f$ exhaustiva, existe $x \in A$ tal que $(g \circ f)(x) = g(u)$, es decir, $g(f(x)) = g(u)$. Ahora bien, por hipótesis, g es inyectiva, con lo que deducimos que $f(x) = u$. En consecuencia, f es exhaustiva. ■

Ejercicio 40 Demuestra que la aplicación $f : \mathbb{R} - \{-1/2\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{1/2\}$ definida por

$$f(x) = \frac{x+3}{1+2x}$$

es biyectiva. Calcula la aplicación inversa f^{-1}.
Solución: Veamos que f es inyectiva. Para ello, supongamos que $x, y \in \mathbb{R} - \{-1/2\}$ y $f(x) = f(y)$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\tfrac{x+3}{1+2x} = \tfrac{y+3}{1+2y} &\Longrightarrow (x+3)(1+2y) = (1+2x)(y+3) \\
&\Longrightarrow x + 2xy + 3 + 6y = y + 3 + 2xy + 6x \\
&\Longrightarrow 5y = 5x \\
&\Longrightarrow x = y
\end{aligned}$$

y, por tanto, f es inyectiva.
Veamos que f es exhaustiva. Para ello, dado culaquier $y \in \mathbb{R} - \{1/2\}$ hemos de probar que existe $x \in \mathbb{R} - \{-1/2\}$ tal que $f(x) = y$. En efecto, supongamos que x existiera y veamos cuál es. Entonces,

$$\begin{aligned}
f(x) = y &\Longrightarrow \tfrac{x+3}{1+2x} = y \\
&\Longrightarrow x + 3 = (1+2x)y \\
&\Longrightarrow x - 2xy = y - 3 \\
&\Longrightarrow x(1-2y) = y - 3 \\
&\Longrightarrow x = \tfrac{y-3}{1-2y}
\end{aligned}$$

es decir, debería ser

$$x = \frac{y-3}{1-2y}$$

Ahora bien, como $y \neq 1/2$ tenemos que $1 - 2y \neq 0$ y, además,

$$\frac{y-3}{1-2y} \neq -\frac{1}{2}$$

para todo $y \neq 1/2$. Por tanto,

$$x = \frac{y-3}{1-2y} \in \mathbb{R} - \{-1/2\}$$

y f es exhaustiva. Al ser f inyectiva y exhaustiva, también es biyectiva. Luego, f tiene aplicación inversa f^{-1}. Puesto que se cumple

$$\tfrac{x+3}{1+2x} = y \iff x = \tfrac{y-3}{1-2y}$$

obtenemos que

$$f^{-1}(x) = \frac{x-3}{1-2x}$$

■

Ejercicio 41 Dadas las aplicaciones $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$f(x) = x^3 + 1 \qquad \text{y} \qquad g(x) = \sqrt[3]{x-1}$$

calcula $g \circ f$ y $g^{-1} \circ f^{-1}$, si existen.
Solución: Las aplicaciones f y g son biyectivas como puede comprobarse enseguida. Por tanto, existen las aplicaciones inversas f^{-1} y g^{-1} de f y g, respectivamente. Calcularemos ahora $g \circ f$ y $f \circ g$. Así, tenemos

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= g(x^3+1) \\ &= \sqrt[3]{x^3+1-1} \\ &= \sqrt[3]{x^3} \\ &= x\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f\left(\sqrt[3]{x-1}\right) \\ &= \left(\sqrt[3]{x-1}\right)^3 + 1 \\ &= x - 1 + 1 \\ &= x\end{aligned}$$

De estos resultados, deducimos que $f^{-1} = g$ ya que $f \circ g = g \circ f = I_{\mathbb{R}}$. Por consiguiente,

$$g^{-1} \circ f^{-1} = g^{-1} \circ g = I_{\mathbb{R}}$$

es decir, $g^{-1} \circ f^{-1}$ es la aplicación identidad en $\mathbb{R}$. ■

4. Cardinal de un conjunto

Ejercicio 42 Sea E un conjunto referencial y consideremos dos conjuntos finitos A y B. Demuestra las siguientes propiedades:

a) Si $A \subset B$, entonces Card $A \leq$ Card B

b) Card$(A \cup B) =$ Card $A+$ Card $B-$ Card$(A \cap B)$

c) Card$(A \cup B \cup C) =$ Card $A+$ Card $B+$ Card $B-$ Card$(A \cap B) -$ Card$(A \cap C) -$ Card$(B \cap C) +$ Card$(A \cap B \cap C)$

d) Card $\complement_E A =$ Card $E-$ Card A

e) Card$(A \times B) =$ Card $A\cdot$ Card B

f) Card $\mathcal{P}(A) = 2^{\text{Card } A}$

Solución: Es claro que si A y B son disjuntos, entonces

$$\text{Card}\,(A \cup B) = \text{Card } A + \text{Card } B$$

a) Puesto que $\{A \cap B, \overline{A} \cap B\}$ es una partición de B, entonces

$$\text{Card } B = \text{ Card}\,(A \cap B) + \text{Card}\,(\overline{A} \cap B)$$

Ahora bien, como $A \subset B$, entonces $A \cap B = A$ y, por tanto, obtenemos

$$\text{Card } B = \text{ Card } A + \text{Card}\,(\overline{A} \cap B)$$

Al ser $\text{Card}(\overline{A} \cap B) \geq 0$, deducimos

$$\text{Card } A \leq \text{ Card } B$$

b) Puesto que $\{A, \overline{A} \cap B\}$, $\{B, A \cap \overline{B}\}$ y $\{A \cap \overline{B}, \overline{A} \cap B, A \cap B\}$ constituyen particiones del conjunto $A \cup B$, entonces

$$\text{Card}\,(A \cup B) = \text{Card } A + \text{Card}\,(B \cap \overline{A})$$

y

$$\text{Card}\,(A \cup B) = \text{Card } A + \text{Card}\,(A \cap \overline{B})$$

y

$$\text{Card}\,(A \cup B) = \text{Card}\,(A \cap \overline{B}) + \text{Card}\,(\overline{A} \cap B) + \text{Card}\,(A \cap B)$$

Sumando ahora las dos primeras igualdades y restando la tercera, obtenemos

$$\text{Card}\,(A \cup B) = \text{Card } A + \text{Card } B - \text{Card}\,(A \cap B)$$

c) Según el apartado anterior, tenemos

$$\begin{aligned} \text{Card}\,(A \cup B \cup C) &= \text{Card}\,((A \cup B) \cup C) \\ &= \text{Card}(A \cup B) + \text{Card } C + \text{Card}\,((A \cup B) \cap C) \\ &= \text{Card } A + \text{Card } B - \text{Card}\,(A \cap B) + \text{Card } C + \text{Card}\,((A \cup B) \cap C) \end{aligned}$$

Ahora bien, $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ y, por tanto,

$$\begin{aligned} \text{Card}\,((A \cup B) \cap C) &= \text{Card}\,((A \cap C) \cup (B \cap C)) \\ &= \text{Card}\,(A \cap C) + \text{Card}\,(B \cap C) - \text{Card}\,((A \cap C) \cap (B \cap C)) \\ &= \text{Card}\,(A \cap C) + \text{Card}\,(B \cap C) - \text{Card}\,(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

Por consiguiente, obtenemos

$$\begin{aligned} \text{Card}\,(A \cup B \cup C) &= \text{Card } A + \text{Card } B + \text{Card } C - \text{Card}\,(A \cap B) \\ &\quad -\text{Card}\,(A \cap C) - \text{Card}\,(B \cap C) + \text{Card}\,(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

d) Puesto que $\{A, \complement_E A\}$ es una partición de E, entonces

$$\text{Card } E = \text{Card } A + \text{Card}\,(\complement_E A)$$

y, por tanto,

$$\text{Card}\left(\complement_E A\right) = \text{Card } E - \text{Card } A$$

e) Supongamos que Card $A = n$ y Card $B = m$. Sea $\varphi : \{1, 2, ..., n\} \longrightarrow A$ una aplicación tal que $\varphi(i) = a_i \in A$ y $a_i \neq a_j$ si $i \neq j$. Así, podemos escribir

$$A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$$

Del mismo modo, obtenemos

$$B = \{b_1, b_2, ..., b_m\}$$

Entonces, los conjuntos

$$\begin{array}{c} F_1 = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), ...(a_1, b_m)\} \\ F_2 = \{(a_2, b_1), (a_2, b_2), ...(a_2, b_m)\} \\ \vdots \\ F_n = \{(a_n, b_1), (a_n, b_2), ...(a_n, b_m)\} \end{array}$$

constituyen una partición de $A \times B$ y, por tanto,

$$\text{Card}\,(A \times B) = \text{Card } F_1 + \text{Card } F_2 + \cdots + \text{Card } F_n$$

Ahora bien,

$$\text{Card } F_1 = \text{Card } F_2 = \cdots = \text{Card } F_n = m$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \text{Card}\,(A \times B) &= n \cdot m \\ &= \text{Card } A \times \text{ Card } B \end{aligned}$$

f) Supongamos que Card $A = n$. Sabemos que $\mathcal{P}(A)$ es el conjunto cuyos elementos son subconjuntos de A. Sea $0 \leq m \leq n$, ¿cuántos subconjuntos de m elementos tiene A? Este número es por definición el **número combinatorio**

$$\binom{n}{m}$$

que se calcula mediante la fórmula siguiente

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

siendo el **factorial de un número** n

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1$$

y, por definición, $0! = 1$. Así, tenemos

Número de elementos del subconjunto	Número de subconjuntos
0	$\binom{n}{0}$
1	$\binom{n}{1}$
2	$\binom{n}{2}$
$\vdots$	$\vdots$
$n-1$	$\binom{n}{n-1}$
n	$\binom{n}{n}$

Entonces, es evidente que

$$\text{Card } \mathcal{P}(A) = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$$

Esta suma puede calcularse mediante la fórmula de la potencia de un binomio de Newton

$$(A+B)^n = \binom{n}{0}A^n + \binom{n}{1}A^{n-1}B + \binom{n}{2}A^{n-2}B + \cdots + \binom{n}{n-1}AB^{n-1} + \binom{n}{n}B^n$$

Tomando $A = B = 1$, resulta

$$(1+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$$

y, por consiguiente, obtenemos

$$\begin{aligned} \text{Card } \mathcal{P}(A) &= 2^n \\ &= 2^{\text{Card } A} \end{aligned}$$

■

Ejercicio 43 Supongamos que Juan come cada mañana huevos o cereales para desayunar durante el mes de enero. Si en 25 mañanas ha comido cereales, y en 18, huevos, ¿en cuántas mañanas ha comido huevos y cereales?
Solución: Sea A el conjunto de días del mes de enero que Juan come huevos para desayunar y B el conjunto de días que come cereales. Según la información del enunciado, tenemos Card $A = 25$ y Card $B = 18$ y, además, es claro que Card$(A \cup B) = 31$. Entonces,

$$\begin{aligned} \text{Card}\,(A \cup B) &= \text{Card } A + \text{Card } B - \text{Card}\,(A \cap B) \\ 31 &= 25 + 18 - \text{Card}\,(A \cap B) \\ 12 &= \text{Card}\,(A \cap B) \end{aligned}$$

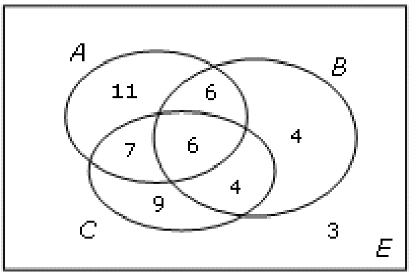
Ahora bien, Card$(A \cap B)$ representa los días que Juan come huevos y cereales para desayunar durante el mes de enero. Por tanto, Juan come huevos y cereales en 12 mañanas. ■

Ejercicio 44 Se sabe que de los 30 alumnos de una clase 15 juegan al ping-pong y 20 al tenis. Además, no hay ningún alumno que no practique alguno de estos dos deportes. ¿Cuántos alumnos practican los dos deportes a la vez?
Solución: Sea A el conjunto de alumnos de la clase que practican ping-pong y B el conjunto de alumnos que practican tenis. Según el enunciado, Card $A = 15$ y Card $B = 20$. Como sabemos también que no hay ningún alumno que no practique alguno de estos dos deportes, tenemos que Card$(A \cup B) = 30$. Entonces,

$$\begin{aligned} \text{Card}\,(A \cup B) &= \text{Card } A + \text{Card } B - \text{Card}\,(A \cap B) \\ 30 &= 15 + 20 - \text{Card}\,(A \cap B) \\ 5 &= \text{Card}\,(A \cap B) \end{aligned}$$

y, por tanto, hay 5 alumnos de la clase que practican ambos deportes. ■

Ejercicio 45 En una clase, 30 alumnos leen el diario A, 20 leen el B, 13 leen el A y el C, 10 leen el B pero no el C, 24 no leen C, 7 leen el A y el C pero no el B, 9 leen el C pero no el A ni el B, y 11 leen el A pero no el B ni el C. (a) ¿Cuántos alumnos leen al menos uno de los tres diarios? (b) ¿Cuántos alumnos hay en la clase?
Solución: Reuniendo la información en un diagrama de Venn, obtenemos



A partir de este diagrama podemos responder directamente las cuestiones planteadas. Sin embargo, aquí lo haremos mediante las fórmulas estudiadas sobre cardinales de conjuntos finitos.
Sea E el conjunto de alumnos de la clase, A el conjunto de alumnos de esta clase que leen el diario A, B el conjunto de alumnos que leen el diario B, y C el conjunto de alumnos que leen el diario C.
Por el enunciado, sabemos que Card $A = 30$, Card $B = 20$, $\text{Card}(A \cap C) = 13$, $\text{Card}\left(B \cap \overline{C}\right) = 10$, Card $\overline{C} = 24$, $\text{Card}\left(A \cap C \cap \overline{B}\right) = 7$, $\text{Card}\left(C \cap \overline{A} \cap \overline{B}\right) = 9$ y $\text{Card}\left(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}\right) = 11$.
(a) Nos piden calcular $\text{Card}(A \cup B \cup C)$. Según la información que tenemos, los conjuntos $A \cap C \cap \overline{B}$, $C \cap \overline{A} \cap \overline{B}$, $A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$ y B son disjuntos y, además,

$$A \cup B \cup C = \left(A \cap C \cap \overline{B}\right) \cup \left(C \cap \overline{A} \cap \overline{B}\right) \cup \left(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}\right) \cup B$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \text{Card}\,(A \cup B \cup C) &= \text{Card}\left(A \cap C \cap \overline{B}\right) + \text{Card}\left(C \cap \overline{A} \cap \overline{B}\right) + \text{Card}\left(A \cap \overline{B} \cap \overline{C}\right) + \text{Card}\ B \\ &= 7 + 9 + 11 + 20 \\ &= 47 \end{aligned}$$

Luego, hay 47 alumnos que leen al menos uno de los tres diarios.
(b) Nos piden en este caso Card E. Los conjuntos $A \cap B \cap C$, $A \cap \overline{B} \cap C$ son disjuntos y, además,

$$A \cap C = (A \cap B \cap C) \cup \left(A \cap \overline{B} \cap C\right)$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \text{Card}\,(A \cap C) &= \text{Card}\,(A \cap B \cap C) + \text{Card}\left(A \cap \overline{B} \cap C\right) \\ 13 &= \text{Card}\,(A \cap B \cap C) + 7 \end{aligned}$$

luego, $\text{Card}(A \cap B \cap C) = 6$. Por otra parte, los conjuntos $B \cap \overline{C}$, $A \cap B \cap C$ y $\overline{A} \cap B \cap C$ son disjuntos y, además,

$$B = \left(B \cap \overline{C}\right) \cup (A \cap B \cap C) \cup \left(\overline{A} \cap B \cap C\right)$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
\text{Card } B &= \text{Card}\left(B \cap \overline{C}\right) + \text{Card}\,(A \cap B \cap C) + \text{Card}\left(\overline{A} \cap B \cap C\right) \\
20 &= 10 + 6 + \text{Card}\left(\overline{A} \cap B \cap C\right)
\end{aligned}$$

Luego, $\text{Card}\big(\overline{A} \cap B \cap C\big) = 4$. Finalmente, los conjuntos $A \cap C$, $\overline{A} \cap B \cap C$ y $C \cap \overline{A} \cap \overline{B}$ son disjuntos y, además,

$$C = (A \cap C) \cup \left(\overline{A} \cap B \cap C\right) \cup \left(C \cap \overline{A} \cap \overline{B}\right)$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
\text{Card } C &= \text{Card}\,(A \cap C) + \text{Card}\left(\overline{A} \cap B \cap C\right) + \text{Card}\left(C \cap \overline{A} \cap \overline{B}\right) \\
&= 13 + 4 + 9 \\
&= 26
\end{aligned}$$

y, como

$$\text{Card } \overline{C} = \text{Card } E - \text{Card } C$$

deducimos que

$$\begin{aligned}
\text{Card } E &= \text{Card } \overline{C} + \text{Card } C \\
&= 24 + 26 \\
&= 50
\end{aligned}$$

es decir, hay 50 alumnos en clase. ■

Ejercicio 46 En una encarnizada batalla al menos el 70 % de los combatientes pierden un ojo, al menos un 75 % pierden una oreja, como mínimo un 80 % pierden un brazo y al menos el 85 % una pierna. ¿Cuántos combatientes han perdido por lo menos las cuatro cosas?

Solución: Sea A el conjunto de combatientes que pierden un ojo, B el conjunto de los que pierden una oreja, C el conjunto de los que pierden un brazo y D el conjunto de los que pierden una pierna. Para simplificar los cálculos vamos a suponer que hay 100 combatientes en la batalla (Al trabajar con tantos por ciento es igual el número inicial de combatientes.). Entonces, por el enunciado, tenemos que $\text{Card } A \geq 70$, $\text{Card } B \geq 75$, $\text{Card } C \geq 80$ y $\text{Card } D \geq 85$. Queremos calcular $\text{Card}(A \cap B \cap C \cap D)$.

Sabemos que

$$\text{Card}\,((A \cap B) \cup (C \cap C)) = \text{Card}\,(A \cap B) + \text{Card}\,(C \cap D) - \text{Card}\,(A \cap B \cap C \cap D)$$

de donde

$$\text{Card}\,(A \cap B \cap C \cap D) = \text{Card}\,(A \cap B) + \text{Card}\,(C \cap D) - \text{Card}\,((A \cap B) \cup (C \cap C))$$

Ahora bien, por otra parte, sabemos que

$$\begin{aligned}
\text{Card}\,(A \cap B) &= \text{Card } A + \text{Card } B - \text{Card}\,(A \cup B) \\
&\geq 70 + 75 - 100 \\
&= 45
\end{aligned}$$

y

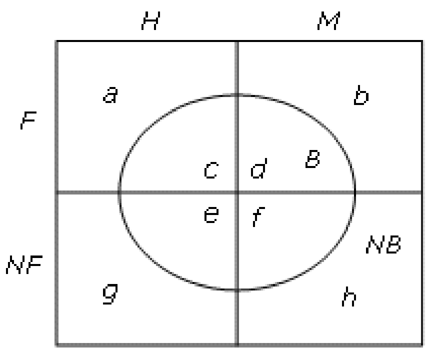
$$\begin{aligned}\text{Card}\,(C \cap D) &= \text{Card}\ C + \text{Card}\ D - \text{Card}\,(C \cup D) \\ &\geq 80 + 85 - 100 \\ &= 65\end{aligned}$$

Entonces, de estos resultados deducimos que

$$\text{Card}\,(A \cap B \cap C \cap D) \geq 45 + 65 - 100 = 10$$

ya que $0 \leq \text{Card}((A \cap B) \cup (C \cap C)) \leq 100$. Por tanto, al menos el 10 % pierde las cuatro cosas. ■

Ejercicio 47 En una reunión hay más hombres que mujeres, más mujeres que beben que hombres que fuman y más mujeres que fuman y no beben que hombres que no beben ni fuman. Demostrar que hay menos mujeres que no beben ni fuman que hombres que beben y no fuman.
Solución: Hacemos el siguiente diagrama para describir la información del enunciado.



Si H es el conjunto de hombres y M el de mujeres, entonces por el enunciado se cumple que

$$\text{Card}\ H > \text{Card}\ M$$

Si F es el conjunto de personas fumadoras y B es el conjunto de personas que beben, entonces por el enunciado también se cumple

$$\text{Card}\,(M \cap B) > \text{Card}\,(H \cap F)$$

y

$$\text{Card}\left(M \cap F \cap \overline{B}\right) > \text{Card}\left(H \cap \overline{B} \cap \overline{F}\right)$$

Hay que probar que

$$\text{Card}\left(M \cap \overline{B} \cap \overline{F}\right) < \text{Card}\left(H \cap B \cap \overline{F}\right)$$

Con la ayuda del diagrama anterior, podemos escribir

$$\text{Card}\ H = a + c + e + g > b + d + f + h = \text{Card}\ M$$

$$\text{Card}\,(M \cap B) = d + f > a + c = \text{Card}\,(H \cap F)$$

$$\text{Card}\,(M \cap F) = b > g = \text{Card}\left(H \cap \overline{B} \cap \overline{F}\right)$$

Sumando miembro a miembro las tres desigualdades anteriores, obtenemos

$$a + c + e + g + d + f + b > b + d + f + h + a + c + g \implies e > h$$

es decir,

$$\text{Card}\left(M \cap \overline{B} \cap \overline{F}\right) = b < e = \text{Card}\left(H \cap B \cap \overline{F}\right)$$

$\blacksquare$